Diseño de Filtros FIR

Método de la Ventana

- Es el método más directo y requiere poco esfuerzo computacional (se resuelve con una calculadora)
- Filtros con menor número de coeficientes pueden ser obtenidos utilizando otros métodos

Pasos de Diseño

- Especificar la respuesta en frecuencia deseada o ideal
- Obtener la respuesta al impulso del filtro ideal deseado
- Seleccionar la ventana según requisitos de atenuación
- Seleccionar el número de coeficientes según el ancho de la banda de transición
- Obtener los coeficientes del filtro FIR multiplicando la respuesta al impulso por la ventana

Tabla de filtros

Tipo de filtro	$h_D(n),\ n \neq 0$	$h_D(0)$
Pasa-bajos	$2f_c \mathrm{sinc}(n\omega_c)$	$2f_c$
Pasa-altos	$-2f_c \mathrm{sinc}(n\omega_c)$	$1-2f_c$
Pasa-banda	$2f_2 \mathrm{sinc}(n\omega_2) - 2f_1 \mathrm{sinc}(n\omega_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Elimina-banda	$2f_1 \mathrm{sinc}(n\omega_1) - 2f_2 \mathrm{sinc}(n\omega_2)$	$1-2(f_2 - f_1)$

Tabla de ventanas

Ventana	Banda de transición normalizada	Ripple	Relación entre lóbulos	Atenuación	Función
Rectangular	0,9/N	0,7416	13	21	1
Hanning	3,1/N	0,0546	31	44	$0,5+0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3,3/N	0,0194	41	53	$0,54+0,46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5,5/N	0,0017	57	74	$0,42+0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0,08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kaiser	Varios	Varios		>50	$\frac{I_0\left(\beta\left\{1-\left[2n/(N-1)\right]^2\right\}^{1/2}\right)}{I_0(\beta)}$

$$I_0(x)=1+\sum_{k=1}^{L}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2, \quad L<25$$

Diseño de Filtros FIR

Método de Muestreo en Frecuencia

El único atractivo de este método es que permite una directa implementación recursiva de los filtros FIR

Principio del método

- Dada una respuesta en frecuencia deseada para el filtro FIR (característica ideal) $H(e^{j\omega})$
  - Se muestrea $H(e^{j\omega})$ en N puntos regularmente separados, generando una secuencia finita

$$\tilde{H}(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) \text{ para } k \in [0, N-1]$$

  - Se pasa la secuencia finita $\tilde{H}(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$ del dominio de la frecuencia, al dominio temporal utilizando una DFT inversa

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

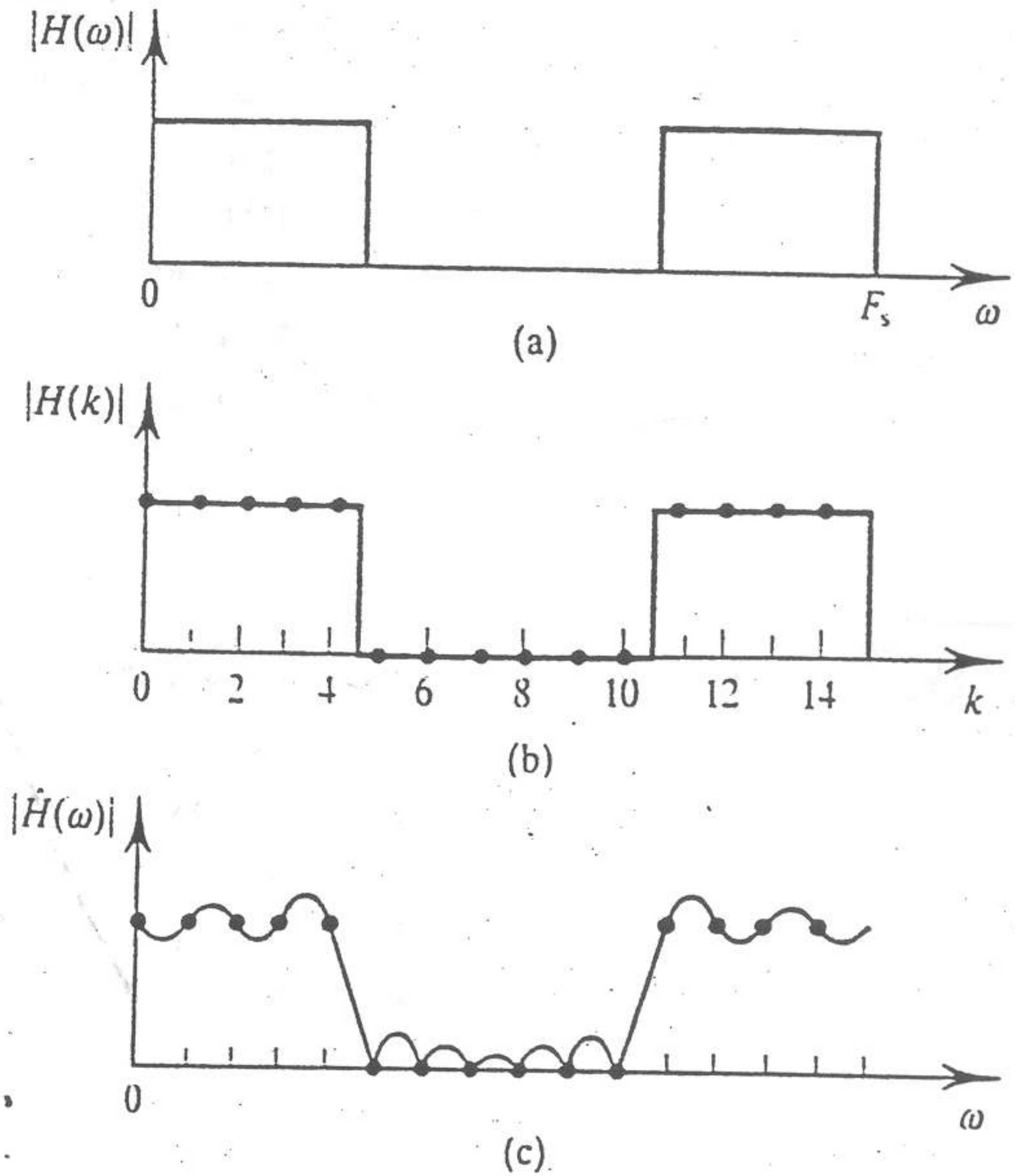
- Resumen del método:

$$H(f) \xrightarrow{Muestreo} \tilde{H}(i)$$

$$\tilde{H}(i) \xrightarrow{DFT^{-1}} \hat{h}(n) \text{ Coeficientes del filtro FIR}$$

$$\hat{h}(n) \xrightarrow{TZ} \hat{H}(z) \text{ Función de transferencia del Filtro}$$

Principio del método



Respuesta en frecuencia resultante

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(n) e^{-j\omega n}$$

- Se garantiza una respuesta en frecuencia "precisa" apenas en los N puntos donde $H(e^{j\omega})$ fue muestreada

Realización recursiva de filtros

Una vez obtenida la respuesta al impulso de un filtro FIR, el filtrado se puede hacer de tres maneras:

i. A través del producto de convolución (realización no recursiva o transversal)

$$y(n)=\sum_{l=0}^{N-1}h(l)x(n-l)$$

ii. Utilizando DFT (a través del algoritmo FFT)

$$H(k)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}$$

$$Y(k)=X(k)H(k)$$

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)e^{j\frac{2\pi}{L}kn}$$

iii. De manera recursiva

Si $h(n)$ tiene duración finita *N*, el par DFT es

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}$$

$$h(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{L}kn}$$

Podemos considerar $H(k)$ como muestras de la Transformada Z del filtro, calculada para *N* puntos

$$H(k) = H(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{L}k}}$$

La Transformada Z de un filtro FIR puede ser expresada en términos de los coeficientes de la DFT como

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] z^{-n}$$

conmutando el orden de los sumatorios

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(n)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^{n}$$

- Siendo

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}\right]^{n}=\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}N}z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$

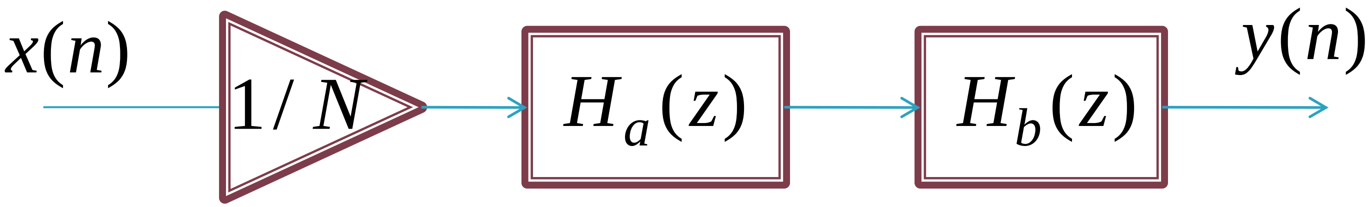
- Se define

$$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$

- Resultando

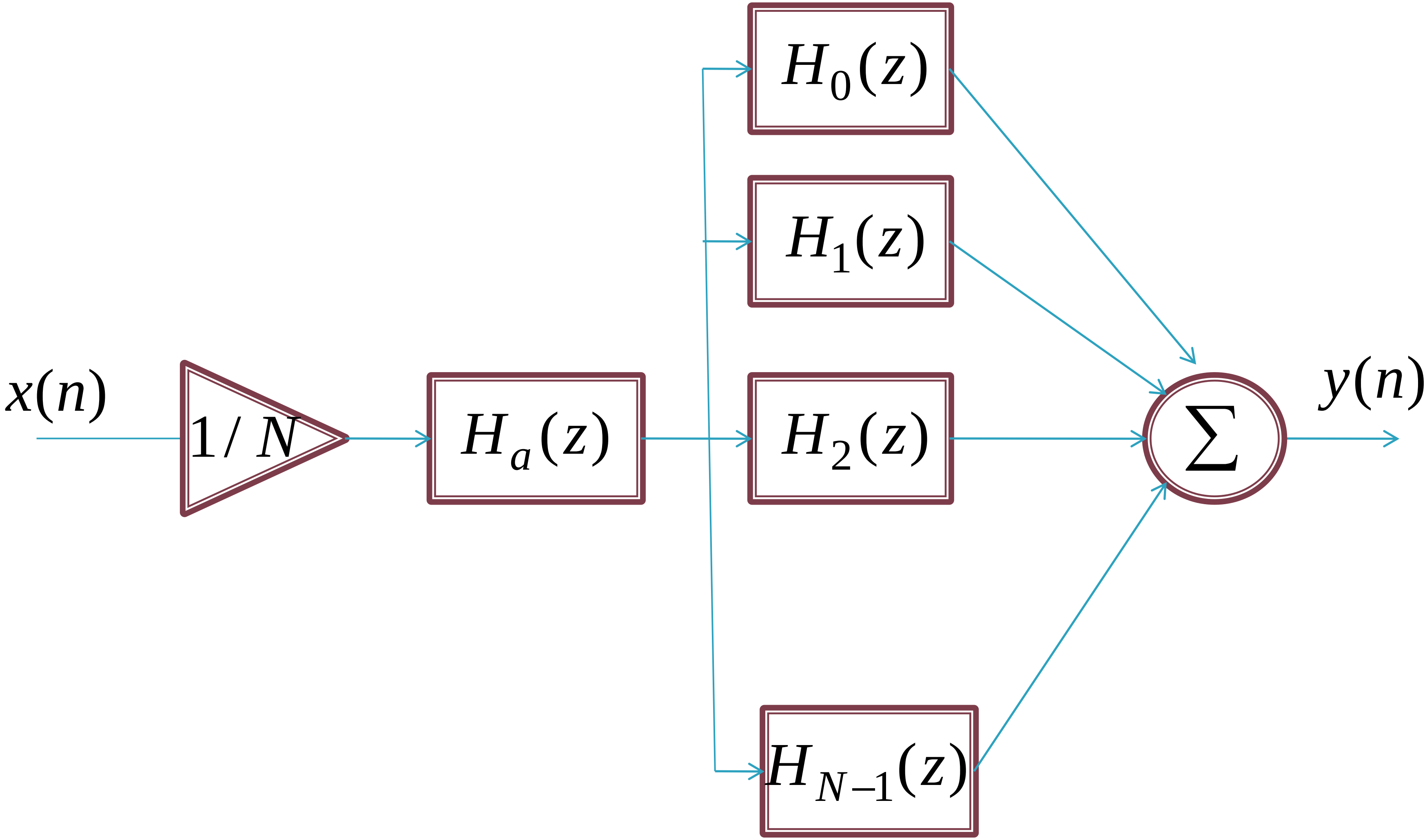
$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$$

- Así, se puede descomponer $H(z)$ en bloques



$$H_a(z) = 1 - z^{-N}$$

$$H_b(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$



$x(n)$
$1/N$
$H_a(z)$
$H_0(z)$
$H_1(z)$
$H_2(z)$
$H_{N-1}(z)$
$\sum$
$y(n)$

- Así, tenemos polos y ceros localizados sobre el circulo unitario que se cancelan mutuamente
- En la práctica, puede ocurrir una inestabilidad debido a errores de cuantización de los coeficientes (polos fuera del círculo unitario)
- La solución es multiplicar polos y ceros por una constante ligeramente menor a 1

- Esto es equivalente a substituir

$z \rightarrow z/\rho$ siendo $\rho \in \Re$, ligeramente menor a 1,

$\rho = 1-2^{-12}$ a $1-2^{-27}$ son utilizados con exito

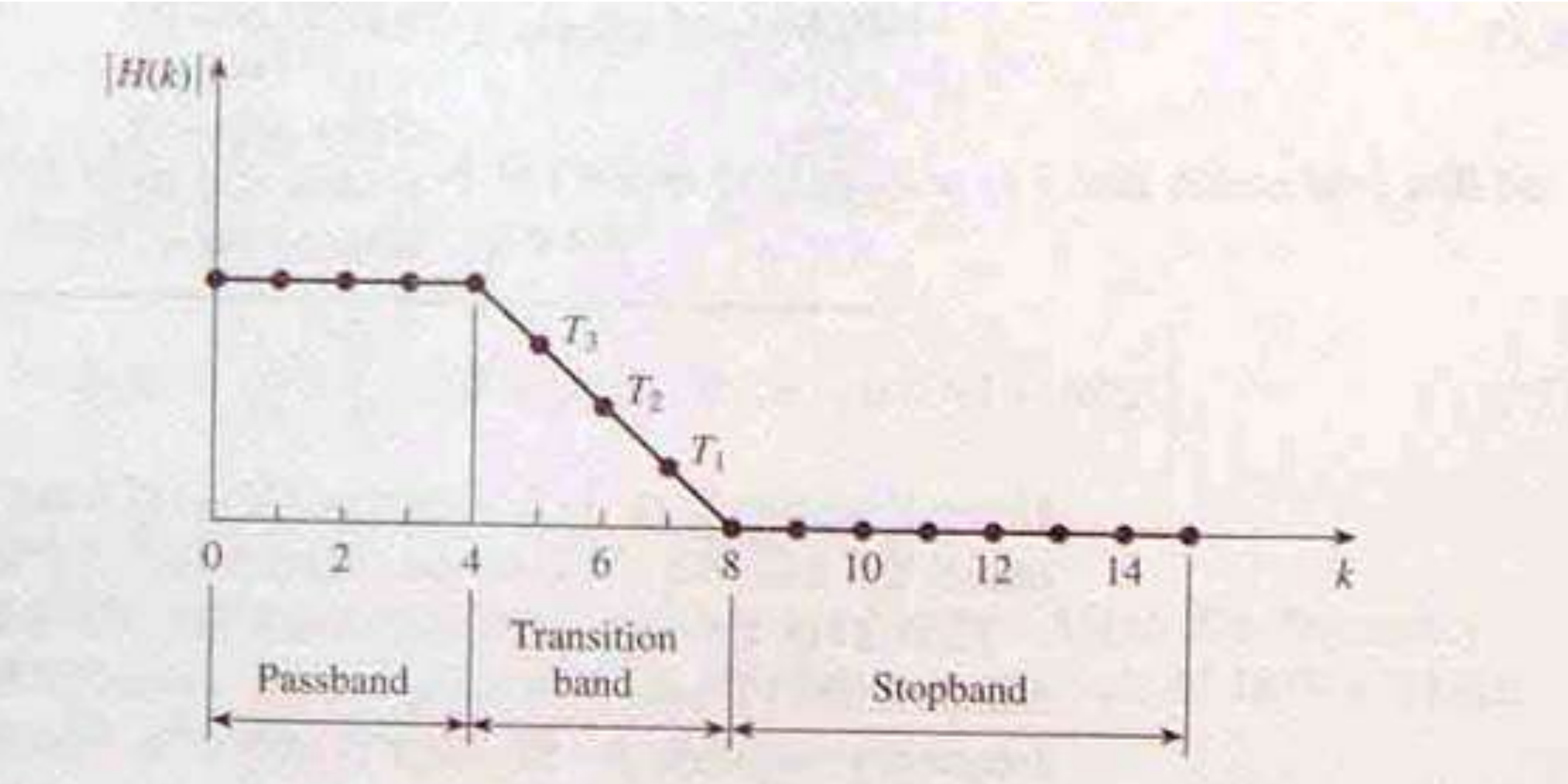
$$H(z) = \frac{1-\rho^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} \rho z^{-1}}$$

Ventaja de la realización recursiva

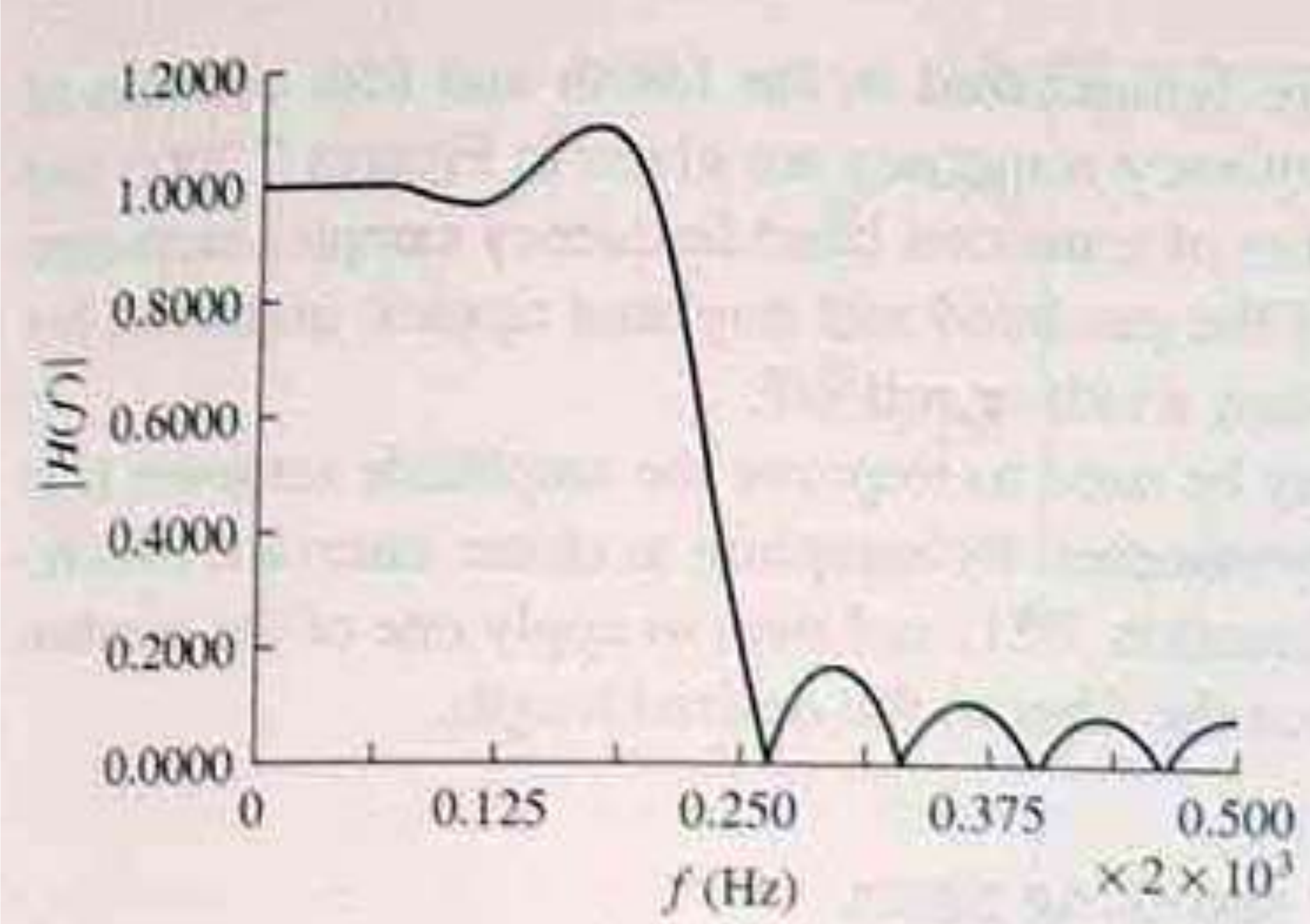
- Los coeficientes son directamente proporcionales a las muestras de la respuesta en frecuencia, en el caso de la respuesta idealizada, tendremos un cierto número de muestras cero, reduciendo la cantidad de sistemas de primer y segundo orden

Muestreo en la banda de transición

- Problemas con el riple de la amplitud de la respuesta en frecuencia
- Muestreo en la banda de transición, mejoramos el riple, pero aumentamos el ancho de la banda de transición

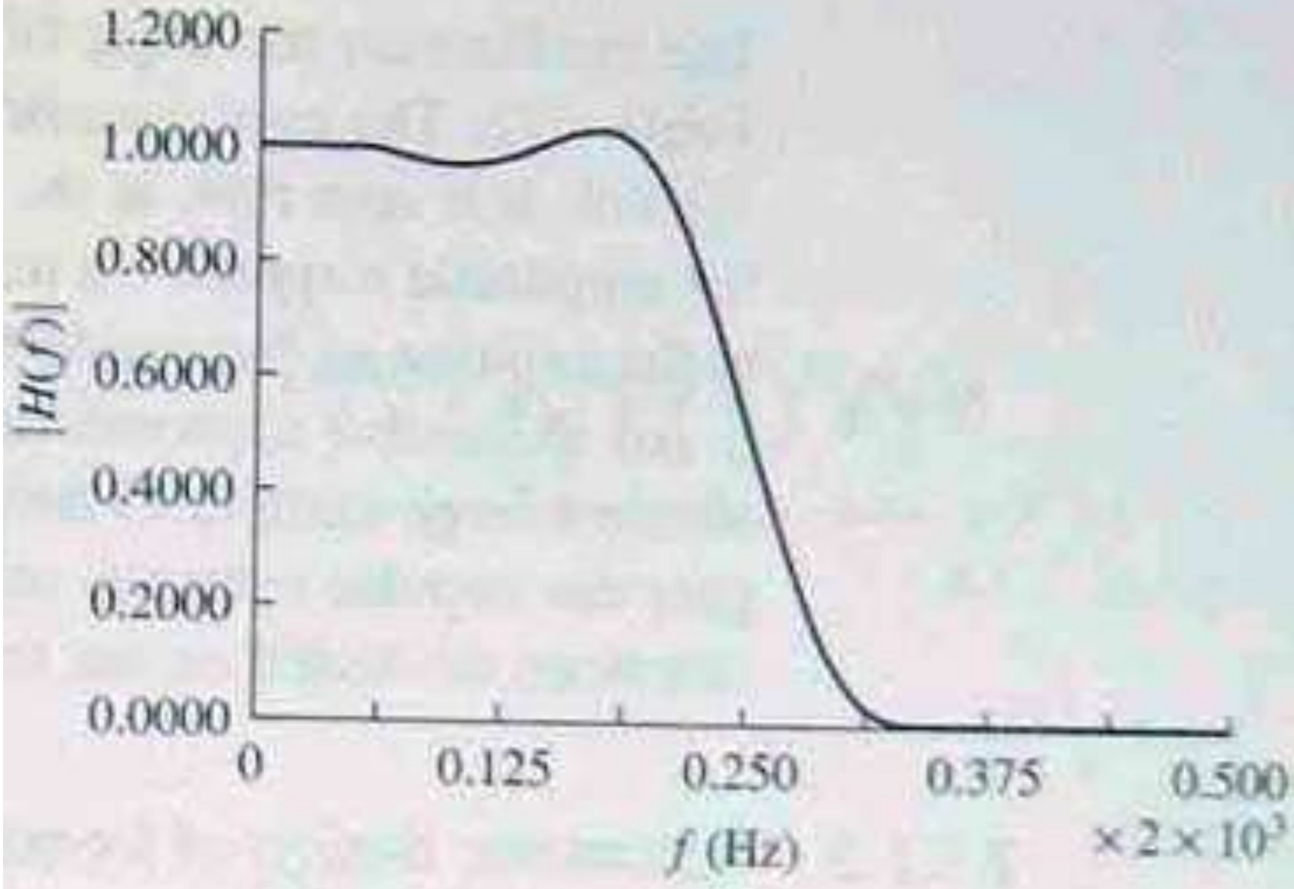

|H(k)|
T3
T2
T1
0
2
4
6
8
10
12
14
k
Transition
band
Passband
Stopband

Sin muestras en la banda de transición



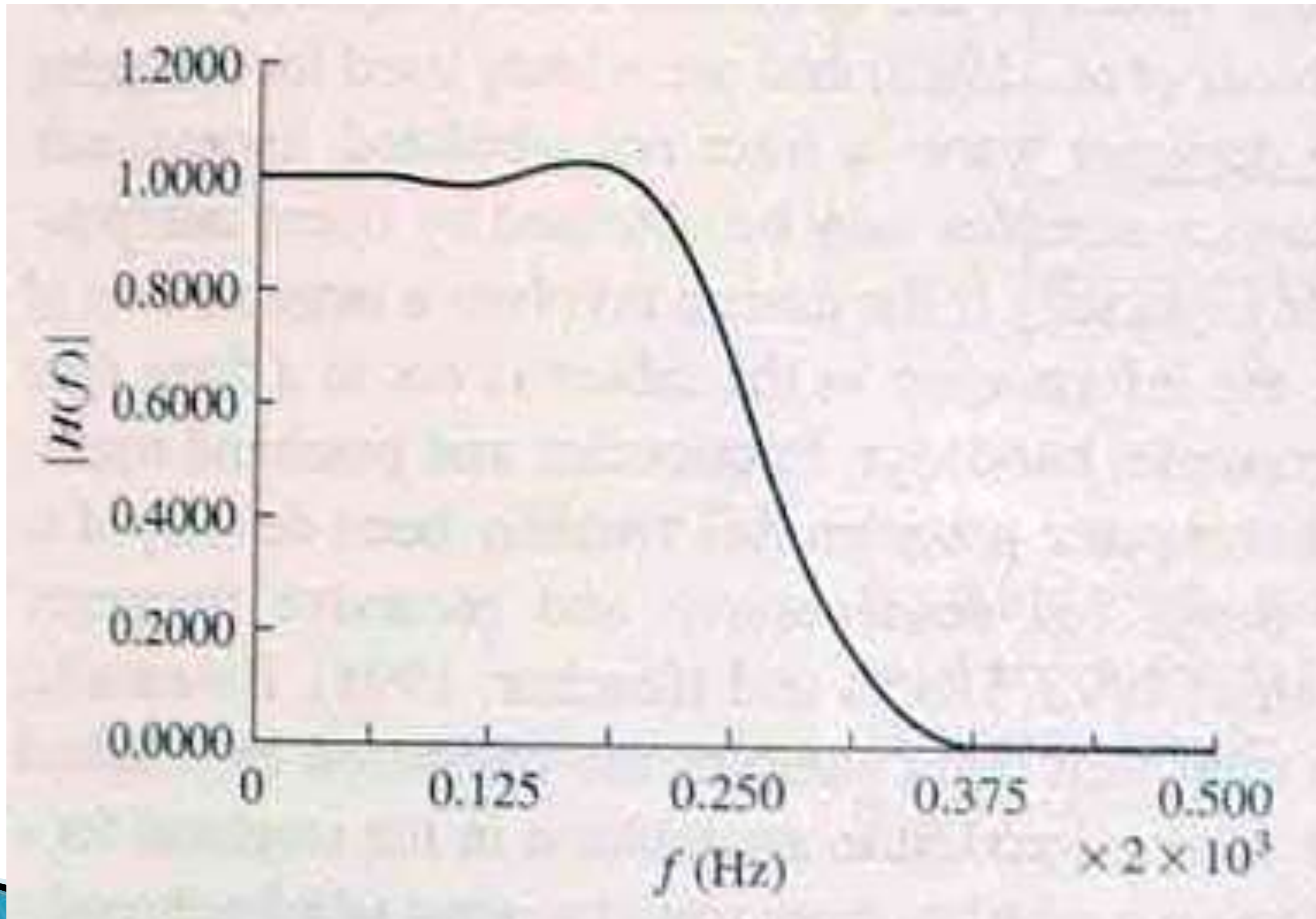
(a)

Una muestra en la banda de transición

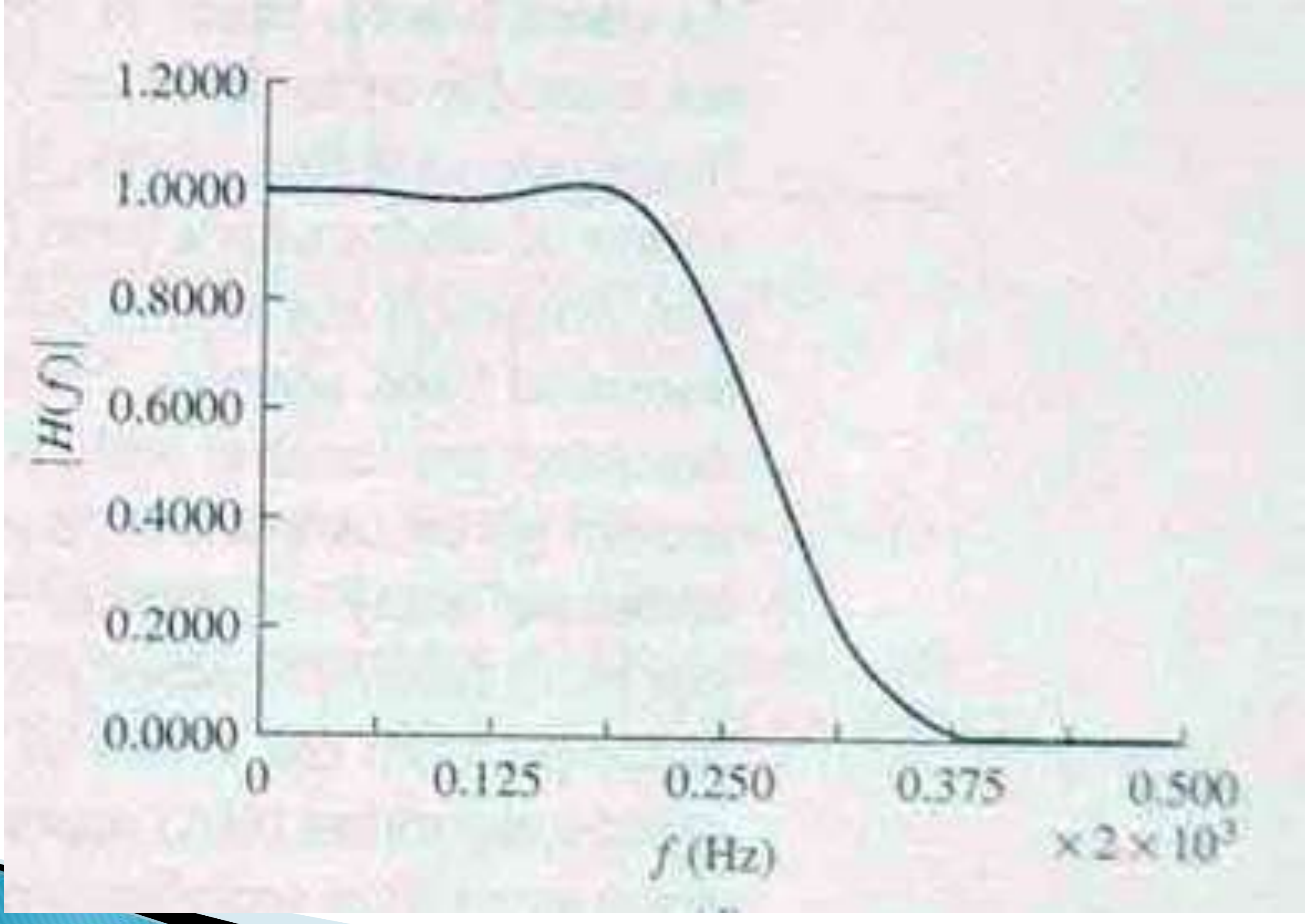


(b)

Dos muestras en la banda de transición



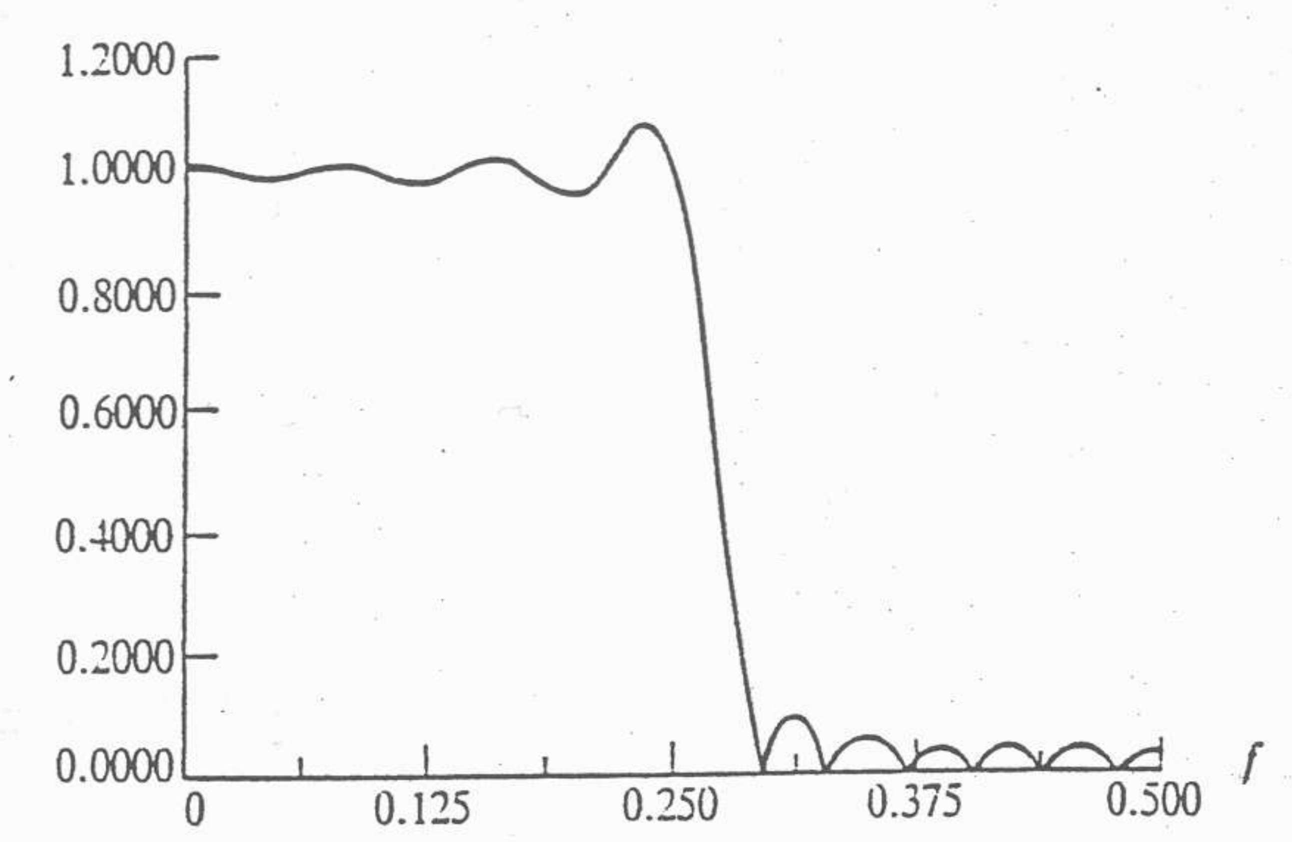
Tres muestras en la banda de transición



Método equirriple (Método óptimo)

- El método equirriple u óptimo (según el criterio de Chebyshev) es
  - Flexible (se puede definir el ripple, la atenuación y ancho de banda con cierta precisión)
  - Fácil de aplicar (si se dispone del programa)
  - Es la primera opción para el diseño de filtros FIR

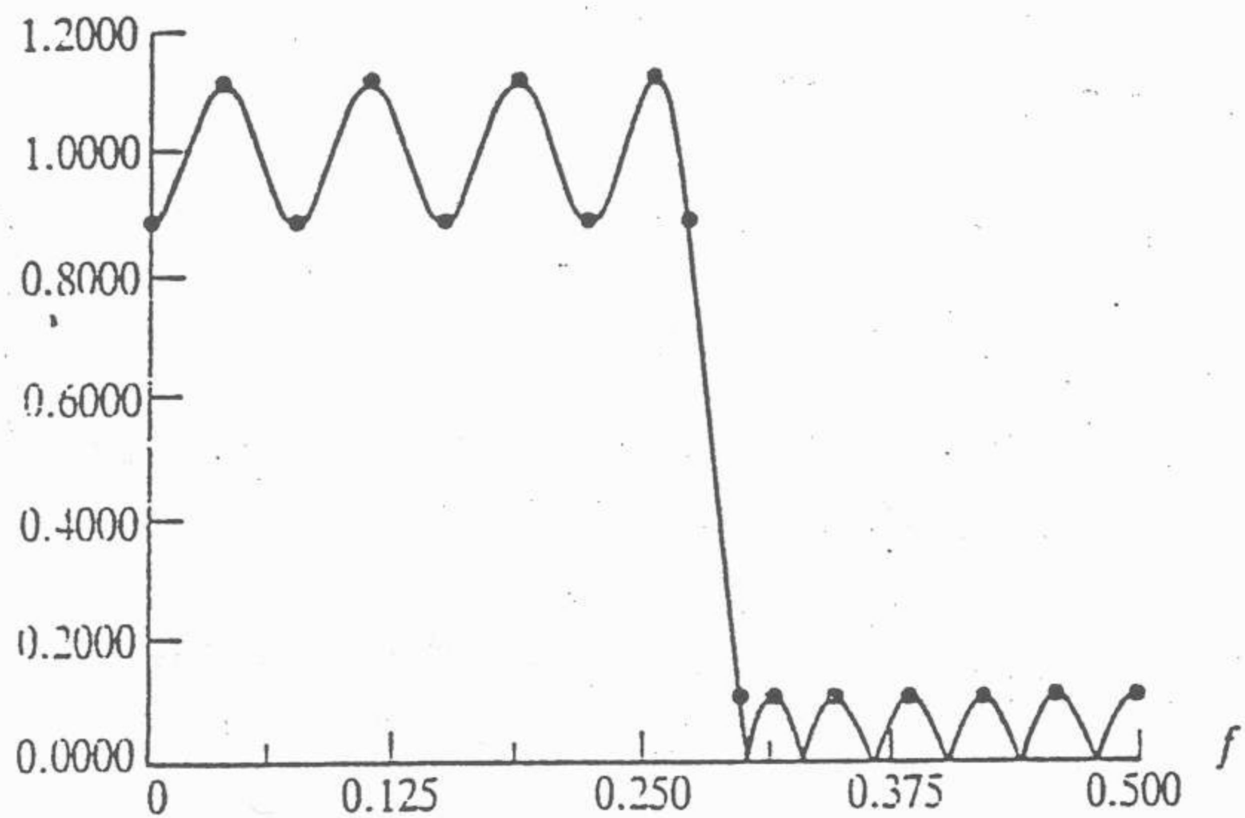
Comparación con el método de muestreo en frecuencia



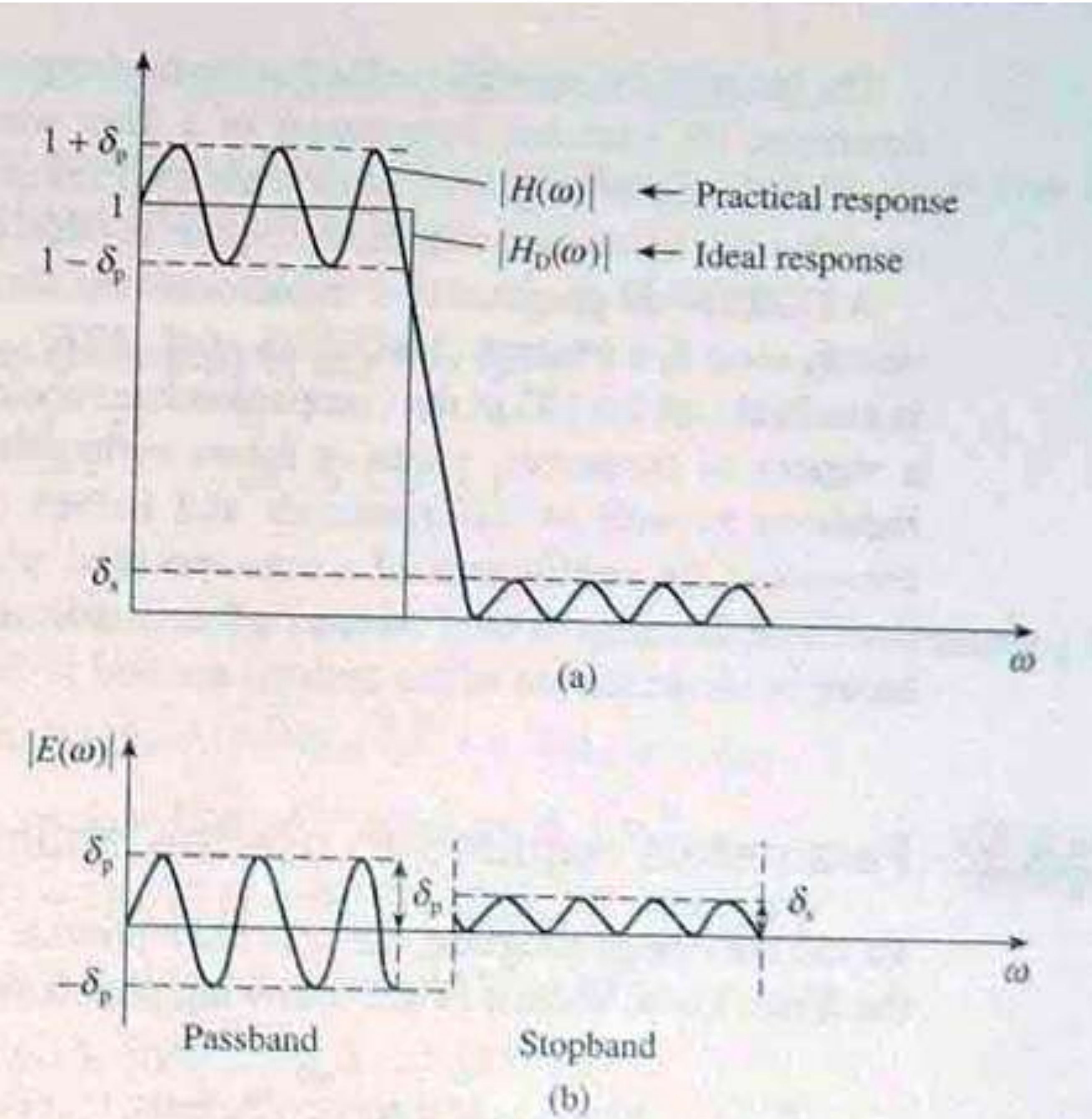
(a)

El valor máximo de ripple ocurre en las proximidades de la frecuencia de corte

Distribución uniforme del riple: una mejor aproximación puede ser obtenida



(b)



$1+\delta_p$
1
$1-\delta_p$
δ_s
$|H(\omega)|$ ← Practical response
$|H_D(\omega)|$ ← Ideal response
ω
(a)
$|E(\omega)|$
δ_p
$-\delta_p$
δ_p
δ_s
ω
Passband
Stopband
(b)

Función objetivo

$$E(\omega) = W(\omega)[H_D(\omega) - H(\omega)]$$

$E(\omega)$: función de error

$W(\omega)$: función de ponderación

$H_D(\omega)$: respuesta en frecuencia deseada

$H(\omega)$: repuesta en frecuencia aproximada

Objetivo:

$$\min[\max|E(\omega)|]$$

Teorema de la alternancia

- Dado un conjunto de frecuencias dentro del intervalo $0 \le \omega \le \pi,$ la mejor aproximación de $H(\omega)$ a $H_D(\omega)$ se tiene cuanto ocurren al menos $M+2$ alternancias, esto es

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i-1}) = \pm \|E\| = \max |E(\omega)|$$

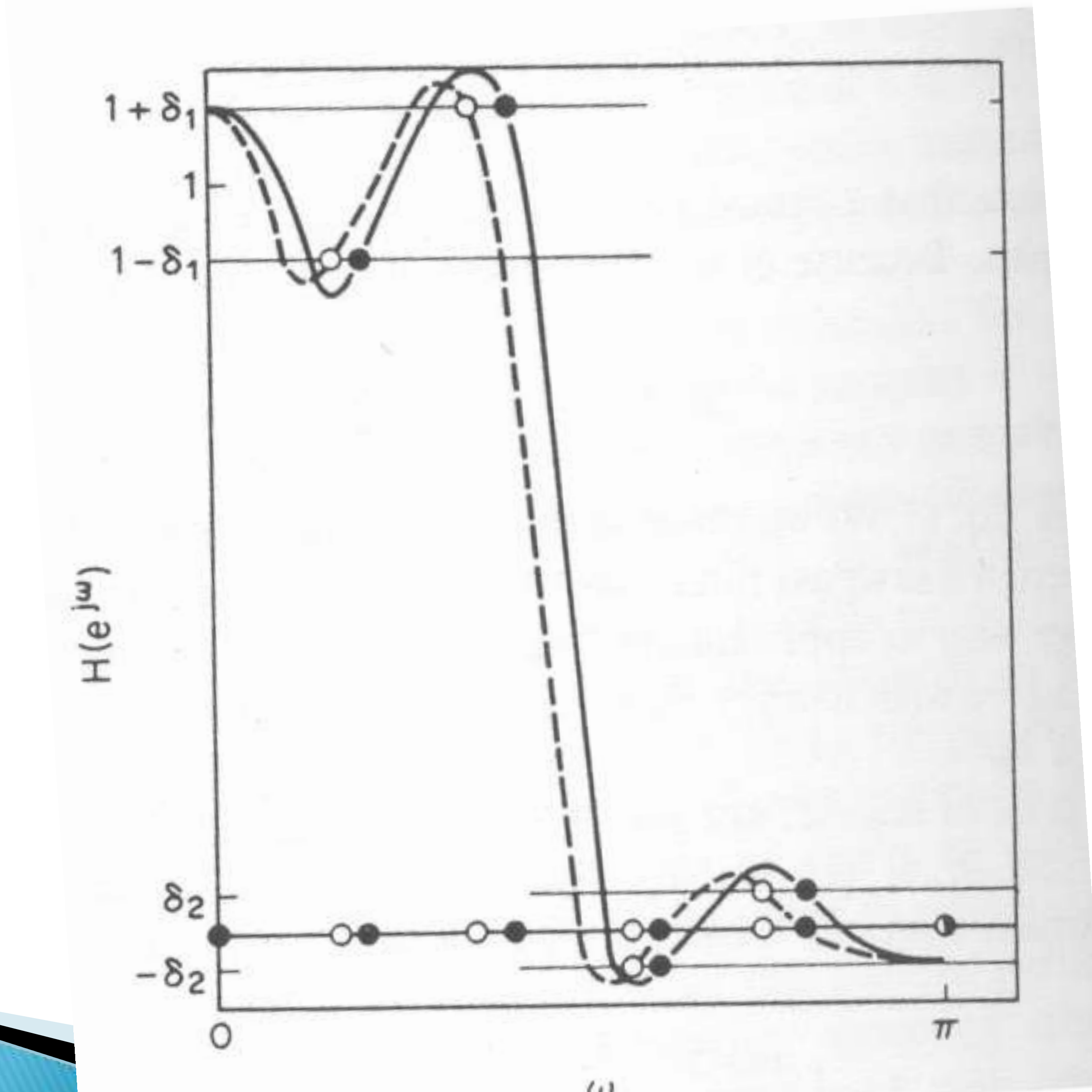
con $\omega_0 \le \omega_1 \le \omega_2 \ldots \le \omega_{M+1}$

$$\text{siendo } M = \begin{cases} \dfrac{N-1}{2}, \text{ para } N \text{ impar} \\ \dfrac{N}{2}, \text{ para } N \text{ par} \end{cases}$$

Implicancia del teorema de la alternancia: Método equirriple

- El problema ahora es encontrar las frecuencias a las que ocurre alternancia
- Para ello se utiliza un método iterativo conocido por método de intercambio de Remez
- Una vez halladas las frecuencias de alternancia, se determina la respuesta en frecuencia
- Finalmente, se determinan los coeficientes del filtro

Método iterativo



Relaciones para determinar la longitud del filtro

- En la práctica, el número de coeficientes es desconocido. Sus valores pueden ser determinados utilizando las siguientes relaciones empíricas:
  - Para filtros pasabajos:

$$N \simeq \frac{D_\infty(\delta_p,\delta_s)}{\Delta F} - f(\delta_p,\delta_s)\Delta F + 1$$

  - Para filtros pasabanda:

$$N \simeq \frac{C_\infty(\delta_p,\delta_s)}{\Delta F} + g(\delta_p,\delta_s)\Delta F + 1$$

ΔF : ancho de la banda de transición normalizada a la frecuencia de muestreo

Sumario del procedimiento de cálculo de los coeficientes del filtro utilizando el método óptimo

1- Especificar las bandas de frecuencias, riple en la banda de paso y atenuación, y frecuencia de muestreo

2- Normalizar las bandas de frecuencia dividiendo por la frecuencia de muestreo

3- Estimar la longitud del filtro (como se trata de formulas empíricas el valor a utilizar debe ser mayor en 2 o 3 unidades)

4- Obtener la función de ponderación a partir de la relación entre los riples

- Ejemplo de función de ponderación:

Un filtro pasabajos con riples de banda de paso y atenuación de 0,01 y 0,03 respectivamente tendrá un peso de 3 para la banda de paso y un peso de 1 para la banda de atenuación

$$\frac{\delta_p}{\delta_s} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{W_p}{W_s} = \frac{3}{1}$$

Un filtro pasa banda con riples de 0,001 en la banda de paso y 0,0105 en las bandas de atenuación

$$\frac{\delta_p}{\delta_s} = \frac{0{,}001}{0{,}0105} \rightarrow \frac{W_p}{W_s} = \frac{21}{2}$$

5- Cargar los parámetros al programa de diseño para obtener los coeficientes

6- Verificar el riple de la banda de paso y atenuación producidos por el programa

7- Si las especificaciones no son atendidas, aumentar el número de coeficientes

Transformación en frecuencia

- Una forma simple de pasar de un filtro pasa bajos a un filtro pasa altos es cambiando el signo de sus coeficientes como:

$$h_{\mathrm{hp}}(n) = (-1)^n h_{\mathrm{lp}}(n)$$