“1983/2023 – 40 años de Democracia”

Universidad Nacional de Misiones

Facultad de Ingeniería OBERA

INGRESO 2023

CURSO DE NIVELACIÓN

TRIGONOMETRÍA

FISICA 1

Docentes:

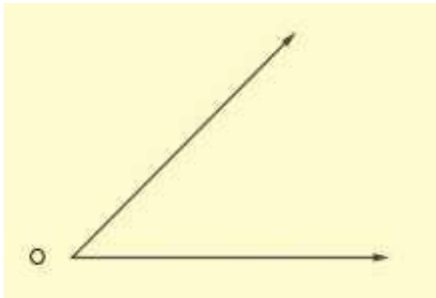
Esp. Ing. Mercedes Isolda Erck
Mgter. Ing. Sergio Antunez
Ing. Raúl Armando Ortt
Esp. Ing. Fernando M. Portillo
Ing. Jorge Alberto Olsson
Ing. Guillermo Atilio Pic
Esp. Ing . César Gabriel Bernal
Ing. Javier Kuzuk
Ing. José A Hermosilla
Lab. Qca. Ind. Lea Santiago
Ing. Fátima Schöninger
Prof. Diego Wisner
Esp. Ing. Hernán Ferro
Esp. Ing. Daniel Hugo Prez
Lic. Jorge Haupt
Sr. Brian Jakob

Índice

La Trigonometría es una parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Estas son de mucha utilidad para resolver problemas en diversas ramas de esta ciencia o de otras, como la física, la química, la astronomía, etc. La trigonometría (etimológicamente "medición de triángulos") fue inventada por los astrónomos griegos para calcular los elementos de un triángulo (sus ángulos y lados).
Primeramente, es necesario realizar una revisión del concepto de ángulo $L_2\ O\ L_1$. Así pueden darse dos posibilidades: cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario) se considera "ángulo positivo" y cuando se gira a favor de las agujas del reloj (horario) se considera "ángulo negativo".

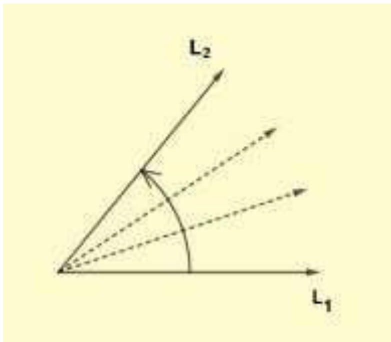
Definición 1

Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O).



Definición 2

Dadas dos semirrectas L_1 y L_2, con origen común, ángulo es la porción del plano generada por el "barrido" (giro) de la semirecta L_1 hasta coincidir con la semirrecta L_2.



Para la medición de ángulos se tiene en cuenta diversos "sistemas". La medida, o medición de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura.

Sistema natural o circular

El radián (en algunas calculadoras se abrevia "Rad") es la forma de medir un ángulo en el sistema natural de medición. Para determinarlo experimentalmente (y en forma aproximada) realice lo siguiente:

1) Determine el diámetro de un disco con un hilo (por ejemplo un CD o algo similar).

2) Divida por la mitad dicho hilo para obtener el radio.

3) Ubique dicho radio sobre el disco con el cual se generó y marque la longitud del arco sobre la periferia.

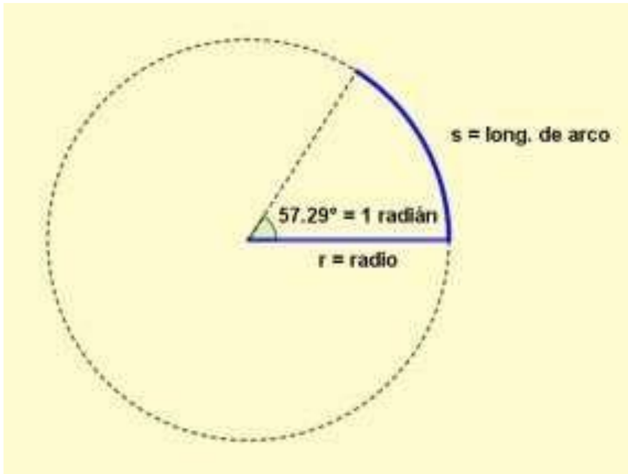
4) Trace dos radios por cada extremo del arco y mida el ángulo formado. Si obtiene 57,29° el experimento resultó un éxito.

Analíticamente el arco "s" es directamente proporcional al ángulo "θ" y al radio "r" de acuerdo a la expresión:

$s = \theta . r$ siendo "r" el radio que lo generó.

Si se divide el arco por el radio se obtiene un número adimensional que equivale a 1radián.

$$1 rad = \frac{arco}{radio} = \frac{R}{R}$$



Nota: observe que un ángulo medido en radianes es adimensional, o sea no tiene unidades.

Sistema sexagesimal

En este sistema a la circunferencia se la divide en 360 partes siendo cada una de ellas equivalente a 1°. (En algunas calculadoras se abrevia "Deg" o Sexages)

$360° = 2\pi\ radianes$ (una vuelta completa)   Un ángulo recto mide $\pi / 2$ radianes (un cuarto de vuelta)

$180° = \pi\ radianes$ (media vuelta)   Como 180º $= \pi\ rad$, resulta que 1º = $\frac{\pi}{180}$ rad

Un ángulo de 1 rad = 180/π = 57,29578° = 57º 17' 45"

Para transformar de una unidad a otra, usamos el método de factor de conversión

Ejemplo, pasar 40º a rad: 40°. $\frac{\pi}{180°}$ = 0,698 rad

(recuerde que "rad" no es una unidad, simplemente lo escribimos para no perder de vista que ese ángulo esta medido en radianes)

Ejercicios:

1) Convierta las siguientes medidas a radianes:

   a) - 270°; b) 585° 20´ 45"; c) 789°; d) 1025°; e) 60°; f) 115°

2) Convierta las siguientes medidas a grados:

   a) 2 *rad* b) 5/4. π *rad*; c) 8 π *rad;* d) $\frac{3}{4}$. π *rad*; e) -12 π *rad*; f) π *rad*

3) Calcular la longitud de los arcos cuyas amplitudes y radios son:

   a) $\alpha = 4\ rad$ $r = 200\ cm$; b) $\alpha = 0{,}348\ rad$ $r = 5{,}3.\ 10^{-3}\ m$

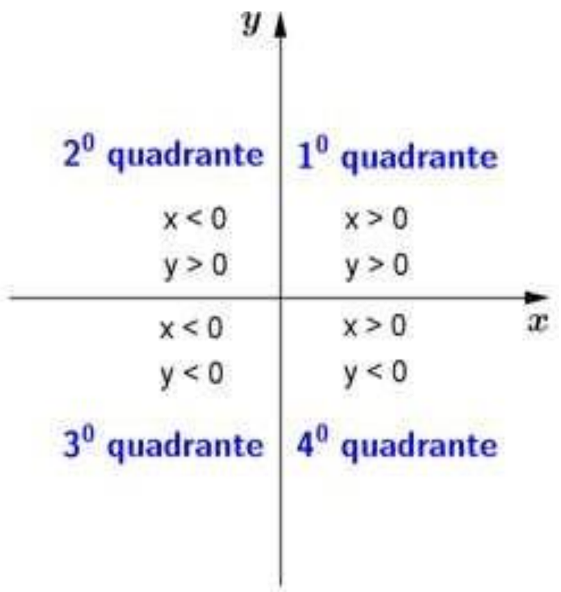
   c) $\alpha = 45°$ $r = 1{,}8\ m$; d) $\alpha = 2\pi/3$ $r = \pi\ cm$

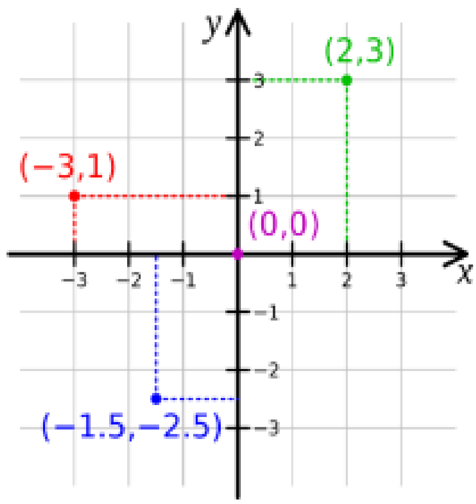
   e) $\alpha = 28°$ $r = 1\ cm$; f) $\alpha = 1{,}5\ rad$ $r = 54\ m$

4) Si un reloj marca las $5h$, ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo que forman las agujas?

Sistema Cartesiano Ortogonal

Anteriormente, se ha representado al conjunto de los números reales en una recta. Si se consideran dos rectas (de números reales) que se intersecan perpendicularmente en un punto O, éstas constituyen los ejes del sistema cartesiano ortogonal (cartesiano porque lo definió René Descartes y ortogonal porque las dos rectas numéricas se encuentran perpendiculares entre sí). Este sistema se utiliza como referencia para establecer las coordenadas de puntos del plano.





Entonces, como un ángulo es invariante respecto de su posición en el plano y con el único motivo de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente referirlo a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. De esta forma al primer cuadrante le corresponden ángulos desde 0° hasta 90° (tomados en sentido antihorario), el segundo cuadrante desde 90° hasta 180°, el tercer cuadrante desde 180° hasta 270° y el cuarto cuadrante desde 270° hasta 360°.

Al seguir girando en ese sentido se obtienen ángulos mayores a 360°; por ejemplo un ángulo de 1125° serán 3 giros y 1/8, y estará en el primer cuadrante; un ángulo de −120° tendrásentido horario y estará en el tercer cuadrante.

Un ángulo se encuentra en posición normal si su vértice se ubica en el origen de coordenadas O y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas (eje "x"). Los ejes coordenados (generalmente denominados "$eje\ x$" o eje de abscisas y "$eje\ y$" o eje de ordenadas) dividen al plano en cuatro sectores llamados cuadrantes. Cada punto del plano queda asociado a un par ordenado (a, b) de números reales.

Ejercicios:

5) En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 34°;	b) 320°;	c) –120°;	d) –185°;	e) 60°;	f) –135°;
g) 495°;	h) 555°;	i) 1348°;	j) –45°;	k) 855°	

Relaciones Trigonométricas de un Ángulo

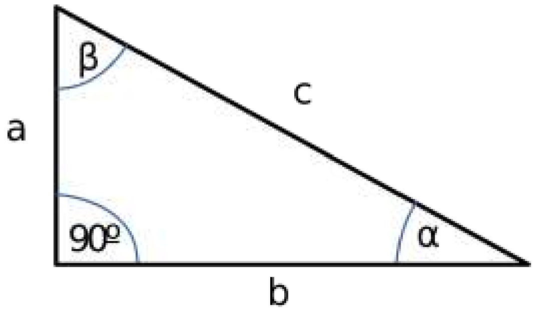
Los triángulos rectángulos poseen dos catetos (los dos lados más cortos) y la hipotenusa (el lado más largo). Además, posee un ángulo "frente" a la hipotenusa que es recto, o sea mide 90º en el sistema sexagesimal (DEG en la calculadora) y $\pi/2$ en el sistema natural de medición de ángulos (o RAD en la calculadora).

Para triángulos rectángulos se establecieron relaciones las cuales se detallan a continuación:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$



.

Aplicadas a un triángulo rectángulo como el de la figura se tendrá:

sen α = $\frac{a}{c}$ cos α = $\frac{b}{c}$ tan α = $\frac{a}{b}$

sen β = $\frac{b}{c}$ cos β = $\frac{a}{c}$ tan β = $\frac{b}{a}$

Repaso: Recordar que la suma de los ángulos interiores de **cualquier** triángulo **es igual a 180°**, (o sea π rad).
Por lo tanto, para nuestro triángulo de la figura: **α + β = 90°** (π / 2 r a d)

Ejercicios:

6) Grafique los siguientes pares de puntos en un sistema de ejes cartesianos ortogonales y, determine la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por mismos.

a) (-3, 2) y (7, - 3); b) (0, 0) y (1, 3/4); c) (-1, 5) ; (0, 0); d) (-1, 1); (5/3, 1)

Teorema de Pitágoras

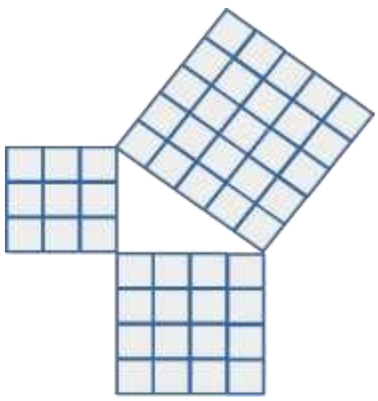
Es una relación geométrica entre los tres lados de un triángulo rectángulo.

Expresa que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos (los otros dos lados que no son la hipotenusa).

Utilizado solo para triángulos rectángulos, se explica del siguiente arreglo geométrico:

Por ej: $(3m)^2 + (4m)^2 = (5m)^2 \rightarrow 9m^2 + 16m^2 = 25m^2$.

Con esto se consigue formar un triángulo rectángulo que se interpreta como sigue: con 25 cuadrados se pueden formar uno de 9 cuadrados agrupados en $3x3$ y otro de 16 cuadrados agrupados en $4x4$. Si se los ubica como muestra la figura con los dos más pequeños se pueden ubicar de tal manera que otro cuadrado de $5x5$ queda posicionado de tal manera que se forma untriángulo rectángulo.

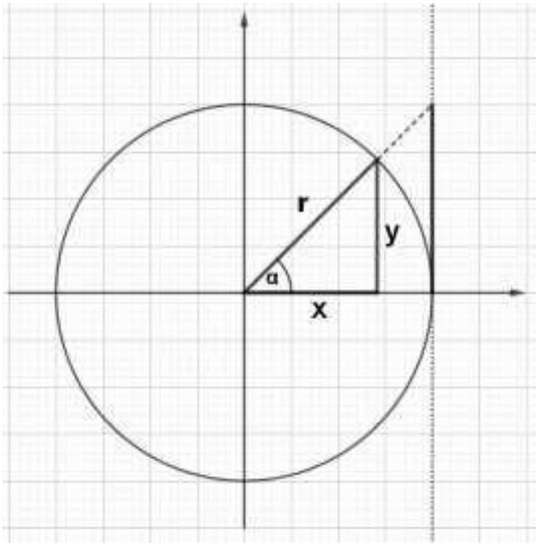


La expresión general del teorema es $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$ siendo "a" y "b" los lados de los catetos y "c" la hipotenusa.

Relación Fundamental de la Trigonometría

Utilizando un círculo de radio "r" se puede inscribir dentro del mismo un triángulo rectángulo según se muestra en el esquema:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r.\cos\alpha \quad sen\alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r.sen\alpha$$



Reemplazando ambas expresiones en el Teorema de Pitágoras, se tendrá:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

$$r^2.sen^2\alpha + r^2.\cos^2\alpha = r^2$$

$$r^2.(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) = r^2$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ejercicios:

7) Dadas las siguientes medidas de los tres lados de un triángulo, ¿cuáles de ellos son rectángulos?

a) 6; 7,5; 4,5   b) 4; 8; 5   c) 5; 13; 12

Resolución de triángulos rectángulos

En el caso de que el triángulo sea rectángulo, como el ángulo recto ya está determinado, pararesolverlo basta con conocer dos de sus elementos siempre que uno de ellos sea un lado. Así pues, pueden presentarse los cuatro casos siguientes:

Caso 1: Que se conozcan los dos catetos.
Caso 2: Que se conozcan un cateto y la hipotenusa.
Caso 3: Que se conozcan un cateto y un ángulo agudo.
Caso 4: Que se conozcan la hipotenusa y un ángulo agudo.

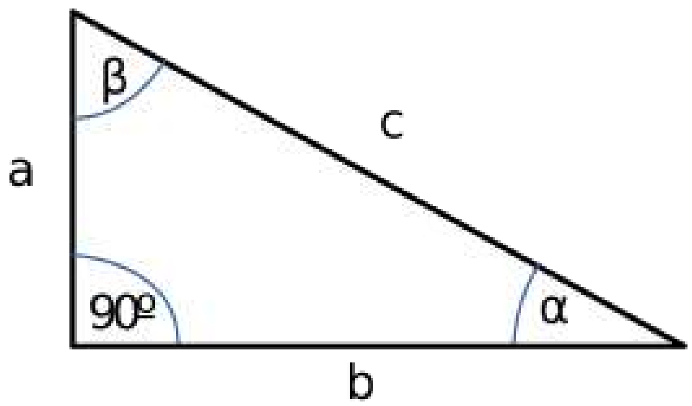
Caso 1

Utilizaremos la siguiente figura como referencia. Donde los catetos a y b son los elementos conocidos.
Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:

c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ tan α = $\frac{a}{b}$

β = 90° - α

Área = $\frac{base\ .\ altura}{2}$



Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que sus **catetos** son a = 6cm y b = 8cm.

Resolución: Tendremos

c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = $\sqrt{(6cm)^2 + (8cm)^2}$ = $\sqrt{100cm^2}$ = 10 cm

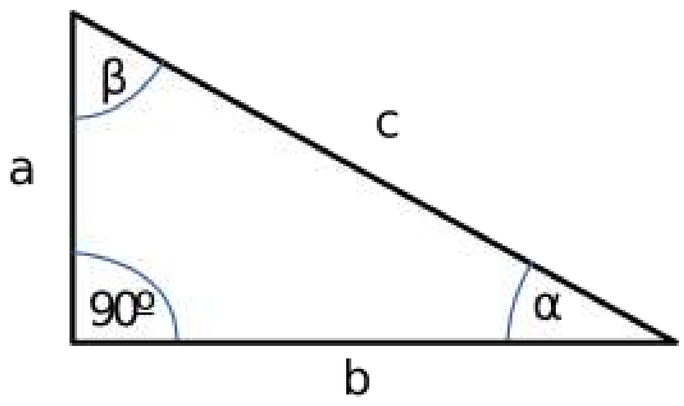
tan α = $\frac{a}{b}$ = $\frac{6}{8}$ = 0,75 → α = Arc tan (0,75) = 36,87° = 36°52' 11,6''

Por lo tanto: β = 90° - α = 90° - 36,87° = 53,13° = 53° 13' 48''

Área = $\frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{8cm\ .\ 6cm}{2} =$ 24 cm^2

Caso 2

Utilizando el triángulo de referencia anterior, ahora los lados c (hipotenusa) y b (cateto) son los elementos conocidos.



Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\tan \beta = \frac{b}{a}$

$\alpha = 90° - \beta$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que su **hipotenusa** c= 15 cm y su **cateto** b= 12 cm.

Solución, tendremos:

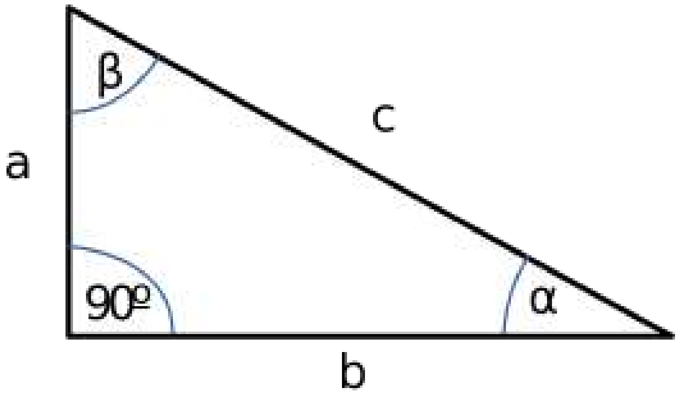
$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(15cm)^2 - (12cm)^2} = \sqrt{81cm^2} = 9$ cm

$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{12cm}{9cm} = 1{,}333 \Rightarrow \beta =$ Arc tan (1,333) = 53,13° = 53° 7’ 48,4’’

Por lo tanto: $\alpha = 90° - \beta = 90° - 53{,}13° = 36{,}87° = 36° 52' 12''$

$\text{Área} = \frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{12cm\ .\ 9cm}{2} = 54\ cm^2$

Caso 3



En este caso conocemos el ángulo β y el cateto a.

Para determinar los restantes elementos emplearemos las expresiones siguientes:

$\alpha = 90° - \beta$ $\qquad$ $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$

$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que a = 6 cm y $\beta = 42°$

Solución. Tendremos:

$\alpha = 90° - \beta = 90° - 42° = 48°$

$\tan\beta = \dfrac{b}{a}$ $\rightarrow$ $b = a.\tan\beta = 6\text{ cm}.\tan 42° = 5{,}4\text{ cm}$

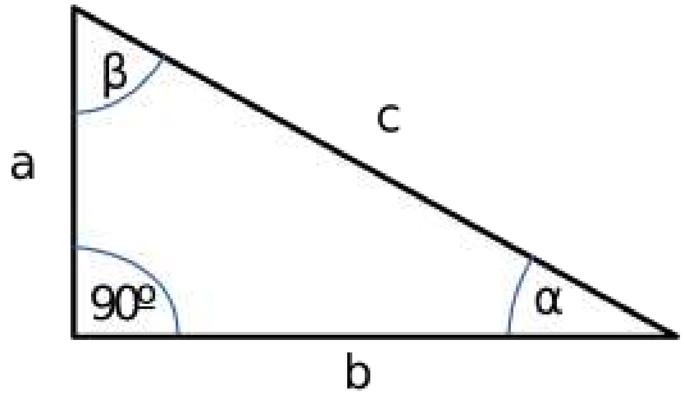
$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ $\rightarrow$ $c = \dfrac{a}{\cos\beta} = \dfrac{6\text{ cm}}{\cos 42°} = 8{,}07\text{ cm}$

$$\text{Área} = \frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{5{,}4cm\ .\ 6cm}{2} = 16{,}2\text{ cm}^2$$

Caso 4

Aquí los elementos conocidos son c y β.

Para determinar los restantes emplearemos las expresiones siguientes:



$\alpha = 90° - \beta$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$

$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{c}$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo sabiendo que $c = 20\ cm$ y $\beta = 30°$

Solución. Tendremos:

$\alpha = 90° - \beta = 90° - 30° = 60°$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$ → a = c . cos β = 20 cm.cos 30° = 17,32 cm

$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{c}$ → b = c . sen 30° = 20 cm . sen 30° = 10 cm

$$\text{Área} = \frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{10cm\ .\ 17{,}32cm}{2} = 86{,}6\ cm^2$$

Ejercicios:

8) Resolver los siguientes problemas utilizando triángulos rectángulos:

a) Una antena de 20 m de altura, se encuentra sujeta por un cable de 35 m. Calcular la distancia existente entre la base de la antena y el extremo del cable

b) Calcular el largo que debe tener una escalera para que apoyada en una pared alcance una altura de 2,85 m, al formar con el plano del piso un ángulo de 1 rad.

c) La cuerda de un cometa forma un ángulo de 31° 40´ con el nivel del piso y tiene una longitud de 455 $metros$. ¿A qué altura se encuentra el cometa?

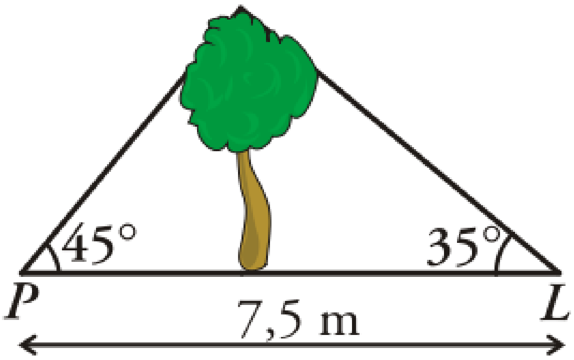
d) ¿Cuál es el ángulo de inclinación del sol cuando un objeto de 6 m proyecta una sombra de 10,3 m?

e) Una persona de 1,80 m, se encuentra a 120 m de un árbol, y observa que la línea visual de la puntadel árbol forma un ángulo de 32° con la horizontal. Calcular la altura del árbol.

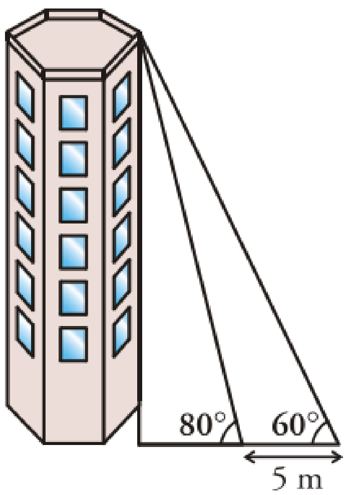
f) Un alambre mide 13,6 m de largo, y está sujeto a un poste a 6,5 metros sobre el nivel del suelo. ¿Qué ángulo forma el alambre con el suelo?

g) Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:

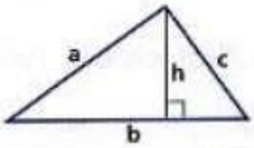
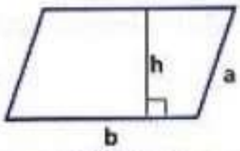
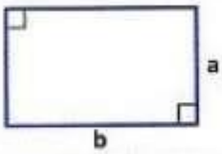
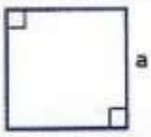
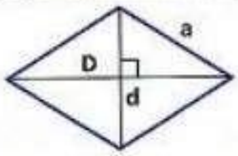
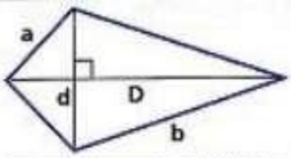
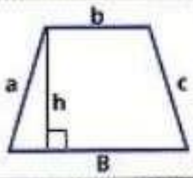
a) Calcula la altura del árbol.
b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?
Rta: a) h=3,09m; b) d_P=3,09m



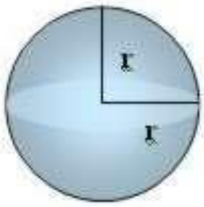
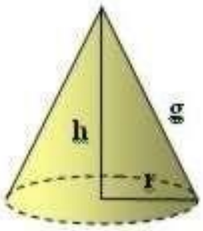
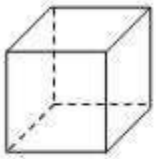
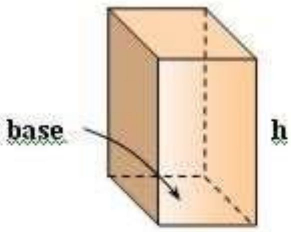
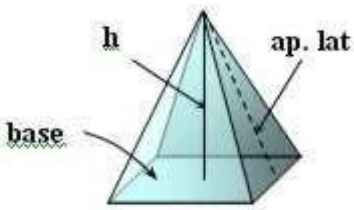
h) Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.
Rta: h= 12,48m



Perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos

Perímetros y áreas de figuras planas		Perímetro	Area
Triángulo		$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo		$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo		$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado		$4 \cdot a$	a^2
Rombo		$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa		$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio		$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo		$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		A = 6 a2	V = a3
Prisma		A = (perim. base •h) + 2 • area base	V = área base.h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$