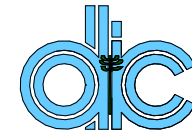




Universidad Nacional de Misiones

Departamento de Ingeniería Civil



Facultad de Ingeniería  
OBERA

# Teoría de la Elasticidad CI254:

## Método de Elementos Finitos

Año 2021



# Método de Elementos Finitos

## Temario

*Dominio geométrico: Espacios métricos.*

*Grados de libertad.*

*Caracterización de elementos finitos.*

*Ensamble de la matriz de rigidez.*

*Formulación del sistema de ecuaciones.*

*Campos de desplazamientos.*

*Funciones de forma y tablas.*

*Interpolación del campo de desplazamientos.*

*Calculo del campo de tensiones.*

# Método de Elementos Finitos

- **técnica general** para hallar **soluciones numéricas** de **sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales**. Se pueden encontrar desarrollos en mecánica del continuo, mecánica de fluidos, resistencia de materiales, problemas electromagnéticos, propagación de ondas, entre otros.
- **Solución numérica** de un problema continuo partiendo de la **información nodal** obtenida para elaborar una solución mediante el planteo de un sistema de ecuaciones.
- Un **medio continuo** con **infinitos grados de libertad** puede ser analizado a partir de una **cantidad discreta de puntos** pertenecientes al mismo, **ordenados de manera secuencial**, los cuales lógicamente poseen asignados sus correspondientes **grados de libertad finitos**.



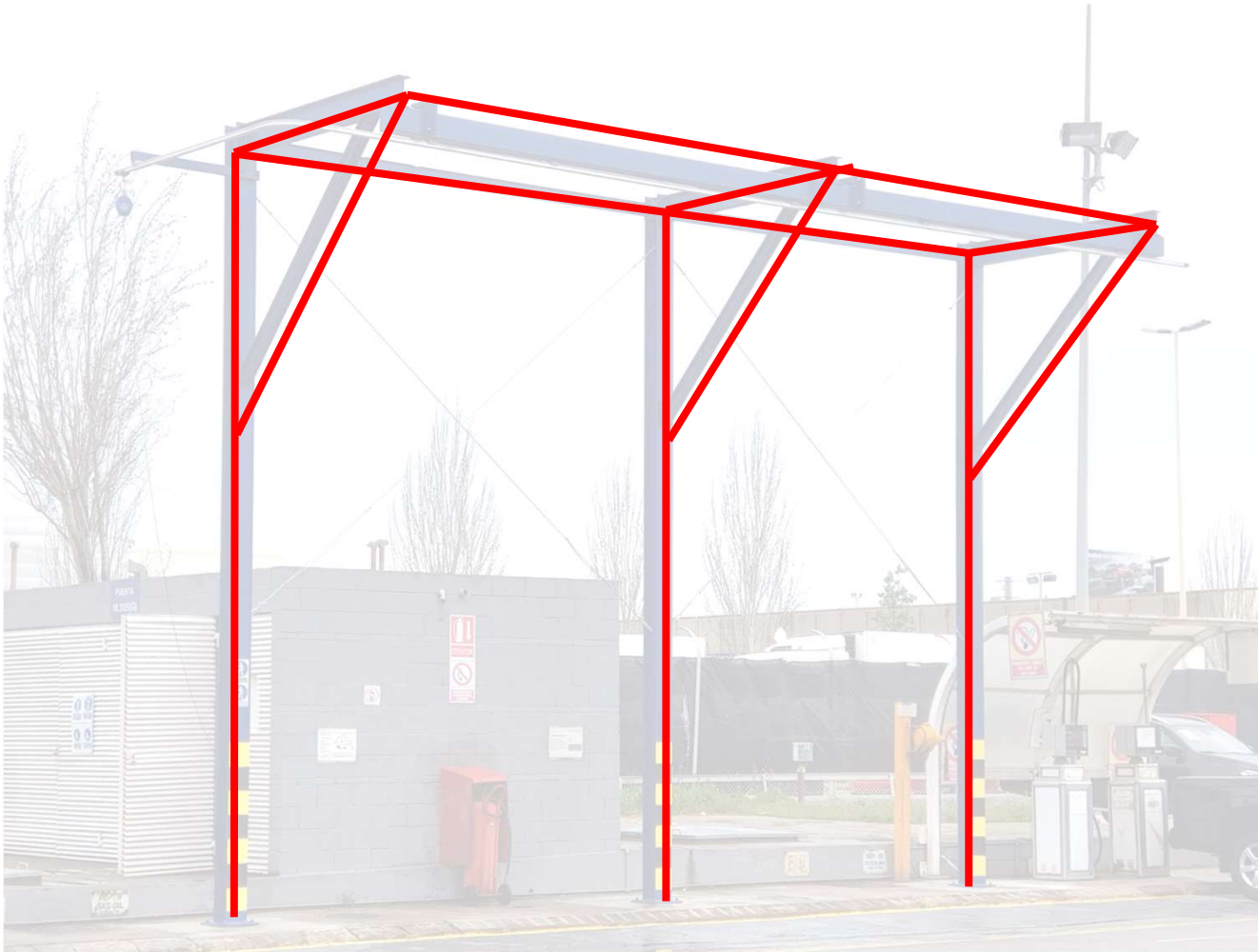
**Cuántos grados de libertad tiene la estructura pintada de azul?**

<https://www.cyesa.com/trabajos-en-altura/montajes-y-desmontajes-estructurales/desarrollo-de-estructuras-y-porticos>

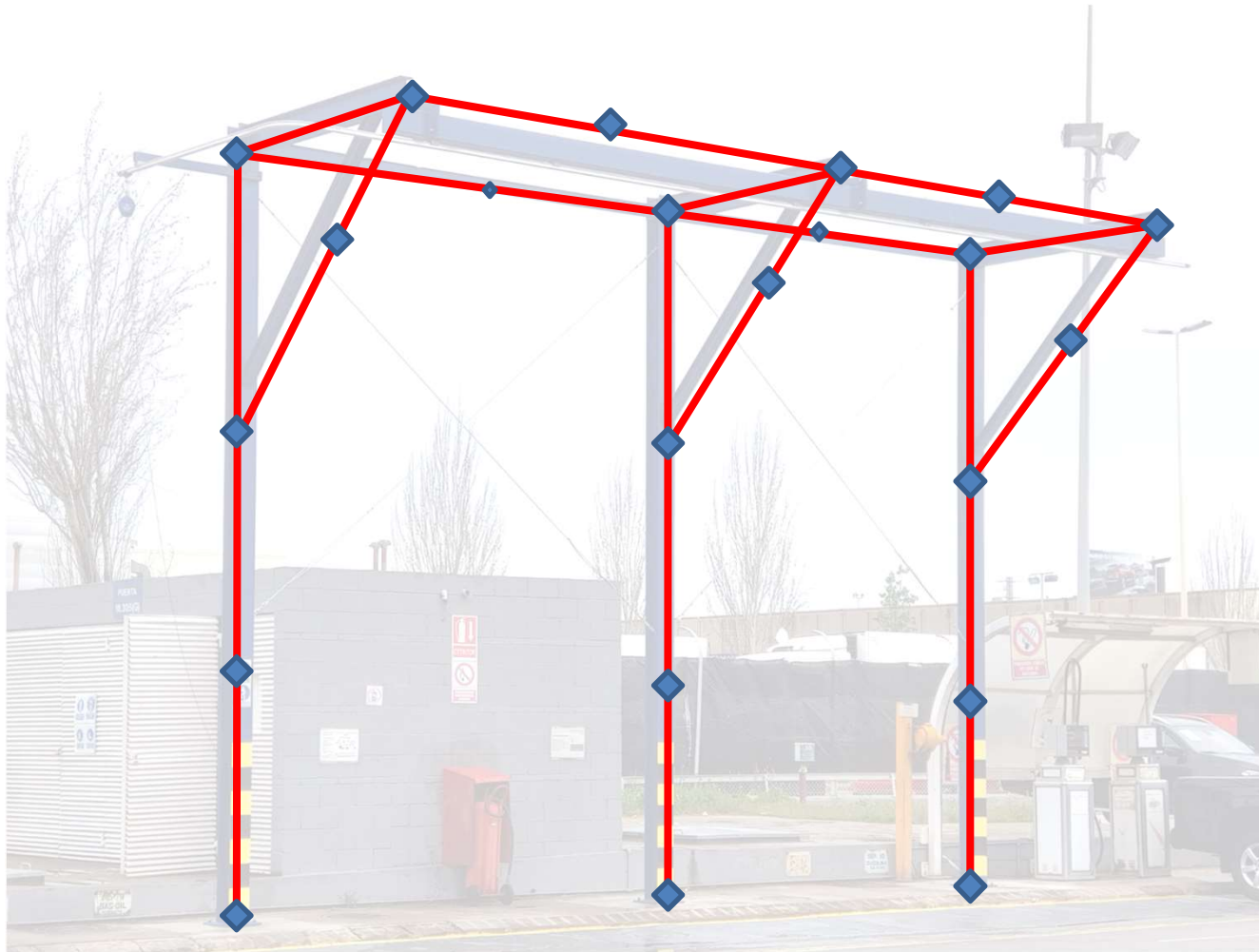


**Se puede discretizar un sistema de barras continuas en un modelo?**

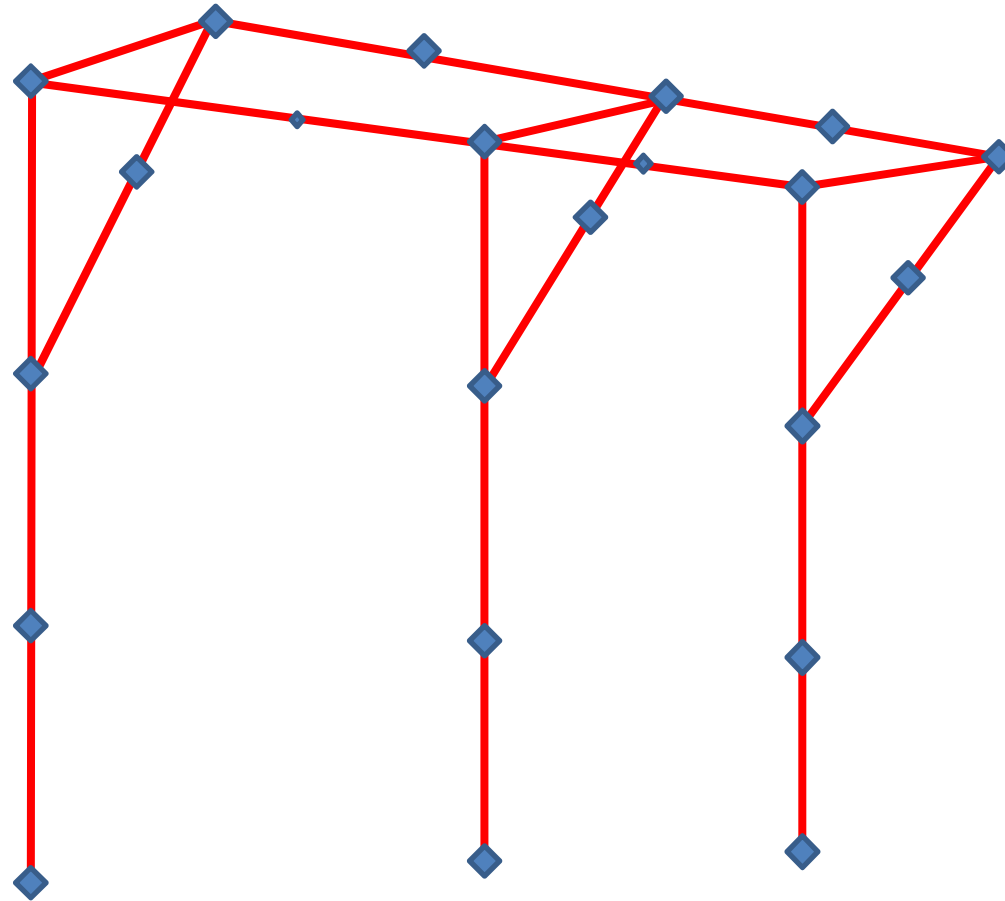
<https://www.cyesa.com/trabajos-en-altura/montajes-y-desmontajes-estructurales/desarrollo-de-estructuras-y-porticos>



**Cuántos nodos debo considerar para discretizar?**  
(nota: Discretizar – dividir en partes )

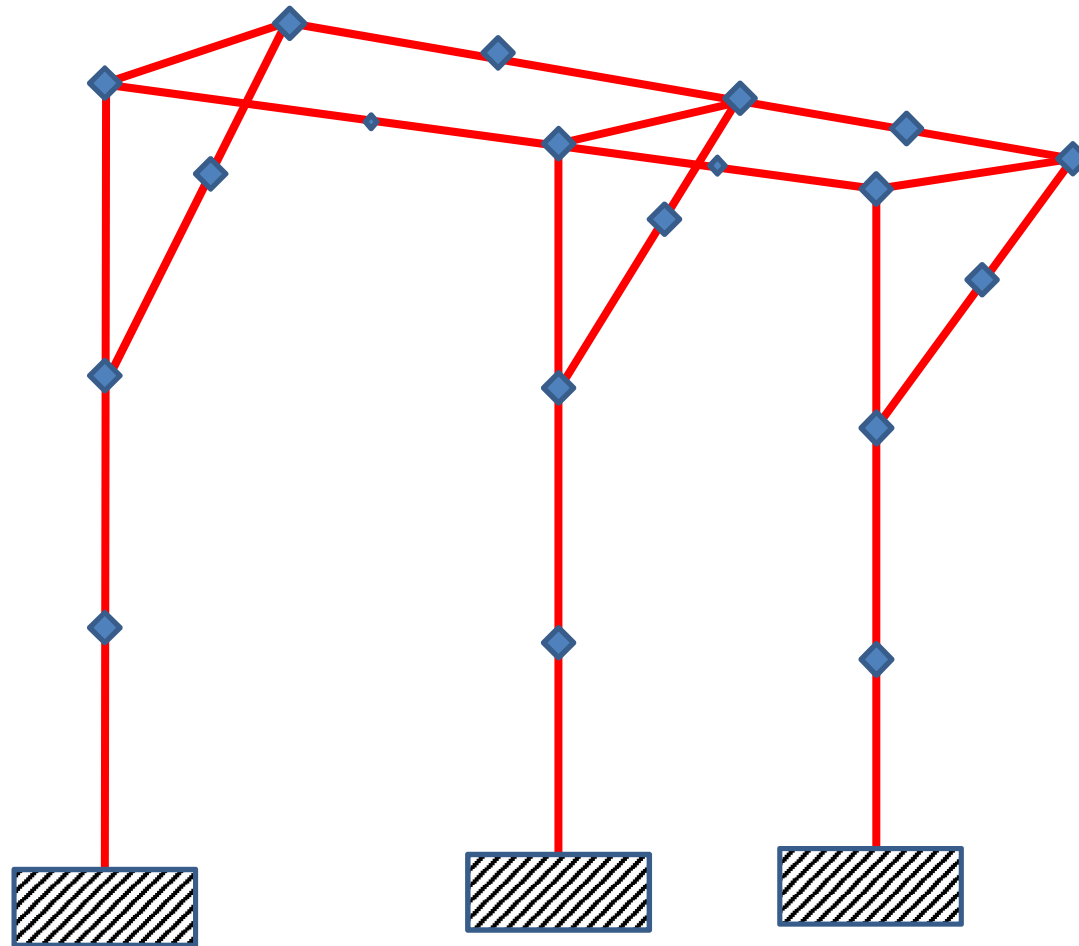


**Cuántos grados de libertad tiene el modelo de barras rojas?**

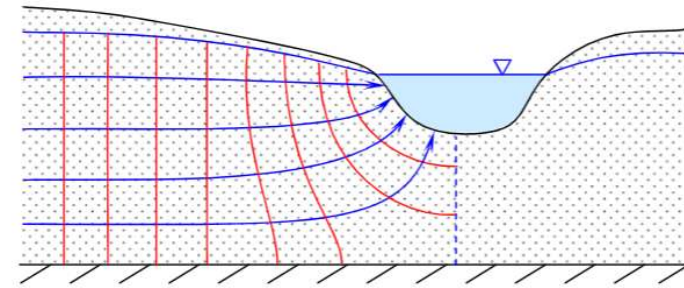


**De que manera establezco las condiciones de frontera en el modelo?**



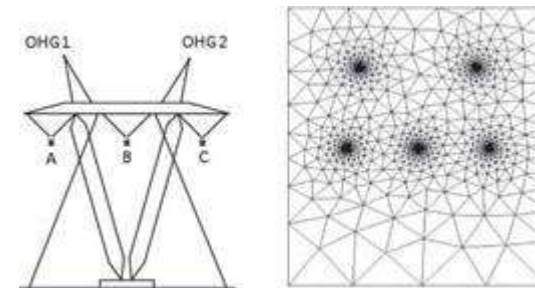


- **técnica general** para hallar **soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales**. Se pueden encontrar desarrollos en mecánica del continuo, **mecánica de fluidos**, resistencia de materiales, problemas electromagnéticos, propagación de ondas, entre otros.



<https://docplayer.es/70929053-2-4-metodos-graficos.html>

- Los problemas en los que aparecen las **ecuaciones integrales** incluyen los problemas de transferencia de energía por radiación, **el problema de vibraciones de una cuerda o una membrana**, los problemas de visco-elasticidad y algunos problemas de campos electromagnéticos.



[https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-33052021000300487&script=sci\\_arttext](https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-33052021000300487&script=sci_arttext)

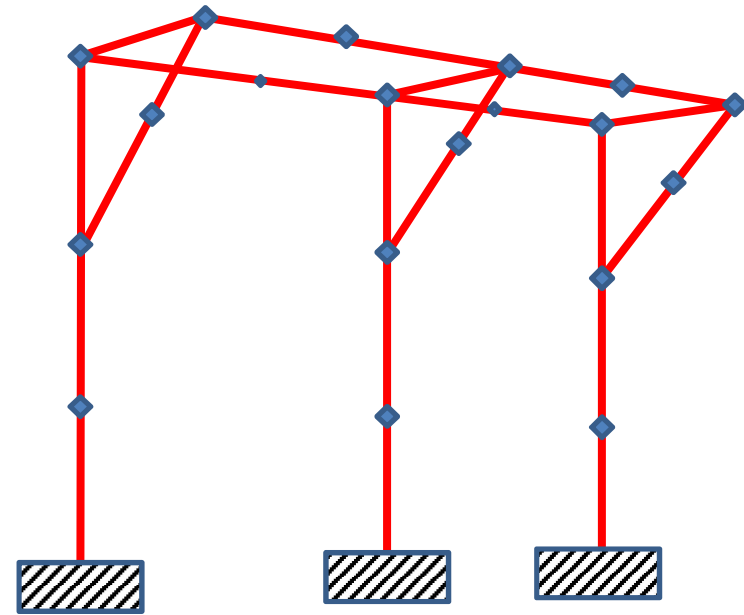
- Un sistema de **ecuaciones diferenciales** es un conjunto de **varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas** y un conjunto de **condiciones de contorno**. Una solución del mismo es un **conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema**.

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \left( x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \left( x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \left( x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right) \end{cases}$$

[https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_de\\_ecuaciones\\_diferenciales](https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_ecuaciones_diferenciales)

## Método de Elementos Finitos

- Técnica numérica que describe el problema en un medio real continuo mediante la formulación de un entorno abstracto discreto que presenta el comportamiento de un sólido deformable a partir de los resultados obtenidos en la solución del problema de frontera correspondiente.
- Se tiene un mapa de nodos que definen elementos, los cuales guardan la información correspondiente al comportamiento del sistema en términos mecánicos.



Sistema de barras

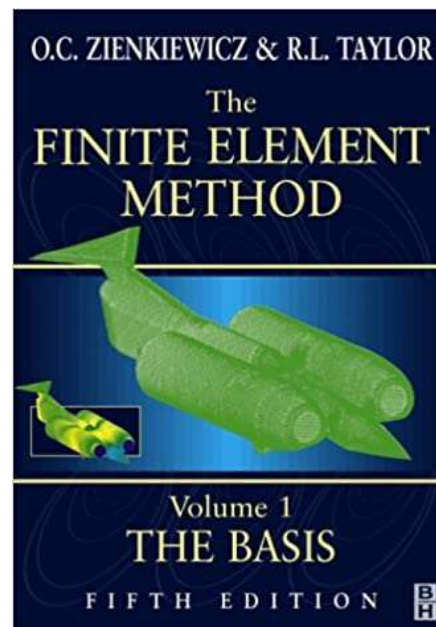
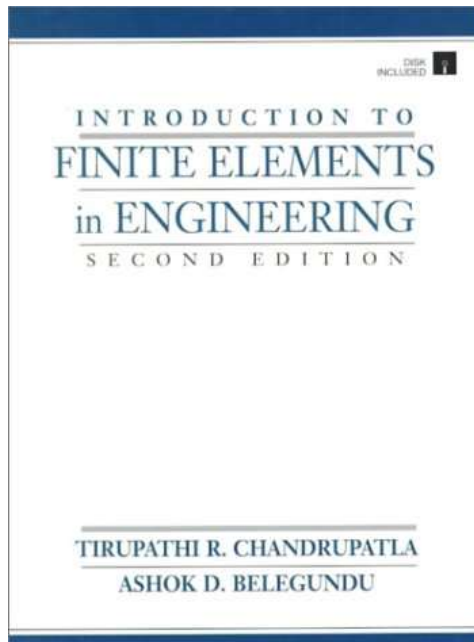
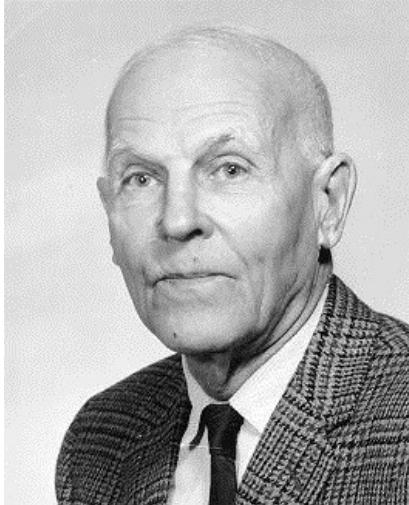
22 nodos

26 barras

114 incógnitas

# CI254 – Teoría de la Elasticidad

## Contexto histórico.



# XFEM

## The Extended Finite Element Method

3-day seminar, 27-29 Sep 2010

From basic theory to advanced applications

- Lectures, discussions & tutorials at TU Braunschweig
- From basic introduction to advanced aspects of the XFEM and its applications
- Practical realization of the XFEM in MATLAB
- Comprehensive written course material & recent publications
- Overview of the state of the art in XFEM
- MATLAB source code for all tutorials

Standard numerical methods, like the FEM and FVM, are widely established in today's engineering practice. They are well suited for the approximation of smooth solutions. However, in the real world, there is an infinite number of examples where field quantities do not behave smoothly but show jumps, links, singularities, etc. For example in solids, stresses and strains are discontinuous along material interfaces, and singular at crack tips. In fluids, pressure and density change rapidly near shocks and the velocity gradient can be extremely large in boundary layers.

In contrast to standard numerical methods, the XFEM enables the approximation of nonsmooth solutions with optimal accuracy. This is achieved by a local enrichment of the approximation space such that the special solution properties are considered appropriately. The XFEM is in the focus of intensive research activities and is currently realized in the context of finite element software tools.

comparativamente

MÉTODO  
MATRICIAL  
(DE RIGIDEZ) ?  
= MÉTODO DE  
ELEMENTOS  
FINITOS

El método matricial o también llamado método de rigidez **Hasta cierto punto llega a ser lo mismo que el método de los elementos finitos** en cuanto a su propósito. La diferencia radica en la forma de deducir las fórmulas de la matriz de rigidez por ambos métodos.

El método matricial de rigidez utiliza principios de resistencia de materiales para deducir las fórmulas de la matriz de rigidez y por tanto está completamente orientado al análisis estructural.

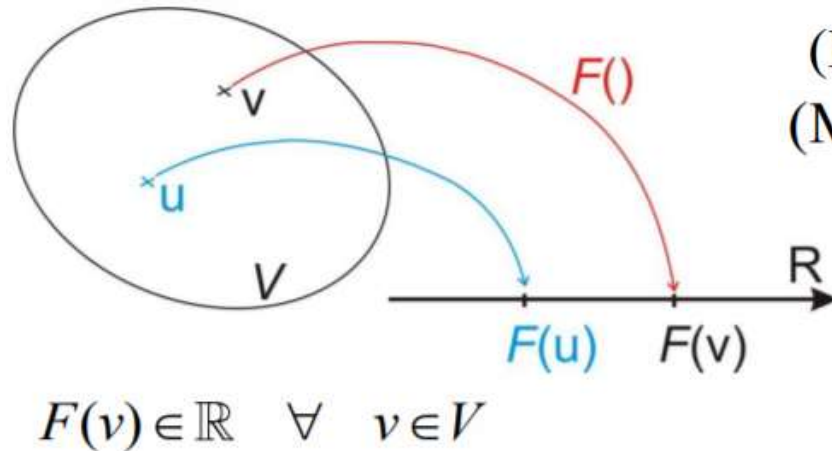
Por otro lado el método de elementos finitos utiliza principios matemáticos como el de transformar una ecuación diferencial por residuos ponderados a su forma integral ponderada y luego a su forma débil.

También se puede trabajar con el principio de conservación de la energía y de trabajo virtual y luego utilizar funciones de aproximación para calzar la solución real mediante una aproximación normalmente de función polinómica.

Ambos métodos sin embargo llegan al mismo resultado (o al mismo “patio” de resultados).

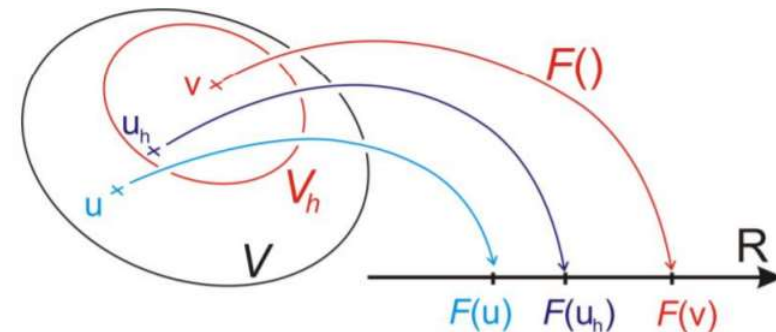
## Contexto histórico

- 1941 Hrennikoff Presentó una solución de un problema de elasticidad utilizando elementos unidimensionales.
- 1947 Levy Introdujo funciones de forma sobre subregiones triangulares para modelar toda la región. Desarrolló el método de la fuerza (flexibilidad) para el problema de la estructura.
- 1953 Levy Desarrolló el método de desplazamiento (rigidez) para el problema de la estructura.
- 1954 Argyris y Kelsey Desarrollan los métodos de análisis estructural matricial utilizando los principios de la energía.
- 1956 Turner, Clough, Martin, Topp Derivaron matrices de rigidez para cerchas, vigas y elementos de tensión plana 2 D.
- 1960 Clough Introduce la expresión elemento finito.
- 1960 Turner et. al Análisis térmico y de grandes deflexiones.
- 1961 Melosh Desarrolló la matriz de rigidez de elementos de flexión de placas.
- 1961 Martin Desarrolló la matriz de rigidez tetraédrica para problemas 3 D.
- 1962 Gallagher et al No linealidad de los materiales.
- 1963 Grafton, Strome Desarrolló la matriz de rigidez del elemento de flexión de la cáscara curvada.
- 1963 Melosh Aplicó la formulación variacional para resolver problemas no estructurales.
- 1965 Clough et. al Elementos 3 D de sólidos axisimétricos.
- 1967 Zienkiewicz et. publicó el primer libro sobre elementos finitos.
- 1969 Szabo & Lee Adaptan los métodos residuales ponderados en el análisis estructural.
- 1972 Oden Libro sobre continuos no lineales.
- 1976 Belytschko Comportamiento dinámico no lineal de grandes desplazamientos. (nace XFEM)
- 1997 Desarrollo de nuevos elementos, estudios de convergencia, desarrollo de superordenadores, disponibilidad de potentes microordenadores, desarrollo de paquetes de software de elementos finitos de uso general.



- (M) Hallar  $u \in V$  /  $F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$   
 (M<sub>h</sub>) Hallar  $u_h \in V_h$  /  $F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in V_h$

$$V_h \subset V \quad / \quad v_h \in V_h \Rightarrow v_h \in V$$

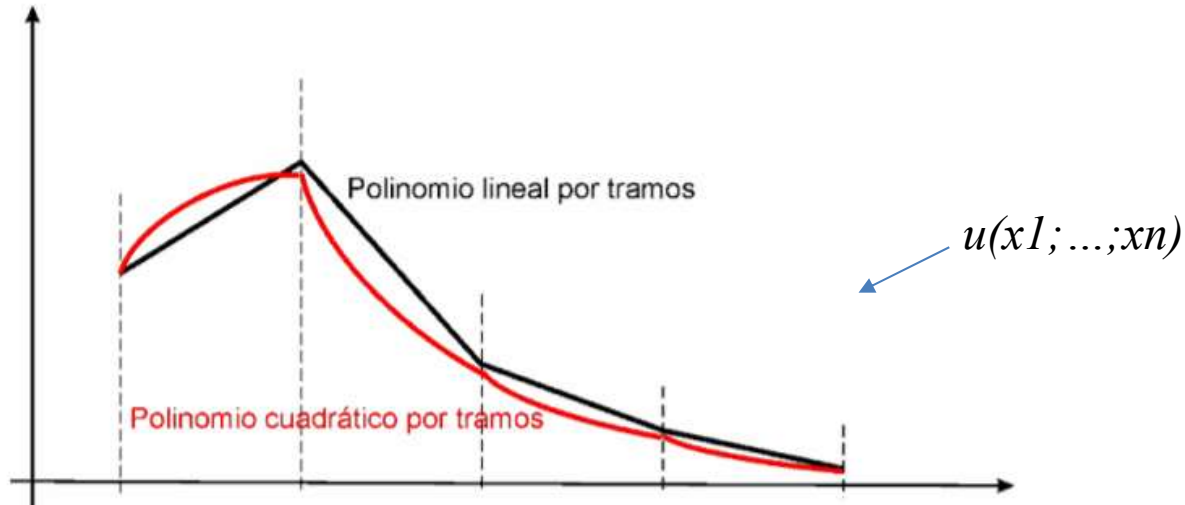


En la formulación expuesta,  $v$  es **una función** que representa algún parámetro que varía en forma continua (**Desplazamiento, Temperatura, Energía**) en un campo establecido.

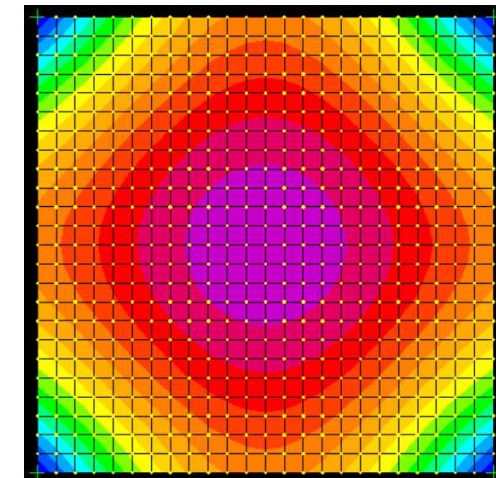
La idea de aplicación de (M<sub>h</sub>) es la **aproximación de V a través de V<sub>h</sub>**, que es una función aproximada y definida con menor cantidad de grados de libertad, por lo tanto proveerá un sistema de ecuaciones reducido cuya solución numérica se alcanza con menos esfuerzo computacional

Repasar: conceptos de ecuaciones elípticas – espacios vectoriales

Fuente: [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_0.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_0.pdf)



$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x}$$



$V_h$ , es una aproximación de función de polinomios lineales por tramos. Esta una de las características mas importantes del MEF.

Entre otras ventajas se puede mencionar: pueden abordarse geometrías complejas, establecer condiciones de borde generales, se puede plantear no linealidad (física y geométrica) de materiales, los códigos a efectuar pueden generalizarse.

**Repasar: interpolación – integración numérica**

**Fuente:** [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_0.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_0.pdf)



Vemos a continuación algunas formulaciones que se pueden resolver aplicando MEF.

(D) 
$$-u'' = f(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$



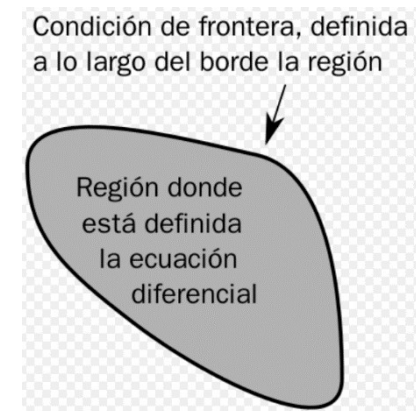
A. Barra elástica  
 B. Cuerda elástica  
 C. Conducción del calor en una barra

Problemas de valores de frontera: son aquellos que se componen de una o varias ecuaciones diferenciales (las que marcan el ritmo de cambio de cada parámetro analizado) y condiciones de contorno asociadas a dichas ecuaciones (las ecuaciones son validas dentro del contorno asignado).

Las condiciones de borde se pueden establecer partiendo de asignar valores a:

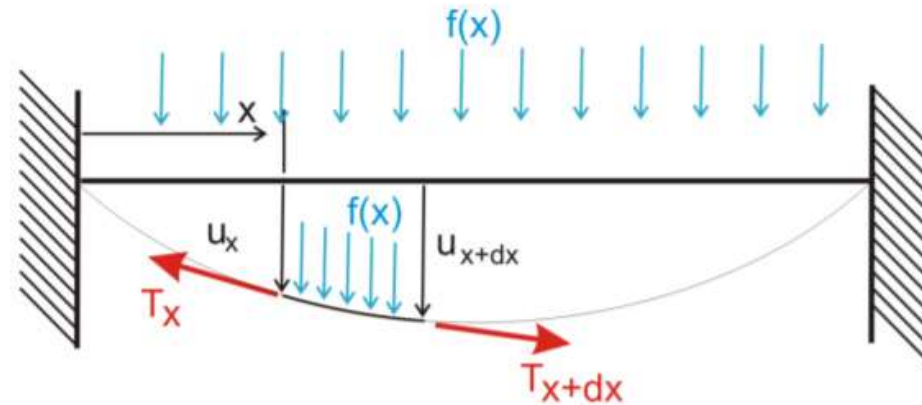
- La función
- La derivada de la función
- La función y su derivada
- Una combinación lineal de ambas

**Repasar: condiciones de frontera de: Dirichtlet, Cauchy, Neumann, Robin.**



**Fuente:** [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_1.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_1.pdf)

Veamos el caso de la cuerda elástica



El equilibrio del segmento considerado está dado por:

$$T_{x+dx} \cos \theta_{x+dx} - T_x \cos \theta_x = 0$$

$$T_{x+dx} \sin \theta_{x+dx} - T_x \sin \theta_x + \int_x^{x+dx} f(s) ds = 0$$

Para pequeños desplazamientos

$$\cos \theta_{x+dx} \approx \cos \theta_x \approx 1 \rightarrow T_{x+dx} \approx T_x \approx T = 1$$

$$\sin \theta_y \approx \tan \theta_y \approx \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_y$$

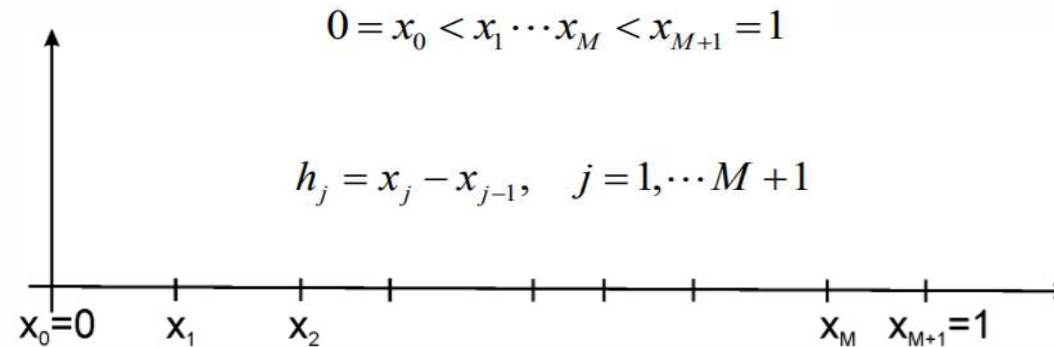
Reemplazo términos y obtengo

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + f(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = 0$$

Repasar: desplazamiento virtual.

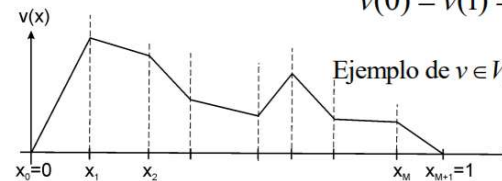
Fuente: [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_1.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_1.pdf)

Como iniciamos la formulación de problema a resolver por MEF



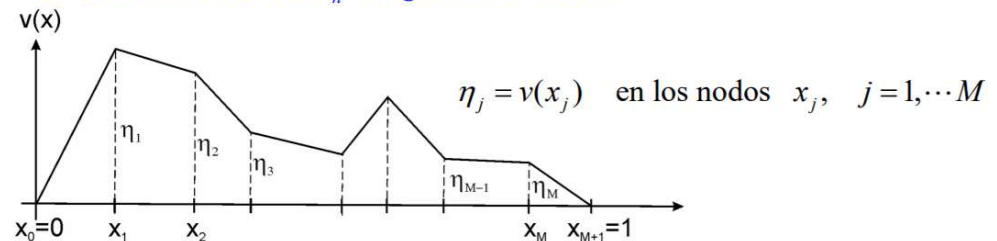
A partir de esto formulamos  $V_h$  (subespacio finito equivalente que contiene a  $v$  y esta incluido en  $V$  que es el espacio analizado  $\rightarrow$

- Sea  $V_h = \left\{ \begin{array}{l} v / v \text{ es lineal en cada subintervalo } I_j \\ v \text{ es continua en el } [0,1] \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}$



Notar que  $V_h \subset V$

- Para describir  $v \in V_h$  elegimos los valores



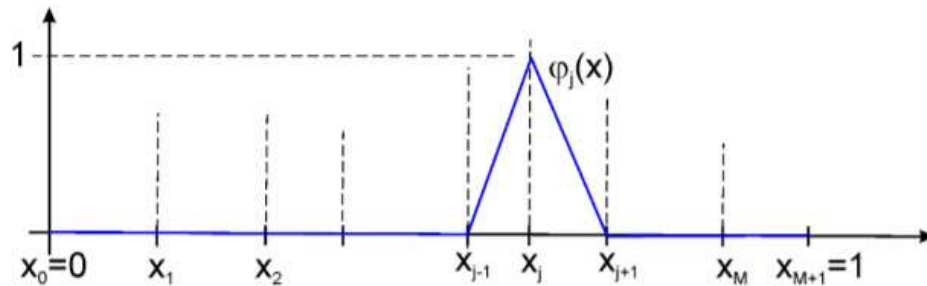
Repasar: espacios de banach, funciones de base.

<https://www.youtube.com/watch?v=J9BI74uCh68>

Fuente: [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_1.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_1.pdf)

Concepto de funciones de base o de forma

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, M$$



$\varphi_j(x)$ : función continua lineal por tramos que verifica la propiedad *delta*.

Luego algún campo que se quiera estudiar se puede expresar como

$$v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x) \quad x \in [0, 1] \quad , \quad \eta_i = v(x_i)$$

Según Lagrange

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

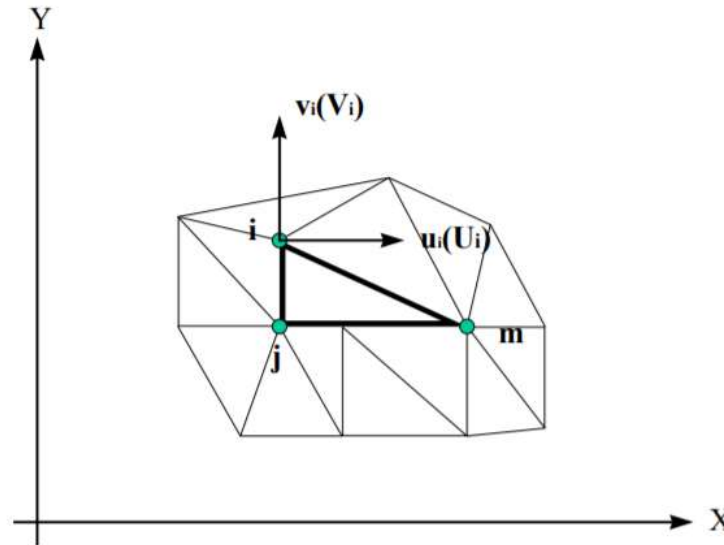
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}; \quad J \text{ dif } i$$

Repasar: espacios vectoriales, funciones de base. Método de interpolación de Lagrange.

Fuente: [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_1.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_1.pdf)

## CI254 –Teoría de la Elasticidad

Un elemento finito viene definido por sus nodos y su contorno



El campo de desplazamientos del modelo se define a partir de la ecuación

$$\bar{u} = \sum N_i a_i^e = [N_i \quad N_j \quad \dots] \begin{pmatrix} \bar{a}_i \\ \bar{a}_j \\ \dots \end{pmatrix}^e = Na^e$$

Donde  $N_i$  son funciones de forma, y  $a_i$  son los desplazamientos nodales

**Repasar: espacios vectoriales, funciones de base.**

**Fuente:** <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

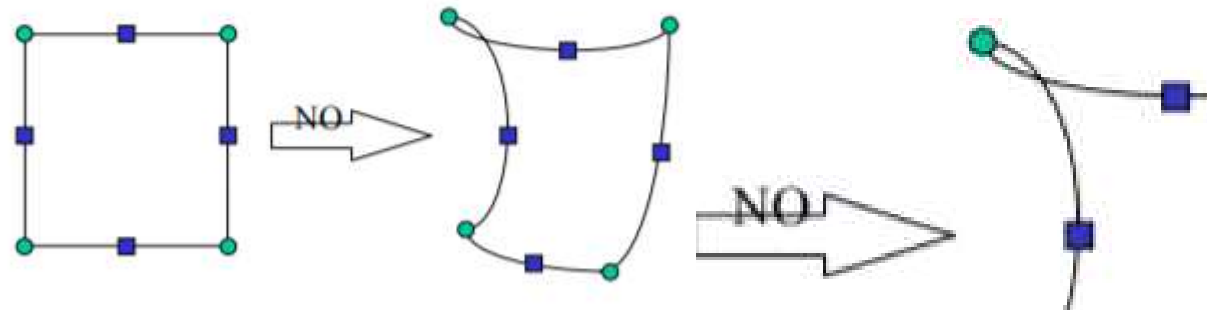
## CI254 –Teoría de la Elasticidad

Antes de seguir... entendamos el concepto de COORDENADAS GENERALIZADAS

Son las que están definidas de manera local para cada elemento y se configuran de tal manera que una vez asociadas a las funciones de forma no generen interferencias entre si.

Es conveniente que las funciones de forma tengan la propiedad de valer la unidad en los nodos a los que están asociadas y que tengan un valor nulo en el resto. Este tipo de elementos se llaman **elementos conformes**, y aseguran la continuidad de la ley de corrimientos entre elementos.

Las transformaciones deben ser unívocas, es decir a cada punto del sistema cartesiano le debe corresponder un único punto del sistema curvilíneo, y viceversa. Es decir no pueden existir elementos con pliegues.



**Figura 97. Transformación biunívoca que provoca pliegues en el elemento transformado.**

Luego de conocidos los desplazamientos nodales en el medio analizado, se pueden calcular deformaciones unitarias, bajo la siguiente secuencia analítica:

$$\varepsilon = Su$$

Sabiendo que  $u = Na$  y haciendo  $B = SN$

$\sigma$ : tensión en un punto

$B$ : matriz isoparamétrica

$a$ : desplazamientos nodales

$D$ : Matriz de rigidez

$\varepsilon_0$ : deformación inicial

$\sigma_0$ : tensión inicial

$S$ : operador lineal

$N$ : función de forma

$a$ : campo de desplazamientos nodales

Nos queda  $\varepsilon = Ba$

Luego se puede acceder al cálculo del campo de tensiones

siendo

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

El calculo de tensiones se puede realizar bajo la forma

$$\sigma = DBa^e - D\varepsilon_0 + \sigma_0$$

Luego de conocidos los desplazamientos nodales en el medio analizado, se pueden calcular deformaciones unitarias, bajo la siguiente secuencia analítica:

$$\varepsilon = Su$$

Sabiendo que  $u = Na$  y haciendo  $B = SN$

Se tiene que  $\varepsilon = S.N.a \Rightarrow$  se asocia el operador con N

Nos queda  $\varepsilon = Ba$

Luego se puede acceder al cálculo del campo de tensiones

siendo

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

El cálculo de tensiones se puede realizar bajo la forma

$$\sigma = DBa^e - D\varepsilon_0 + \sigma_0$$

$\sigma$ : tensión en un punto

B: matriz isoparamétrica

a: desplazamientos nodales

D: Matriz de rigidez

$\varepsilon_0$ : deformación inicial

$\sigma_0$ : tensión inicial

S: operador lineal

N: función de forma




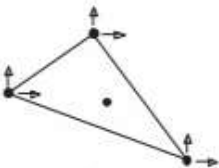
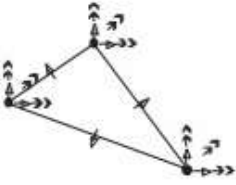
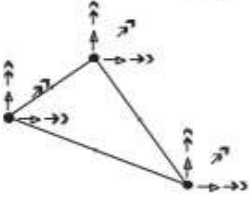



a: campo de desplazamientos nodales

recordar



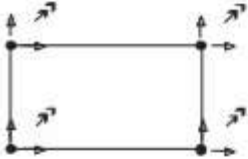



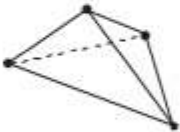
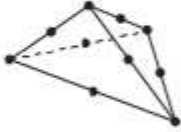



$$\bar{u} = \sum N_i a_i^e = [N_i \quad N_j \quad \dots] \begin{pmatrix} \bar{a}_i \\ \bar{a}_j \\ \dots \end{pmatrix} = Na^e$$



Tipos de elementos finitos más comunes

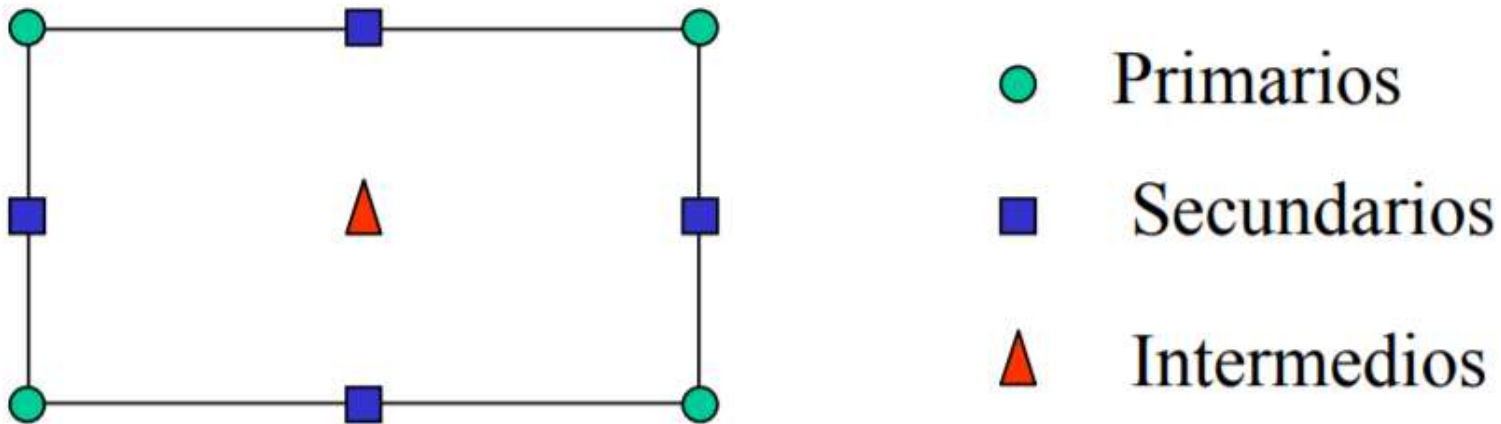
Geometria	Grados de libertad $\Sigma$	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF	Geometria	Grados de libertad $\Sigma$	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
		3	$P_1(K)$	$C^0$			6	$P_2(K)$	$C^0$
		10	$P_3(K)$	$C^0$			10	$P_3(K)$	$C^0$
		21	$P_5(K)$	$C^1$			18	$P_5(K)$	$C^1$
			•	Valor de la función					Valores de las derivadas segundas
				Valores de las derivadas primeras					Valor de la derivada normal al lado

Fuente: <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

Geometría	Grados de libertad $\Sigma$	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF	Geometría	Grados de libertad $\Sigma$	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
		4	$Q_1(K)$	$C^0$			9	$Q_2(K)$	$C^0$
		16	$Q_3(K)$	$C^0$			2	$P_1(K)$	$C^0$
		3	$P_2(K)$	$C^0$			4	$P_3(K)$	$C^1$
		4	$P_1(K)$	$C^0$			10	$P_2(K)$	$C^0$
			•	Valor de la función				Valores de las derivadas segundas	
				Valores de las derivadas primeras				Valor de la derivada normal al lado	

Fuente: <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

**Funciones de forma.** Tipos de nodos en un elemento finito.



Tipos de funciones:

- Serendípidas: admiten en su concepción solamente nodos primarios y/o secundarios.
- Lagrangianos: pueden admitir además nodos intermedios

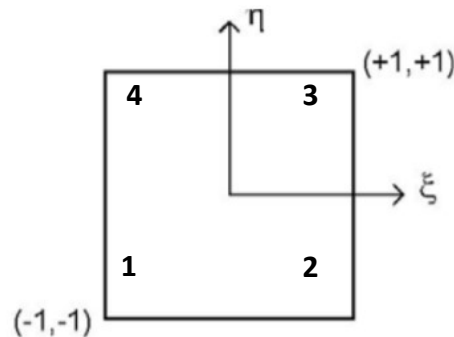
En algunos textos aparecen bajo el nombre de funciones interpolantes

**Funciones de forma.** Tipos de nodos en un elemento finito.

### 5.6.3 Elementos rectangulares. Formulación Serendipity.

En esta formulación las funciones de interpolación se definen de la siguiente manera:

- Se utilizan únicamente nodos situados en los contornos del elemento.
- Se utiliza un sistema de coordenadas local al elemento  $\xi, \eta$ , con origen en su centro y normalizadas de tal forma que valen  $+1$  y  $-1$  en sus extremos. En este sistema de coordenadas local, el elemento queda representado como un cuadrado de lado 2.
- El número de nodos existente en cada lado del elemento define el grado del polinomio interpolado en dicho lado.
- La función de interpolación completa es el producto de las funciones en cada dirección.



$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad \text{Las funciones de este elemento son:}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, \dots, 4$$

## CI254 – Teoría de la Elasticidad

### Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse

para el elemento analizado		qi: coordenadas locales del campo de desplazamientos									
		x,y: Coordenadas Globales del campo de desplazamientos									
x= suma producto	N1	q9	N2	q11	N3	q13	N4	q7	x=N1q1+N2q3+N3q5+N4q7		
	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	-1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	-1	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	1	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	1	UBICACIÓN GLOBAL EN X		
dx/dξ:	0.25	1	h	1	-1	1	-.h	1	-1	dx/dx: $\frac{1}{4} \{[(1+h)*(q5-q3)]+[(1-h)*(q7-q1)]\}$	
dx/dη:	0.25	1	x	1	1	1	-.x	-1	-1	dx/dh: $\frac{1}{4} \{[(1+x)*(q5-q7)]+[(1-x)*(q3-q1)]\}$	
y=sumaproducto	N1	10	N2	12	N3	14	N4	8	y=N1q2+N2q4+N3q6+N4q8		
	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	-1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	1	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	1	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	-1	UBICACIÓN GLOBAL EN Y		
dy/dξ:	0.25	1	-.h	-1	-1	1	h	1	1	dy/dx: $\frac{1}{4} \{[(1-h)*(q8-q2)]+[(1+h)*(q6-q4)]\}$	
dy/dη:	0.25	1	-.x	1	-1	1	x	1	-1	dy/dh: $\frac{1}{4} \{[(1-x)*(q4-q2)]+[(1+x)*(q6-q8)]\}$	
JACOBIANO											
		dx/dx:	dy/dx:		Ji	dx/dx:	dx/dh:	dy/dx:	dy/dh:		
					1	1	0	0	1		
J=		dx/dh:	dy/dh:		2	1	0	0	1		
					3	1	0	0	1		
					4	1	0	0	1		
JACOBIANOS											
	1	0		1	0			1	0		
J1	0	1		J3	0	1		J1^-1	0	1	dx/dx dx/dy
	1	0		1	0			1	0		
J2	0	1		J4	0	1		J2^-1	0	1	dh/dx dh/dy

Fuente: métodos numéricos y modelación – curso FCEQyN – Carlos Schezov .

## Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse

$$\mathbf{J}^{-T} = (\mathbf{J}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}\left((\mathbf{J}^T)^T\right)}{\det \mathbf{J}^T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \text{adj}(\mathbf{J}) = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}}$$

Luego, la matriz de rigidez resulta, haciendo cambio de variables al elemento master:

$$a_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \int_{\hat{K}} (\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (\mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j) |\det \mathbf{J}| d\hat{x} = \int_{\hat{K}} (\mathbf{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (\mathbf{J}_0 \nabla \hat{\varphi}_j) \frac{d\hat{x}}{|\det \mathbf{J}|}$$

**Repaso:** jacobiano, cuadraturas de gauss , formulas de newton cotes.

**Fuente:** [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_6.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_6.pdf).

## CI254 – Teoría de la Elasticidad

### Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse

RESOLVIENDO LAS DERIVADAS Y REEMPLAZANDO LAS COORDENADAS									
MATRIZ DE FUNCIONES DE FORMA									
N =	$1/4*(1-\gamma)$	0	$1/4*(1-\gamma)$	0	$1/4*(1+\gamma)$	0	$1/4*(1+\gamma)$	0	
	0	$1/4*(1-\gamma)$	0	$1/4*(1-\gamma)$	0	$1/4*(1+\gamma)$	0	$1/4*(1+\gamma)$	
B1 =		-0.5	0						
		0	-0.5						
		-0.5	-0.5						
B2 =		-0.5	0						
		0	0.5						
		0.5	-0.5						
B3 =		0.5	0						
		0	0.5						
		0.5	0.5						
B4 =		0.5	0						
		0	-0.5						
		-0.5	0.5						
		q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8
B =		-0.5	0.0	-0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0
		0.0	-0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	-0.5
		-0.5	-0.5	0.5	-0.5	0.5	0.5	-0.5	0.5

Fuente: métodos numéricos y modelación – curso FCEQyN – Carlos Schezov .

## Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse

MATRIZ CONSTITUTIVA			unidades	N										
datos				mm										
<b>E1:</b>	9786.00	<b>idc21:</b>	0.19	<b>G21:</b>	4111.76	transpuesta de B= B'			E.2/(2*(1-idc.21*idc.31))					
<b>E2:</b>	9786.00	<b>idc31:</b>	0.19	<b>G31:</b>	4111.76	-0.5	0	-0.5						
<b>E3:</b>	9786.00	<b>idc32:</b>	0.19	<b>G32:</b>	4111.76	0	-0.5	-0.5						
						-0.5	0	0.5				matriz constitutiva		
						0	0.5	-0.5				D=		
						0.5	0	0.5	10153	1929	0			
						0	0.5	0.5	1929	10153	0			
						0.5	0	-0.5	0	0	4112			
						0	-0.5	0.5						
transpuesta de B por D					1	2	3	4	5	6	7	8		
					3566	1510	1510	546	-3566	-1510	-1510	-546	1	
					1510	3566	-546	-1510	-1510	-3566	546	1510	2	
					1510	-546	3566	-1510	-1510	546	-3566	1510	3	
<b>B'D=</b>	964	5076	-2056	<b>B'DB=</b>	546	-1510	-1510	3566	-546	1510	1510	-3566	4	
					-3566	-1510	-1510	-546	3566	1510	1510	546	5	
					-1510	-3566	546	1510	1510	3566	-546	-1510	6	
					-1510	546	-3566	1510	1510	-546	3566	-1510	7	
					-546	1510	1510	-3566	546	-1510	-1510	3566	8	



## CI254 –Teoría de la Elasticidad

### Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse

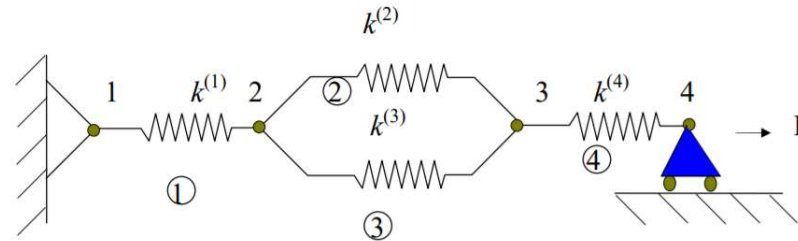
#### MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL - ELEMENTO RECTANGULO DE 4 NODOS

	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q7	q8	
Ke =	291421.29	123413.29	123413.29	44594.717	-291421.3	-123413.3	-123413.3	-44594.72	q9
	123413.29	291421.29	-44594.72	-123413.3	-123413.3	-291421.3	44594.717	123413.29	q10
	123413.29	-44594.72	291421.29	-123413.3	-123413.3	44594.717	-291421.3	123413.29	q11
	44594.717	-123413.3	-123413.3	291421.29	-44594.72	123413.29	123413.29	-291421.3	q12
	-291421.3	-123413.3	-123413.3	-44594.72	291421.29	123413.29	123413.29	44594.717	q13
	-123413.3	-291421.3	44594.717	123413.29	123413.29	291421.29	-44594.72	-123413.3	q14
	-123413.3	44594.717	-291421.3	123413.29	123413.29	-44594.72	291421.29	-123413.3	q7
	-44594.72	123413.29	123413.29	-291421.3	44594.717	-123413.3	-123413.3	291421.29	q8

$$K_e = t \cdot A \cdot [B]^T \cdot D \cdot B$$

## Ensamble de matriz de Rigidez

Definición: es el elemento matricial encargado de asociar las propiedades físicas del medio al sistema de ecuaciones que pretende resolverse



Nodo 1  $k_{11}^{(1)} \delta_1 + k_{12}^{(1)} \delta_2 = R_1$

Nodo 2  $k_{21}^{(1)} \delta_1 + (k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)}) \delta_2 + (k_{23}^{(2)} + k_{23}^{(3)}) \delta_3 = 0$

Nodo 3  $(k_{32}^{(1)} + k_{32}^{(3)}) \delta_2 + (k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} + k_{33}^{(4)}) \delta_3 + k_{34}^{(4)} \delta_4 = 0$

Nodo 4  $k_{34}^{(4)} \delta_3 + k_{44}^{(4)} \delta_4 = F$

VI.7

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & & & \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(2)} + k_{23}^{(3)} & & \\ & k_{32}^{(2)} + k_{32}^{(3)} & k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} + k_{33}^{(4)} & k_{34}^{(4)} & \\ & & k_{43}^{(4)} & k_{44}^{(4)} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (a)$$

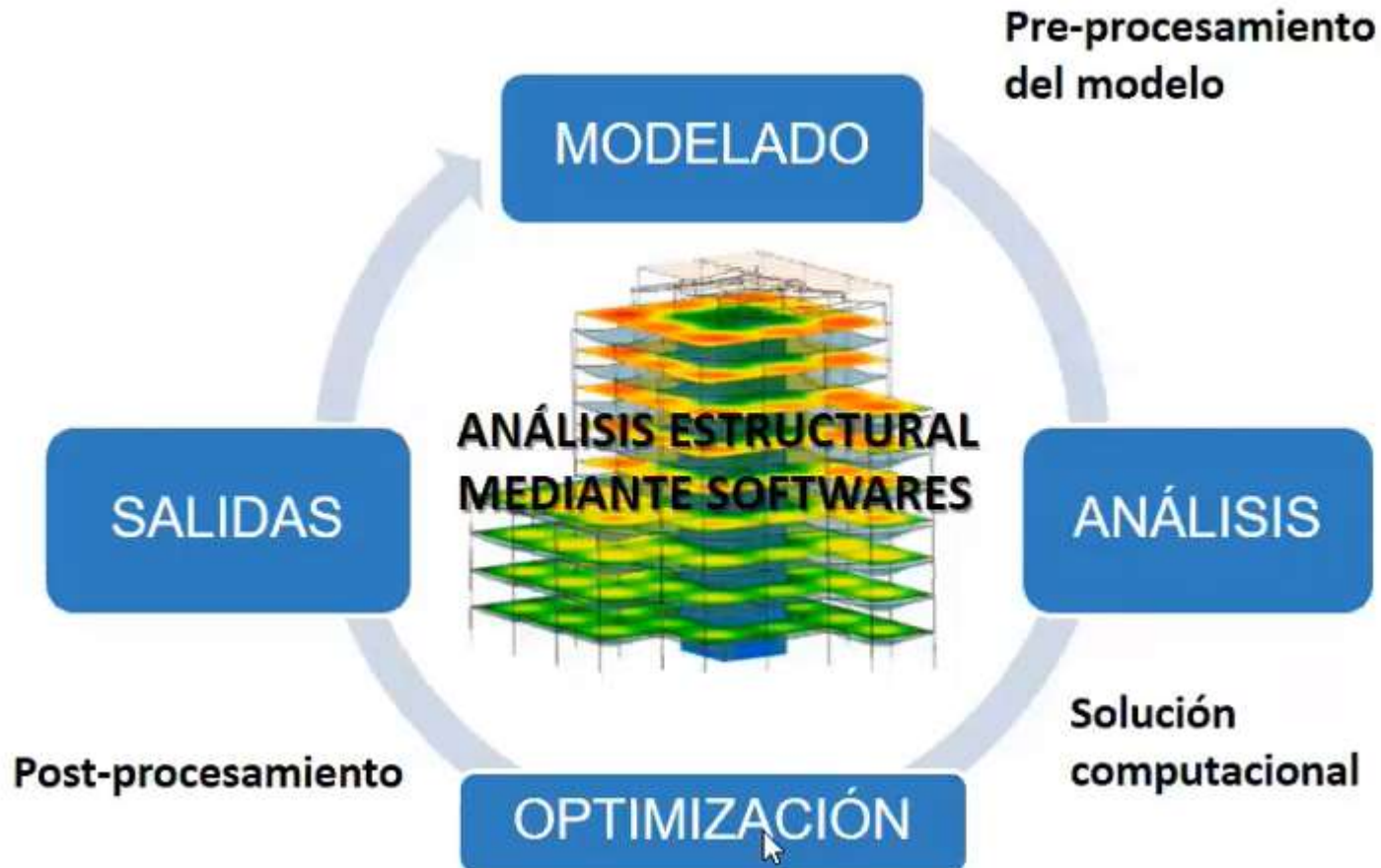
(a)

VI.8

ó

$$[k] \{\delta\} = \{R\} \quad (b)$$

## Resumen operativo



Fuente: <https://www.youtube.com/watch?v=oLI3ircoxQw>.

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa MEF se dividen en:

**Pre proceso,**

que consiste en la definición de geometría, generación de la malla, las condiciones de contorno y asignación de propiedades. En ocasiones existen operaciones cosméticas para garantizar una mejor aproximación o una mejor convergencia del cálculo.

**Cálculo,**

el resultado del pre proceso, permite generar un conjunto de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas, que puede ser resuelto con cualquier algoritmo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el problema a tratar es un problema no lineal o un problema **dependiente del tiempo** a veces el cálculo consiste en una **sucesión finita de sistemas de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas** que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.

**Pos proceso,**

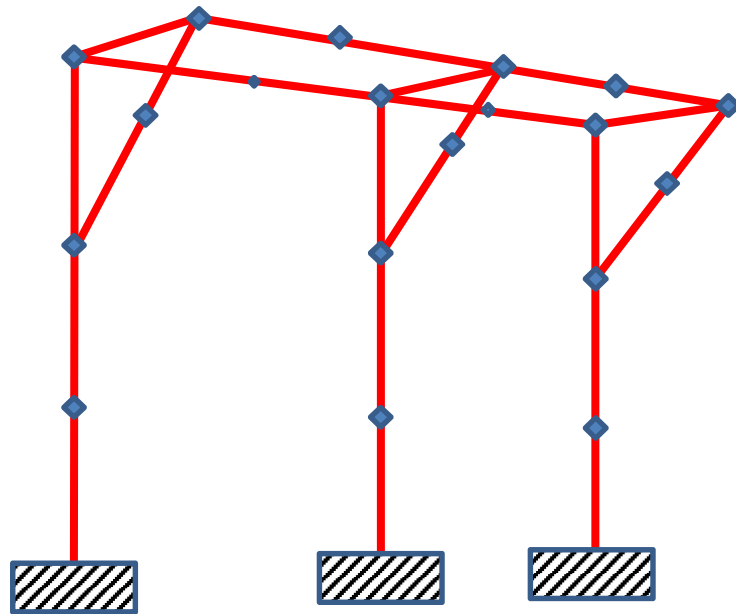
el cálculo proporciona **valores de cierto conjunto de funciones en los nodos de la malla** que define la discretización, en el pos proceso se calculan magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos, y en ocasiones se aplican operaciones de suavizado, interpolación e incluso determinación de errores de aproximación.

**Fuente:** [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos)

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa MEF se dividen en:

### Pre proceso

Consiste en la definición de geometría, generación de la malla, las condiciones de contorno y asignación de propiedades. En ocasiones existen operaciones cosméticas para garantizar una mejor aproximación o una mejor convergencia del cálculo.



Sistema de barras

22 nodos

26 barras

114 incógnitas

Barras → Sección / Propiedades mecánicas

Borde → 3 puntos de encastre total.

Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos)

## CI254 –Teoría de la Elasticidad

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa MEF se dividen en:

### **Cálculo,**

el resultado del pre proceso, permite generar un conjunto de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas, que puede ser resuelto con cualquier algoritmo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el problema a tratar es un problema no lineal o un problema **dependiente del tiempo** a veces el cálculo consiste en una **sucesión finita de sistemas de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas** que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.

### Métodos de resolución

Directos → quedan descartados para su uso en MEF (Costo computacional)

Iterativos → son más económicos en cuanto a tiempo → Newton Raphson / Runge-Kutta

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa MEF se dividen en:

**Pos proceso,**

el cálculo proporciona **valores de cierto conjunto de funciones en los nodos de la malla** que define la discretización, en el pos proceso se calculan magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos, y en ocasiones se aplican operaciones de suavizado, interpolación e incluso determinación de errores de aproximación.

*De los desplazamientos → puedo obtener deformaciones → puedo obtener tensiones → puedo obtener solicitaciones*

## Post proceso. Integración numérica

Esto implica introducir un cambio de variable en las ecuaciones integrales que describen el comportamiento de los elementos. Las derivadas de las funciones de forma que intervienen en la expresión de  $\mathbf{B}$  son respecto a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , que guardan la relación (5.8) respecto a las coordenadas locales.

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B \cdot dV$$

$$f_b^e = - \int_{V^e} N^T b \cdot dV$$

$$f_\sigma^e = - \int_{V^e} B^T \sigma_0 \cdot dV$$

$$f_\varepsilon^e = - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_0 \cdot dV$$

$$f_t^e = - \int_{A^e} N^T t \cdot dA$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x_i} = [J]^{-1} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta_i} \quad (5.8)$$

**Repasar: cambio de variable, transformaciones.**

**Fuente:** <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>



## Integración numérica

Donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana de la transformación.

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Los diferenciales de volumen en cada sistema de coordenadas vienen relacionados de la forma,

$$dx \cdot dy \cdot dz = \det[\mathbf{J}] \cdot d\zeta \cdot d\eta \cdot d\xi$$

Una vez realizada la transformación, la integración es más sencilla en el sistema de coordenadas local  $(\zeta, \eta, \xi)$ , que en el cartesiano  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  en el que los dominios están distorsionados. Pero la obtención del resultado final puede presentar ciertos problemas ya que [106] .

- $\det[\mathbf{J}]$  puede ser cero a causa de una mala discretización, por lo que la solución no es posible;
- el proceso de elaboración del jacobiano es laborioso y consume recursos.
- el jacobiano puede estar mal condicionado ( $\det [\mathbf{J}]$  próximo a cero).

**Repasar: cambio de variable, transformaciones.**

**Fuente:** <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

## Integración numérica

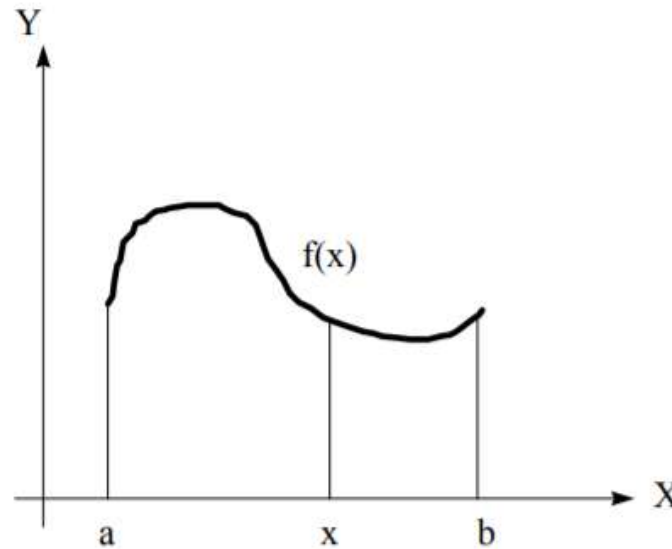


Figura 99. Límites de integración de la función f.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \int_a^b P(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b P(x) \cdot dx = \sum H_i \cdot f(x_i); H_i: \text{factor de peso.} \quad (5.10)$$

Repasar: cambio de variable, transformaciones.

Fuente: <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

## Integración numérica

El método más empleado para sustituir la función por un polinomio es la *cuadratura de Gauss-Legendre*. El método permite integrar cualquier función entre  $-1$  y  $+1$ , sustituyendo la función a integrar ( $f(x)$ ) por un polinomio de Legendre de grado  $2n-1$ . Tomando como base los  $n$  puntos de Gauss se puede obtener un valor tan aproximado a la integral como se desee.

Las abscisas de los puntos de Gauss corresponden a las raíces del polinomio de Legendre escogido.

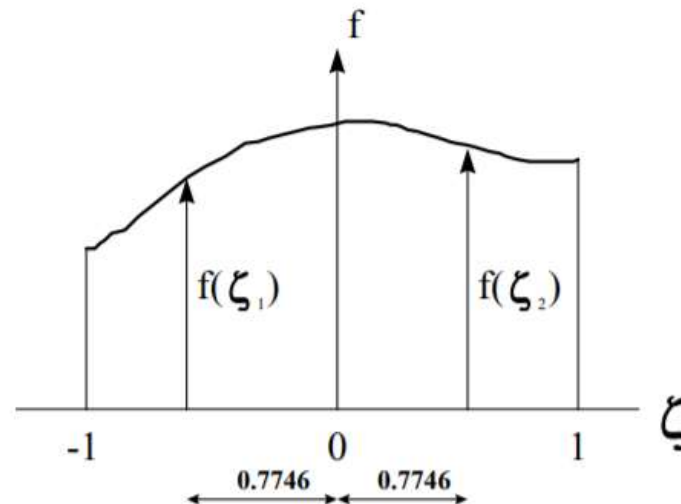


Figura 100. Integración de Gauss-Legendre de la función  $f$ .

**Repasar: cambio de variable, transformaciones.**

**Fuente:** <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

## Integración numérica

El método más empleado para sustituir la función por un polinomio es la *cuadratura de Gauss-Legendre*. El método permite integrar cualquier función entre  $-1$  y  $+1$ , sustituyendo la función a integrar ( $f(x)$ ) por un polinomio de Legendre de grado  $2n-1$ . Tomando como base los  $n$  puntos de Gauss se puede obtener un valor tan aproximado a la integral como se desee.

Las abscisas de los puntos de Gauss corresponden a las raíces del polinomio de Legendre escogido.

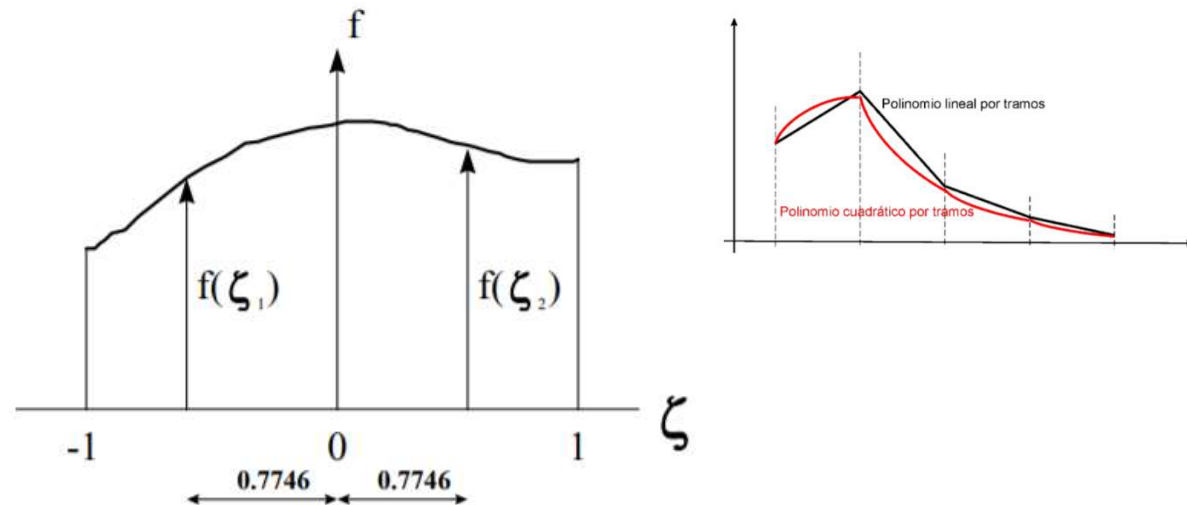


Figura 100. Integración de Gauss-Legendre de la función  $f$ .

Repasar: cambio de variable, transformaciones.

Fuente: <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

## CI254 –Teoría de la Elasticidad

### Integración numérica

La importancia de disponer de un medio para evaluar el error que se comete en el cálculo radica en que permite el refinamiento de los mismos. La finalidad es conseguir obtener resultados por debajo de un error marcado.

Existen 3 formas de refinamiento de los problemas:

- Método H: Consiste en la reducción del error actuando directamente sobre el tamaño del elemento y manteniendo constante la función de forma. Presenta dos inconvenientes, es el método más lento, desde el punto de vista de velocidad de convergencia; y se pierde el control sobre el mallado, pudiendo generarse mallas distorsionadas.
- Método P: Consiste en ir aumentando progresivamente el grado de los polinomios de interpolación (funciones de forma), manteniendo fijo el tamaño de los elementos. Tiene mayor velocidad de convergencia que el método H, pero presenta el problema de que requiere acotar el grado máximo del polinomio. Un grado muy alto podría provocar rizado en las soluciones.
- Método HP: Consiste en el uso secuencial de ambas técnicas. En primer lugar se optimiza el mallado a la geometría, y posteriormente se modifica el grado del polinomio hasta alcanzar el error deseado.

**Repasar: cambio de variable, transformaciones.**

**Fuente:** <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>

## CI254 –Teoría de la Elasticidad

### Integración numérica

### Resumen del método

1. Discretizar la estructura en elementos
2. Obtener la matriz de funciones de forma  $[N_e]$ 
  - Funciones que tienen valor 1 en el nudo correspondiente y 0 en el resto.
3. Identificar las condiciones de
  - **Compatibilidad**  $[\partial]$ : que relacionan deformaciones y desplazamientos de los elementos.  $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u_e\}$
  - **Comportamiento**  $[D]$ : que relacionan tensiones y deformaciones. **Ley de Hooke en casos elásticos**.  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$
4. Obtener la llamada matriz de deformación del elemento  $[B_e]$   $[B_e] = [\partial][N_e]$
5. Obtener la matriz de rigidez del elemento  $[k_e]$

$$[k_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D] [B_e] dV_e$$

6. Pasar las matrices de rigidez elementales a coordenadas globales si es necesario
7. Ensamblar la matriz de rigidez de toda la estructura.
8. Obtener el vector de fuerzas  $\{F_e\}$  a través de las fuerzas en los nodos equivalentes a las cargas distribuidas de volumen  $q_e$  o de superficie  $p_e$ . Considerando los diferentes vectores de fuerzas elementales se obtiene el global  $\{F_0\}$ 

$$\{F_e\} \begin{cases} P_e \\ \int_V [N_e]^T \{q_e\} dV_e \\ \int_S [N_e]^T \{p_e\} dS_e \end{cases}$$
9. Resolver la ecuación matricial para obtener los desplazamientos de los nodos y las reacciones.

$$\{F_0\} = [K_0]\{\delta_0\}$$

Repasar: cambio de variable, transformaciones.

<https://slideplayer.es/slide/4202751/>

### Referencias

<https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf;sequence=6>  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_0.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_0.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_1.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_1.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_2.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_2.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_3.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_3.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_4.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_4.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_5.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_5.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_6.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_6.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_7.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_7.pdf)  
[https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem\\_8.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/CursoFEM/cursofem_8.pdf)

<https://slideplayer.es/slide/4202751/>