Controladores de adelanto y atraso de fase

Sea la F.T genérica de un controlador de adelanto o de atraso dada por:

$$G_c(z) = K_c \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)} \quad (1)$$

z_1 y p_1 son cero y polo reales.

$G_c(z)$ tendrá características pasa bajas o pasa altas según sean la magnitudes de z_1 y p_1.

Sustituyendo la transformación $z = e^{sT} \underset{\text{Euler}}{\simeq} 1+s$ en (1), esta resulta:

$$G_c^*(s) \cong K_c \frac{(1 + sT - z_1)}{(1 + sT - p_1)} \quad (2)$$

$$G_c^*(s) \cong K_c \frac{(s + (1 - z_1)/T)}{(s + (1 - p_1)/T)}$$

Dado q' por razones de estabilidad es necesario q' el cero y el polo del compensador se ubiquen dentro del circulo unitario, $|z_1| = |p_1| \leq 1$, portanto estas raíces resultan en el semiplano izq. del plano s. A partir de las configuraciones conocidas de estos compensadores en el plano-s tenemos que:

Compensador de atraso de fase:

Frec. polo < Frec. cero (plano S)

$$\frac{(1-p_1)}{T} < \frac{(1-z_1)}{T} \Rightarrow z_1 < p_1 \text{ (plano Z)}$$

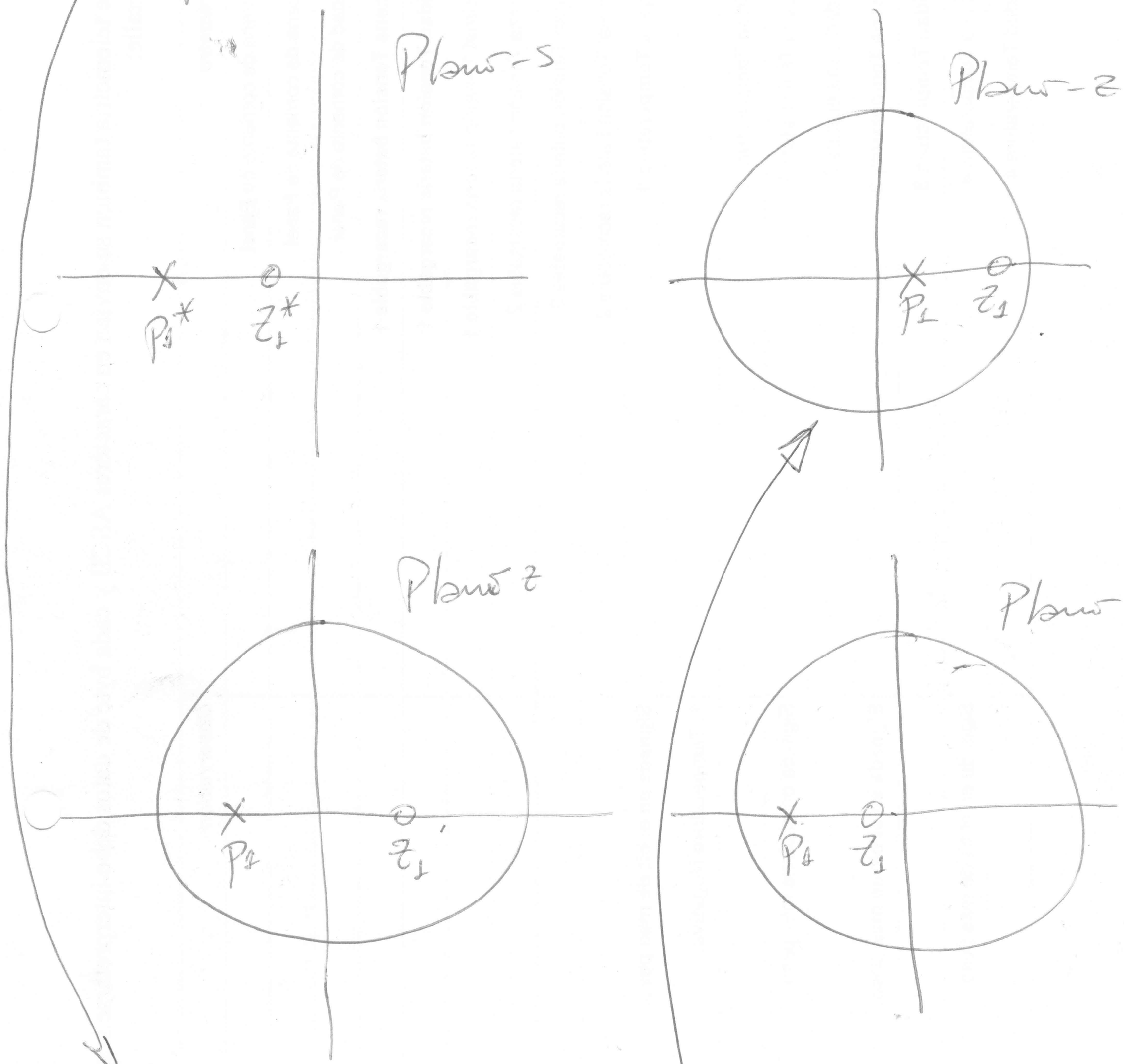
$$1-p_1 < 1-z_1$$

$$-p_1 < -z_1 \Rightarrow \boxed{z_1 < p_1}$$

Compensador de adelanto de fase:

Frec. polo > Frec. cero (plano-s)

$$\frac{(1-p_1)}{T} > \frac{(1-z_1)}{T} \Rightarrow p_1 < z_1 \text{ (plano-z)}$$



$$1 - p_1 > 1 - z_1$$

$$-p_1 > -z_1 \Rightarrow \boxed{z_1 > p_1}$$

Controlador Discreto PID

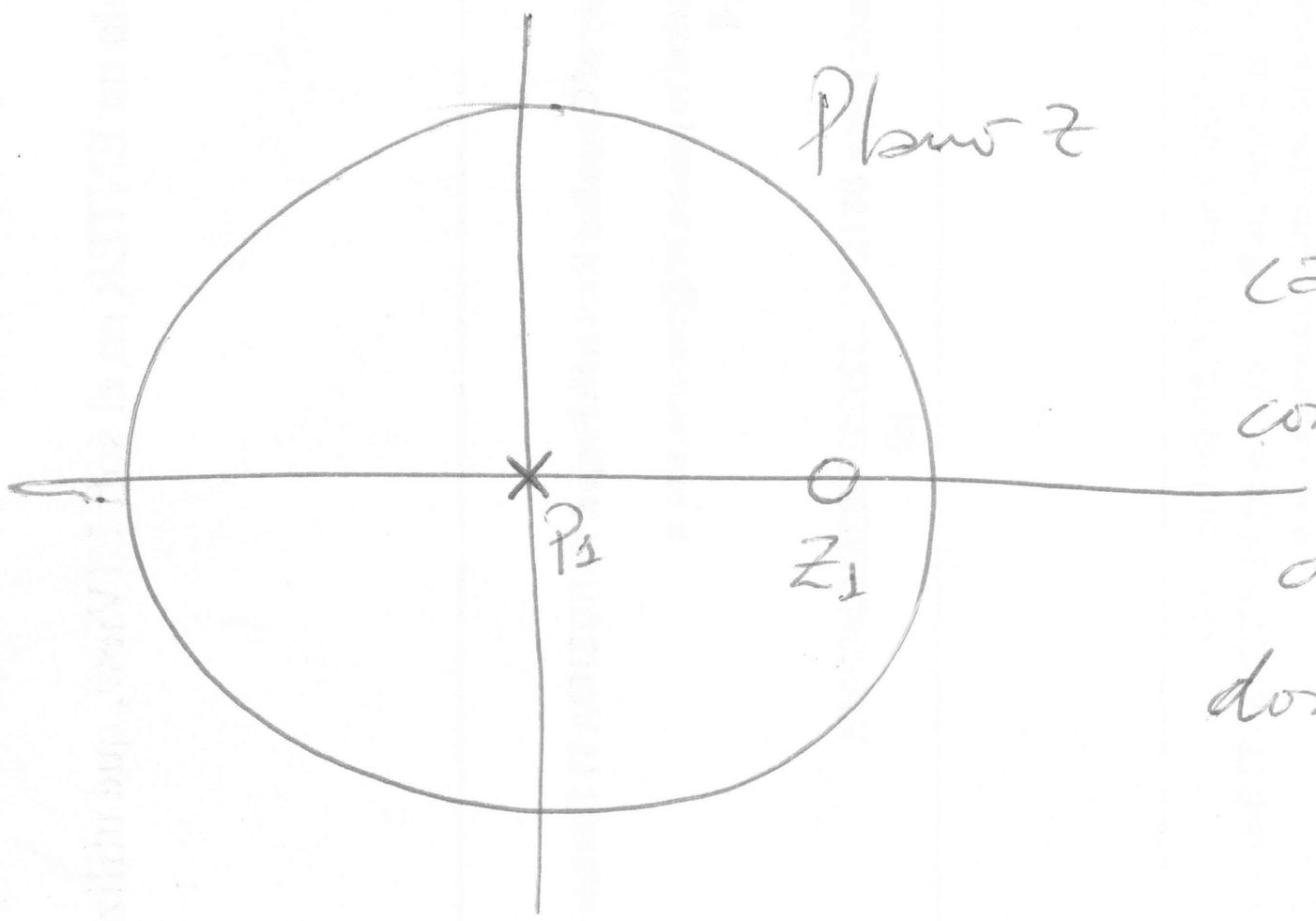
a) Controlador PD:

Teníamos que la F.T del PD era:

$$G_c(z) = \frac{K_pT + K_d}{T} \times \frac{z - [K_d/(K_pT + K_d)]}{z}$$

$$K_c = \frac{K_pT + K_d}{T} \qquad z_1 = \frac{K_d}{K_pT + K_d}$$

Caso especial ec. (1)
$p_1 = 0$



El PD es un caso especial del compensador de adelanto de fase donde $p_1 = 0$

b) Controlador PI:

- Método Forward o diferencias hacia adelante

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_iT}{} \cdot \frac{1}{z-1} = K_p \cdot \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p - K_iT}{K_p}$$

$$K_c = K_p \qquad z_1 = \frac{K_p - K_iT}{K_p} \quad y \quad p_1 = 1$$

Caso especial de la (1)
$p_1 = 1$
$z_1 = \frac{(K_p - K_iT)}{K_p}$
$K_c =$

z_1 puede estar tanto en la parte (+) como (−) del eje real.

- Método Backward

$$G_c(z) = K_p + K_i \cdot T \cdot \frac{z}{z-1} = (K_p + K_i T) \times \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p}{K_p + K_i T} \Rightarrow K_c = (K_p + K_i T)$$

$$Z_1 = \frac{K_p}{K_p + K_i T}$$

$$P_1 = 1$$

Z_1 sobre el eje real (+)

- Método Trapezoidal o de Tustin

$$G_c(z) = K_p + K_i \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+a}{z-1}$$

$$K_c = \frac{2K_p + K_i T}{2} \qquad a = \frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p}$$

$Z_1 = a$ y $P_1 = 1$ Z_1: sobre el eje real (+)

Los 3 PI's son casos especiales del controlador de atraso de fase con $P_1 = 1$ y Z_1 dependiendo de la relación entre K_i y K_p y un dado T.-

... Continua del PID apunte: (escrito con birome verde) 6

Funciones de Transferencia PID

$$G_c(z) = K_p + G_{ci}(z) + G_{cd}(z)$$

Donde: K_p es la cte. del control Prop.

$G_{ci}(z)$: F.T del control Integral q' puede ser modelada por algunas de la 3 aproximaciones vistas.

$G_{cd}(z)$: F.T del control derivativo q' puede ser modelada por la aproximación a diferencias (Backward o Forward) 4

Integración Rectangular con Diferencias hacia atras

$$G_c(z) = \frac{(K_pT + K_D)z^2 + (K_iT^2 - K_pT - 2K_D)z + K_D}{T.z.(z-1)}$$

Integ. rectangular con Dif. hacia adelante

$$G_c(z) = \frac{(K_pT + K_D + K_iT^2)z^2 - (K_pT + 2K_D)z + K_D}{Tz(z-1)}$$

Int. con transf. bilineal

$$G_c(z) = \frac{(2K_pT + K_iT^2 + 2K_D)z^2 + (K_iT^2 - 2K_pT - 4K_D)z + 2K}{2T.z(z-1)}$$

Si se necesitan solo un PD o un PI en cualquiera de los anteriores es posible obtener los casos particulares haciendo $K_i = 0$.

<u>Controlador PD</u> : <u>Aproximación de Backward</u>

$$G_{PD}(z) = K_p + K_D \frac{z-1}{zT} = \frac{zTK_p + K_D(z-1)}{z.T}$$

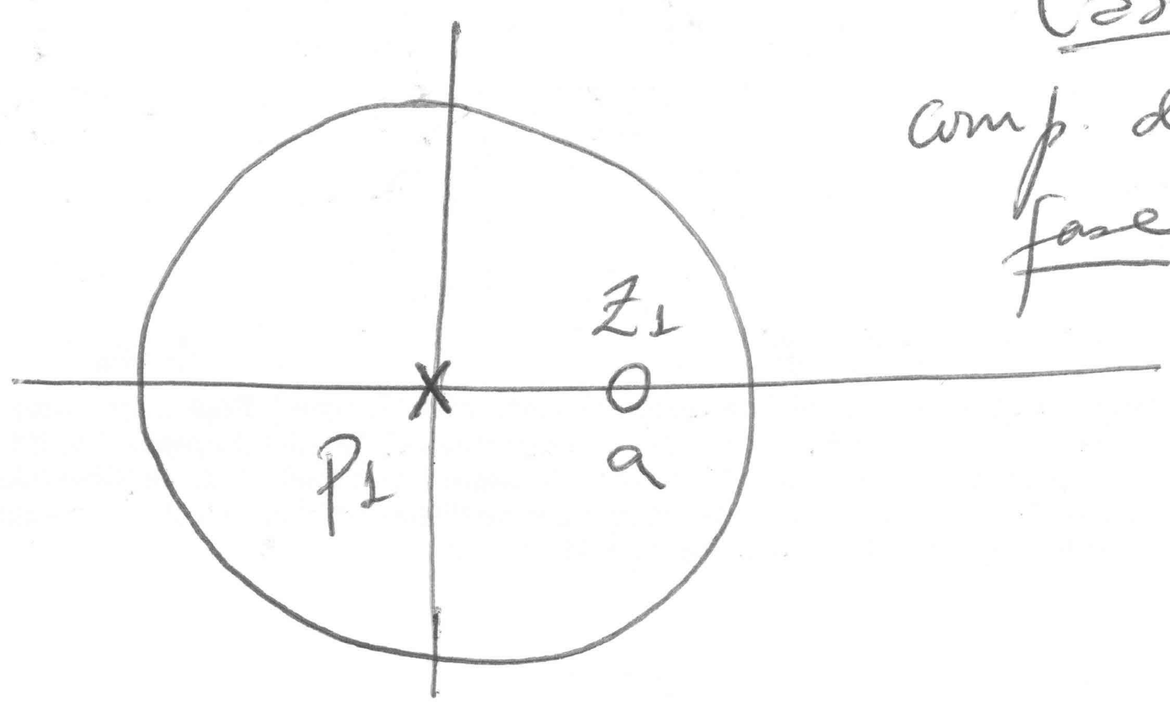
$$G_{PD}(z) = \frac{z.TK_p + z.K_D - K_D}{z.T}$$

$$G_{PD}(z) = \frac{z(T.K_p + K_D) - K_D}{zT}$$

$$G_{PD}(z) = \frac{z - K_D/(K_p.T + K_D)}{z} \times \frac{K_pT + K_D}{T}$$

$$G_{PD}(z) = K_{PD} \cdot \frac{z-a}{z} \qquad a = \frac{K_D}{K_pT + K_D}$$

El PD introduce un cero en "a" dado por la relación entre K_p y K_D y T y un polo al origen. <u>"a" se encuentra sobre el eje real positivo.</u>



<u>Caso especial</u> del comp. de <u>adelanto de fase</u> donde

$P_1 = 0$

Controlador PI

Método Forward

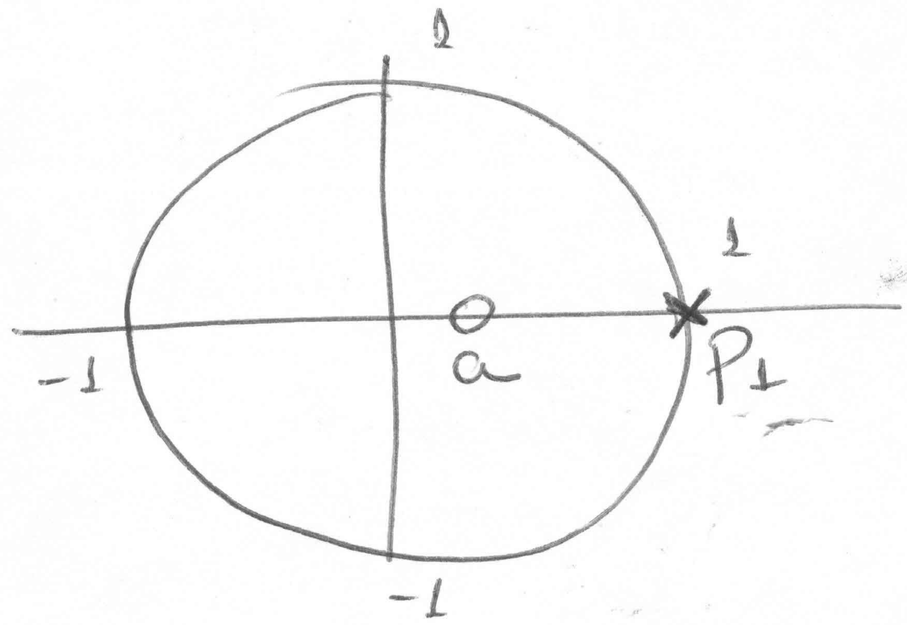
$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{z-1}$$

$$G_c(z) = \frac{K_p(z-1) + K_i T}{(z-1)} = \frac{K_p z - K_p + K_i T}{z-1}$$

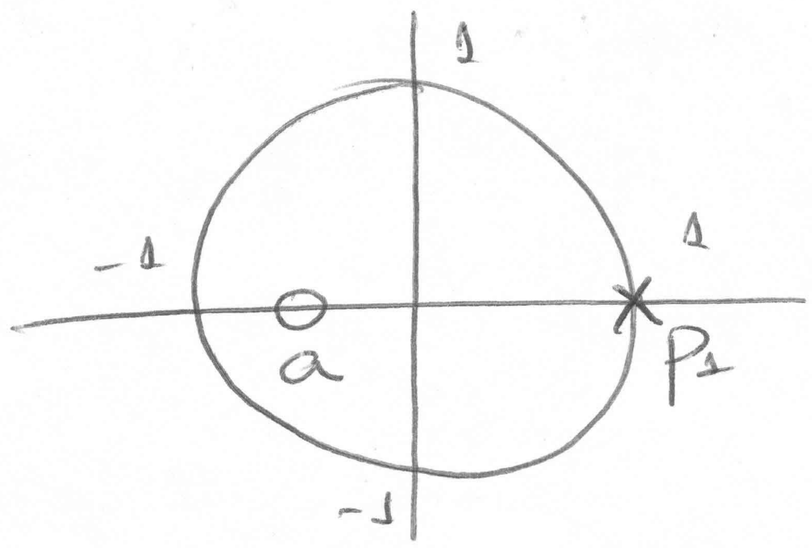
$$G_c(z) = K_p \cdot \frac{z - (K_p - K_i T)/K_p}{z-1} = K_{pI} \cdot \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p - K_i T}{K_p} \qquad K_{pI} = K_p$$

Si $K_p > K_i T \Rightarrow$



Si $K_p < K_i T \Rightarrow$



Metodo Backward

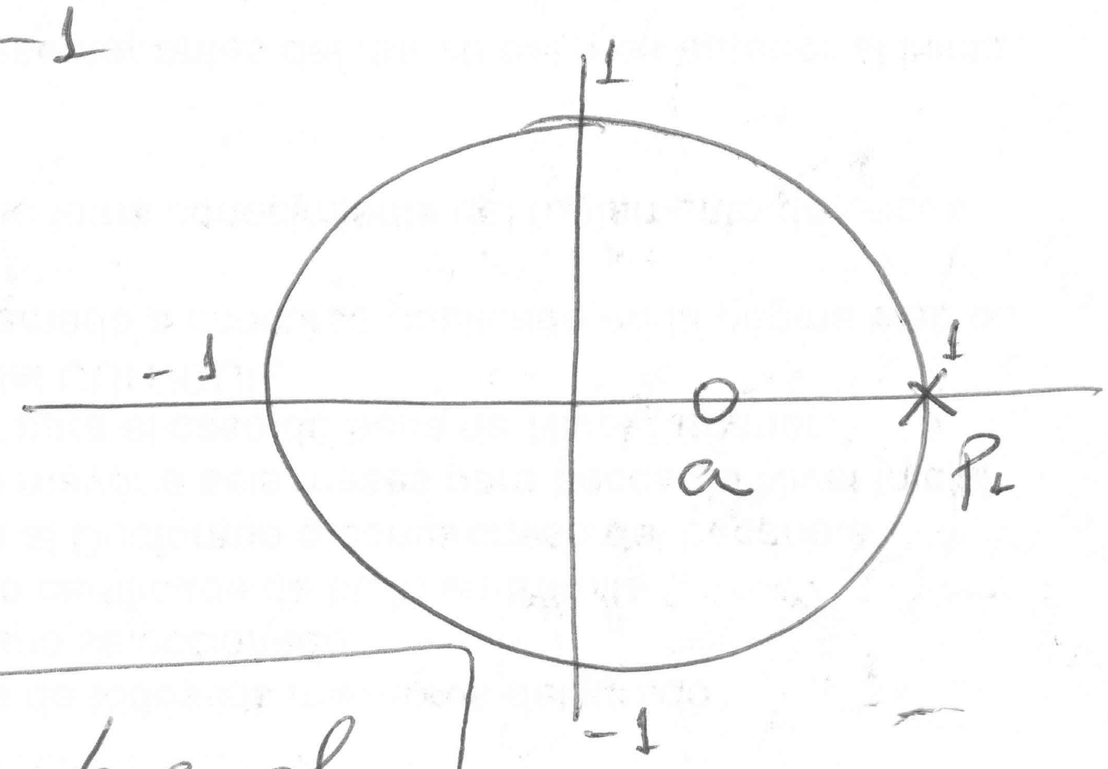
$$G_c(z) = K_p + K_i \frac{T.z}{z-1}$$

$$G_c(z) = \frac{K_p(z-1) + K_i T.z}{z-1} = \frac{K_p z - K_p + K_i T.z}{z-1}$$

$$G_c(z) = \frac{(K_p + K_i T)z - K_p}{z-1} = K_p + K_i T \times \frac{z - K_p/(K_p + K_i T)}{z-1}$$

$$G_c(z) = K_{PI} \times \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p}{K_p + K_i T}$$



"a" siempre sobre el eje real (+)

Método Tustin

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i . T(z+1)}{2(z-1)} = \frac{2(z-1)K_p + K_i T(z+1)}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{2zK_p - 2K_p + K_i T z + K_i T}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{z(2K_p + K_i T) + K_i T - 2K_p}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{2K_p + K_iT}{2} \times \frac{z + (K_iT - 2K_p)/(2K_p + K_iT)}{(z-1)}$$

$$G_c(z) = K_{pI} \times \frac{z+a}{z-1}$$

$$K_{pI} = \frac{2K_p + K_iT}{2} \qquad a = \frac{K_iT - 2K_p}{2K_p + K_iT}$$

El cero "a" puede estar sobre el eje real (+) o (−) dependiendo K_i, K_p y T o lo q' es lo mismo dependiendo de la relación entre K_iT y $2K_p$.

<u>Proyecto</u>: Si no existen restricciones en cuanto a desempeño transitorio y lo q' se desea es nada mas mejorar el regimen permanente se puede cancelar uno de los polos de L.A (de la planta) con el cero q' introduce el PI: <u>Criterio</u>

Cancelar los polos q' se encuentran próximos a $z=1$ p' ganar margen de estabilidad (aumento de K_p)