



Aproximación de Controladores en Tiempo Continuo

1

El caso típico se da cuando un sistema de control en tiempo continuo o analógico, se sustituye por un sistema de control por computador o microproc. Es natural tratar de convertir el controlador analógico a un controlador de tiempo discreto, en forma directa.

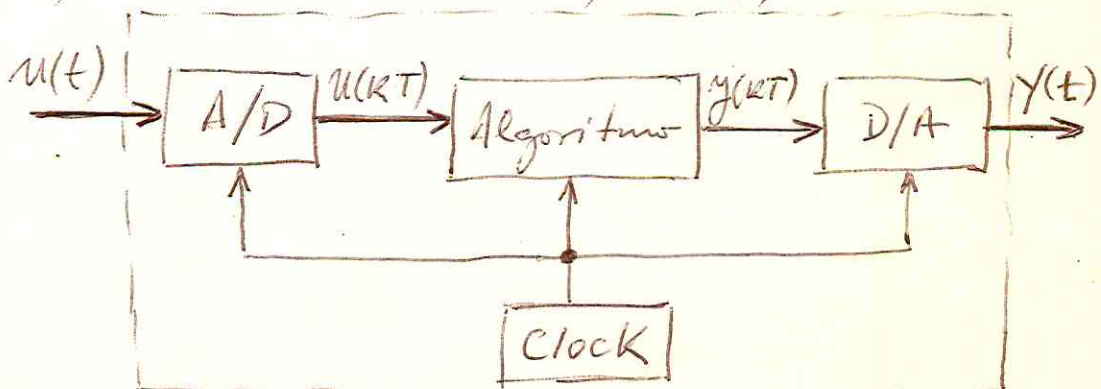
Una forma simple, es la de utilizar un periodo de muestreo pequeño y realizar algunas aproximaciones en tiempo discreto del controlador de tiempo continuo.

Aproximaciones basadas en funciones de transf.

Se asume que el controlador en tiempo continuo está dado por una función de transferencia $G_c(s)$. Se desea entonces, encontrar un algoritmo de computador de tal forma que el sistema digital resultante aproxime la función de transferencia

$$G_c(s)$$

$$G_c(z) \approx G_c(s)$$



La aproximación puede ser realizada de diferentes formas.

Diferenciación y Testin (Aproximaciones por)

Una función de transferencia representa una ec. diferencial. Es natural, entonces, obtener una ecuación a diferencias (o de estado) por aproximación de derivadas, por ejemplo ~~por~~ mediante:

- Método de Euler o Forward Difference

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T} \quad (1)$$

$$\mathcal{Z} \left[\frac{x(t+T) - x(t)}{T} \right] = \frac{\mathcal{Z}X(z) - X(z)}{T}$$

$$= \frac{z-1}{T} X(z) \quad (2)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx \frac{z-1}{T} X(z)} \quad \text{Forward} \quad (3)$$

- Método de Backward Difference

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T)}{T} \quad (4)$$

$$\mathcal{Z} \left[\frac{x(t) - x(t-T)}{T} \right] = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T}$$

$$(5) \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} \approx \frac{1-z^{-1}}{T} X(z) = \frac{z-1}{zT} X(z)}$$



En la transformación (2) de variables, lo expuesto anteriormente corresponde

a sustituir "s" por $\frac{z-1}{T}$ o $\frac{z-1}{zT}$.

Como se vio anteriormente, las variables z y s están relacionadas por la siguiente transformación

$$z = e^{sT}. \text{ Las aproximaciones por diferencias}$$

por esta transformación, corresponden a las expansiones en serie:

$$(6) \quad z = e^{sT} \approx 1 + sT \rightarrow \text{Método de Euler}$$

$$(7) \quad z = e^{sT} \approx \frac{1}{1 - sT} \rightarrow \text{Backward Difference}$$

Otra aproximación, esta s corresponde al método trapezoidal de aproximación por integración numérica:

$$(8) \quad z = e^{sT} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \rightarrow \text{Trapezoidal Tustin o Transformación Bilineal.}$$

Utilizándose los métodos de aproximación anteriores, la función de transferencia $G_c(z)$ se obtiene reemplazando la variable "s" por s^* , donde s^* está dada en cada caso por:

- Forward Difference o Euler :

de (6):
$$S^* = \frac{z-1}{T} \quad (9)$$

- Backward Difference :

de (7): $-zS^*T + z = 1 \Rightarrow zS^*T - z = -1$

~~$S^*T(1-z) = -1$~~

$zS^*T = z - 1$

(10)
$$\Rightarrow S^* = \frac{z-1}{z \cdot T} \quad (10)$$

- Tustin o trapezoidal :

de (8):
$$z - \frac{zS^*T}{2} = 1 + \frac{S^*T}{2}$$

$$\frac{S^*T}{2} + \frac{zS^*T}{2} = z - 1$$

$$\frac{S^*T}{2}(1+z) = z - 1$$

$$\Rightarrow S^* = \frac{z}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (11)$$

$$\Rightarrow G_c(z) = G_c(s^*)$$

Si se analizan las regiones de estabilidad mapeadas en el plano z por las 3 aproximaciones presentadas, considerando $\text{Real}(s) < 0$ en el plano s ; se tienen los siguientes casos:

Regiones de estabilidad
en el plano- z y las
aproximaciones (9), (10) y (11):

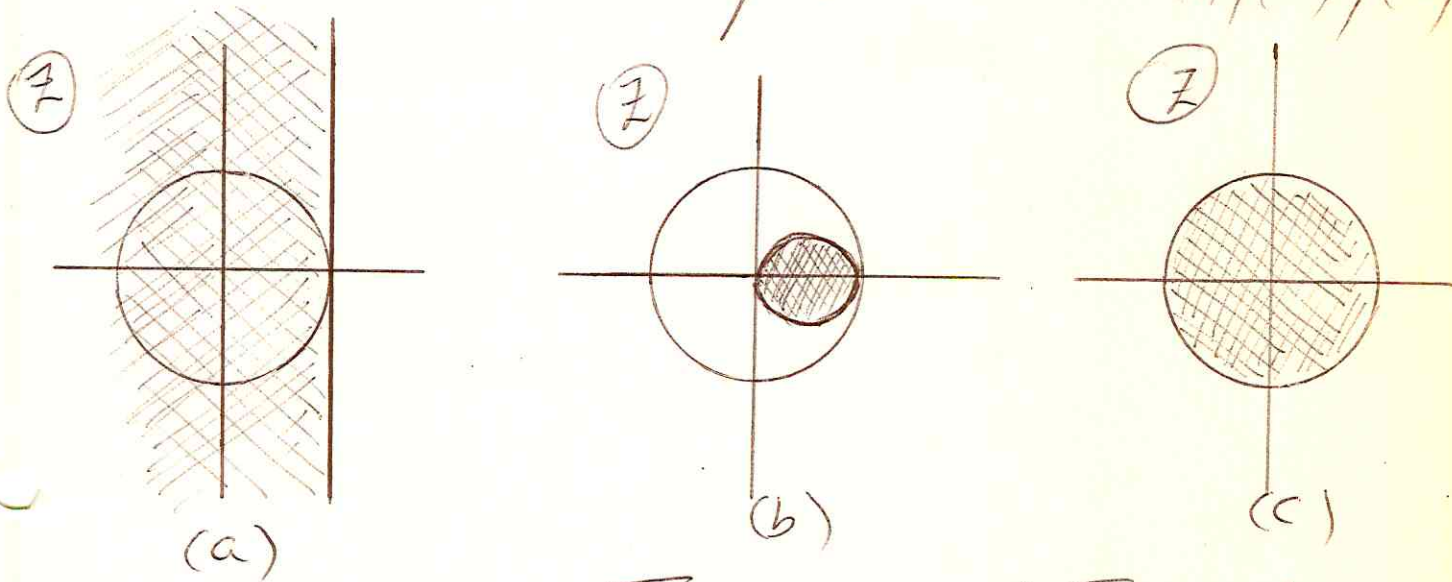


Figura 2 : (a) Forward,
(b) Backward y (c) Tustin.

Si se observa la fig. 2(a), se deduce inclusivo cuando el sistema en tiempo continuo resulte estable, en tiempo discreto puede resultar inestable.

Si se usa la aproximación Backward, un sistema en tiempo cont. estable, resultará siempre en un sist. discreto estable; fig. 2(b).

Existen sin embargo, sistemas en T.C. inestables y son transformados en sistemas de T.D. estables.

En el caso de Tustin, todo el semiplano izq. del plano- s se mapea en el círculo unitario del plano- z . Por lo si sist. en T.C. estables, serán sist. en T.D. estables y sist. T.C. inestables, resultarán también en sist. de T.D. inestables.

Integración Rectangular ①

Uno de los métodos de integración numérica estándares es la aproximación rectangular. La aproximación se realiza sumando las áreas rectangulares de anchos T debajo de la forma de onda escalonada resultante de la aproximación a la salida del ZOH.

Esta aproximación rectangular es equivalente a insertar un muestreador ideal y un retenedor de orden cero, antes de cada integrador, como se muestra en la Figura 1.

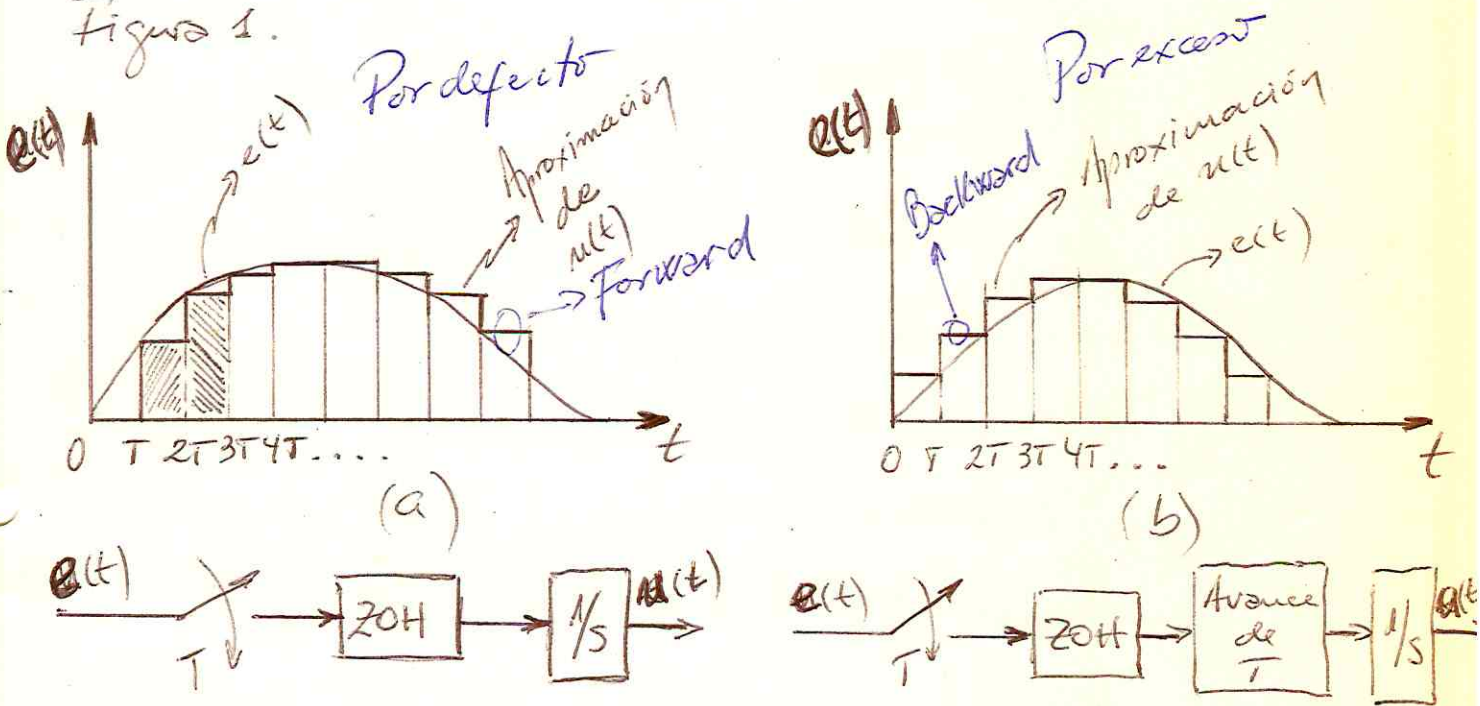


Figura 1. (a) Aproximación rectangular. (b) Aproximación rectangular con avance de T .

En referencia a la figura 1.a, la función de transf. en Z de la aproximación es:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{T}{z - 1} \quad ①$$

La ecuación de estado a diferencias finitas está dada por:

$$U(z) \cdot (z-1) = E(z) \cdot T$$

$$zU(z) - U(z) = E(z) \cdot T$$

$$u[(k+1)T] = u(kT) + T \cdot e(kT) \quad (2)$$

escribiendo la (2) en forma causal,

$$u(kT) = u[(k-1)T] + T e[(k-1)T] \quad (3)$$

De la misma forma, por la aproximación rectangular con avance de T o por excel:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = z(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{T \cdot z}{z-1} \quad (4)$$

y la ec. de estado:

$$zU(z) - U(z) = T \cdot z E(z)$$

$$u[(k+1)T] = u(kT) + T \cdot e[(k+1)T] \quad (5)$$

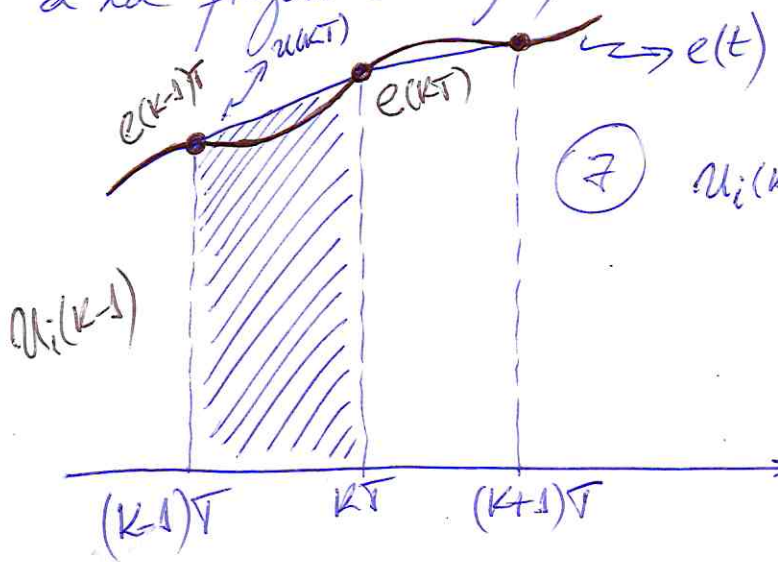
o en su forma causal:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + T \cdot e(kT) \quad (6)$$

En la (3) y en la (6), el término $u[(k-1)T]$, representa la acción integral en base a la historia de la señal de error, $e(kT)$.

Método Trapezoidal o Tustin

Como se vio anteriormente, y si hacemos referencia a la figura abajo, se tiene:



$$(7) \quad u_i(kT) = K_i \cdot T \cdot \left[\frac{e(kT) + e((k-1)T)}{2} \right] + u_i((k-1)T)$$

Como se puede observar la última ec. (7) es

similar en estructura a los (3) y (6); la única

diferencia en el cálculo de la acción integral es si no está basada en un solo valor del error sino más bien, en la media móvil de las 2 muestras del error más actuales (5 recientes). Este diferencia con los métodos de Euler, es responsable por la menor distorsión provocada en la respuesta en frecuencia del sistema de control de la transformación trapezoidal o de Tustin.

Este efecto en la deformación de frecuencia puede ser observado según sea la aproximación utilizada y una determinada condición. Esta condición es si la distorsión no sea mayor al 3%, la cual se cumplirá si las siguientes

- relaciones:
- Backward Euler : $f_s/f > 20$
 - Forward Euler : $f_s/f > 20$
 - Trapezoidal (Tustin) : $f_s/f > 10$

donde : $f_s = 1/T$, es la frecuencia de muestros ③
y f es la frecuencia de interés o frecuencia
de corte deseada.