

Aproximación y discretización de controladores ① de tiempo continuo basados en su función de transferencia

Una F.T representa una ecuación diferencial.
Es natural obtener una ecuación a diferencias
por aproximación de derivadas, por ejemplo

Euler: $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = \left[\frac{z-1}{T} \right] x(t)$

Forward difference (por defecto)

σ (por exceso)

Backward $\rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T)}{T} = \frac{z-1}{z \cdot T} x(t)$

en la transformación de variables, esto corresponde
a sustituir s por $\frac{z-1}{T}$ o s por $\frac{z-1}{z \cdot T}$

Recordemos q' la relación entre las variables
 s y z está dada por:

$$z = e^{sT}$$

Entonces, la aproximación de diferencias z
corresponde a la expansión en serie es

Método Euler: $z = e^{sT} \approx 1 + sT$

Backward Difference: $z = e^{sT} \approx \frac{1}{1 - sT}$

Trapezoidal Method: $z = e^{sT} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$

El Método Trapezoidal es llamado en control digital de aproximación de Tustin o aproximación bilineal. ②

Entonces, utilizando los métodos de aproximación arriba, la función de transferencia del compensador $G_c(z)$ se obtiene reemplazando el argumento "s" en $G_c(s)$ por s^* :

$$s^* = \frac{z-1}{T} \quad \text{Método Euler: Forward Diff.}$$

$$s^* = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Backward Diff.}$$

$$s^* = \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Aproximación de Tustin}$$

$$\Rightarrow G_c(z) = G_c(s^*)$$

Aproximación invariante al escalón o ~~comp~~ mantenedor de orden cero



$u(kT)$ debe ser igual a $u(t)$
en $t = kT$

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) G_c(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} G_c(s) \right] \quad \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$G_{cd}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} G_c(s) \right]$$

(3)

Mapeo de Diferencias

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

sustituyéndose la derivada por la aproximación de primer orden:

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(t) - e(t-T)}{T} \quad \text{Backward Diff.}$$

$$U(s) = sE(s) \rightarrow U(z) \approx \frac{1 - z^{-1}}{T} E(z)$$

$$\rightarrow TV(z) = E(z) - z^{-1}E(z)$$

$$U(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T} E(z)$$

se observa que sustituyéndose

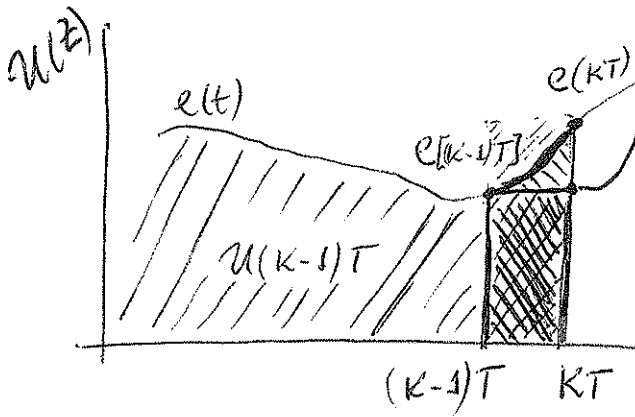
$$s \text{ por } \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$G_{cd}(z) = G_c(s^*) \Big|_{s^* = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

Métodos de aproximación por términos integral (Aproximación Rectangular)

(4)

Método Forward



$$u(kT) = u[(k-1)T] + T e[(k-1)T]$$

Anti Transformando:

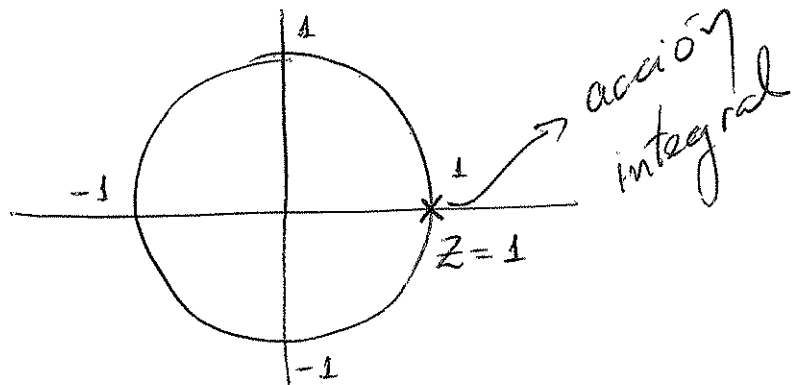
$$U(z) = z^{-1} U(z) + T z^{-1} E(z)$$

$$U(z) [1 - z^{-1}] = T z^{-1} E(z)$$

$$\Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}} \left(\times \frac{z}{z} \right)$$

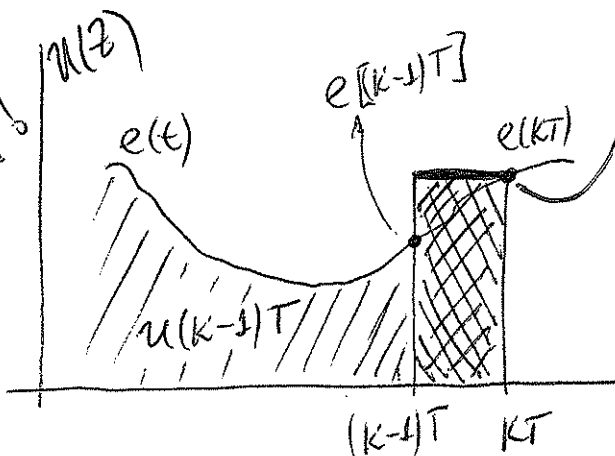
$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$$

Por defecto!!



Método Backward

Por exceso!!



$$u(kT) = u[(k-1)T] + T \cdot e(kT)$$

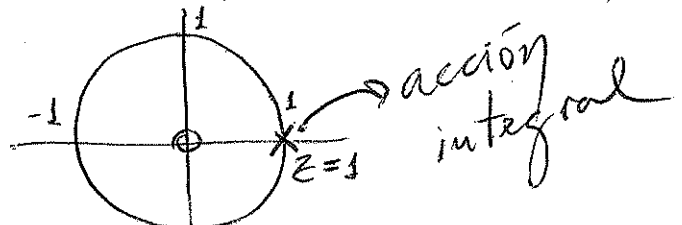
Anti Transformando se tiene

$$U(z) = z^{-1} U(z) + T E(z)$$

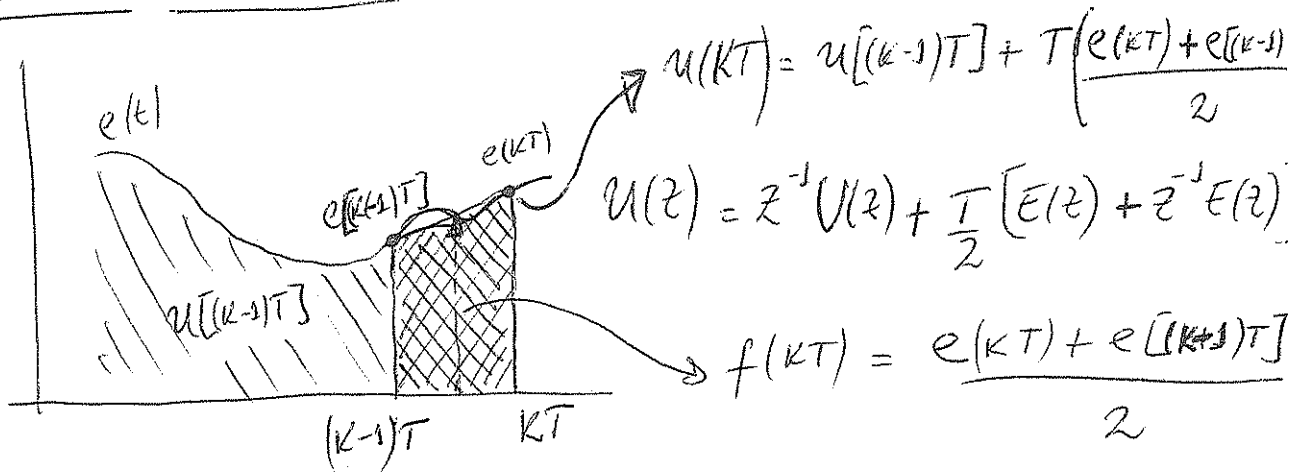
$$U(z) [1 - z^{-1}] = T E(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} \left(\times \frac{z}{z} \right)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T \cdot z}{z-1}$$



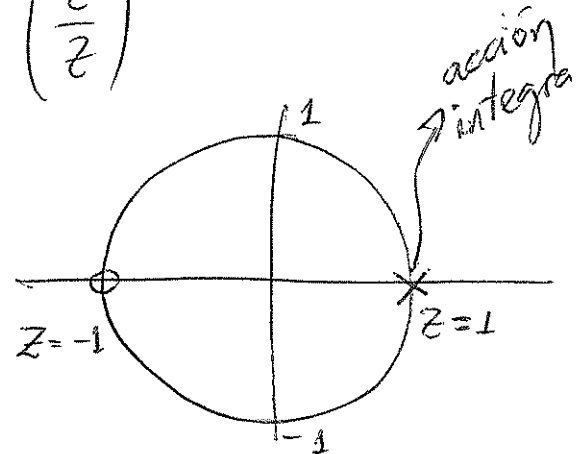
Método de Tustin $u(kT) = u[(k-1)T] + T f(kT)$ (5)



$$U(z) [1 - z^{-1}] = E(z) \cdot \frac{T}{2} (1 + z^{-1})$$

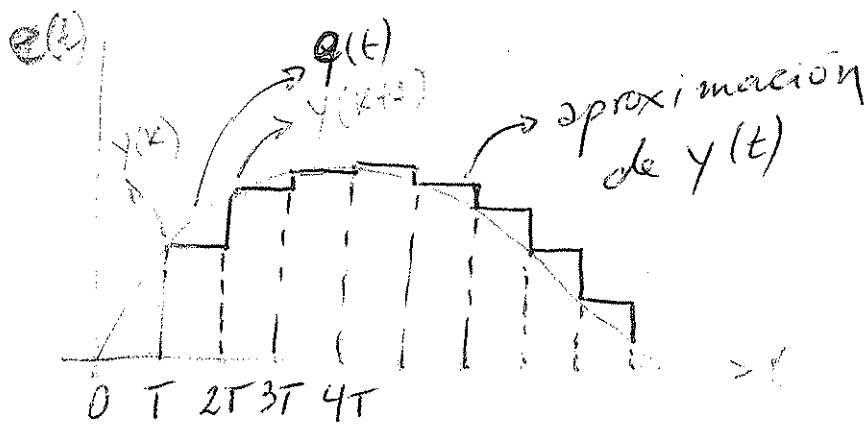
$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \times \left(\frac{z}{z} \right)$$

$$\boxed{\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}}$$



* Siguen los compensadores de Atraso y Adelanto de fase.

* Sigue el Compensador PI



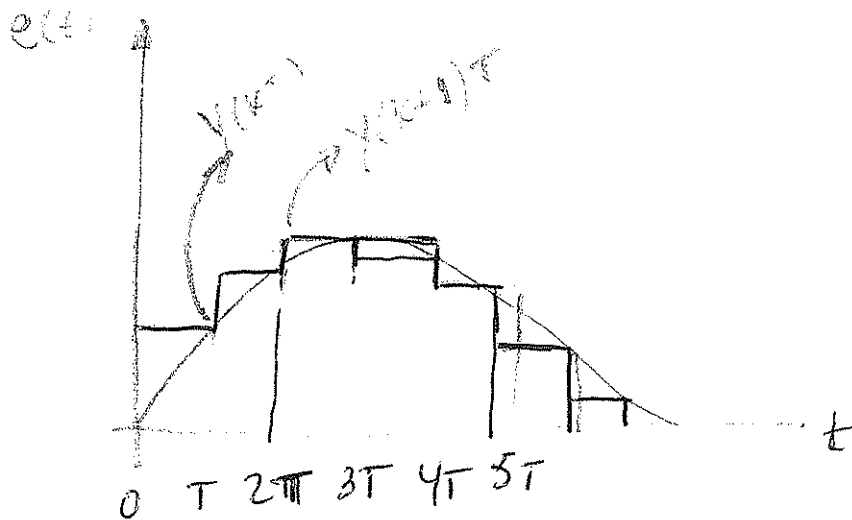
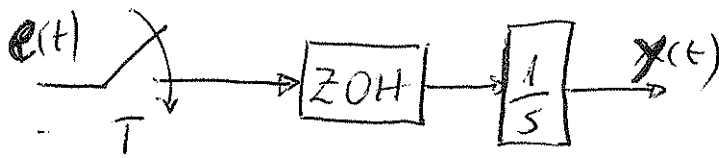
Forward (6)
por defecto

$$y(k+1)T = y(k)T + T \cdot e(k)$$

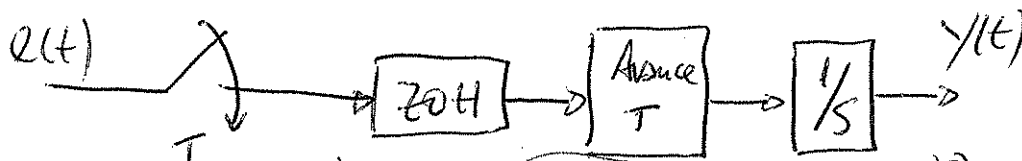
$$\Rightarrow Y(z) = \frac{Y(z) + T \cdot E(z)}{z}$$

$$Y(z) = \frac{T \cdot E(z)}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$$



Backward
por exceso



$$y(kT) = y(k-1)T + T \cdot e(kT)$$

$$y(k+1)T = y(kT) + T \cdot e(k+1)T$$

$$z Y(z) = Y(z) + T \cdot z E(z)$$

$$Y(z) = \frac{T \cdot z}{z-1} E(z)$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T \cdot z}{z-1}$$

Compensador PD:

(1)

$$G_c(s) = K_p + sK_d$$

$$u_{PD}(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \left\} \frac{e[(k+1)T] - e(kT)}{T}$$

$\frac{z-1}{T} E(z) : \underline{\underline{\text{Euler}}}$

$$u_{PD}(z) = K_p E(z) + K_d \frac{z-1}{T} E(z)$$

$$G_c(z) = \frac{u_{PD}(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_d}{T} \cdot (z-1) = \frac{K_p T + K_d z - K_d}{T}$$

~~$$G_c(z) = \frac{K_d}{T} \cdot [z - (K_d - K_p T)]$$~~

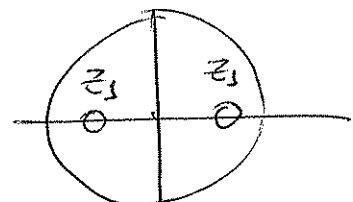
$$G_c(s^*) = K_p + \frac{(z-1)K_d}{T} = \frac{K_p T + z \cdot K_d - K_d}{T}$$

$$G_c(s^*) = G_c(z) = \frac{K_d}{T} \cdot \left[z + \left(\frac{K_p T - 1}{K_d} \right) \right]$$

$$\left[z + \frac{K_p T - K_d}{K_d} \right]$$

el cero del PD : $-\left[\frac{K_p T - K_d}{K_d} \right] = z_1 = \frac{K_d - K_p T}{K_d}$

$$K_{PD} = \frac{K_d}{T}$$



For Backward:

(2)

$$s^* = \frac{z-1}{zT}$$

$$G_c(s^*) = K_p + K_d \frac{(z-1)}{zT} = \frac{z \cdot T \cdot K_p + K_d (z-1)}{zT}$$

$$G_c(z) = \frac{K_d + K_p T}{T} \times \left[z - \frac{K_d}{K_d + K_p T} \right]$$

$$z_1 = \frac{K_d}{K_p T + K_d}$$

$$z \quad K_{PD} = \frac{K_p T + K_d}{T}$$

Compensator PI: Forward = Euler: $\frac{K_i}{s}$

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{z-1} = \frac{z K_p - K_p + K_i T}{z-1}$$

$$G_c(z) = K_p \times \left[z - \frac{(K_p - K_i T)}{K_p} \right]$$

$$K_{PI} = K_p \quad z_1 = \frac{K_p - K_i T}{K_p}$$

For Backward:

(3)

$$S^* = \frac{z-1}{zT}$$

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i zT}{z-1} = \frac{K_p z - K_p + K_i zT}{z-1}$$

$$G_c(z) = (K_p + K_i T) \times \frac{[z - K_p / (K_p + K_i T)]}{z-1}$$

$$K_{PI} = K_p + K_i T \quad z_1 = \frac{K_p}{K_p + K_i T}$$

For Tustin: $S^* = \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$

~~$S^* = \frac{z}{T} \frac{z+1}{z-1}$~~

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{z} \times \frac{z+1}{z-1} = \frac{2K_p z - 2K_p + K_i T z + K_i T}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{2K_p + K_i T}{2} \times \frac{[z + (K_i T - 2K_p) / (2K_p + K_i T)]}{(z-1)}$$

$$K_{PI} = \frac{2K_p + K_i T}{2} \quad z_1 = \frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p}$$

Controladores de adelanto y atraso de fase (4)

Sea la F.T. general de un controlador de adelanto o de atraso dada por:

$$G_c(z) = K_c \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)} \quad (1)$$

z_1 y p_1 son cero y polo reales.

$G_c(z)$ tendrá características para bajas o fase altas según sean la magnitudes de z_1 y p_1 .

Reemplazando la transformación $z = e^{sT} \approx 1 + sT$ en (1), este resulta:

Euler

$$G_c^*(s) \approx K_c \frac{(1 + sT - z_1)}{(1 + sT - p_1)}$$

$$G_c^*(s) \approx K_c \frac{(s + (1 - z_1)/T)}{(s + (1 - p_1)/T)}$$

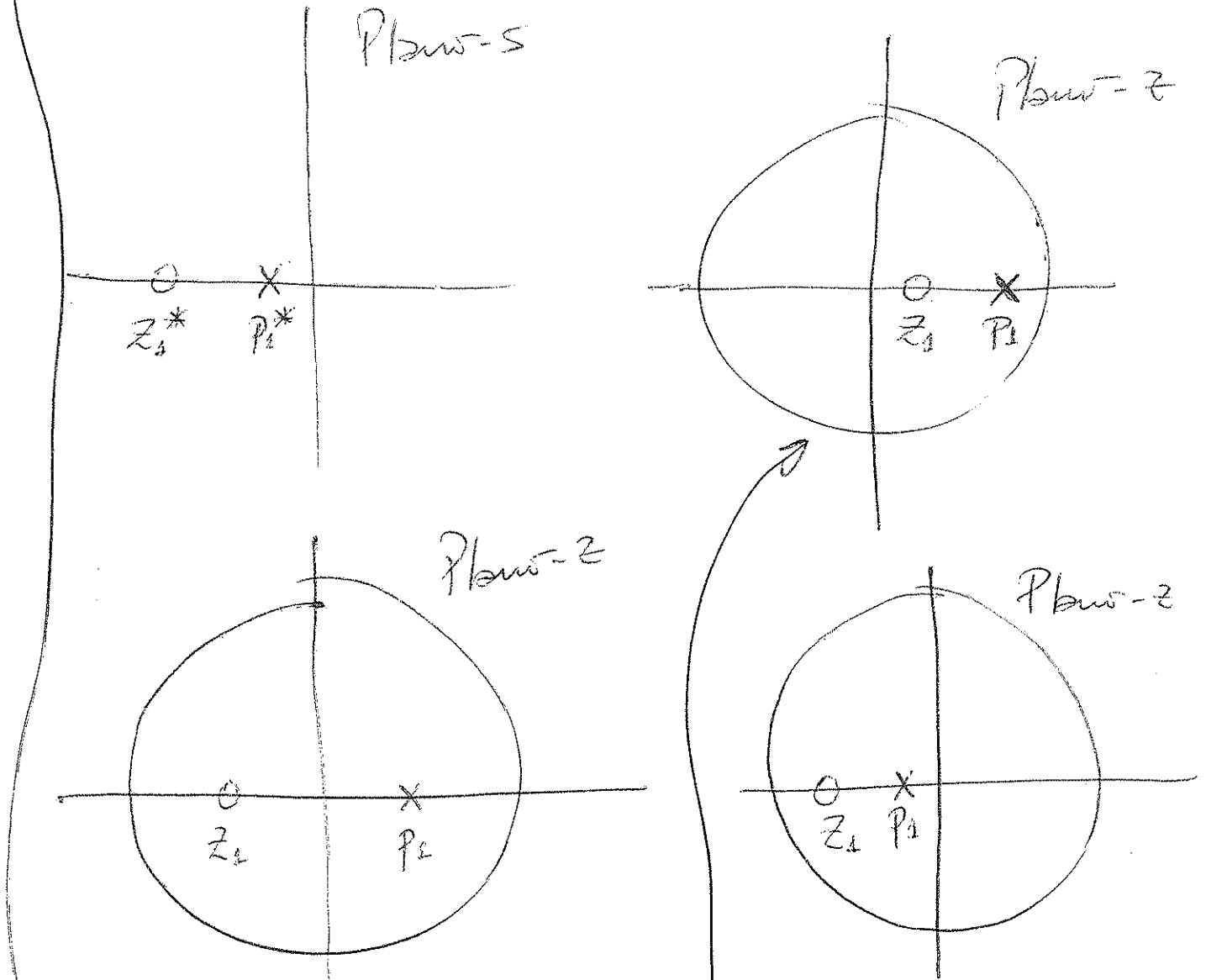
Dado q' por razones de estabilidad es necesario q' el cero y el polo del compensador se ubiquen dentro del círculo unitario, $|z_1| = |p_1| \leq 1$ por tanto, estas raíces resultan en el semiplano izq. del plano s . A partir de las configuraciones conocidas de estos compensadores en el plano $-s$ tenemos que:

Compensador de atraso de fase:

(2)

~~...~~ Frec. polo < Frec. cero (plano s)

$$\# \frac{(1-p_1)}{T} < \frac{(1-z_1)}{T} \Rightarrow \text{... } z_1 < p_1 \text{ (plano z)}$$



$$1 - p_1 < 1 - z_1$$

$$-p_1 < -z_1 \Rightarrow \boxed{z_1 < p_1}$$

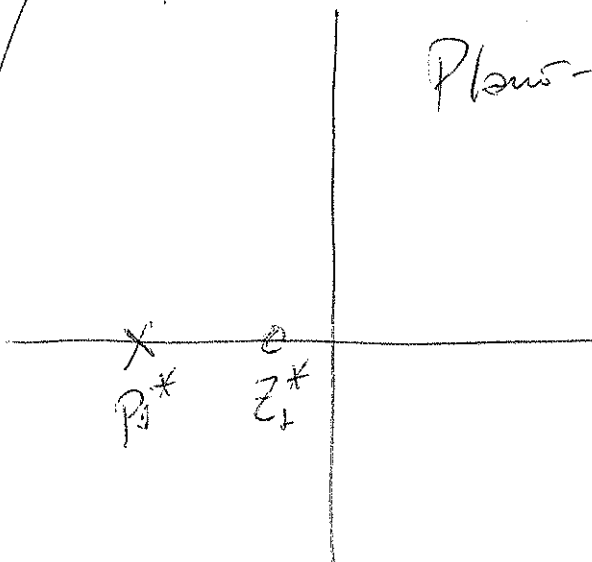
Compensador de adelanto de fase:

(3)

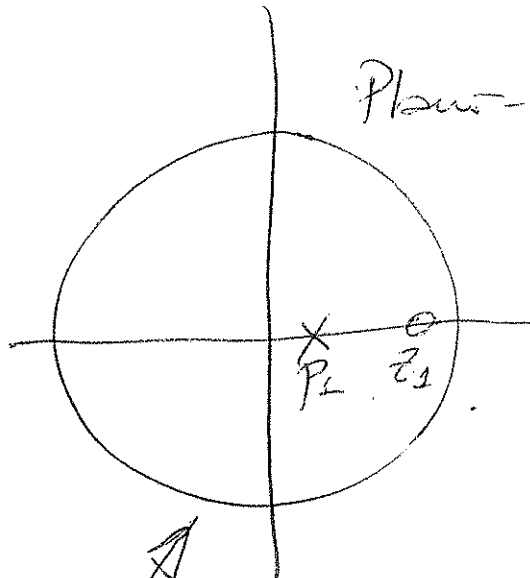
Frec. polo > Frec. cero (plano-s)

$$\left| \frac{1-p_1}{T} \right| > \left| \frac{1-z_1}{T} \right| \Rightarrow p_1 < z_1 \text{ (plano-z)}$$

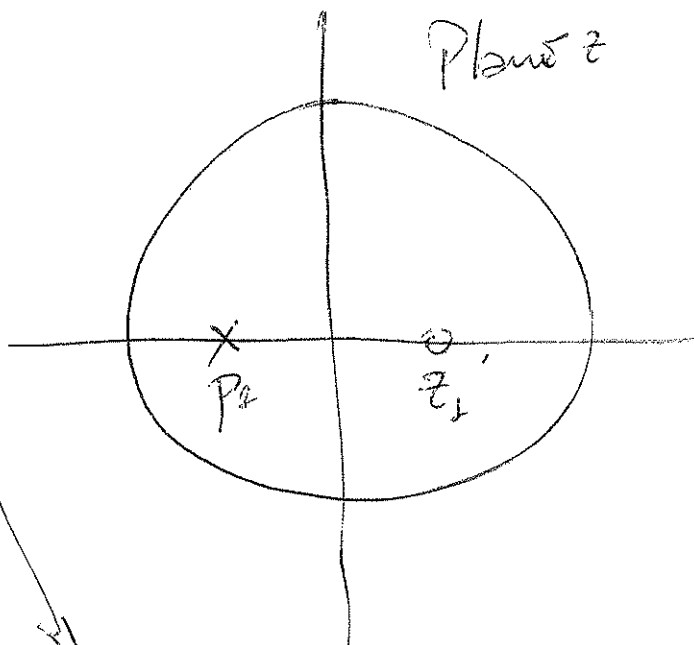
Plano-s



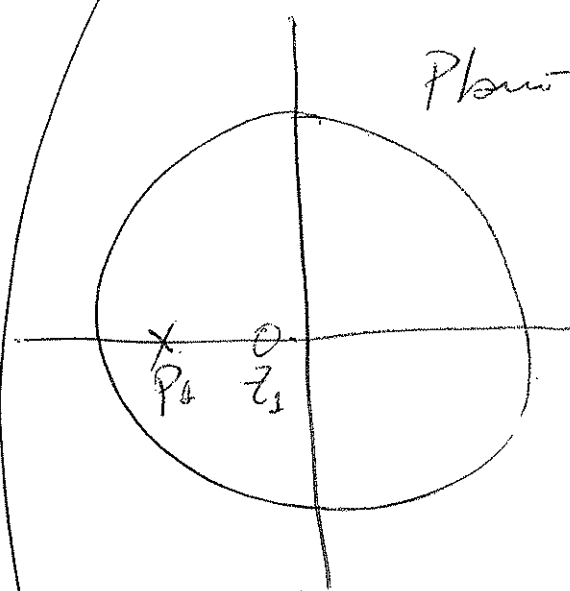
Plano-z



Plano-z



Plano-z



$$1-p_1 > 1-z_1$$

$$-p_1 > -z_1 \Rightarrow |z_1| > |p_1|$$

$$|z_1| > |p_1|$$

Controlador Discreto PID

(4)

a) Controlador PD:

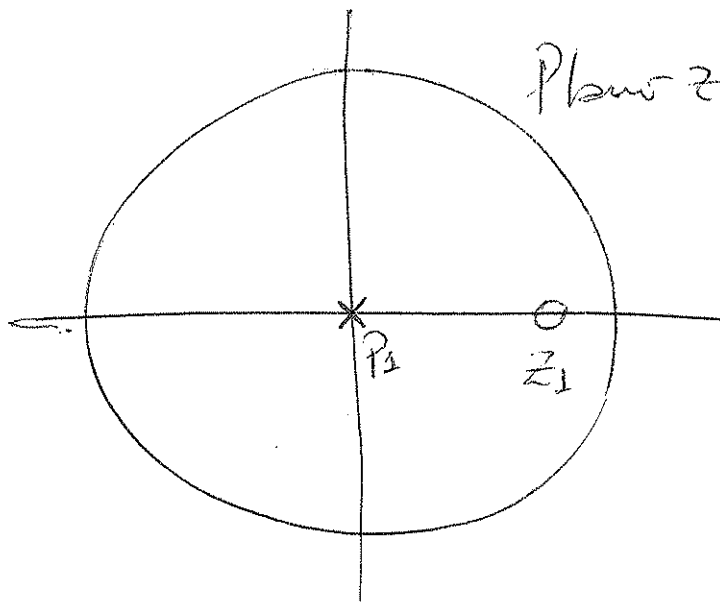
Tenemos y la F.T del PD era:

$$G_c(z) = \frac{K_p T + K_d}{T} \cdot \frac{z - \left[\frac{K_d}{K_p T + K_d} \right]}{z}$$

$$K_c = \frac{K_p T + K_d}{T}$$

$$z_1 = \frac{K_d}{K_p T + K_d}$$

Caso especial
ec. (5)
 $p_1 = 0$



El PD es un caso especial del compensador de adelanto de fase donde $p_1 = 0$

b) Controlador PI:

- Método Forward o diferencias hacia adelante

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{z-1} = K_p \cdot \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p - K_i T}{K_p}$$

$$K_c = K_p \quad z_1 = \frac{K_p - K_i T}{K_p}$$

$$p_1 = 1$$

Caso especial
de la (3)
 $p_1 = 1$
 $z_1 = \frac{K_p - K_i T}{K_p}$
 $K_c =$

z_1 puede estar tanto en la parte (+) como (-) del eje real.

- Método Backward

(5)

$$G_c(z) = K_p + K_i T \frac{z}{z-1} = (K_p + K_i T) \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p}{K_p + K_i T} \Rightarrow K_c = (K_p + K_i T)$$

$$z_1 = \frac{K_p}{K_p + K_i T}$$

$$p_1 = 1$$

z_1 sobre el eje real (+)

- Método Trapezoidal o de Tustin

$$G_c(z) = K_p + K_i T \frac{z+a}{z-1}$$

$$K_c = \frac{2K_p + K_i T}{2} \quad a = \frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p}$$

$$z_1 = a \quad \text{y} \quad p_1 = 1 \quad \underline{z_1: \text{sobre el eje real (+)}}$$

Los 3 PI's son casos especiales del controlador de atraso de fase, con $p_1 = 1$ y z_1 dependiendo de la relación entre K_i y K_p p1 unidades T.

... Continua del PID aparte: (escrito con birones verde) (6)

Funciones de Transferencia PID

$$G_c(z) = K_p + G_{ci}(z) + G_{cd}(z)$$

Donde: K_p es la cte. del control Prop.

$G_{ci}(z)$: F.T del control Integral y puede ser modelada por algunas de la 3 aproximaciones vistas.

$G_{cd}(z)$: F.T del control derivativo y puede ser modelada por la aproximación a diferencias (Backward's difference)

Integración Rectangular con Diferencias hacia atrás

$$G_c(z) = \frac{(K_p T + K_D) z^2 + (K_i T^2 - K_p T - 2K_D) z + K_D}{T z (z-1)}$$

Integ. rectangular con Dif. hacia adelante

$$G_c(z) = \frac{(K_p T + K_D + K_i T^2) z^2 - (K_p T + 2K_D) z + K_D}{T z (z-1)}$$

Int. con transf. bilineal

$$G_c(z) = \frac{(2K_p T + K_i T^2 + 2K_D) z^2 + (K_i T^2 - 2K_p T - 4K_D) z + 2}{2T z (z-1)}$$

Si se necesitan solo un PD o un PI (7)
 en cualquiera de las anteriores es posible obtener
 los casos particulares haciendo $K_i = 0$.

Controlador PD

$$G_{PD}(z) = K_p + K_D \frac{z-1}{zT} = \frac{zTK_p + K_D(z-1)}{z \cdot T}$$

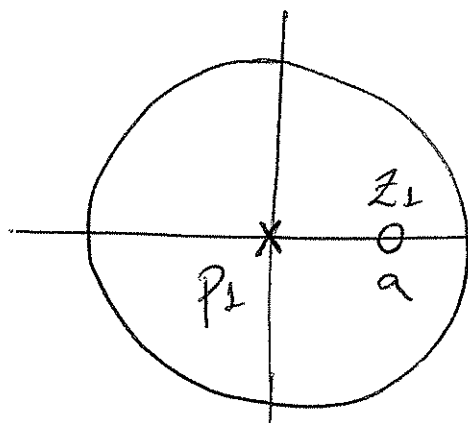
$$G_{PD}(z) = \frac{z \cdot TK_p + z \cdot K_D - K_D}{z \cdot T}$$

$$G_{PD}(z) = \frac{z(T \cdot K_p + K_D) - K_D}{zT}$$

$$G_{PD}(z) = \frac{z - \frac{K_D}{(K_p \cdot T + K_D)}}{z} \cdot \frac{K_p T + K_D}{T}$$

$$G_{PD}(z) = K_{PD} \cdot \frac{z-a}{z} \quad a = \frac{K_D}{K_p T + K_D}$$

El PD introduce un cero en "a" dado por
 la relación entre K_p y K_D y T y un polo al
 origen. "a" se encuentra sobre el eje real
 positivo.



Caso especial del
 comp. de adelanto de
fase donde

$$P_1 = 0$$

Controlador PI

8

Método Forward

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{z-1}$$

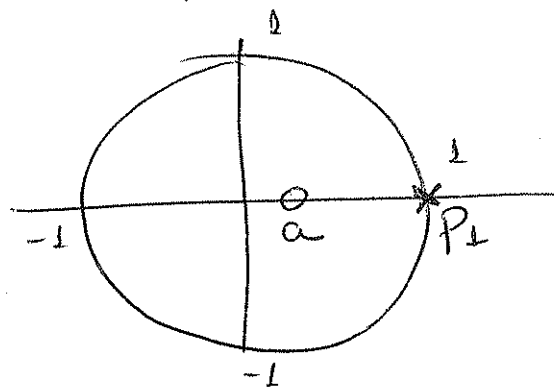
$$G_c(z) = \frac{K_p(z-1) + K_i T}{(z-1)} = \frac{K_p z - K_p + K_i T}{z-1}$$

$$G_c(z) = K_p \cdot \frac{z - (K_p + K_i T)/K_p}{z-1} = K_{PI} \cdot \frac{z-a}{z-1}$$

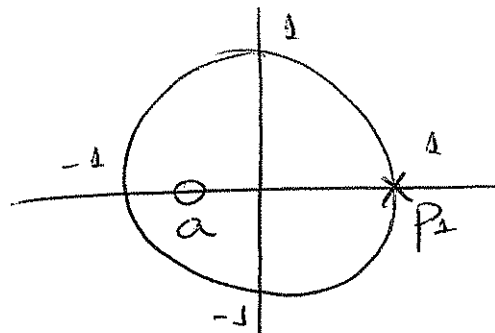
$$a = \frac{K_p + K_i T}{K_p}$$

$$K_{PI} = K_p$$

Si $K_p > K_i T \Rightarrow$



Si $K_p < K_i T \Rightarrow$



Método Backward

9

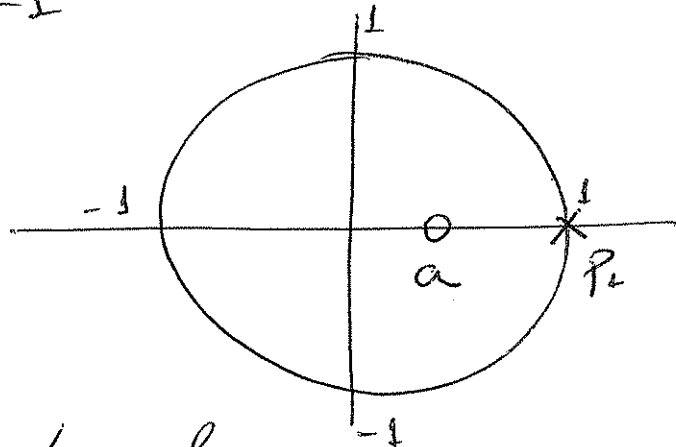
$$G_c(z) = K_p + K_i \frac{T \cdot z}{z-1}$$

$$G_c(z) = \frac{K_p(z-1) + K_i T \cdot z}{z-1} = \frac{K_p z - K_p + K_i T \cdot z}{z-1}$$

$$G_c(z) = \frac{(K_p + K_i T)z - K_p}{z-1} = K_p + K_i T \times \frac{z - K_p/(K_p + K_i T)}{z-1}$$

$$G_c(z) = K_{PI} \times \frac{z-a}{z-1}$$

$$a = \frac{K_p}{K_p + K_i T}$$



"a" siempre sobre el eje real (+)

Método Tustin

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i \cdot T(z+1)}{2(z-1)} = \frac{2(z-1)K_p + K_i T(z+1)}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{2zK_p - 2K_p + K_i Tz + K_i T}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{z(2K_p + K_i T) + K_i T - 2K_p}{2(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{2K_p + K_i T}{2} \times \frac{z + (K_i T - 2K_p) / (2K_p + K_i T)}{(z-1)} \quad (10)$$

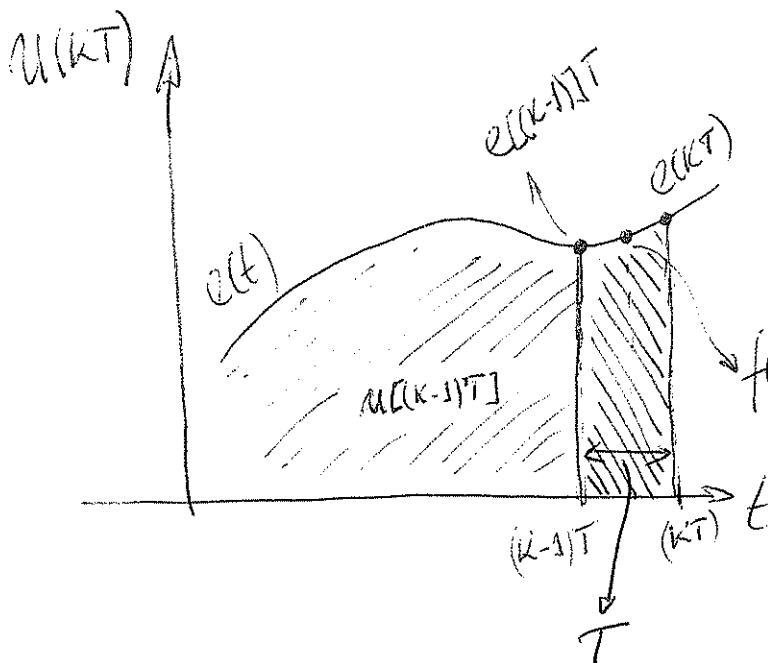
$$G_c(z) = K_{PI} \times \frac{z+a}{z-1}$$

$$K_{PI} = \frac{2K_p + K_i T}{2} \quad a = \frac{K_i T - 2K_p}{2K_p + K_i T}$$

El cero "a" puede estar sobre el eje real (+) o (-) dependiendo de K_i , K_p y T o lo g' es lo mismo dependiendo de la relación entre $K_i T$ y $2K_p$.

Proyecto: Si no existen restricciones en cuanto a desempeño transitorio y lo g' se desea es ~~apada~~ mejor el régimen permanente se puede cancelar uno de los polos de L.A (de la planta) con el cero g' introduce el PI: Criterio

Cancelar los polos g' se encuentran próximos a $z=1$ p' ganar margen de estabilidad (aumento de K_p)



Método Trapezoidal o Trapezoidal de integración

$$f(kT) = \frac{e(kT) + e[(k-1)T]}{2}$$

$$u(kT) = u[(k-1)T] + T \cdot f(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} [e(kT) + e[(k-1)T]]$$

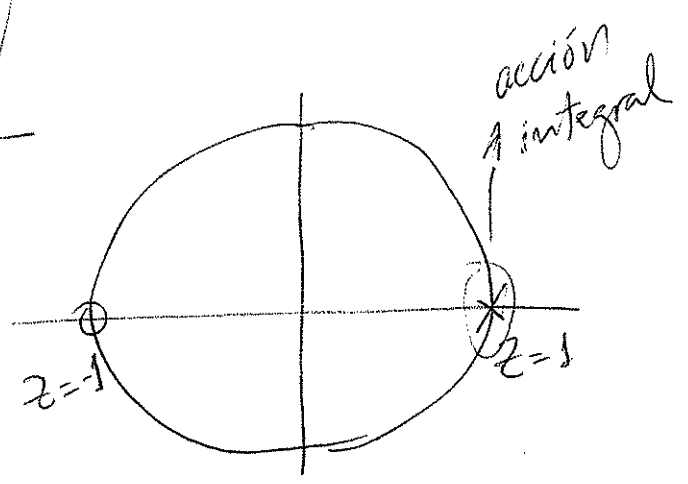
$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \left\{ e(kT) + e[(k-1)T] \right\}$$

pasando al dominio z

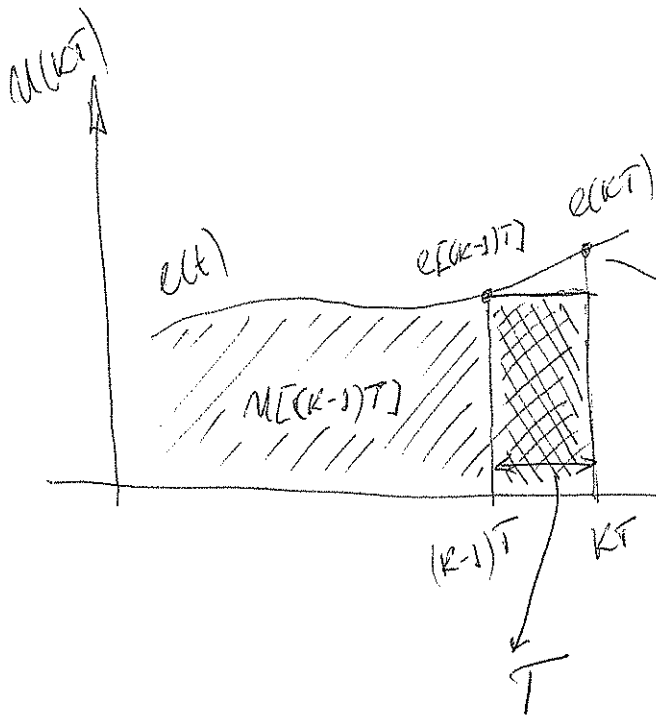
$$U(z) (1 - z^{-1}) = \frac{T}{2} [E(z) + z^{-1} E(z)]$$

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$G_c(z) = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$



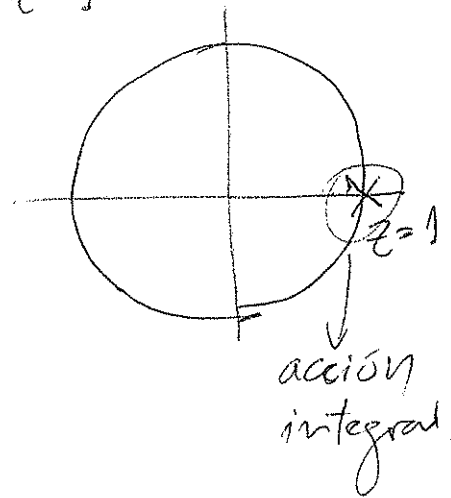
Métodos Euler o Forward por defecto de integración



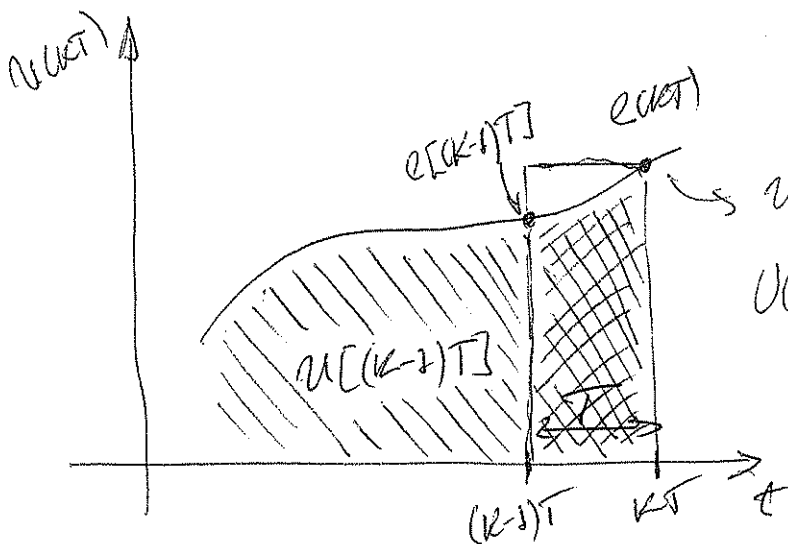
$$u(kT) = u[(k-1)T] + T \cdot e[(k-1)T]$$

$$U(z)(1 - z^{-1}) = T \cdot z^{-1} E(z)$$

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$$



Método Backward por Exceso de integración

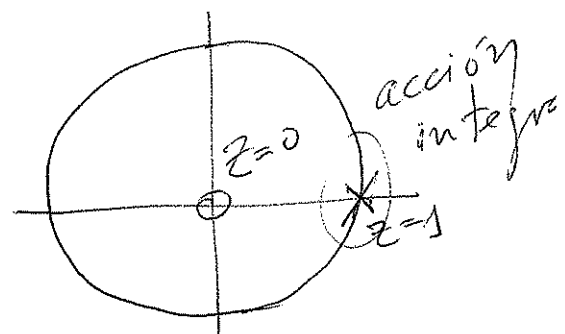


$$u(kT) = u[(k+1)T] + T e(kT)$$

$$U(z)(1 - z^{-1}) = T \cdot E(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

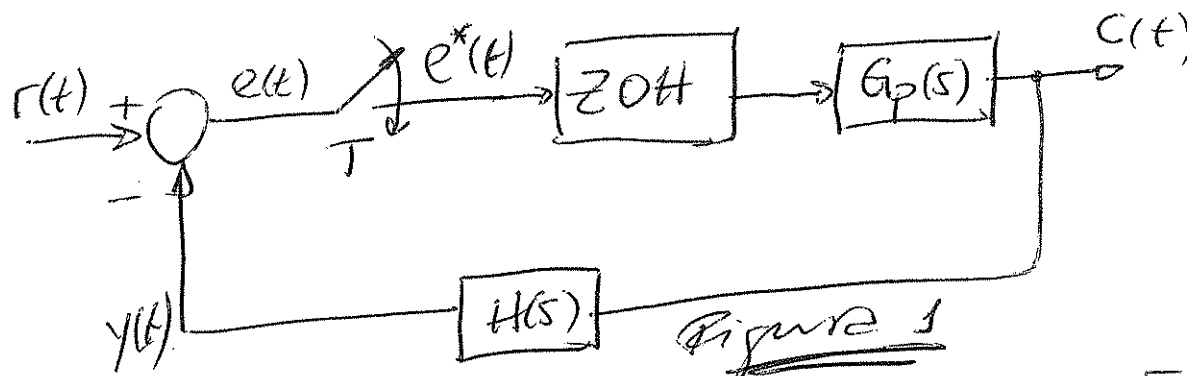
$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z \cdot T}{z-1}$$



Error en estado estacionario de sistemas de control digital (1)

La señal de error, la cual usualmente debe ser llevada a cero, se define como la diferencia entre la referencia (o set-point) de entrada y la señal de salida a controlar.

En un sistema de control digital como el de la Figura 1



la señal de error se puede definir como

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (1)$$

Dado que es difícil evaluar $e(t)$ en un sist. de control digital, ~~ya~~ si solo se conocen, a partir de la transformada Z del mismo, los valores en los instantes de muestreo; debe ser usado p' definir el error estacionario, el error muestreado $e^*(t)$ así.

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} e(KT) \quad (2)$$

Si aplicamos el teorema del valor final (1) de la transformada Z de una función $F(z)$, como siendo

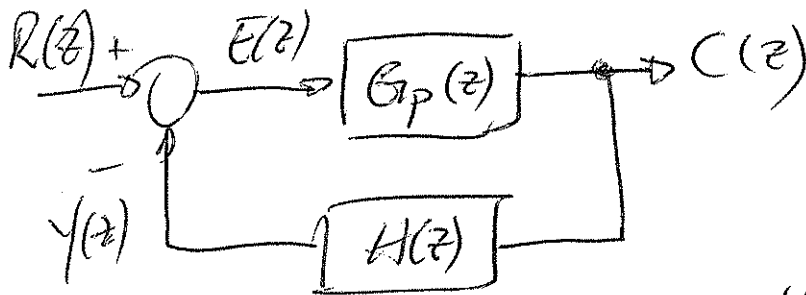
$$\lim_{K \rightarrow \infty} f(KT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z) \quad (3)$$

siendo $F(z)$ la transf. Z de la función $f(t)$ y sabiendo q' $(1-z^{-1}) F(z)$ no tiene polos sobre el círculo unitario o fuera de este, tenemos que:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) E(z) \quad (4)$$

donde $E(z)$ es la transf. Z de la señal de error $e(t)$.

Transformando el diagrama de bloques del sistema digital de la Figura 1 a un sistema de datos muestreados nos queda:



$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

$$Y(z) = C(z) \cdot H(z)$$

$$C(z) = E(z) \cdot G_p(z)$$

$$E(z) = R(z) - E(z) G_p(z) H(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_p(z)H(z)} \cdot R(z) \quad (5) \quad (3)$$

Se observa en la ec. (5) q' el error de reg. perm. ~~de~~ muestreado, depende de la ref. $R(z)$ y de la función de transf. de lazo abierto $G_p(z)H(z)$.

Substituyendo (5) en (4) \Rightarrow $e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z)$ (6) !!!

! el análisis se consideran 3 tipos patrones de señal de referencia:

- escalón
- rampa
- parábola

! definir, al igual q' en un sist. de tiempo continuo, los constantes de error.

* Error "lssp" / una entrada en escalón.
Constante de error de posición, K_p^*

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \cdot R \quad \text{Entrada en escalón de valor "R"}$$

$$R(z) = \frac{R}{1-z^{-1}}$$

$$\text{Haciendo } e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G_p(z)H(z)} \quad (6)$$

substituyendo $R(z)$ en (6)

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{1 + G_p H} = \frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_p H(z)} \quad (7)$$

Equación (6) \Rightarrow ∞



(3b)

Tengo que: $E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_p(z)H(z)}$

y además,

$$G_p(z)H(z) = \underbrace{(1 - z^{-1})}_{\equiv (1 - e^{-sT})} \mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)H(s)}{s} \right]$$

\downarrow
ZOH: $\frac{1 - e^{-s}}{s}$

\Rightarrow $C_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G_p(z)H(z)}$ (6)

$$0 = 1 - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 1 - 1 - 1$$

$$\frac{z}{1 - z} = \frac{z}{z} \times (1 - z^{-1})$$

Por lo tanto, la cte. de error de posición
 p' un sist. discreto está dada por: (4)

$$K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} G_p(z)H(z) \quad (8)$$

(9)
$$e_{ss}^* = \frac{R}{1 + K_p^*}$$
 A mayor valor de K_p^*
 menor e_{ss}^*
 P' q' e_{ss}^* sea igual a

cero $K_p^* = \infty$ y para eso, la F.T de
 lazo abierto GH debe presentar un
 polo en $z=1$.

Supongamos q' la F.T de lazo abierto
 tiene la forma:

$$G_p(s)H(s) = \frac{K \prod_i (s + p_i)}{s^N \prod (s + z_i)}$$

con $N = 0, 1, 2, \dots$ ~~Plano de tipo "0"~~

$$\Rightarrow G_p(z)H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{K \prod (s + p_i)}{s^N \cdot s \cdot \prod (s + z_i)} \right]$$

Aplicando desarrollo en fracciones parciales
 a lo q' está en el corchete, y p'
 un sistema de tipo "0":

$$G_p(z)H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{K}{s} + \text{fracciones parciales de polos } \neq \text{cero} \right]$$

Los términos en fracciones parciales el $(z-1)$ poseen polos \neq cero, no poseen términos $(z-1)$ en el denominador. (5)

Aplicando ésta última en la (8):

$$K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{K \cdot z}{z-1} = K$$

$\Rightarrow e_{ss_p}^* = K$ (constante)
 idéntica a la cte. de error de posición
 p/ un sist. de tiempo continuo.

Si el sistema ahora es de tipo "1":

$$G_p(z)H(z) = (1-z^{-1}) \left[\frac{K \cdot T \cdot z}{(z-1)^2} + \frac{K_s \cdot z}{z-1} + \text{F.P. } P \neq \text{cero} \right]$$

$$K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \left[\frac{K \cdot T \cdot z}{(z-1)^2} + \frac{K_s \cdot z}{(z-1)} \right] \quad \cancel{\text{F.P. } P}$$

$$\approx \lim_{z \rightarrow 1} \frac{KT}{z-1} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{e_{ss_p}^* = 0}$$

p/ sistemas mayores q' tipo "1" el error $e_{ss_p}^*$ será igual a cero.

$$\begin{cases} \text{sist. tipo "0"} \Rightarrow K_p^* = K \Rightarrow e_{ss}^* = \frac{R}{1+K} \\ \text{sist. tipo "1"} \Rightarrow K_p^* = \infty \Rightarrow e_{ss}^* = 0 \\ \text{sist. tipo 2 o mayores} \Rightarrow K_p^* = \infty \Rightarrow e_{ss}^* = 0 \end{cases}$$

* Error "lssv" p' una entrada en rampa (6)
Constante de error de velocidad K_V^*

La transformada z de un función rampa
 $r(t) = t \cdot R$

$$R(z) = \frac{R \cdot T \cdot z}{(z-1)^2}$$

$$e_{ssv}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot \frac{R \cdot T \cdot z}{(z-1)^2 [1+GH]}$$

$$e_{ssv}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R \cdot T}{(z-1) [1+GH]} = \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot GH}{T}}$$

$$\Rightarrow K_V^* = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) G_p(z) H(z)]$$

$$\Rightarrow e_{ssv}^* = \frac{R}{K_V^*} \quad \Rightarrow K_V^* = \infty \text{ p' q' } e_{ssv}^* = 0$$

Por lo tanto, por el análisis realizado anteriormente; esto sucede p' sistemas de

tipo "2"; o sea con 2 polos en $z=1$.

Entonces $\left\{ \begin{array}{l} \text{p' sist. de tipo "0"} \Rightarrow K_V^* = 0 \Rightarrow e_{ssv}^* = \infty \\ \text{p' sist. de tipo "1"} \Rightarrow K_V^* = K \Rightarrow e_{ssv}^* = \frac{R}{K} \\ \text{p' sist. de tipo "2"} \Rightarrow K_V^* = \infty \Rightarrow e_{ssv}^* = 0 \\ \text{ó mayores} \end{array} \right.$

* Error "lssa" p' una entrada en parábola constante de error discreta p' aceleración (7)

Siendo $r(t) = R \cdot \frac{t^2}{2}$, la $\mathcal{Z}[r(t)]$ es

$$R(z) = \frac{R \cdot T^2 \cdot z(z+1)}{2 \cdot (z-1)^3}$$

$$lssa^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot \frac{R \cdot T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)^3 \cdot (1+GH)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R \cdot T^2 \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)^2 \cdot (1+GH)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} (1+GH)}$$

$$\Rightarrow Ka^* = \frac{R}{T^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 (GH)]$$

$$lssa^* = \frac{R}{Ka^*} \quad p' q' \quad lssa^* = 0 \Rightarrow Ka^* = \infty$$

Y p' esto el sistema debe ser de tipo "3" o mayor, o sea, debe poseer 3 polos en $z=1$

Ejemplos:

- Sist. tipo "0" $\Rightarrow Ka^* = 0 \Rightarrow lssa^* = \infty$
- Sist. tipo "1" $\Rightarrow Ka^* = 0 \Rightarrow lssa^* = \infty$
- Sist. tipo "2" $\Rightarrow Ka^* = K \Rightarrow lssa^* = R/K$
- Sist. tipo "3" $\Rightarrow Ka^* = \infty \Rightarrow lssa^* = 0$

- mayor

8

http://www.abce.mre.gov.br/legalizacao-de-documentos/leg...zacao-em-documentos

$$\frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{(z-1)}{z} \times \frac{K \cdot z}{(z-1)} = 0$$

$$\frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{z} \times \left[\frac{K \cdot T \cdot z}{(z-1)^2} + \frac{K_s \cdot z}{(z-1)} \right] \times \frac{(z-1)}{z}$$

$$\frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{K \cdot T + K_s \cdot (z-1)}{0} \right] = \underline{K}$$

$$\left. \begin{aligned} K_v^* &= 0 \\ l_{ssv}^* &= \infty \\ K_v^* &= K \\ l_{ssv}^* &= \frac{R}{K} \end{aligned} \right\}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{z} \cdot \left[\frac{K \cdot T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{z(z-1)^2} \right] \cdot \frac{1}{T^2} = \infty$$

$$K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 \cdot \frac{(z-1)}{z} \times \frac{K \cdot T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{z \cdot (z-1)^3} \right]$$

$K_a^* = K$ (tipo "2") OK

Email: eresec@th.com.br

Avenida Rio Branco, 387, 5º andar
 Edifício Rio Branco
 CEP 88015-201, Florianópolis - SC
 Telefones: (48) 3224-7808
 Fax: (48) 3224-7808

Escritório Regional de Santa Catarina (ERESC)

tipo "0"

$$K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 \cdot \frac{(z-1)}{z} \times \frac{K \cdot z}{(z-1)} \right] = 0 \Rightarrow l_{ssa}^* = \infty$$

$K_a^* = 0$ (tipo "0") OK

tipo "1"

$$K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 \cdot \frac{(z-1)}{z} \times \frac{K \cdot T \cdot z}{(z-1)^2} \right] = 0$$

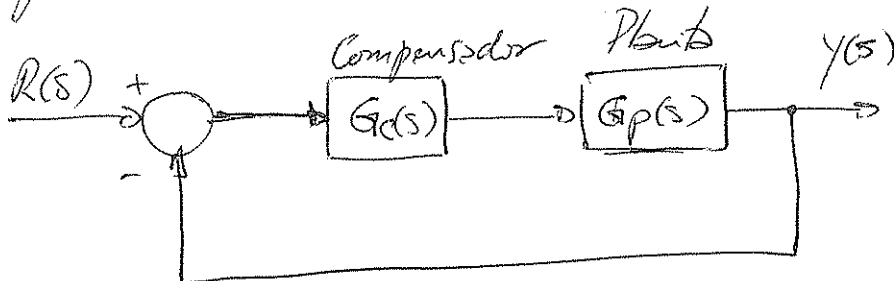
$K_a^* = 0$ (tipo "1") $\Rightarrow l_{ssa}^* = \infty$

Diseño de Compensadores utilizando el L.R

(1)

* Repaso de diseño en el dominio continuo.

Ejemplo 1.



donde: $G(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+8)}$

$$G_c(s) = K_d(s+a) \rightarrow PD$$

$$K_d = K \cdot T_d \quad a = 1/T_d$$

Ae

imponen las sig. especificaciones de desempeño

$$t_s = 1 \text{ seg.} \quad M_p = 10\%$$

Para cumplir estas especificaciones, los polos domin. del sistema en L.C deben estar en:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 4$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi \zeta}{\omega_d}} \Rightarrow \omega_d = \frac{-\pi \zeta}{\ln M_p} = 5,458$$

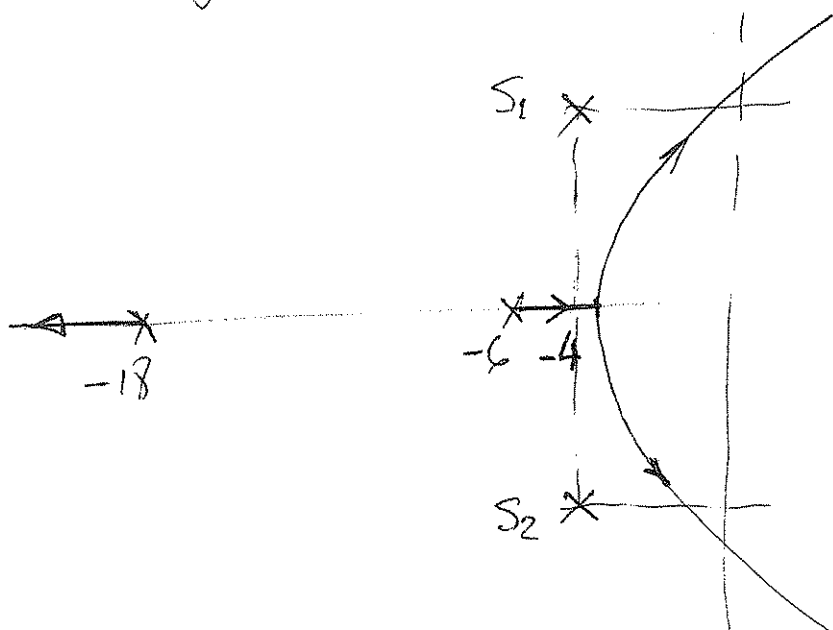
Polos dominantes en L.C

$$s_{1,2} = -4 \pm j5,458$$

$$G_m = 16,2 \text{ dB}$$
$$\zeta_m = \text{inf}$$

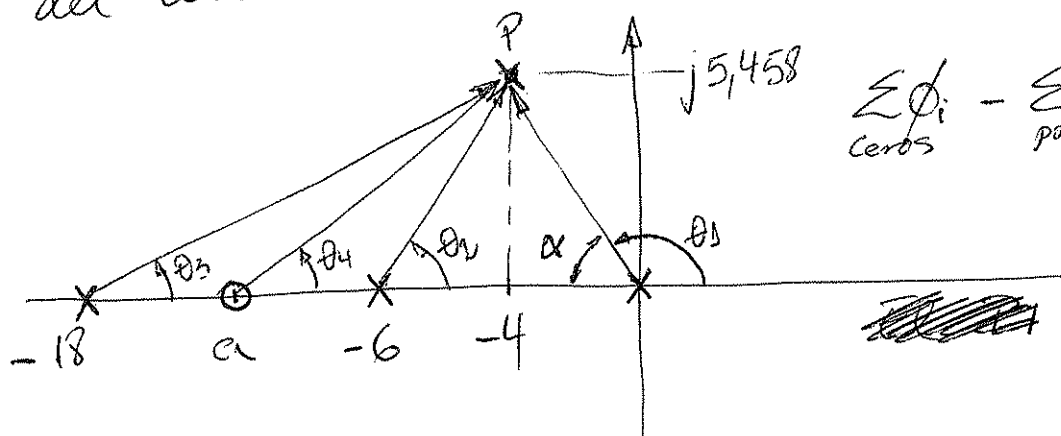
Si trazamos el L.R. p' el sistema en L.C

(2)



→ La introducción del cero del compensador PD permite q' atraiga las ramas del L.R hacia los polos dominantes.

* P' q' estos polos ∈ al L.R debemos imponer la condición de ángulo y así obtener la posición del cero "a" del PD:



$$\sum_{\text{ceros}} \phi_i - \sum_{\text{polos}} \phi_i = \pm 180^\circ$$

$$\theta_4 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 180^\circ \quad (\text{fase en adelanto } (+))$$

$$\theta_1 = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{5,458}{4}$$

$$\tan^{-1} \frac{5,458}{(a-4)} - 180^\circ + \tan^{-1} \frac{5,458}{4} - \tan^{-1} \frac{5,458}{6-4} - \frac{\tan^{-1} 5,458}{18-4} = 180^\circ$$

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{5,458}{a-4} - 180^\circ + 53,76^\circ - 69,87^\circ - 21,29^\circ = 180^\circ$$

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{5,458}{a-4} = 180^\circ + 217,4^\circ = 397,4^\circ$$

$$\frac{5,458}{a-4} = \operatorname{tg}(397,4^\circ) = 0,7645$$

$$5,458 = (a-4) \times 0,7645 = a \times 0,7645 - 3,058$$

$$\Rightarrow a = \frac{5,458 + 3,058}{0,7645}$$

$$\boxed{a = 11,14}$$

* A seguir debemos calcular la ganancia en los polos dominantes y así obtener K_d :
Aplicando la condición de módulos tenemos

$$\frac{|s+a| \cdot 1080}{|s| |s+6| |s+18|} \Big|_{s_{1,2}} = \left| \frac{1}{K_d} \right| = \frac{1}{K_d}$$

$s = -4 + j5,458$

$$\Rightarrow \frac{K_d \cdot 1080 \times \sqrt{(11,14-4)^2 + 5,458^2}}{\sqrt{4^2 + 5,458^2} \times \sqrt{(6-4)^2 + 5,458^2} \times \sqrt{(18-4)^2 + 5,458^2}} = 1$$

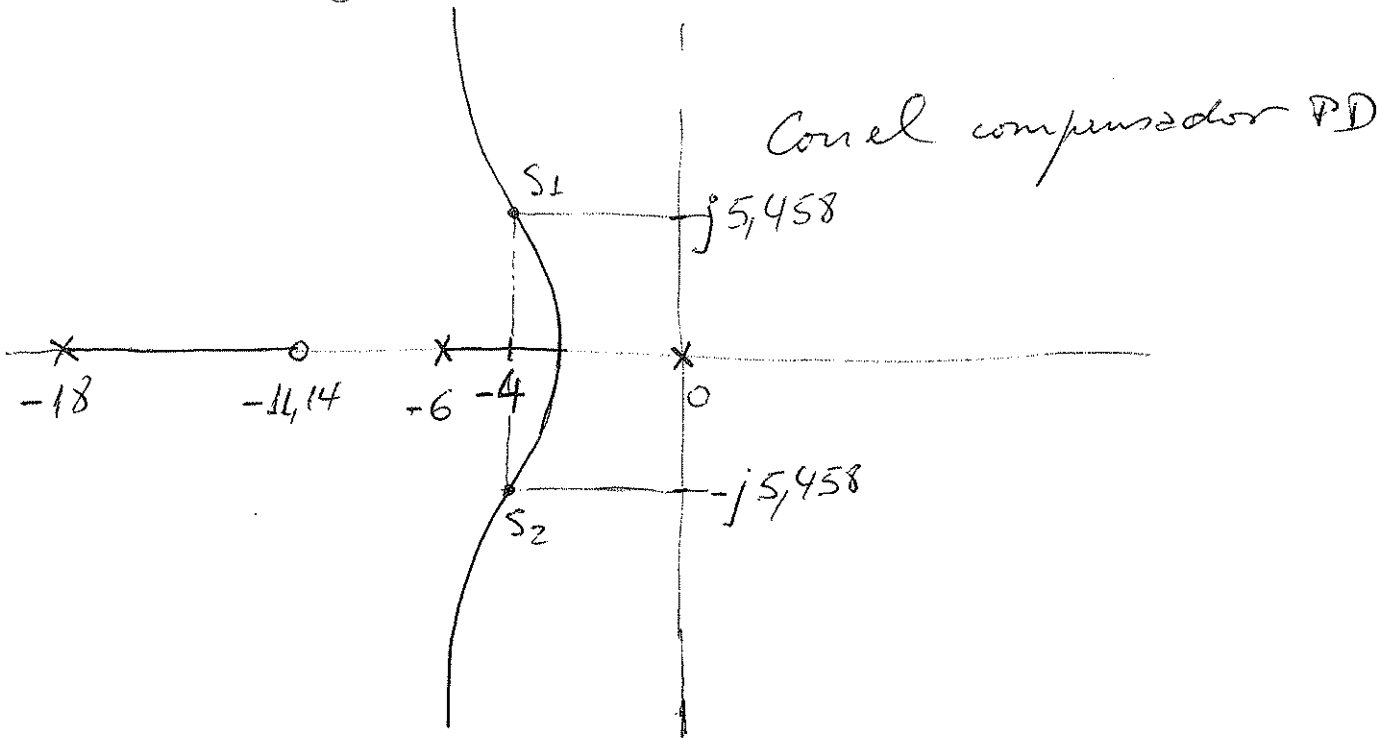
$$\frac{K_d \times 8,987 \times 1080}{6,766 \times 5,812 \times 15,026} = 1$$

$$K_d \times 16,426 = 1 \Rightarrow \boxed{K_d = 0,0608}$$

La F.T del compensador PD resulta:

$$G_c(s) = 0,0608 (s + 11,14)$$

→ Si trazamos el L.R este resulta:



→ Si queremos implementarlo en un μP discretizamos nuestra $G_c(s)$ utilizando alguna técnica ya vista, eligiendo un T de muestreo adecuado.

Acercas de la selección del periodo de muestreo:

→ P' sistemas oscilatorios, es natural normalizar el T respecto al periodo de oscilación.

→ P' sistemas no oscilatorios (como en el ejemplo anterior), el tiempo de subida t_r sería un factor de normalización natural.

$\int_{t_{95}}^{t_{99,2}}$

definimos: $N_r = \frac{t_r}{T}$ N° de muestras por tiempo de subida

Por ejemplo, en un sistema de 1º orden $t_r = ctz.$ de tiempo del sistema, por tanto es razonable elegir N_r entre 4 y 10.

Por ejemplo si $t_r = 0,5$ y $N_r = 10$

$\Rightarrow T = 0,05 \text{ seg.}$

si $N_r = 4 \Rightarrow T = 0,125 \text{ seg.}$

~~0,125 0,125 0,125 0,125~~

P' sistemas de 2º orden con $\zeta = 0,7$ se toma como intervalos de valores adecuados

$\omega T = 0,4 - 0,6$

donde ω es la frecuencia natural deseada de lazo cerrado

Estructuras ~~como~~ cero-polo y polo-cero

$G_c(s) = K \frac{s + \omega_c}{s + \omega_p}$

Problema en el dominio del tiempo:

Estos compensadores introducen 2 singularidades 1 cero y un polo y además debe calcular la constante K .

Dejo determinadas aproximaciones y dentro de una determinada región del plano s

el diseño en el dominio del tiempo
verifique las especificaciones deseadas.

(6)

Siendo s_i un punto de dicha región, deben cumplirse las condiciones de ángulo y módulo
y s_i sea un polo de L.C del sistema:

Siendo: (Conexión serie)

$$G_{la}(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$$

$$\angle G_p(s_i) + \angle G_c(s_i) = \pm 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle G_p(s_i) + \arctg \frac{\omega_d}{\omega_c - \sigma} - \arctg \frac{\omega_d}{\omega_p - \sigma} = \pm 180^\circ$$

$$|G_p(s_i)| \cdot K \cdot |G_c(s_i)| = 1$$

$$\Rightarrow |G_p(s_i)| \cdot K \cdot \frac{\sqrt{(\omega_c - \sigma)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{(\omega_p - \sigma)^2 + \omega_d^2}} = 1$$

$$\text{con } s_i = -\sigma \pm j\omega_d$$

→ A estas 2 ecuaciones se le agrega la condición del error estacionario (de posición o de velocidad) lo q' forma un conjunto de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, las q' pueden resolverse por métodos numéricos.

→ Luego deben verificarse las aproximaciones realizadas. Aves el proyecto debe realizarse en 2 o 3 etapas, por tanto es más útil y sencillo proyectar estas estructuras en el dominio frecuencial.

Así mismo, puede a veces elegirse el ⑦
ceros o el polo (dependiendo la configuración)
teniendo en cuenta de no efectuar una cancelación
de polo o cero con la planta q' cumpla una
función específica.

* Las técnicas de proyecto en el dominio de
tiempo discreto son idénticas a las efectuadas
en el dominio continuo.

y las reglas del trazado del L.R en el
dominio discreto son las mismas q' las del
"Planos".

Proyecto de controladores PF y PD.

Acción Derivativa : Diferencia entre 2 muestras

$$G_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_d(1-z^{-1})}{T} = \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}$$

Acción Integral : Integración trapezoidal.

$$G_i(z) = K_i \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = K_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

Control PI discreto

8

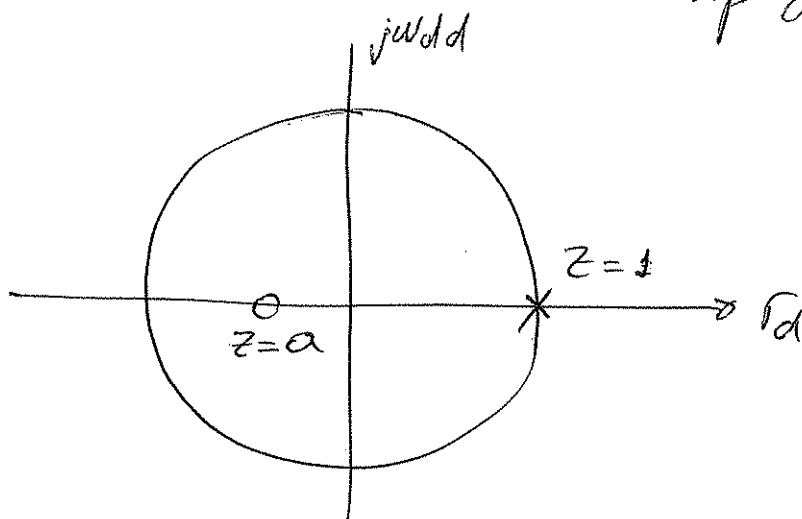
$$G_{PI}(z) = K_p + K_i \frac{T}{z} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

podemos reescribir:

$$G_{PI}(z) = \left(K_p + K_i \frac{T}{z} \right) \frac{z+a}{z-1}$$

$$\text{donde } |a| = \frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p}$$

Este controlador introduce un polo en $z=1$ eliminando el error al escalón en estado est. y un cero ~~en~~ sobre el eje real del plano z y dependerá de la relación entre K_p y K_i



→ Si la intención es nada más de mejorar error en régimen permanente, se puede cancelar uno de los polos de la planta con el cero ($z=a$) introducido por el PI.

Control PD discreto

9

$$G_{PD}(z) = K_p + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z} = \frac{K_p T + K_d}{T} \times \frac{z-a}{z}$$

$$a = \frac{K_d}{K_p T + K_d}$$

El PD introduce un polo en $z=0$ y un cero sobre el eje real del Plano z ~~en~~ dado por a y a' depende de la relación entre K_d y K_p y T

Diseño:

→ Cancelación polo-cero, cancelando un polo de la planta a' presente un ~~respuesta~~ respuesta lenta del sistema con el cero introducido por el PD. (o rta. oscilatoria)

→ Especificación temporal, considerando a' la zona útil p. ubicar el cero esto entre $z=0$ y $z=1$

Control PID discreto.

(10)

$$G_{PID}(z) = K_p + K_i \frac{T}{z} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}$$

$$G_{PID}(z) = \frac{K_i T^2 + 2K_p T + 2K_d}{zT} \times \frac{z^2 + a.z + b}{z.(z-1)}$$

$$\text{donde: } \begin{cases} a = \frac{K_i T^2 - 4K_d - 2K_p T}{K_i T^2 + 2K_p T + 2K_d} \\ b = \frac{2K_d}{K_i T^2 + 2K_p T + 2K_d} \end{cases}$$

El PID discreto tiene: 1 polo $z=1$
1 polo $z=0$

1 par de ceros p' situar en el plano z
según las especificaciones

* Como tiene 1 cero (+) q' el PI discreto
esto da un grado de libertad adicional
en el diseño.

Ejemplo.

(11)

$$\text{Sea } G_p = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad T = 0,1 \text{ seg}$$

$$G_{pd} = \frac{0,04528(z + 0,9048)}{(z - 0,9094)(z - 0,8146)}$$

El sistema "no tiene polo" en $z=1$ por tanto tendrá error en régimen permanente.

→ Nos interesa solo eliminar error estacionario de posición.

Usamos un PI. El cero del PI puede usarse p' cancelar ~~de~~ un polo de la planta

Criterio: El polo a cancelar debe ser el q' se encuentra mas próximo a $z=1$ p' de esta forma aumentar el margen de estabilidad del sistema.

Por tanto: el cero del PI es dado por

$$\frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p} = -0,9094$$

obtenemos $\frac{K_p}{K_i} = 1,054$ (1,054)

eligiendo $K_p = 1 \Rightarrow K_i = \frac{1}{1,054} = 0,949$

De esta forma: $G_{PI}(z) = \left(K_p + k_i \frac{T}{z} \right) \cdot \frac{z+a}{z-1}$

(12)

$$G_{PI}(z) = 1,047 \times \frac{(z-0,9048)}{z-1}$$

y la F.T. LA:

$$G_{la}(z) = G_{PI} \times G_{pd} = \frac{1,047 \times 0,04528 (z+0,9048)}{(z-1)(z-0,8146)}$$

$$G_{la}(z) = \frac{0,047 (z+0,9048)}{(z-1)(z-0,8146)}$$

Si obtenemos los polos de lazo cerrado estos se encuentran:

$$z_{1,2} = 0,8844 \pm j0,2778$$

El sistema resulta estable

y el error estacionario al escalón es nulo

Queremos ahora aplicar un PID discreto a esta planta donde el coeficiente de velocidad sea

$$K_v = 5$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} \cdot G_{la}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} \times G_{PID} \times G_{pd}$$

$$G_{la} = \left(K_p + \frac{k_i T}{z} \times \frac{z+1}{z-1} + \frac{k_d}{T} \times \frac{z-1}{z} \right) G_p$$

$$\frac{z-1}{T} \times G_{la} = \left[\frac{(z-1)}{T} \times K_p + \frac{k_i T}{z} \times \frac{(z+1)}{(z-1)} \times \frac{(z-1)}{T} + \frac{k_d}{T} \times \frac{(z-1)}{z} \times \frac{(z-1)}{T} \right] \times G_p$$

$$= \frac{(z-1)}{T} K_p + \frac{K_i}{z} \times (z+1) + \frac{K_d}{T^2 z} (z-1)^2 \times \frac{0,045 \times (z+0,9048)}{(z-0,9094)(z-0,8146)}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} K_i \times \frac{0,045 \times 1,9048}{0,0906 \times 0,1854} = 5,134 \cdot K_i$$

$$K_v = 5,134 \times K_i = 5$$

$$\Rightarrow K_i = \frac{5}{5,134} = 0,974$$

del Método de cancelación de polo-ceros se pueden obtener K_p y K_d :

$$z^2 + a \cdot z + b = (z-0,9094)(z-0,8146) = z^2 - 1,724z + 0,7408$$

igualando coeficientes:

$$a = -1,724 = \frac{K_i T^2 - 4K_d - 2K_p T}{K_i T^2 + 2K_p T + 2K_d}$$

$$b = 0,7408 = \frac{2K_d}{K_i T^2 + 2K_p T + 2K_d}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones se obtienen K_d y K_p .

$$K_p = 1,454 \quad K_d = 0,43$$

$$G_{PID}(z) = 5,798 \times \frac{z^2 - 1,724z + 0,7408}{z \cdot (z-1)}$$

Control con PD discreto

14

$$\text{Sea } G_p = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \quad T=0,1 \text{ seg}$$

Diseñar el sist. en L.C tal que se cumplan las sig. especificaciones:

$$M_p = 16,3\%$$

$$t_s = 2 \text{ seg}$$

Pl' cumplir las especificaciones debe diseñarse un PD cuya F_{OT} esté dada por:

$$G_c(z) = \frac{z-a}{z}$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 2$$

$$M_p = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 3,4641$$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -2 \pm j3,4641$$

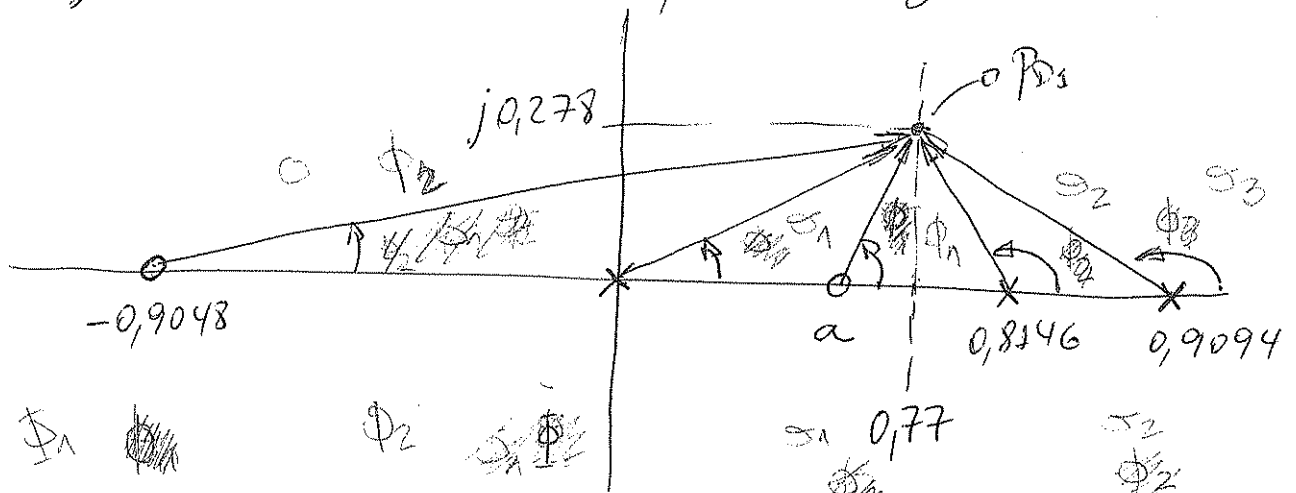
siendo $T=0,1 \text{ seg}$.

$$p_{1,2} = e^{sT} = e^{-\sigma T} \cdot e^{-j\omega_d T} = 0,77 \pm j0,278$$

$$G_{pd}(z) = \frac{0,004528 (z+0,9048) \cdot K}{(z-0,9094)(z-0,8146)}$$

$$G_{la}(z) = \frac{K \times 0,004528 \times (z-a) (z+0,9048)}{z \times (z-0,9094) \times (z-0,8146)}$$

P' y las raíces deseadas \in al L.R debe cumplirse la condición de ángulo (15)



$$\arctan \frac{0,278}{0,77-a} + \tan^{-1} \frac{0,278}{0,9048+0,77} - \tan^{-1} \frac{0,278}{0,77} - 180^\circ + \tan^{-1} \frac{0,278}{0,814-0,77}$$

$$-180^\circ + \tan^{-1} \frac{0,278}{0,9094-0,77} = 180^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{0,278}{0,77-a} + 9,4252 - 19,8516^\circ - 180^\circ + 81,0062^\circ - 180^\circ +$$

$$+ 63,369^\circ = 180^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{0,278}{0,77-a} - 226,0512 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{0,278}{0,77-a} = \tan(406,0512) = \cancel{599,227} 1,0374$$

$$0,278 = 0,7988 - 1,0374 \cdot a$$

$$\Rightarrow a = \frac{0,7988 - 0,278}{1,0374}$$

$$\boxed{a = 0,5}$$

Aplicando la condición de módulo se obtiene el valor de K : $Z_1 = 0,77 + j0,278$

(16)

$$K \times 0,00452 \times \sqrt{(0,77-0,5)^2 + 0,278^2} \times \sqrt{(0,77+0,9048)^2 + 0,278^2} = 1$$

$$\sqrt{0,77^2 + 0,278^2} \times \sqrt{(0,8146-0,77)^2 + 0,278^2} \times \sqrt{(0,9094-0,77)^2 + 0,278^2}$$

$$K \times \frac{0,03}{0,0717} = 1 \Rightarrow K \times 0,415 = 1$$

$$\Rightarrow K = 24,1043$$

Nº de muestras por ciclo podemos calcularlos aproximadamente como:

$$\frac{\omega_s}{\omega_d} = \frac{2\pi/T}{\omega_d} = 18,138 \text{ muestras}$$

$$\omega_d = 3,4641 = 2\pi \cdot f_d \Rightarrow f_d = 0,5513$$

$$T_d = \frac{1}{f_d} = 1,8138 \text{ seg.}$$

También, siendo ω_m de los polos C.C. deseados

$$\omega_m = 0,81387 \quad \boxed{\omega_m = 4}$$

$$\omega_s = 0,1 \quad \omega_m = 0,08 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T =$$

~~$$\omega_s = 0,1 \quad \omega_m = 0,08 = \frac{2\pi}{T}$$~~

$$\omega_m T = 0,1 \Rightarrow T = 0,02 \text{ seg}$$

Sea $G_{pd} = \frac{0,864}{z^2(z-0,135)}$

$G_p = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \times \frac{e^{-2Ts}}{s+1}$
 $1-e^{-Ts} = 1-z^{-1}$ $e^{-2Ts} = z^{-2}$

(17)

Se desea diseñar un PI tal y los polos tengan un $\zeta = 0,5$ y el N° de muestras x ciclos de oscilación sea 10, o sea:

$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0,1$ $\frac{T_d}{T_s} = 10$

Siendo $z = e^{Ts} = e^{T(-\zeta\omega_n \pm j\omega_d)}$

y $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$

$z = e^{-\frac{2\pi}{\omega_s} \zeta \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pm j \frac{2\pi \omega_d}{\omega_s}}$ → raíces deseadas

$G_c(z) = K_p + K_i \frac{1}{1-z^{-1}} = (K_p + K_i) \times \frac{z - \frac{K_p}{K_p + K_i}}{z - 1}$

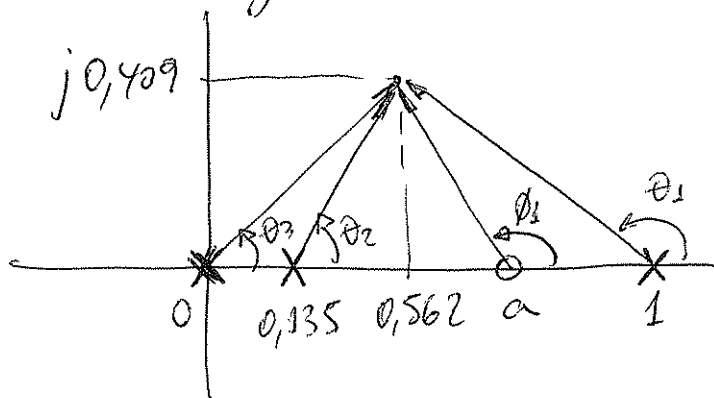
$K = K_p + K_i$ $a = \frac{K_p}{K_p + K_i}$

De las especificaciones tengo que:

$z_{1,2} = 0,562 \pm j 0,409$

1) Aplico la condición de ángulos p' y $z_{1,2} \in$ al L.R y ubicar el cero del PI:

$\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - 2\theta_3 = -180^\circ$



~~180~~ $180^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{a-0,562} = \phi_1$

$\theta_1 = 180^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{1-0,562}$ $\theta_2 = \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{0,562-0,135} = \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{0,427}$

$\theta_3 = \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{0,562} = 36^\circ$ $\theta_2 = 43,76^\circ$

$\theta_1 = 136,96^\circ$

$\phi_1 - 136,96^\circ - 43,76^\circ - 2 \times 36^\circ = -180$

$\phi_1 - 252,72^\circ = -180^\circ$

$\phi_1 = -180 + 252,72^\circ$

$\phi_1 = 72,72^\circ$

$\Rightarrow 180 - \text{tg}^{-1} \frac{0,409}{a-0,562} = 72,72^\circ$

$\frac{0,409}{a-0,562} = \text{tg}(180 - 72,72) = \text{tg}(107,28) = -3,21$

$0,409 = -3,21 \cdot a + 1,8 \Rightarrow a = \frac{0,409 - 1,8}{-3,21}$

$a = 0,433$

2) de la condici3n obtengo la ganancia K y las raices deseadas:

$\frac{K \cdot |z-a| \times 0,864}{|z|^2 \times |z-1| \times |z-0,135|} = 1$

$K \times 0,864 \times \sqrt{(0,562-0,433)^2 + 0,409^2} = 1$

$(0,562^2 + 0,409^2) \times \sqrt{(0,562-1)^2 + 0,409^2} \times \sqrt{(0,562-0,135)^2 + 0,409^2}$

$$K \times \frac{0,353^{0,37}}{0,17} = 1 \Rightarrow \boxed{K = 0,48}$$

(18)

$$K_p + K_i = 0,48 \quad \frac{K_p}{K_p + K_i} = 0,433$$

$$K_p = 0,48 - K_i$$

$$\frac{0,48 - K_i}{0,48 - K_i + K_i} = 0,433 \Rightarrow K_i = -0,433 \times 0,48 + 0,48$$

$$\boxed{K_i = 0,272}$$

$$K_p = 0,48 - 0,272$$

$$\boxed{K_p = 0,208}$$

Sea el siguiente sistema:

$$G_p = \frac{36}{s \cdot (s + 3,6)}$$

$$G_c(z) = K \frac{z - a}{z - b}$$

Especificaciones: $M_p = 10\%$ $t_s = 0,8 \text{ seg}$
 $e_{ssp} = 0$

Obtener el periodo de muestreo T tener 20 muestras por ciclo:

$$\frac{T_d}{T} = 20 = \frac{2\pi/\omega_d}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi/\omega_d}{20}$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0,8 \Rightarrow \sigma = \frac{4}{0,8} = 5$$

$$M_p = e^{-\pi\sigma/\omega_d} \Rightarrow \omega_d = \frac{-\pi\sigma}{\ln(0,1)} = 6,83$$

$$s_{1,2} = -5 \pm j6,83$$

$$Z_{1,2} = e^{sT} = e^{T(-5 \pm j6,83)}$$

(20)

$$T = \frac{2\pi/\omega_d}{20} = 0,046 \text{ seg} \cdot \approx 50 \text{ mseg}.$$

$$Z_{1,2} = 0,734 \pm j0,26$$

→ Diseño del compensador. (en adelante)
 por cancelación zero-poles.

La F.T. de la planta discreta resulta

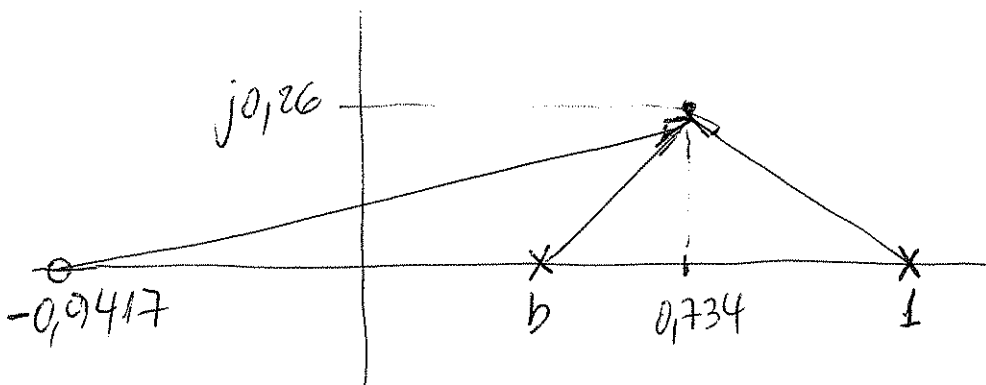
$$G_{pd}(z) = \frac{0,0424 \times (z + 0,9417)}{(z - 1)(z - 0,8352)}$$

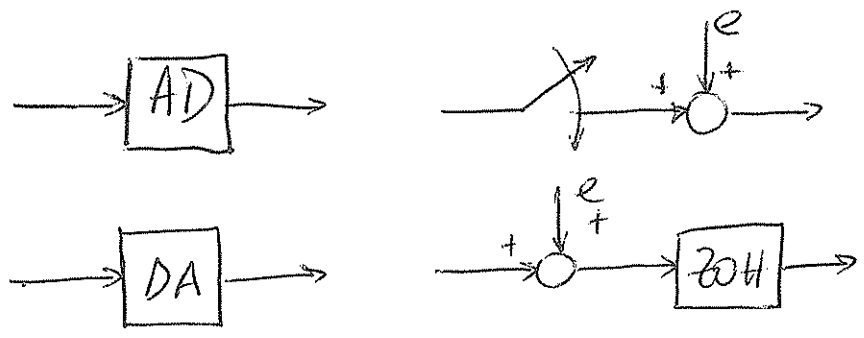
Dado si no se puede eliminar el polo en $z = 1$ el cual permite si el sistema tenga error nulo de régimen permanente, entonces se compensa el polo en $0,8352$.

$$|a| = 0,8352$$

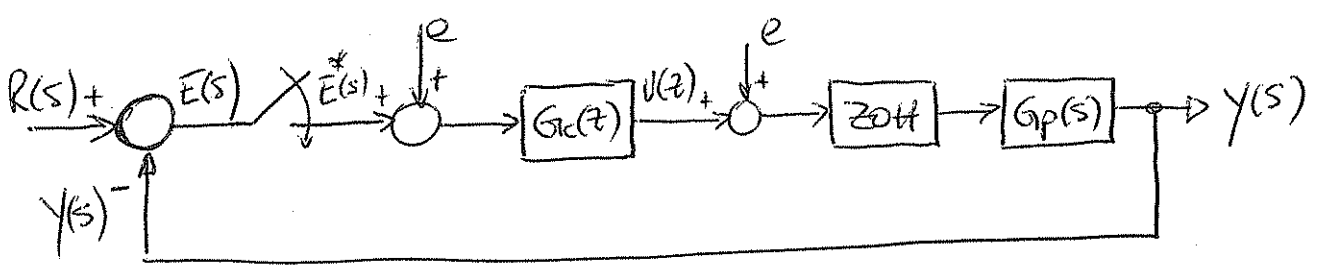
Resta hallar b y K .

Aplicando la condición de ~~módulo~~ ángulo y de módulo.

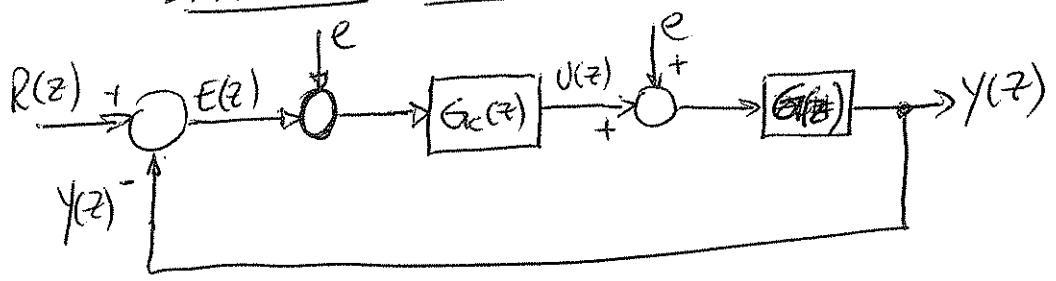




Como consecuencia del error de cuantificación los conversores AD y DA introducen errores. Estos errores pueden modelarse como un disturbio en el camino directo del sistema de control.



Sistema muestreado



Determinar el N° de bits de los convertidores p' el efecto del error máximo de cuantificación sobre la variable sea menor al 0,6%.

$$e_{max} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{2^{-n}}{2} = 2^{-n-1}$$

P' analizar el sistema ante los disturbios del error de cuantificación, siendo ξ el sistema es lineal, puede considerarse $R(z) \equiv 0$

Debe hallarse la transferencia entre la salida y $\textcircled{2}$ la señal de error:

$$Y(z) = G(z) \cdot [U(z) + E(z)] \quad U(z) = G_c(z) \cdot [E(z) - Y(z)]$$

~~$$Y(z) = G(z) \cdot G_c(z) E(z) +$$~~

$$Y(z) = G(z) [G_c(z) E(z) - G_c(z) Y(z) + E(z)]$$

$$Y(z) = G(z) G_c(z) E(z) - G(z) G_c(z) Y(z) + G(z) E(z)$$

$$Y(z) [1 + G(z) G_c(z)] = G(z) [G_c(z) + 1] \cdot E(z)$$

$$Y(z) = \frac{G(z) [G_c(z) + 1]}{1 + G(z) G_c(z)} \cdot E(z)$$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{N(z) [G_c(z) + 1]}{D(z) + N(z) G_c(z)} \cdot E(z)$$

Siendo $E(z)$ del tipo escalón:

$$E(z) = \frac{e}{1 - z^{-1}}$$

$$e_{ssp}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(1 - z^{-1})} \frac{N(z) [G_c(z) + 1]}{D(z) + N(z) G_c(z)} \cdot \frac{e}{\cancel{(1 - z^{-1})}}$$

al hacer tender $z \rightarrow 1$ $D(z) \equiv 0$

$$e_{ssp}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{G_c(z) + 1}{G_c(z)} \cdot e = \lim_{z \rightarrow 1} \underbrace{\left[1 + \frac{1}{G_c(z)} \right]}_{K_{ssp}} \cdot e \leq \frac{0,6}{100} = 0,006$$

$$\Rightarrow K_{ssp} \cdot e \leq 0,006$$

$$\Rightarrow \left| e \leq \frac{0,006}{K_{ssp}} \right|$$

$$p_i \text{ } l_{\max} = 2^{-n-1} \quad p' \text{ } 8 \text{ bits} \Rightarrow l_{\max} = 2^{-9}$$

③

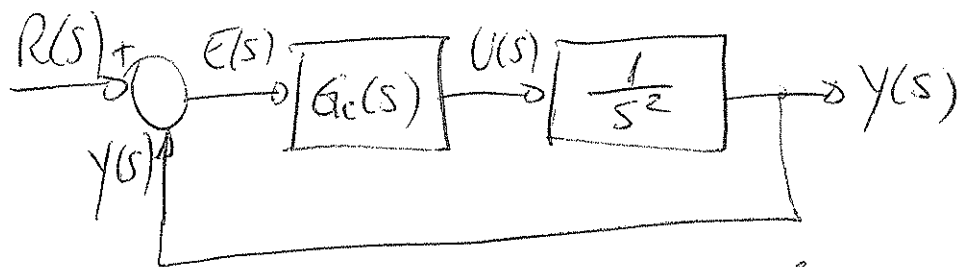
$$\Rightarrow l_{\max} / 8 \text{ bits} = 0,00195312$$

$$p' \text{ } 7 \text{ bits} \Rightarrow l_{\max} = 2^{-8} = 0,00390625$$

$$p' \text{ } 9 \text{ bits} \Rightarrow l_{\max} = 2^{-10} = 9,765625 \times 10^{-4}$$

Ejemplo 2: Influencia de un ZOH

①



Supongamos que los polos de lazo cerrado deben tener $\omega_n = 4 \text{ rad/seg}$ y $\zeta = 0,5$. Se puede conseguir esta condición con el sig. compensador de adelanto:

$$G_c(s) = 52 \times \frac{s + 2,77}{s + 13}$$

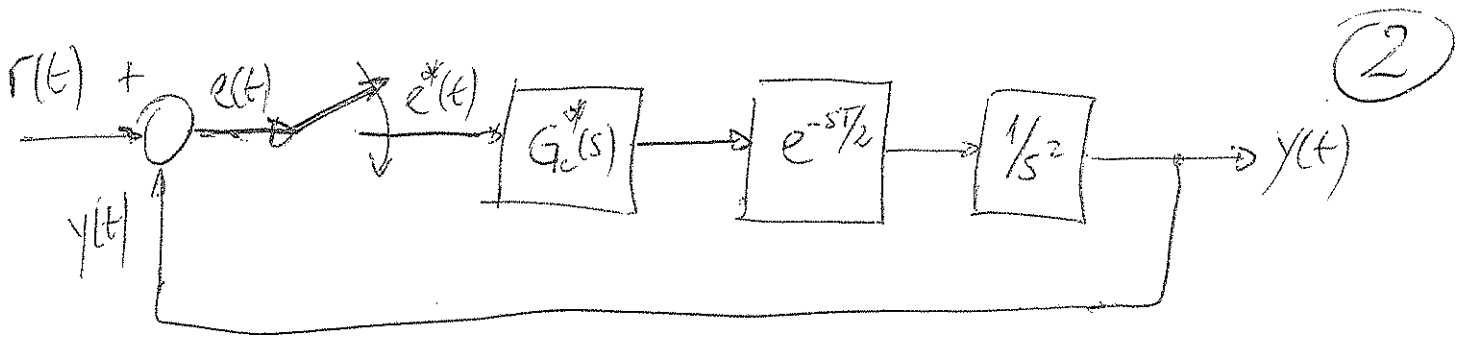
Si el controlador digital debe ser proyectado con $T = 0,02 \text{ seg}$, vamos a determinar el efecto del retenedor de orden cero utilizando una aproximación:

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx e^{-sT/2} = \frac{1}{e^{sT/2}} \approx \frac{1}{1 + sT/2}$$

$$\frac{2}{0,02} = 100$$

$$= \frac{2}{2 + sT} = \frac{2/T}{2/T + s} = \frac{100}{s + 100}$$

La frec. del polo está lo suficientemente alejada del polo de la planta por lo que no causa modificación apreciable.



$$G_c(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} \times 52 \times \frac{s+2,77}{s+13} \right]$$

Aplicando el teorema del residuo
 p' $s \rightarrow 0$ y $s \rightarrow -13$

$$G_c(z) = \frac{52 - 49,46 z^{-1}}{1 - 0,771 \cdot z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$52 \cdot E(z) - z^{-1} \cdot 49,46 \cdot E(z) = U(z) - 0,771 \cdot z^{-1} U(z)$$

$$\Rightarrow u(k) = 0,771 \cdot u(k-1) + 52 \cdot e(k) - 49,46 \cdot e(k-1)$$

Si T es grande, debería considerarse el efecto del zOH

$$\Rightarrow G_{zOH}(s) \cdot G_c(s)$$

por ej. $T=0,4 \Rightarrow G_{zOH}(s) = \frac{5}{s+5}$

$$G_c^*(s) = \frac{260 (s+2,77)}{(s+5)(s+13)}$$

$$G_c(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{260 (s+2,77)}{s (s+5) (s+13)} \right]$$

