Resolución ejercicio 3 Serie Discreta de Fourier

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right)$$

Una de las alternativas para resolver estos ejercicios es escribirlos como la Fórmula de Euler, y de allí mismo obtener los coeficientes de la serie de Fourier. En este caso…

¿Por qué no podemos hacerlo?

En este caso hay una sumatoria de dos señales de distinto periodo, por lo tanto, debemos calcular el periodo "N" y frecuencia "W_0" de la señal completa.

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right)$$

$$w_{01} = \frac{3\pi}{5}; N = \frac{2\pi}{w_0} \Rightarrow N = \frac{10}{3} \Rightarrow N = 10\ (entero)$$

$$w_{02} = \frac{8\pi}{3};\ N = \frac{3}{4} \Rightarrow N = 3$$

El periodo de la señal total será el mínimo común múltiplo entre ambos periodos independientes, es decir:

$$\boxed{N = 30, w_0 = \frac{\pi}{15}}$$

Entonces, teniendo estos valores, ¿qué podemos hacer con la señal original para escribirla como una serie de Fourier de manera fácil?

Reescribimos $x[n]$ pero en función del nuevo periodo "N" y frecuencia:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{3}n\right) = 1 + \sin(k_1 w_0 n) + 4\cos(k_2 w_0 n)$$

$$k_1 \rightarrow \frac{3\pi}{5} = k_1\left(\frac{\pi}{15}\right);\ k_1 = 9$$

$$k_2 \rightarrow \frac{8\pi}{3} = k_2\left(\frac{\pi}{15}\right);\ k_2 = 40$$

Entonces la señal, escrita en función de la misma frecuencia queda:

$$\boxed{x[n] = 1 + \sin\left(\frac{9\pi}{15}n\right) + 4\cos\left(\frac{40\pi}{15}n\right)}$$

Esta señal, la podemos escribir de manera exponencial por la relación de Euler, quedando:

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j9\omega n} - e^{-j9\omega n}\right) + \frac{4}{2}\left(e^{j40\omega n} + e^{-j40\omega n}\right)$$

$$\boxed{x[n] = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j9\omega n}\right) - \frac{1}{2j}\left(e^{-j9\omega n}\right) + 2\left(e^{j40\omega n}\right) + 2\left(e^{-j40\omega n}\right)}$$

Teniendo en cuenta la representación de una función en base a sus coeficientes:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk\omega n}$$

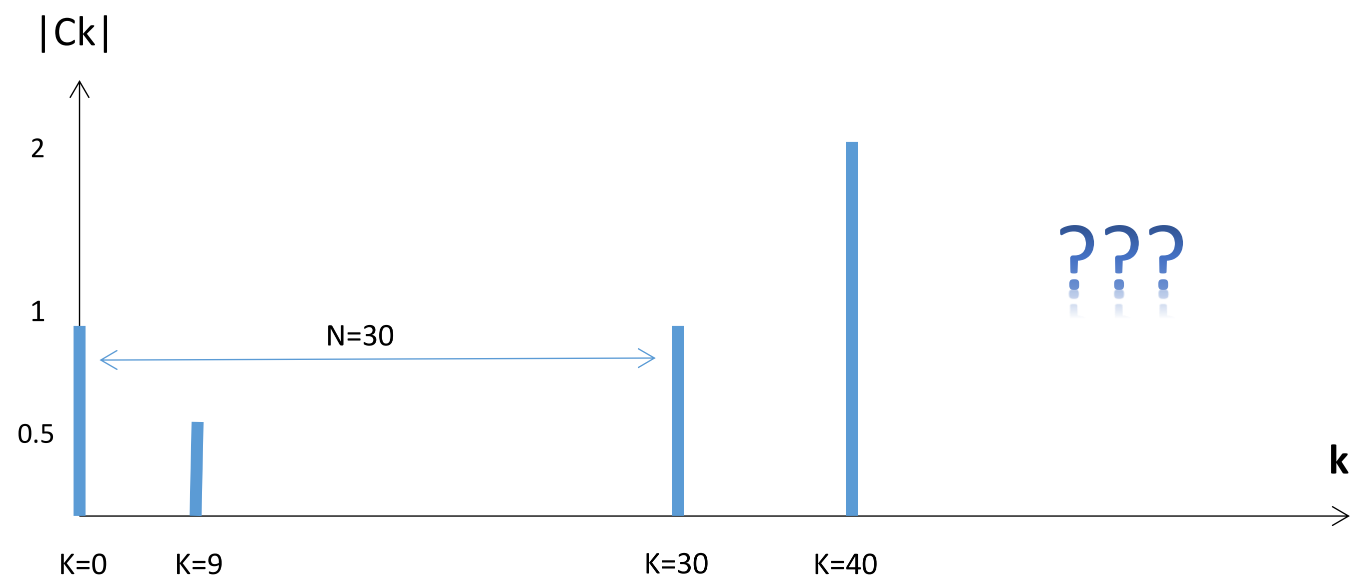
Obtengo que:

$$\boxed{C_0 = 1; \quad C_9 = \frac{1}{2j}; \quad C_{-9} = -\frac{1}{2j}; \quad C_{40} = C_{-40} = 2}$$

Como sabemos, el gráfico de coeficientes espectrales de la serie de Fourier de tiempo discreto **es periódico**, y en este caso, el periodo vale 30 muestras. Entonces

¿Por qué tenemos coeficientes n°40 y -40?

Si graficamos estos coeficientes, ¿el resultado es periódico con N=30?



Tenemos que recordar que: $\boxed{C_k = C_{k\pm N}}$

$$C_0 = 1;\ \ C_9 = \frac{1}{2j};\ \ C_{-9+30} = C_{21} - \frac{1}{2j};\quad C_{40-30} = C_{10} = 2;\quad C_{-10+30} = C_{20} = 2$$