Universidad Nacional de Misiones

Facultad de Ingeniería
OBERA

# SISTEMAS DE CONTROL y AUTOMATIZACIÓN

Profesor: Fernando Botterón

Ingeniería en Computación

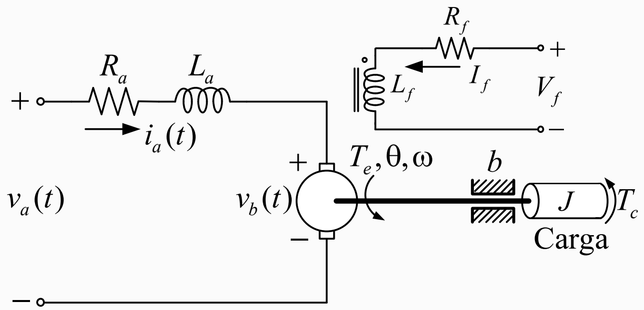
Facultad de Ingeniería

U.Na.M

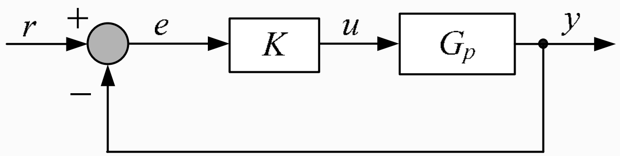
# Temas de la Unidad 4

- ☑ **Región deseada de polos de lazo cerrado:**
  - ➢ **Vincular especificaciones de la respuesta con región del plano-s**
- ☑ **Diseño de compensadores P, PD, PI y PID:**
  - ➢ **Diseño por Reubicación de Polos. Ejemplos.**
- ☑ **Diagramas del Lugar de las Raíces:**
  - ➢ **Análisis, trazado y propiedades del lugar de raíces**
- ☑ **Diseño de compensadores P, PD, PI y PID:**
  - ➢ **Diseño por Lugar de Raíces. Ejemplos.**
- ☑ **Diseño de compensadores de adelanto de fase, de atraso de fase y de adelanto-atraso por lugar de raíces.**
  - ➢ **Método geométrico para el diseño por LGR.**

# Diseño de Sistemas de Control utilizando el Lugar de las Raíces




**Control de posición angular del eje de un motor CC**




$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} \qquad G_c(s) = K$$

**El problema es diseñar el sistema en lazo cerrado para que se verifiquen las siguientes especificaciones:**

Especificaciones:

1. $e_{ssp} = 0;$
2. $M_p \leq 5\%;$
3. $t_s \cong 9seg;$
4. $t_r$ menor posible

# Diseño de Sistemas de Control utilizando el Lugar de las Raíces

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} \qquad G_c(s) = K \qquad G_{lc}(s) = \frac{y}{r} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

**1° Requerimiento es la estabilidad de $G_{lc}(s)$**

$G_{lc}(s)$ será estable siempre que $K > 0$

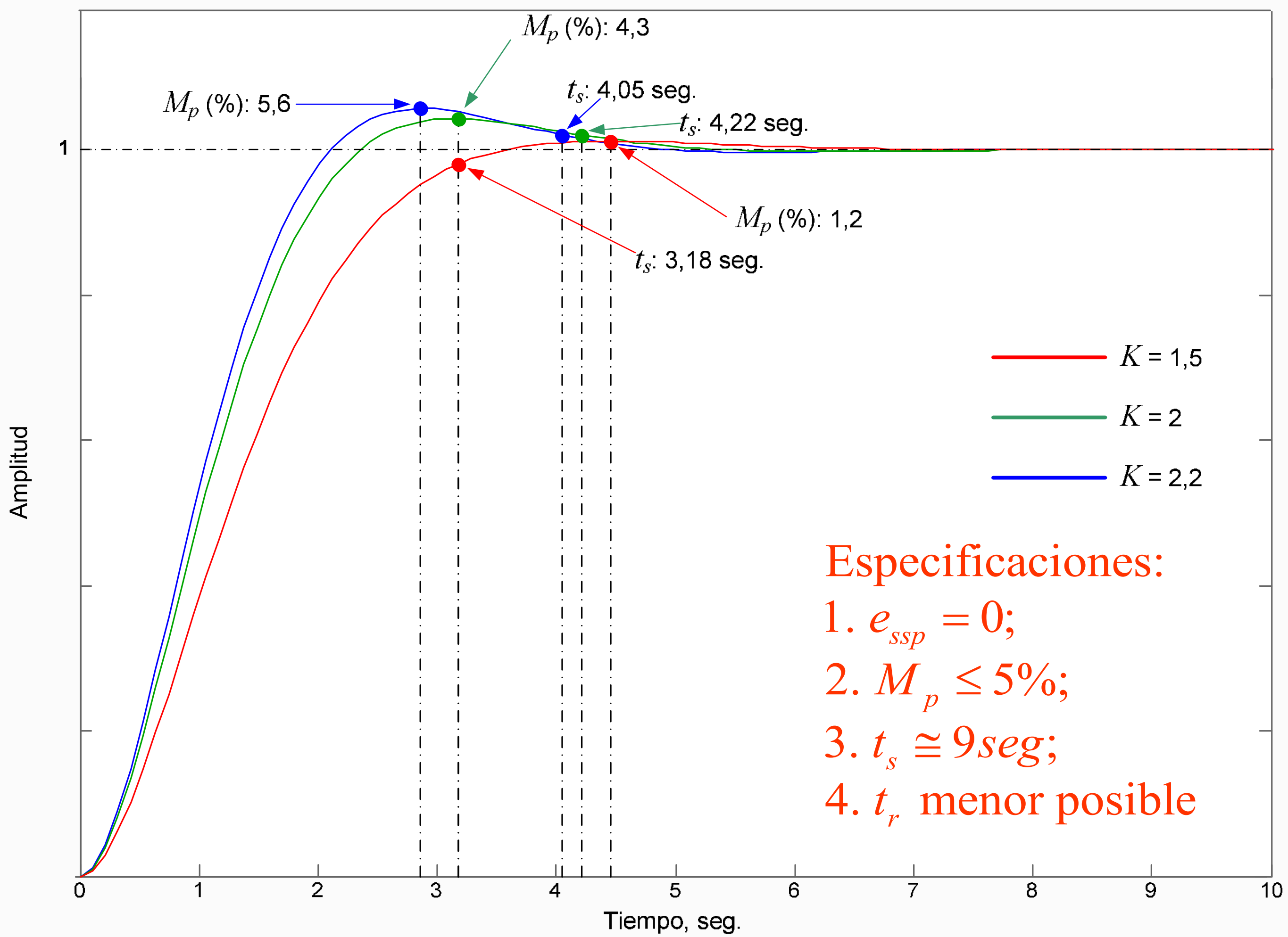
**2º Error de posición nulo**

$$Y(s) = \lim_{s \to 0} s\, G_{lc}(s)\, \frac{1}{s} = G_{lc}(0) = \frac{K}{K} = 1 \quad \Rightarrow$$

Especificación 1, $e_{ssp} = 0$, está garantizada

**Resta cumplir las restricciones de Sobrepaso, Tiempo de Asentamiento y Tiempo de Subida.**

# El proceso se resume a calcular los polos de lazo cerrado en función de *K*: Prueba y Error

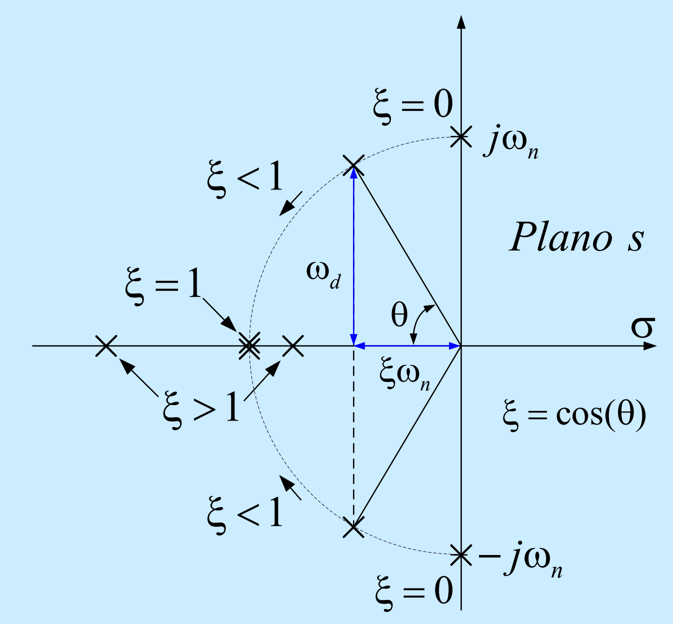


# Región deseada de polos de lazo cerrado

**Consiste en trasladar las especificaciones deseadas de la respuesta en el dominio del tiempo, al dominio de Laplace o del plano-s para diseñar el controlador seleccionado**

$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n\, s + \omega_n^{\ 2}}$$

**Raíces** $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$




**Para una referencia en escalón** $R(s) = \frac{1}{s}$

$$y(t) = \mathbb{L}^{-1}\left(\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n\, s + \omega_n^{\ 2}} \cdot \frac{1}{s}\right) \Rightarrow y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \theta)$$

**Parámetros de diseño**

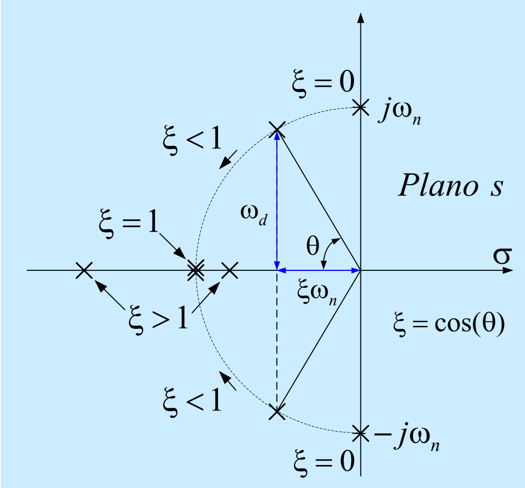
con: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ , $\sigma = \xi\omega_n$ $\;y\;$ $\theta = \cos^{-1}(\xi)$

# Región deseada de polos de lazo cerrado

**Para régimen estacionario:** $y(t) = y_f = 1$

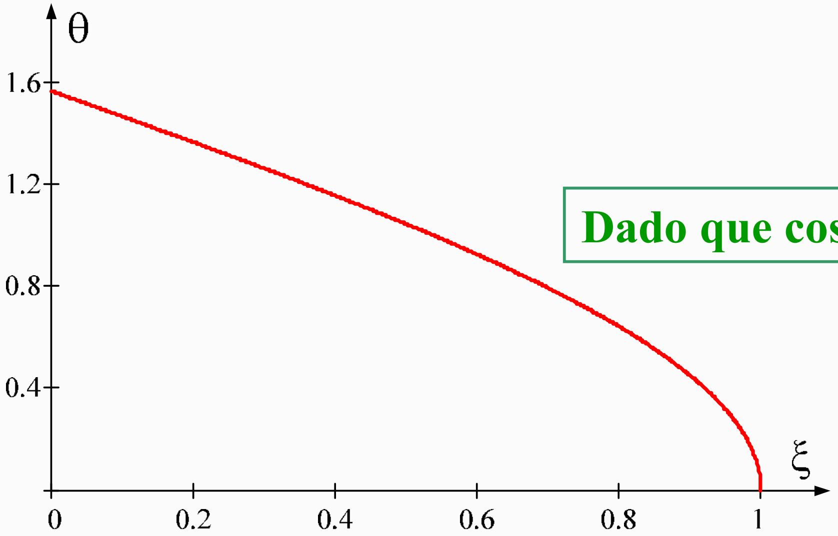
**Valor máximo de la respuesta:** $y_{max} = \max|y(t)| = 1 + e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\text{Sobrepaso}\,(M_p) = \left|\frac{y_{max} - 1}{1}\right| = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$




Dado que $M_p = f(\xi)$ → **Esta relación puede trasladarse al plano-*s* sabiendo que:**

$$\xi = \cos(\theta)$$




**Dado que cos(θ) es una función decreciente de θ, entre 0 y 90º se tiene que:**

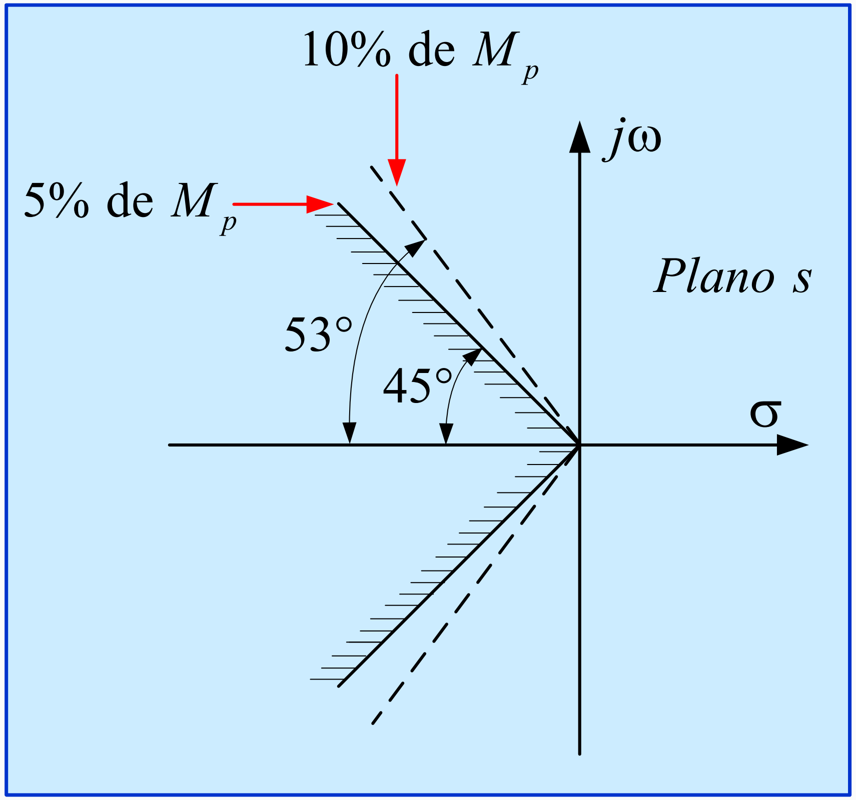
para todo $\xi \geq \xi_d$ → $\theta \leq \theta_d = \cos^{-1}(\xi_d)$

# Región deseada de polos de lazo cerrado

**Para un sobrepaso especificado:**

$$M_p \le 10\% \;\rightarrow\; \xi \ge 0,6 \;\rightarrow\; \theta \le \cos^{-1}(0,6) = 53°$$

$$M_p \le 5\% \;\rightarrow\; \xi \ge 0,7 \;\rightarrow\; \theta \le \cos^{-1}(0,7) = 45°$$




**Conclusión:**

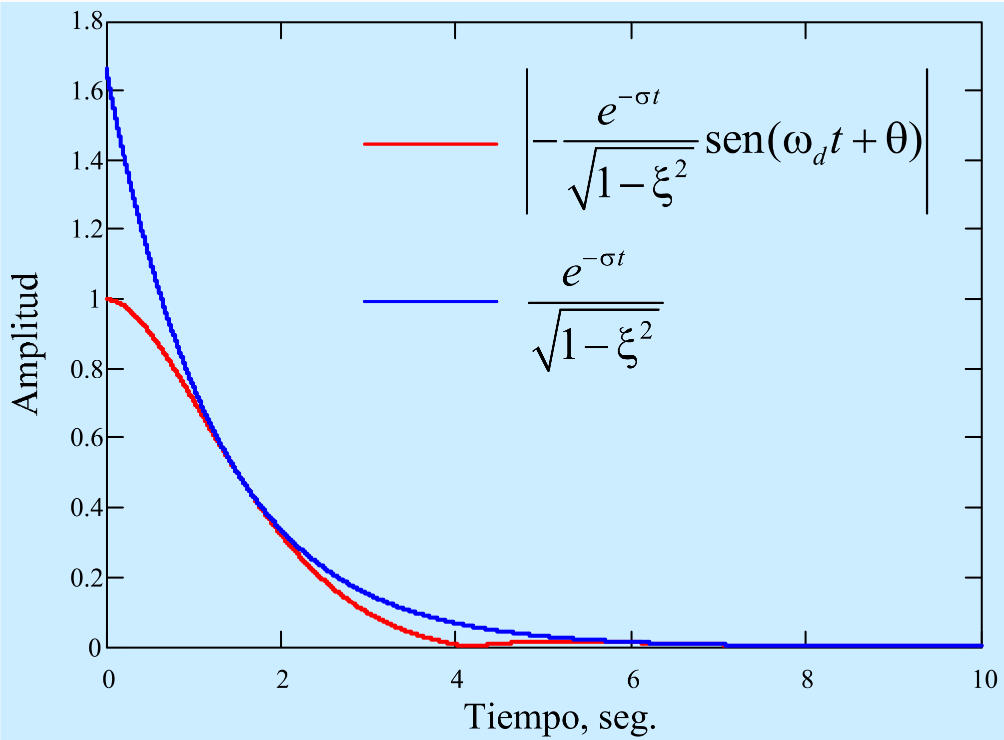
**% de $M_p$ en el dominio del tiempo, significa un valor de ángulo del polo dominante deseado respecto al eje real negativo en el plano-*s*.**

# Región deseada de polos de lazo cerrado

Especificación de tiempo de asentamiento de la respuesta: $t_s$ es el tiempo necesario para que la respuesta alcance y se mantenga en torno a un dado % del valor final, que puede ser del 2 o del 5 %.

**Diferencia entre la respuesta *y*(*t*) y su valor de $y_{ss}$:**

$$D := \left|y(t)-1\right| = \left|-\frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t}\operatorname{sen}(\omega_d t+\theta)\right| \le \frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t} = \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$




siendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\sigma t} = \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

**El tiempo de asentamiento $t_s$ para un 2% de error, es el menor tiempo *t* para el cual se cumple que:**

$$\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \le 0,02$$

# Región deseada de polos de lazo cerrado

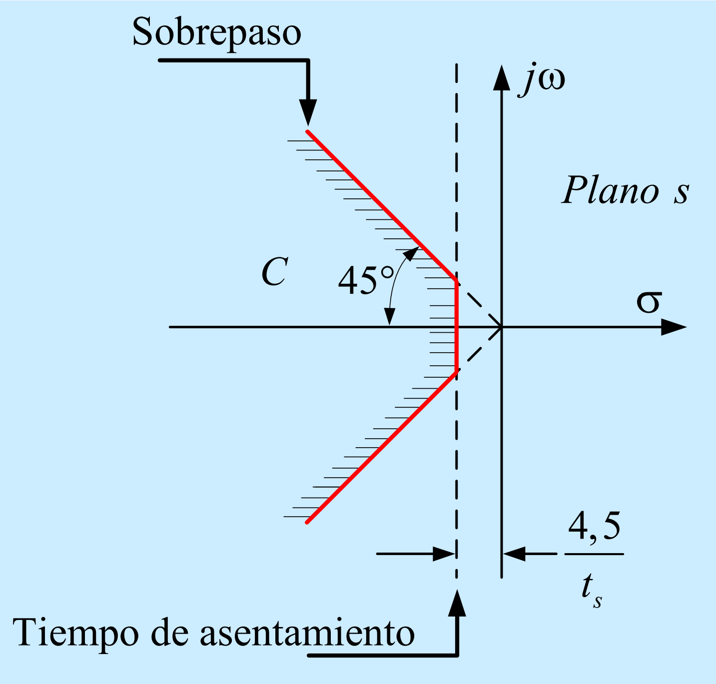
$si\ \ \xi \le 0{,}8$

$$D \le \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1{,}6667e^{-\sigma t}$$

$$e^{-\sigma t} \le \frac{0{,}02}{1{,}6667} = 0{,}012$$

$$-\sigma t \le \ln(0{,}012) = -4{,}423 \quad \text{o sea,} \quad t_s \ge \frac{4{,}423}{\sigma} \approx \frac{4{,}5}{\sigma}$$

**Implica que *D* < 0,02 si** $t_s \ge \dfrac{4{,}5}{\sigma}$




**Dado un $t_s$, si se cumple que** $\sigma \ge \dfrac{4{,}5}{t_s}$

lo que es lo mismo si: $-$(Parte real de los polos) $\ge 4{,}5 / t_s$

"Puede cumplirse la especificación de tiempo de asentamiento"

**Conclusión:**

**Un $t_s$(seg) dado en el dominio del tiempo, significa un valor de distancia horizontal del polo dominante respecto al eje imaginario en el plano-*s*.**

# Región deseada de polos de lazo cerrado

**Especificación de tiempo de subida de la respuesta:**

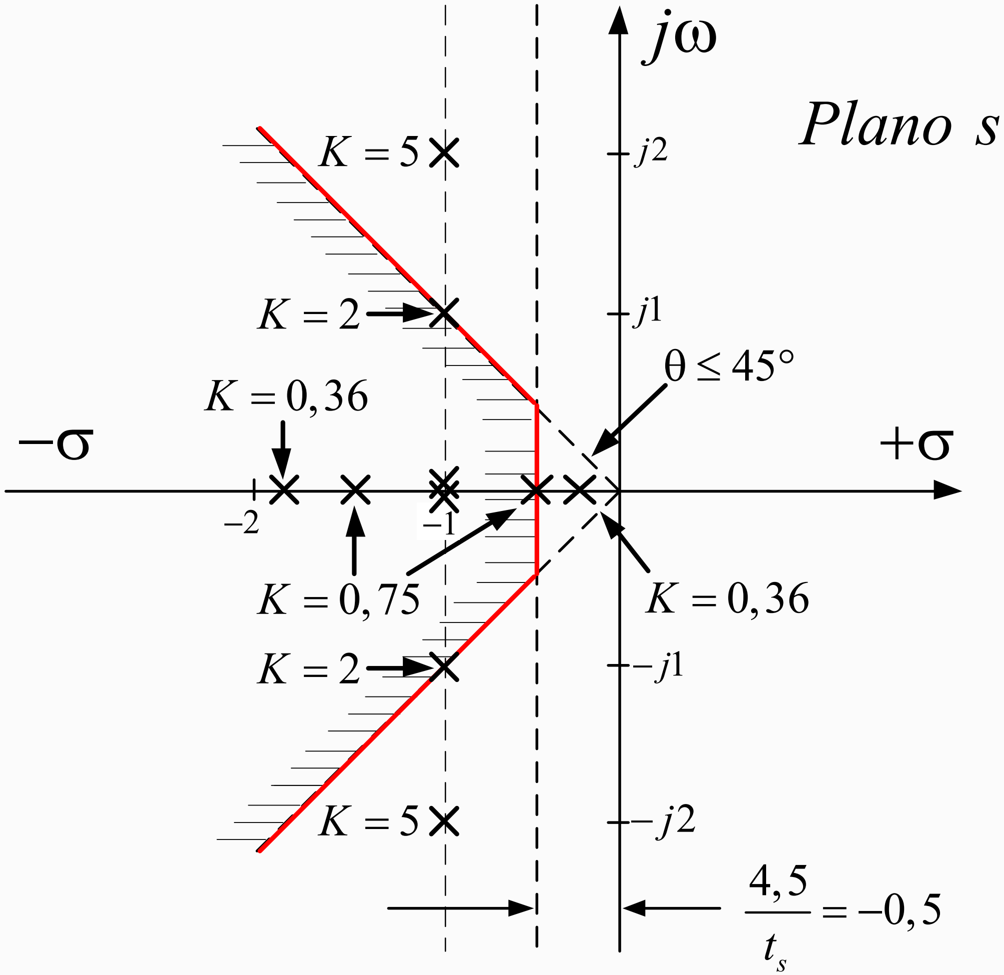
**Cuanto más lejos esté el polo más cercano al origen del plano s, menor será el tiempo de subida.**

$$t_r \propto \frac{1}{\omega_n}$$

| | |
|---|---|
| Sobrepaso | Sector con $\theta = \cos^{-1}(\xi)$ y $\xi$ se puede determinar de la relación de $M_p = f(\xi)$ |
| Tiempo de asentamiento (2%) | $\cong$ 4,5/(distancia más corta de los polos al eje $j\omega$) (para $\xi = 0,8$) |
| Tiempo de subida | $\propto$ a 1/( distancia más corta de los polos al origen) (polo más dominante) |

$$G_{lc}(s) = \frac{y}{r} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

**Deben verificarse el sobrepaso, el tiempo de asentamiento y el tiempo de subida.**

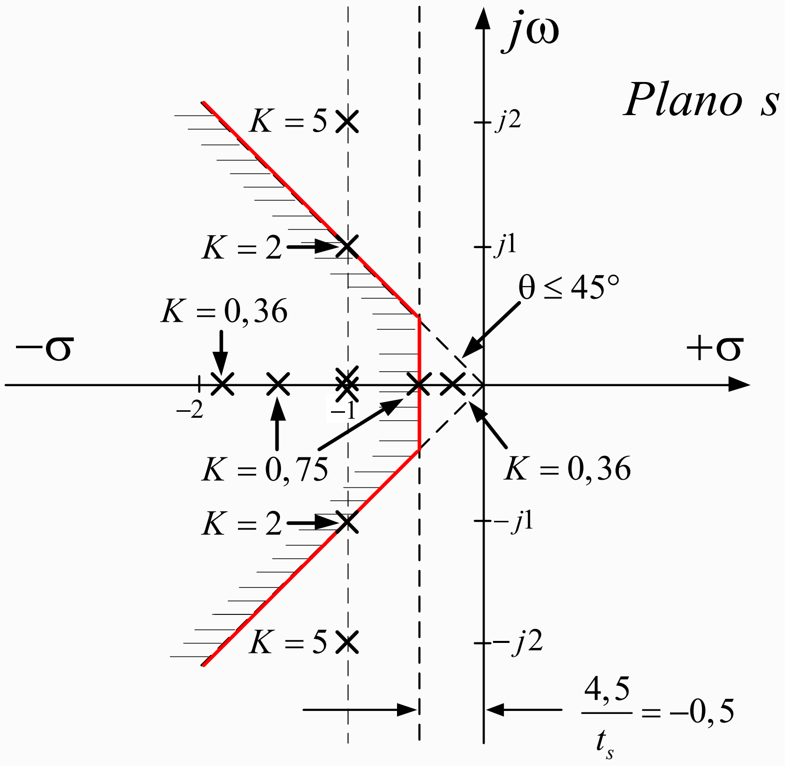



Especificaciones:

1. $e_{ssp} = 0$;
2. $M_p \leq 5\%$;
3. $t_s \leq 9 seg$;
4. $t_r$ menor posible

$$G_{lc}(s)=\frac{y}{r}=\frac{K}{s^2+2s+K}$$

**Se verifica entonces si se cumplen el sobrepaso, el tiempo de asentamiento y el tiempo de subida.**



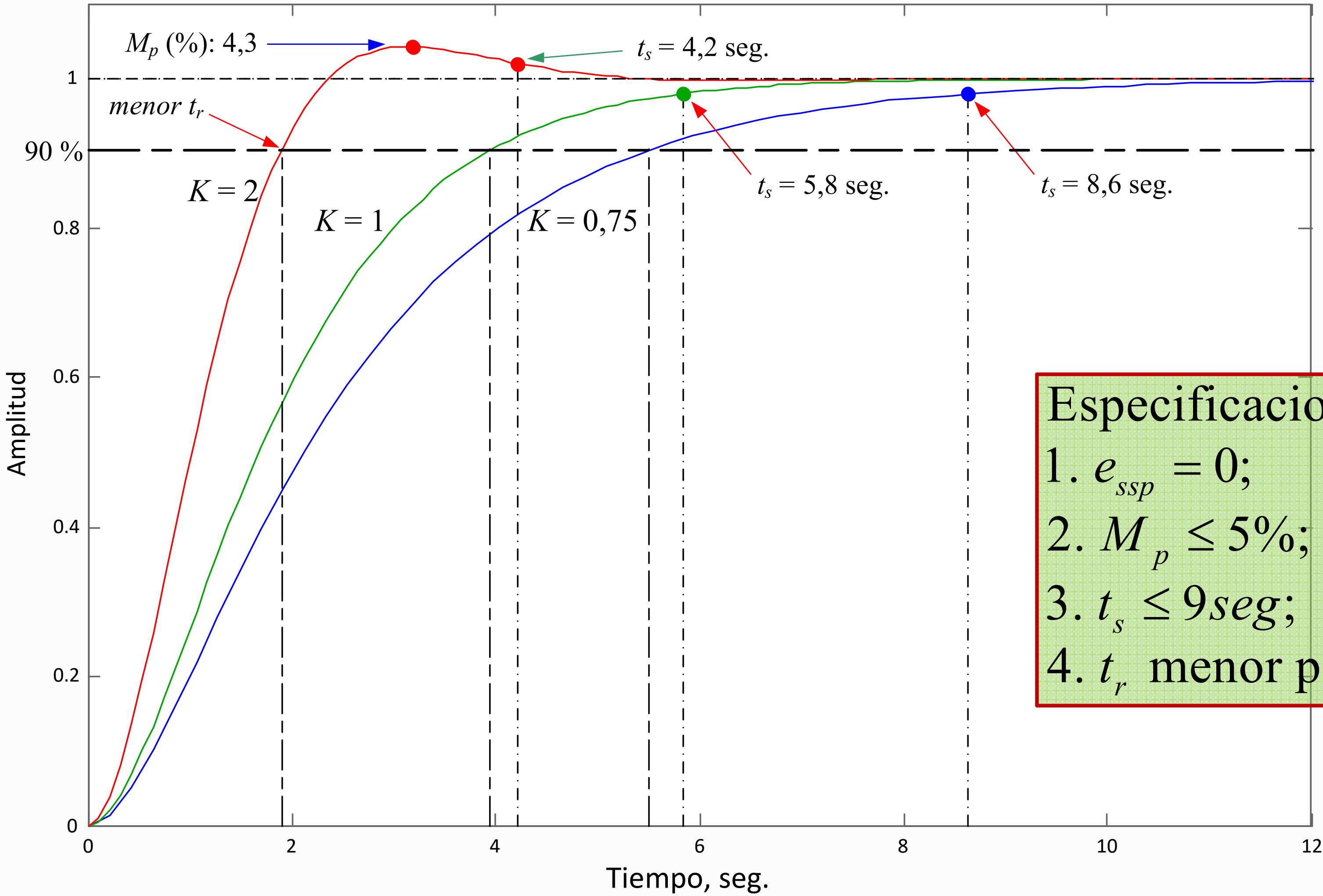

Especificaciones:
1. $e_{ssp}=0$;
2. $M_p \le 5\%$;
3. $t_s \le 9\,seg$;
4. $t_r$ menor posible

| Ganancia | Polos | Observaciones |
|---|---|---|
| $K=0{,}36$ | $-0{,}2$ y $-1{,}8$ | Cumple (2) pero no cumple (3) |
| $K=0{,}75$ | $-0{,}5$ y $-1{,}5$ | Cumple (2) y (3) |
| $K=1$ | $-1$ y $-1$ | Cumple (2) y (3) |
| $K=2$ | $-1\pm j1$ | Cumple (2) y (3) |
| $K=5$ | $-1\pm j2$ | Cumple (3) pero no cumple (2) |

**FINALMENTE: Con *K* = 2 se verifica el menor tiempo de subida**

**por lo tanto se cumplen las 4 especificaciones**

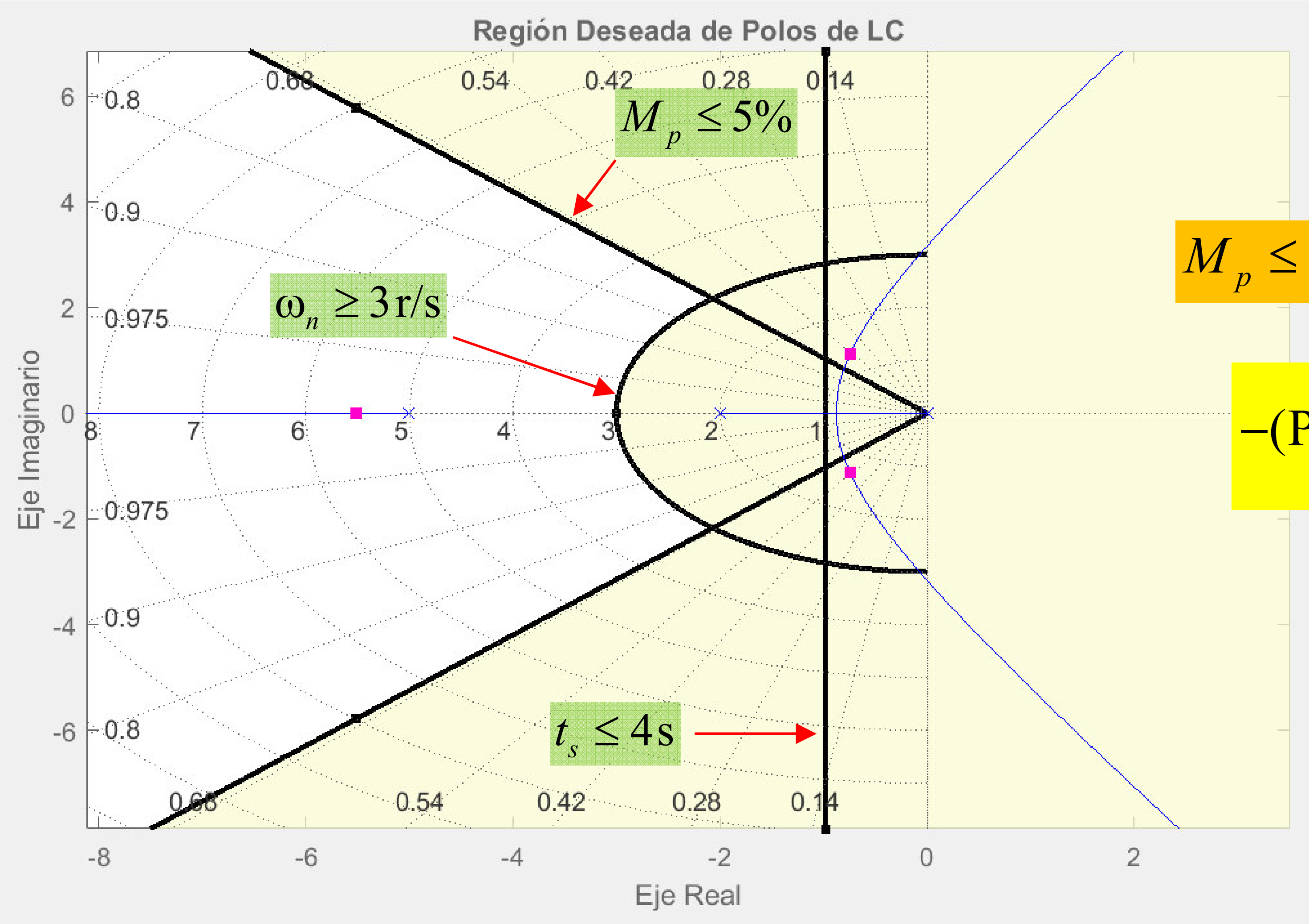
# Respuesta de $G_{lc}(s)$ para los valores de *K* = 2, 1 y 0,75




Especificaciones:

1. $e_{ssp} = 0$;
2. $M_p \leq 5\%$;
3. $t_s \leq 9seg$;
4. $t_r$ menor posible

# Región deseada de polos de lazo cerrado con SISOTOOL: Ejemplo



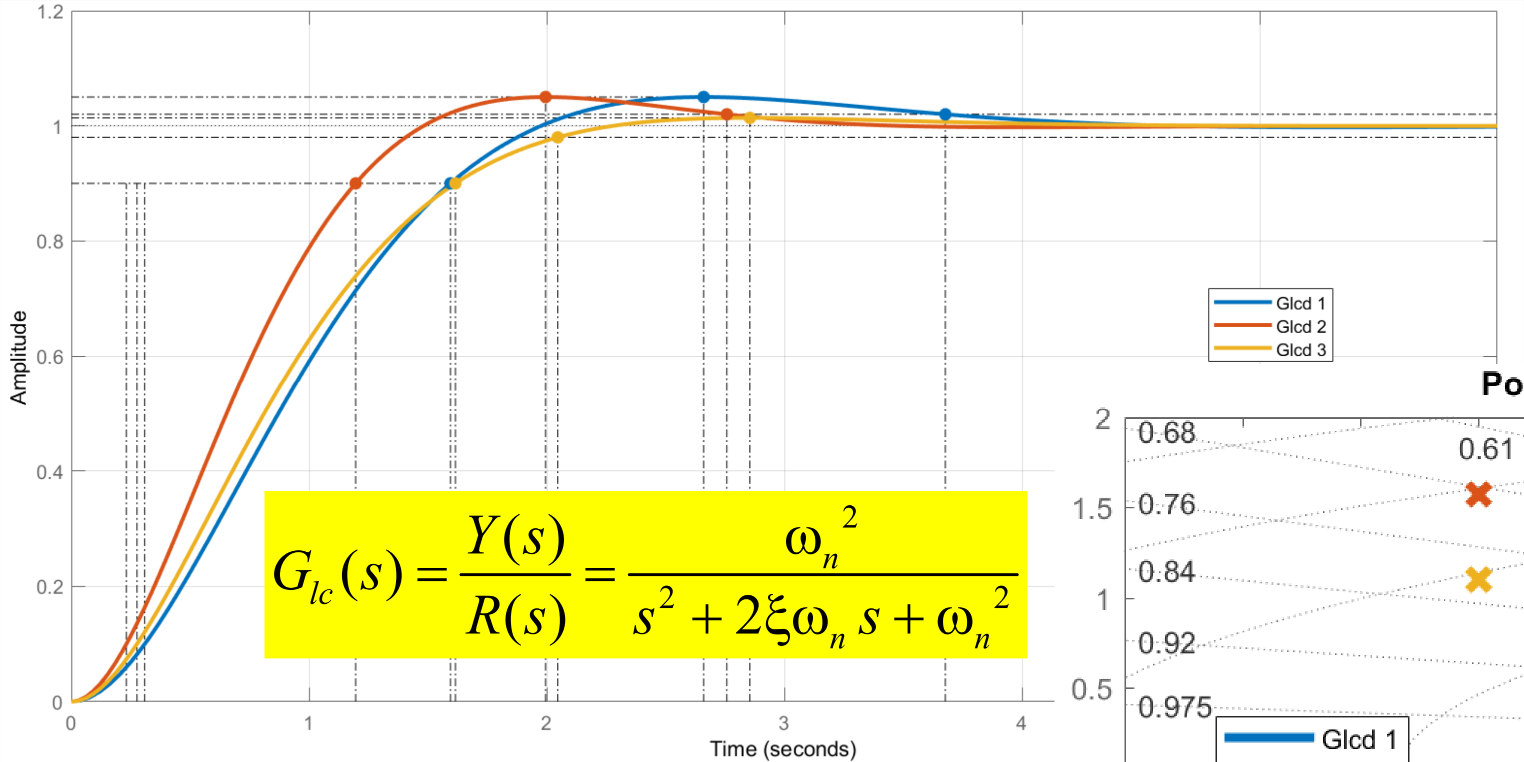

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+5)(s+2)}$$

$$M_p \leq 5\% \rightarrow \xi \geq 0,707 \Rightarrow \theta \leq 45°$$

$$-(\text{Parte real de los polos}) \geq \frac{4,5}{t_s}$$

$$\sigma \geq 1,125\ \mathrm{r/s}$$

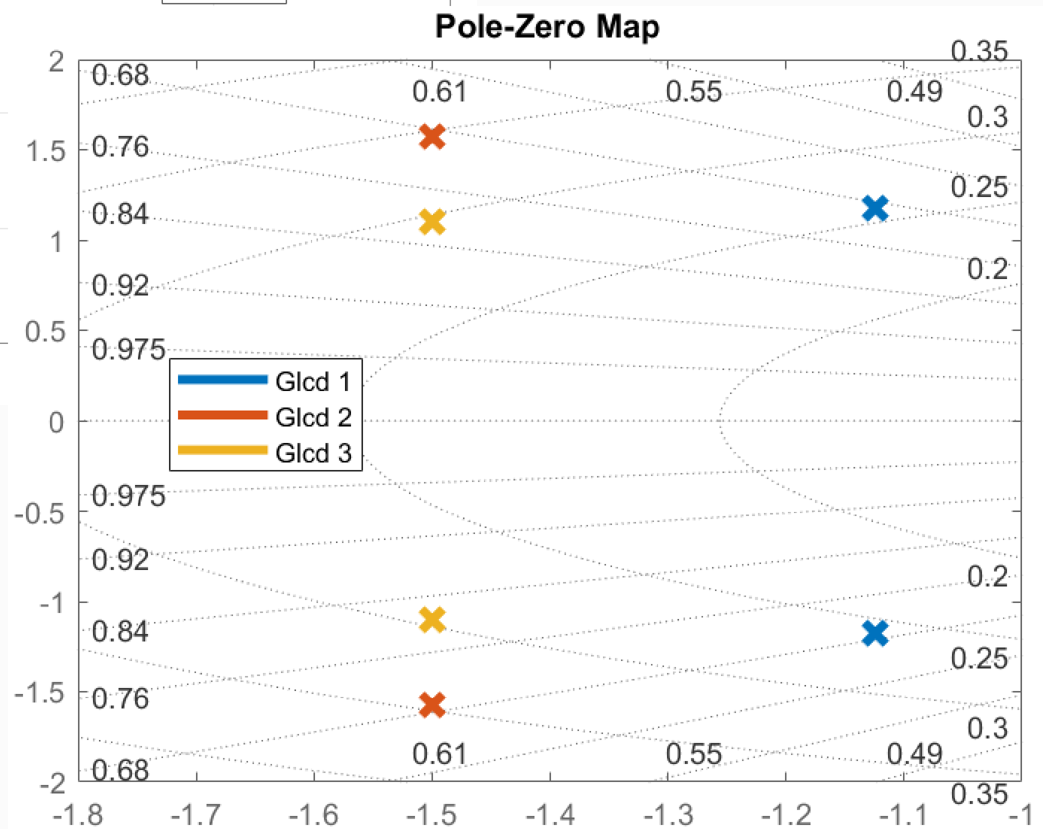
$$t_r \leq \frac{0,8 + 2,5\xi}{\omega_n} = 0,85\,\mathrm{s}$$




$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Especificaciones:

$M_p = 5\%;\ t_s = 4\,\text{s};\ t_r = 0{,}85\,\text{s}$




| | $\mathbf{G}_{lcd1}$ | $\mathbf{G}_{lcd2}$ | $\mathbf{G}_{lcd3}$ |
|---|---|---|---|
| $M_p$ | 5% | 5% | 1,4% |
| $t_s$ | 3,68 s | 2,76 s | 2,05 s |
| $t_r$ | 1,3 s | 0,96 s | 1,34 s |

# Diseño de Controladores por Reubicación de polos

## Sistemas de Primer Orden: Controlador PI

**Planta:** $G_p(s) = \dfrac{5}{s+0,8}$ **PI:** $G_c(s) = K_p \dfrac{(s + K_i/K_p)}{s}$

**F.T.L.C:** $$G_{lc}(s) = \frac{5K_p s + 5K_i}{s^2 + s(5K_p + 0,8) + 5K_i} = \frac{5K_p(s + K_i/K_p)}{s^2 + s(5K_p + 0,8) + 5K_i}$$

**El polinomio característico del sistema en lazo cerrado es:**

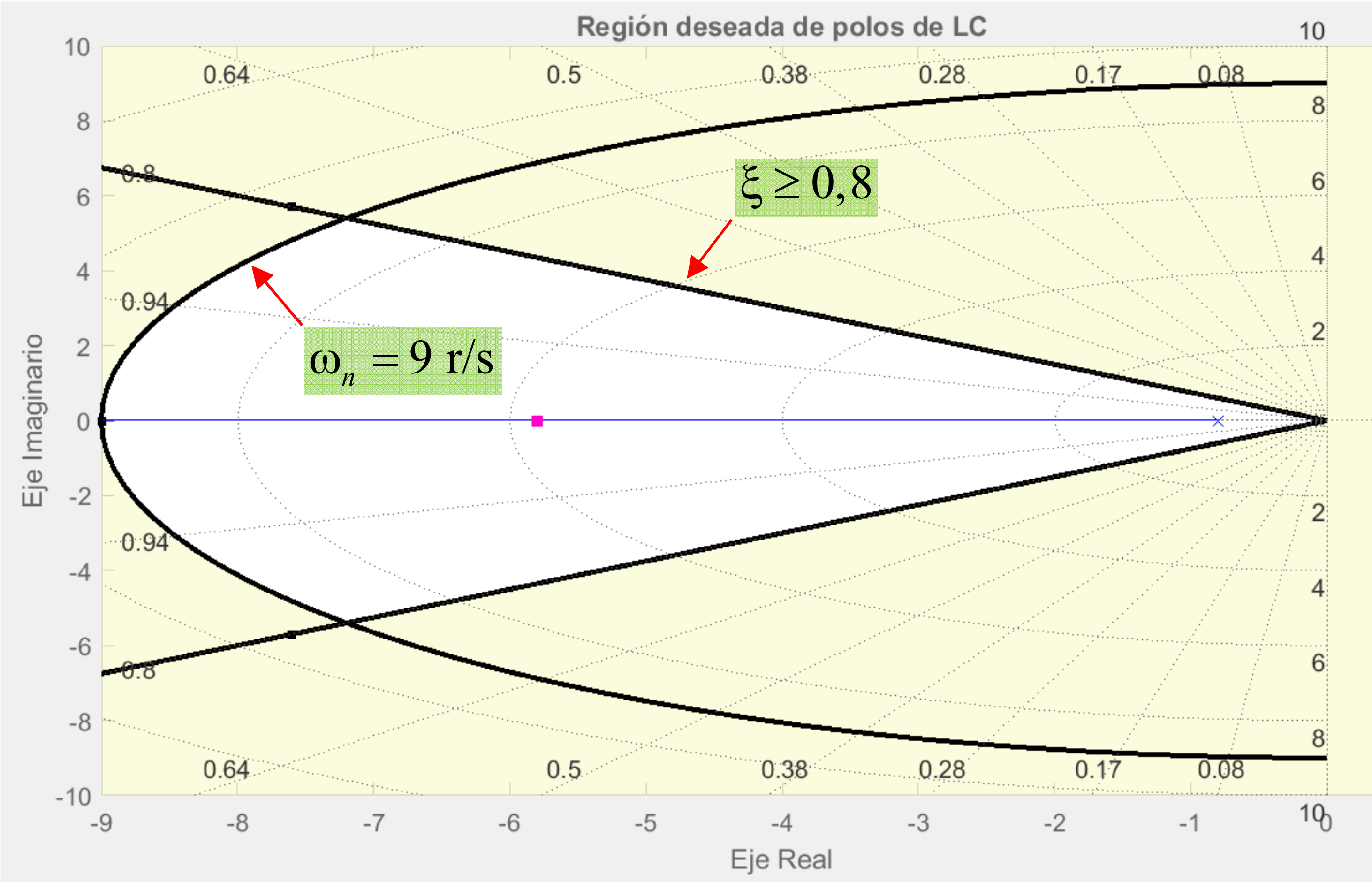
$$\boxed{P_c(s) = s^2 + s(5K_p + 0,8) + 5K_i}$$

**El polinomio característico deseado es:** $\boxed{P_{cd}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$

Las raíces del polinomio característico deseado, estarán determinadas por las especificaciones del sistema, tales como: $M_p$, $t_s$, $t_p$, $\xi$, $\omega_n$.

## Determinamos con las especificaciones, la región deseada de polos de LC

$\xi \geq 0,8 \ y \ t_r \cong 0,2\,\text{seg}$ sabiendo que: $t_r \cong \dfrac{1,8}{\omega_n}$ se tiene que: $\omega_n = 9\,\text{rad/s}$



## Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

con $\xi = 0,8$ y $\omega_n = 9\,\mathrm{rad/s}$

**El polinomio característico deseado resulta:**

$$\boxed{P_{cd}(s) = s^2 + 14,4s + 81}$$

**La FTLC deseada resulta:**

$$\boxed{G_{lcd}(s) = \frac{81}{s^2 + 14,4s + 81}}$$

**Los polos de la FTLC deseada son:**

$$\boxed{\text{polos LC deseados} = -7,20 \pm j5,40}$$

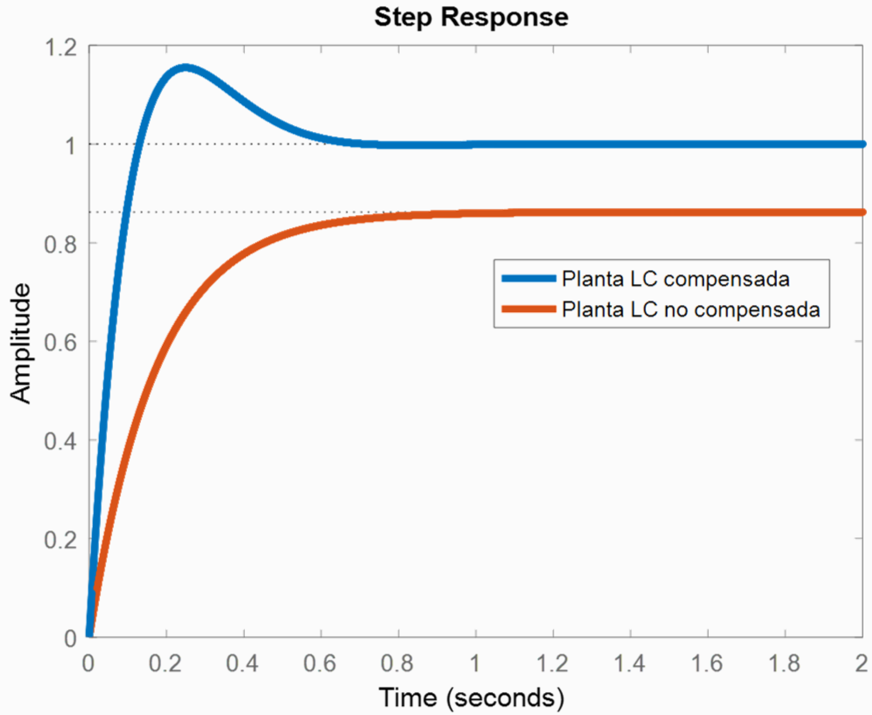
**Igualando los coeficientes de ambos polinomios de igual potencia, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} 5K_p + 0,8 = 2\xi\omega_n = 14,4 \\ 5K_i = \omega_n^2 = 81 \end{cases} \Rightarrow K_i = \frac{\omega_n^2}{5}; \; K_p = \frac{2\xi\omega_n - 0,8}{5}$$

$$G_{PI}(s) = 2,72 + \frac{16,2}{s}$$

## Planta compensada con PI

$$G_{lc}(s)=\frac{13,6s+81}{s^2+14,4s+81}$$

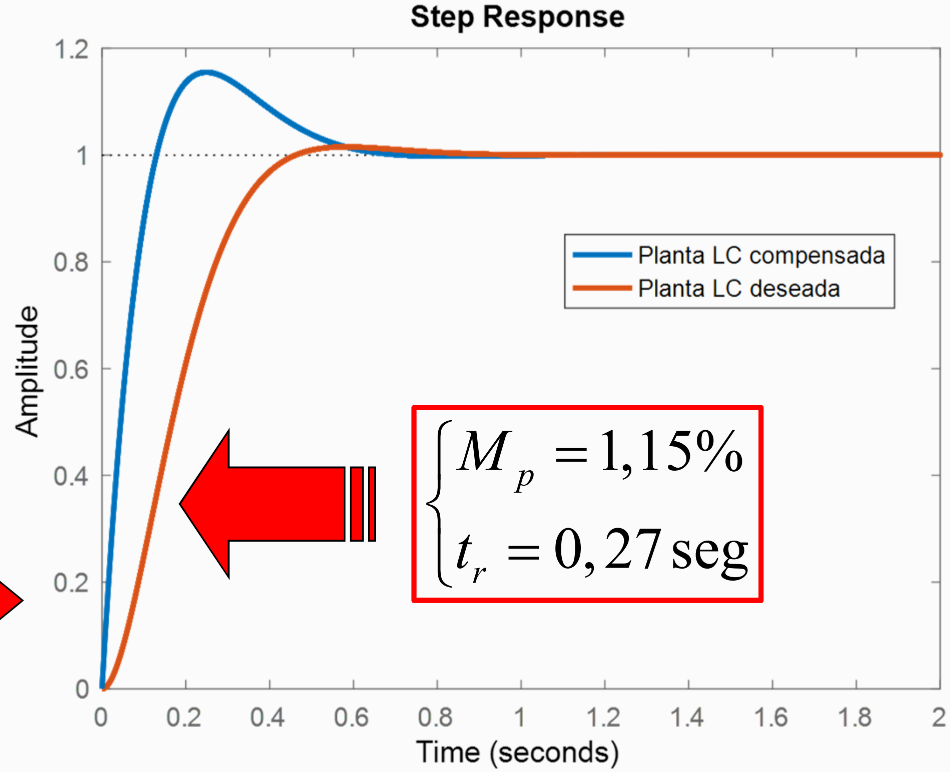



$$\begin{cases} M_p=15\% \\ t_r=0,09\,\text{seg} \end{cases}$$

$$G_{PI}(s)=2,72+\frac{16,2}{s}$$

## Planta deseada

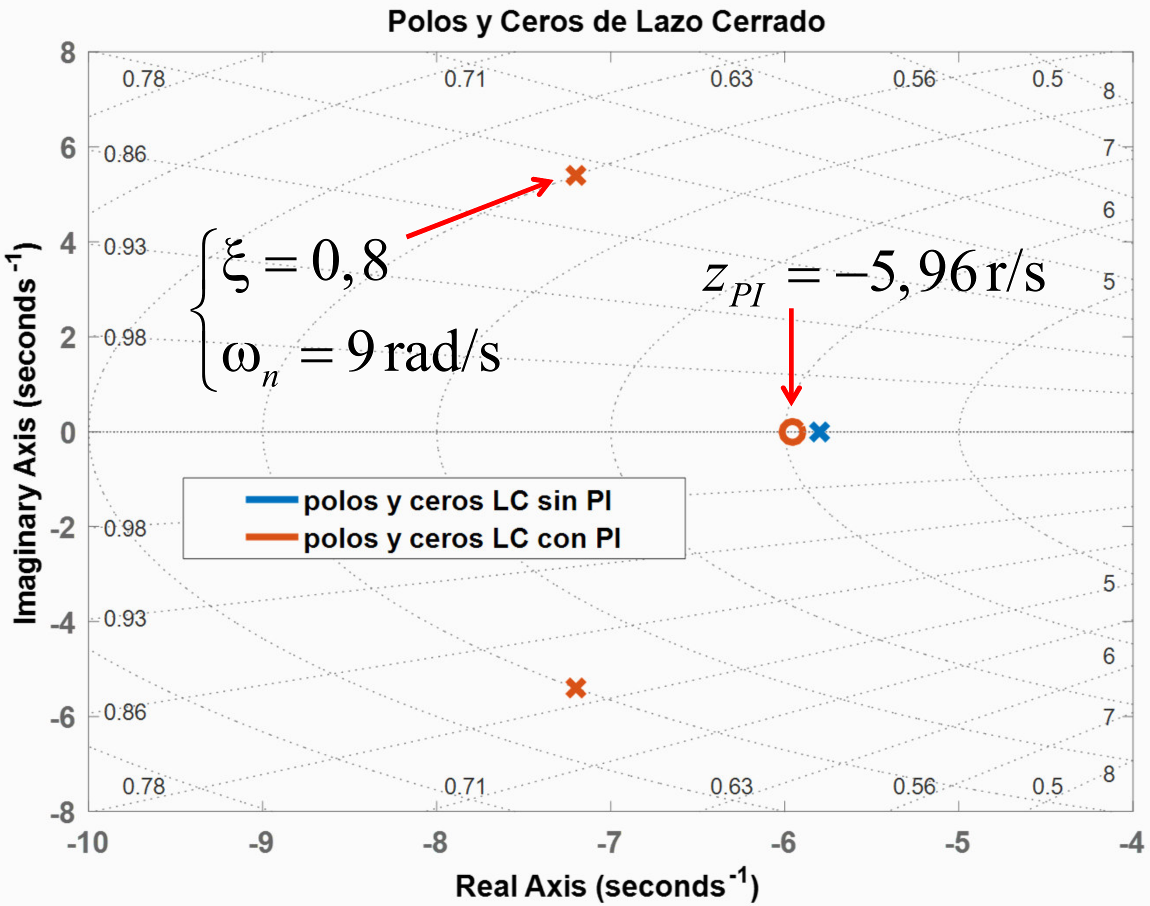
$$G_{lcd}(s)=\frac{81}{s^2+14,4s+81}$$




$$\begin{cases} M_p=1,15\% \\ t_r=0,27\,\text{seg} \end{cases}$$

# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

$$K_i = 16,2 \text{ y } K_p = 2,72 \Rightarrow \text{cero PI} = -\frac{16,2}{2,72} = -5,956 \text{ rad/s}$$

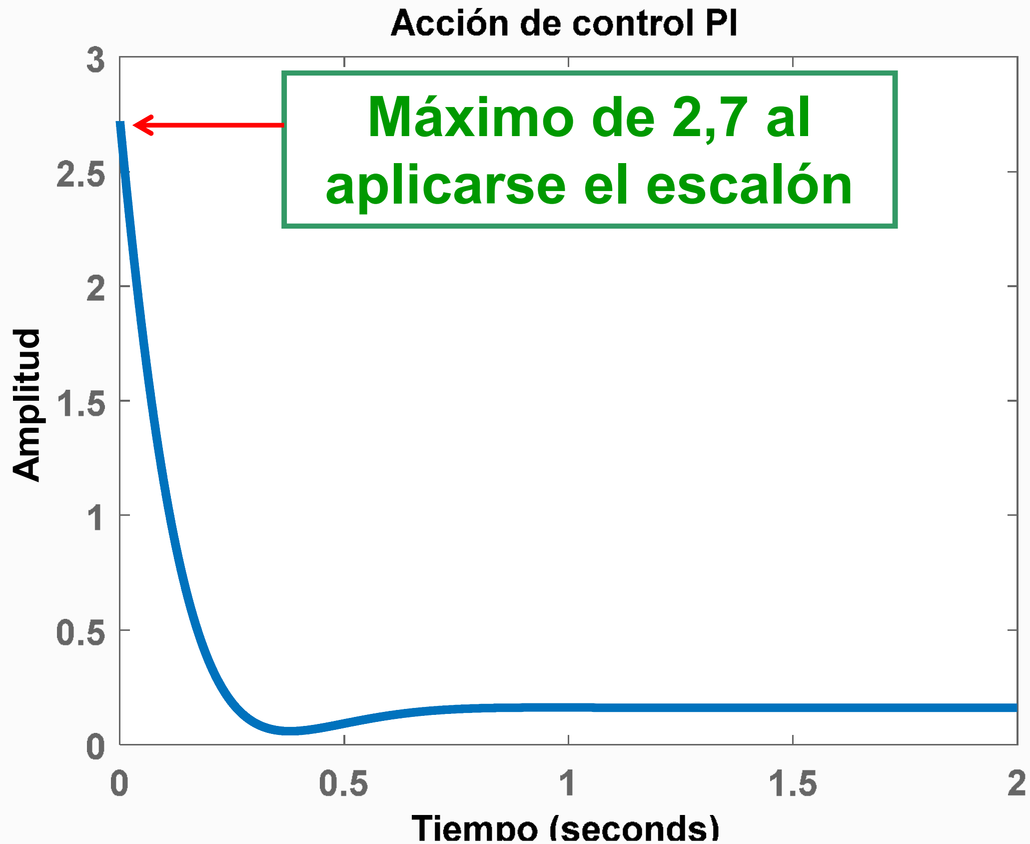


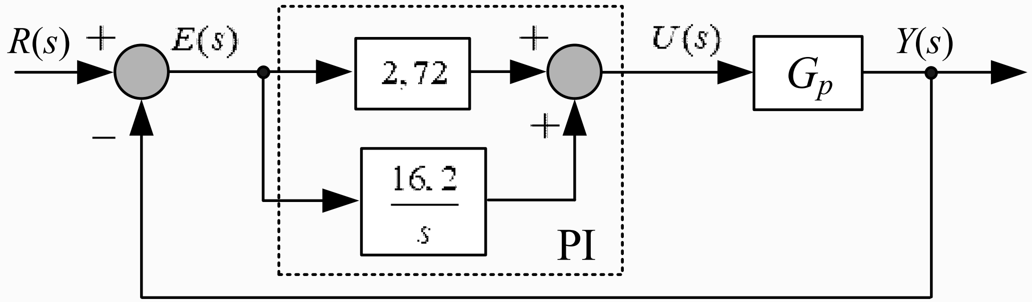

- Los polos deseados de LC son reubicados según las especificaciones.

- El cero de lazo cerrado impuesto por el PI afecta la forma de la respuesta y por lo tanto, afecta sus parámetros transitorios

# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

## Acción de control aplicada a la planta con el PI diseñado

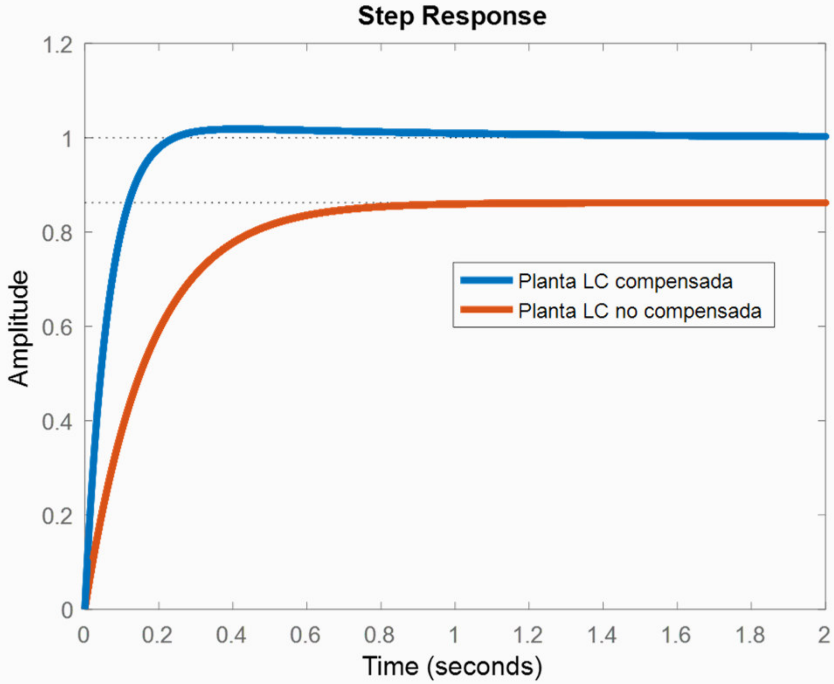


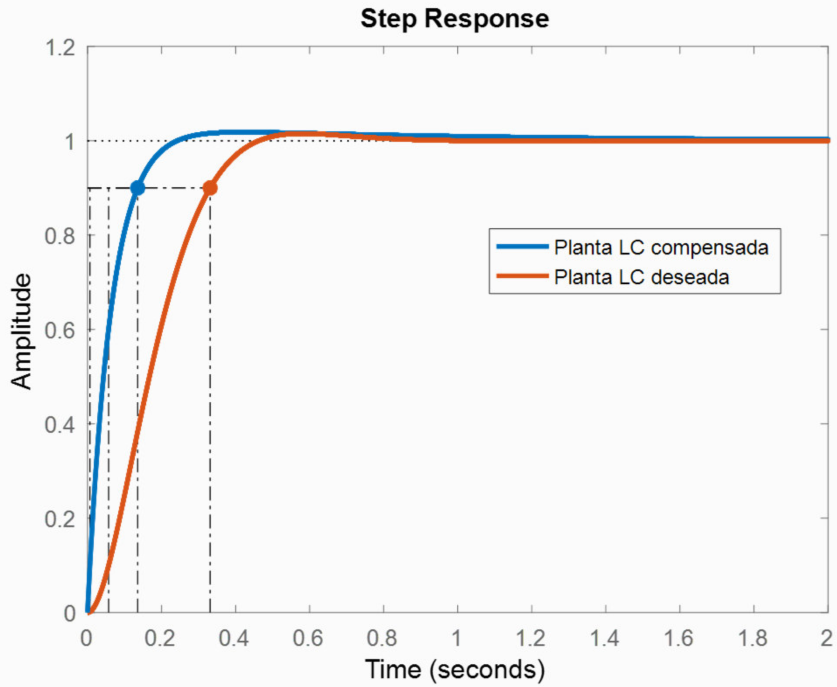



# Reajuste del diseño utilizando

$$G_{PI\_r}(s) = 3{,}17 + \frac{3{,}93}{s}$$

$$G_{lc}(s) = \frac{15{,}86\,(s+1{,}24)}{(s+15{,}38)(s+1{,}28)}$$

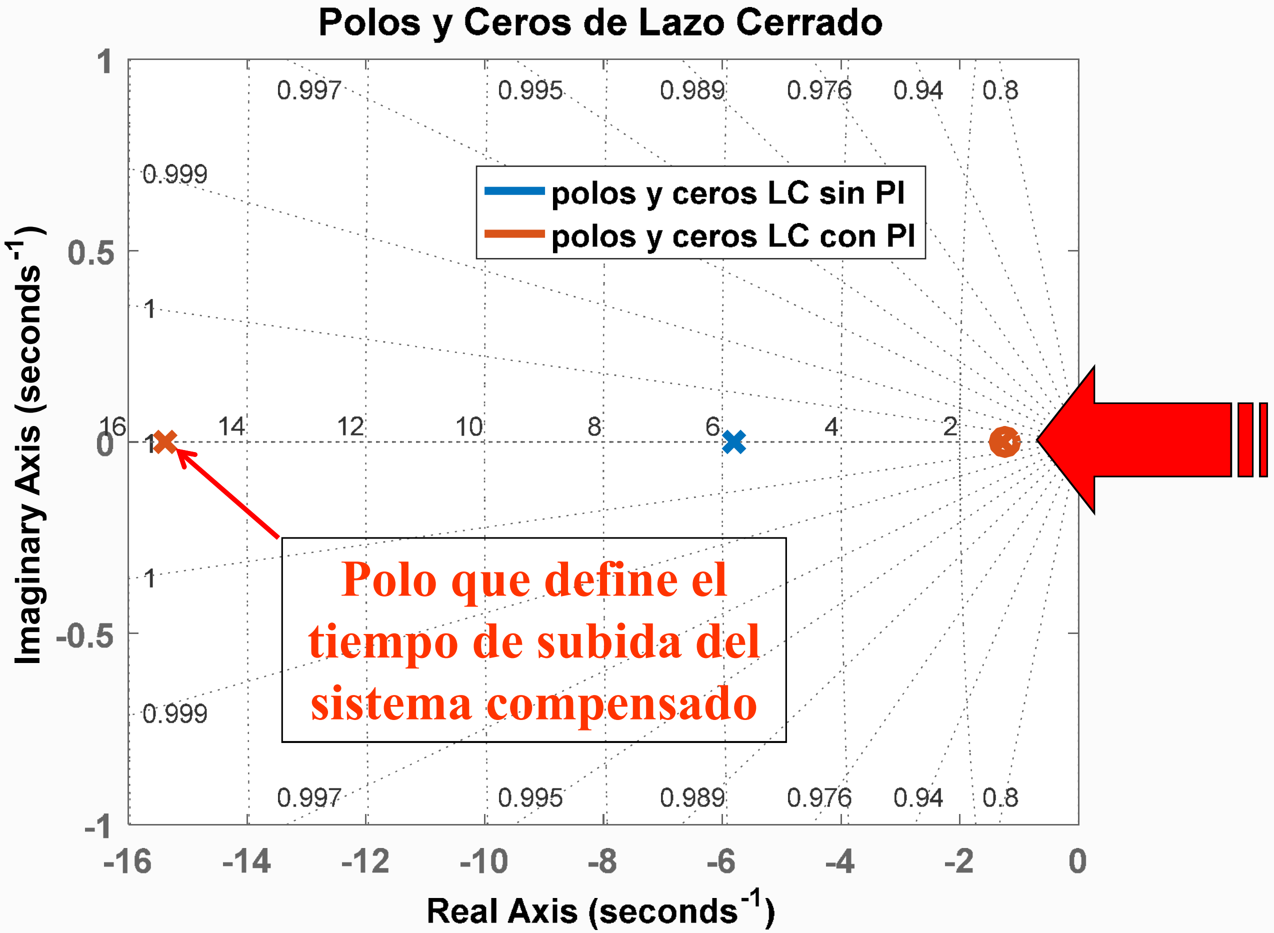



**Se observa que la respuesta es muy similar en la forma a la deseada, pero los tiempos de subida son diferentes**

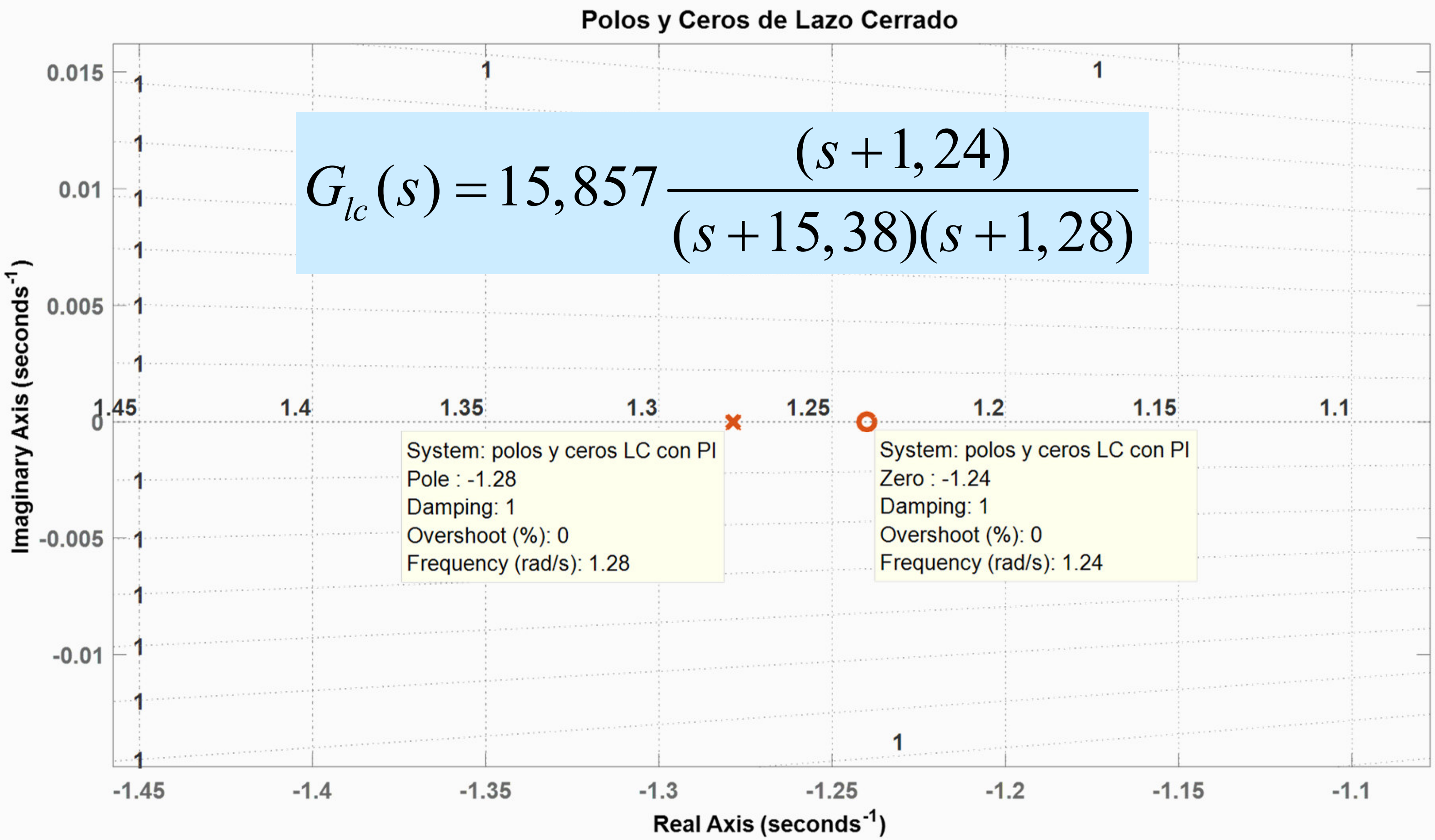
# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

$$K_i = 3,93 \;\; \text{y} \;\; K_p = 3,17 \Rightarrow \text{cero PI} = -1,24 \text{ rad/s}$$




El cero de lazo cerrado impuesto por el PI cancela el efecto del polo dominante

# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

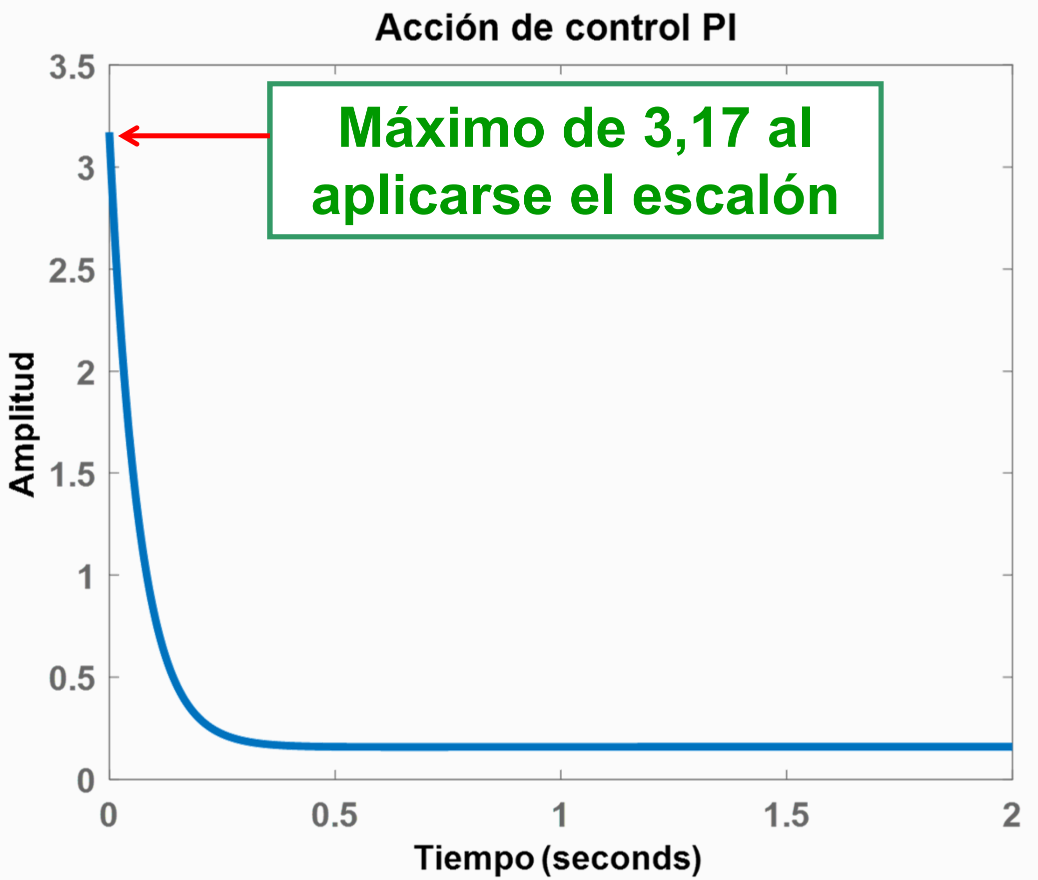



$$G_{lc}(s) = 15{,}857\,\frac{(s+1{,}24)}{(s+15{,}38)(s+1{,}28)}$$

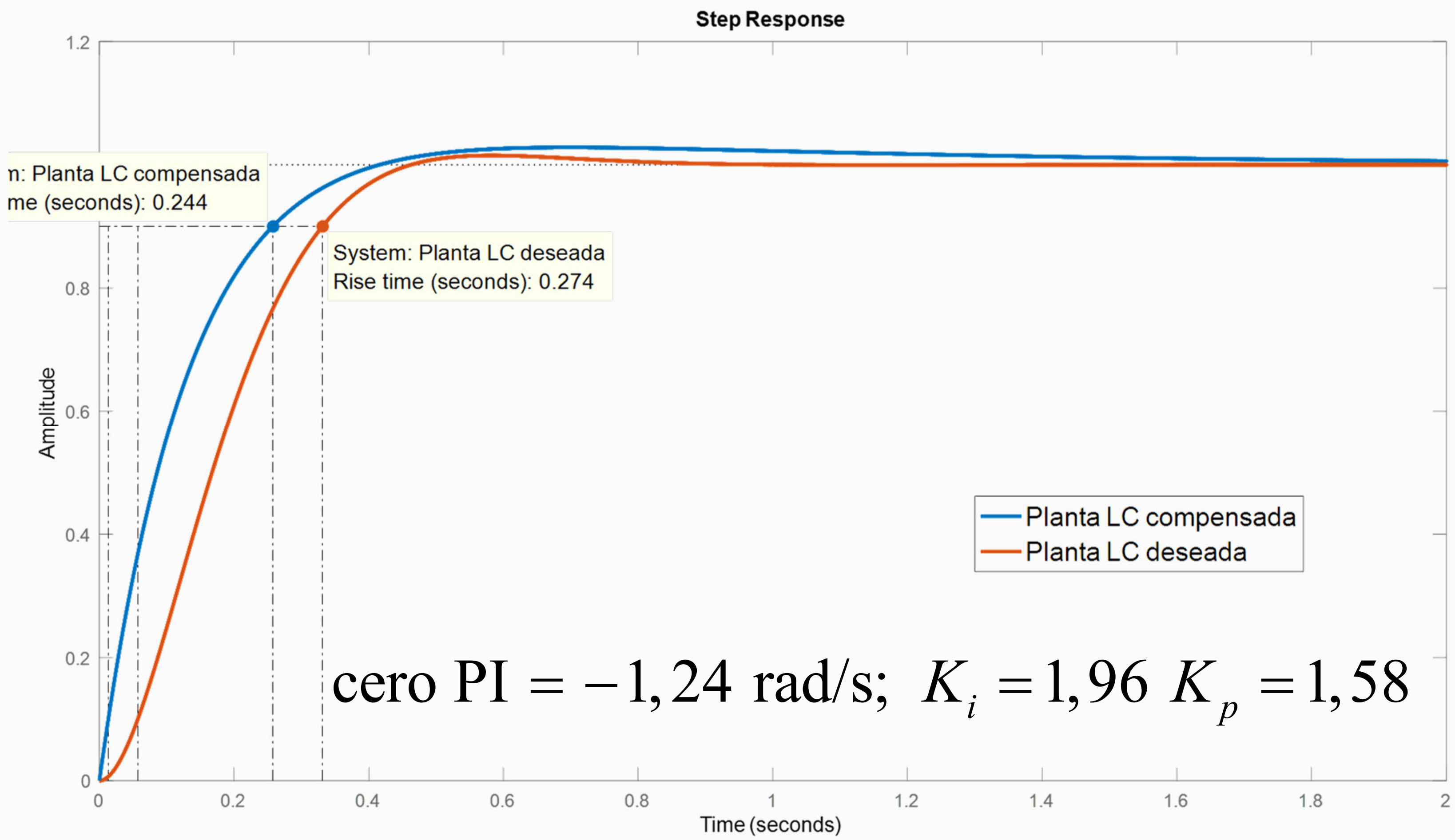
**El cero de lazo cerrado impuesto por el PI cancela el efecto del polo dominante**

# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

## Acción de control aplicada a la planta

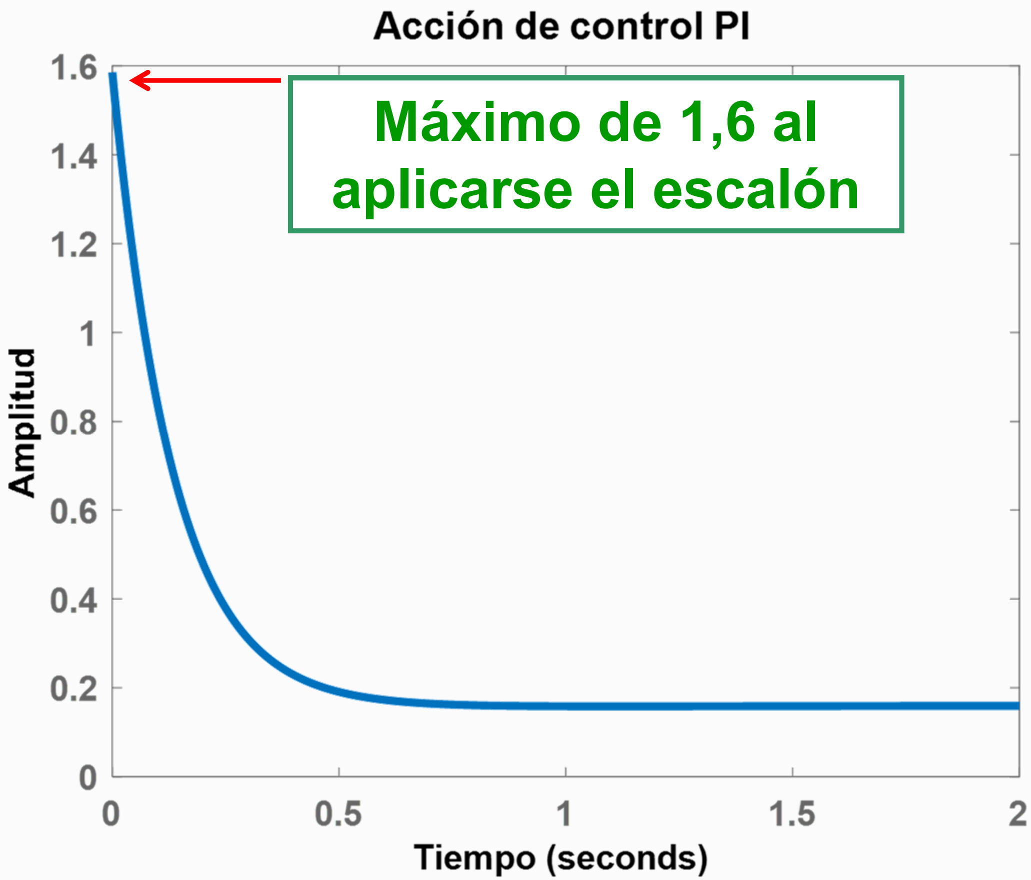


# Nuevo reajuste del diseño: Si se disminuye la ganancia $K_p$ puede ajustarse el tiempo de subida al deseado

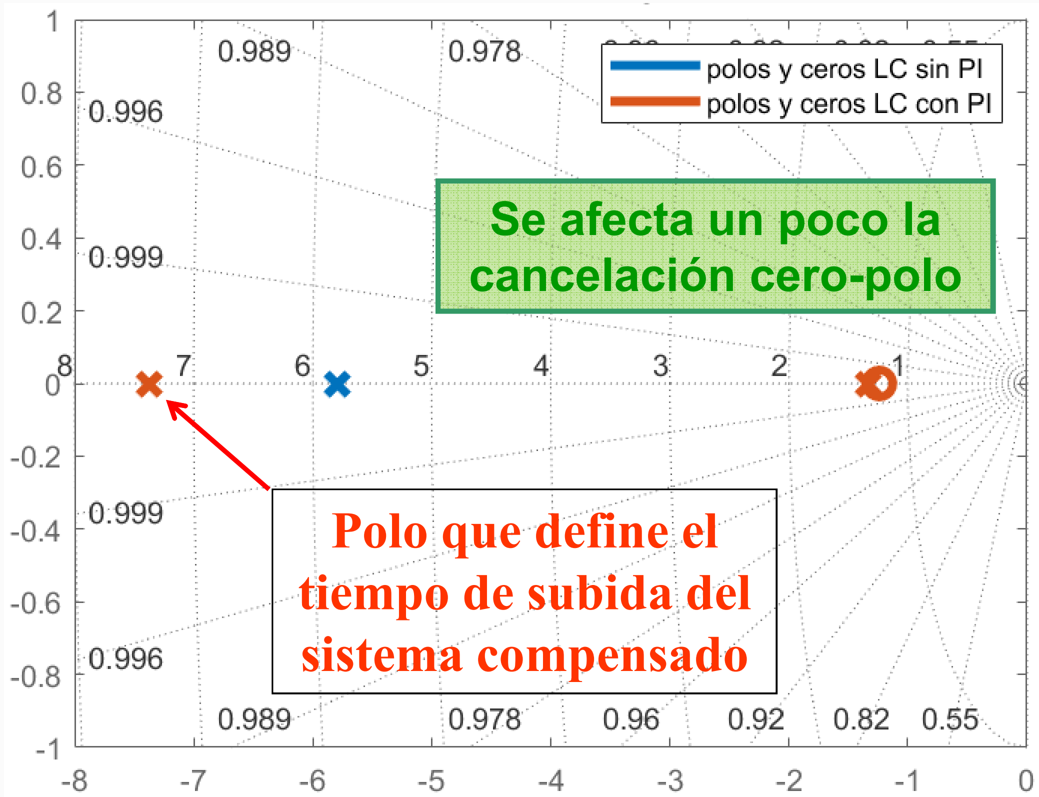


# Diseño de Controladores PI por Ubicación de polos

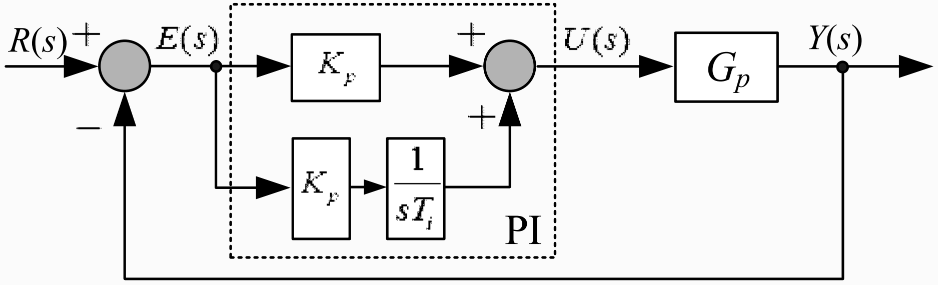
## Acción de control aplicada a la planta




## Mapa de polos y ceros



## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador P+I:

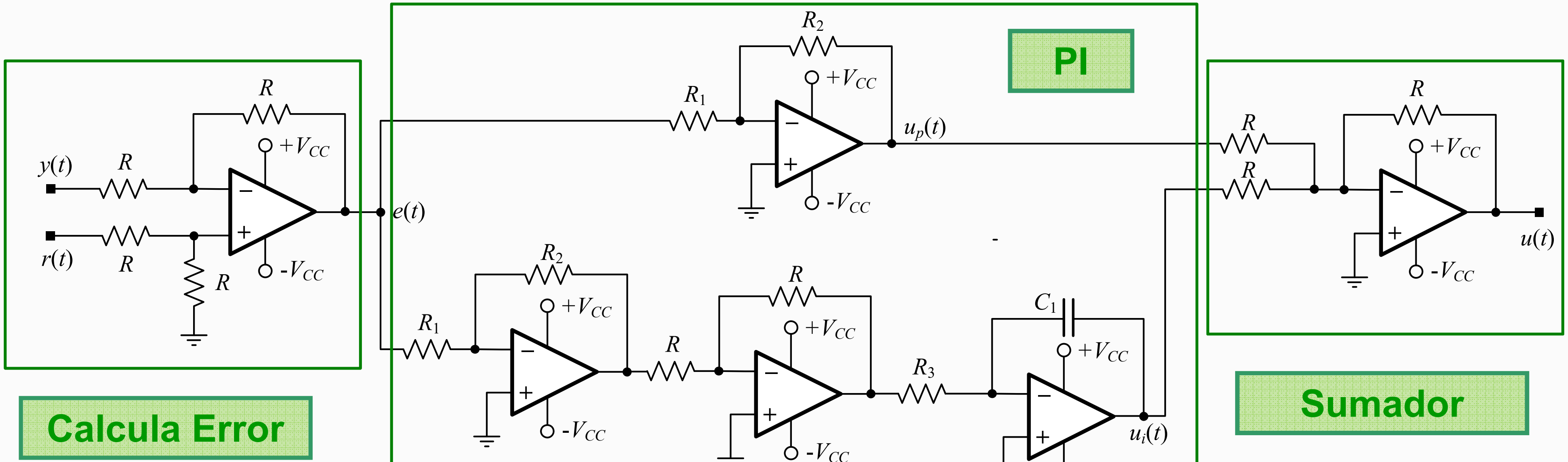



$$K_i = 3,93 \text{ y } K_p = 3,17 \Rightarrow T_i = \frac{K_p}{K_i} = 0,8065 \text{ s}$$

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \text{ si } R_1 = 10\text{k}\Omega \rightarrow R_2 = 31,7\text{k}\Omega \cong 32\text{k}\Omega$$

$$T_i = R_3 C_1 \text{ si } C_1 = 4,7\,\mu\text{F} \rightarrow R_3 = \frac{T_i}{C_1} = 171,6\,\text{k}\Omega \rightarrow 168\,\text{k}\Omega$$

$$R = 10\text{k}\Omega$$



# Diseño de Controladores por Reubicación de polos

## Sistemas de Segunda Orden: Controlador PD

**Planta:** $$G_p(s) = \frac{80}{s(s+2)}$$

**PD:** $$G_c(s) = K_d(s + K_p/K_d)$$

**F.T.L.C:**

$$G_{lc}(s) = \frac{80K_d s + 80K_p}{s^2 + s(80K_d + 2) + 80K_p} = \frac{80K_d(s + K_p/K_d)}{s^2 + s(80K_d + 2) + 80K_p}$$

**El polinomio característico del sistema en lazo cerrado es:**

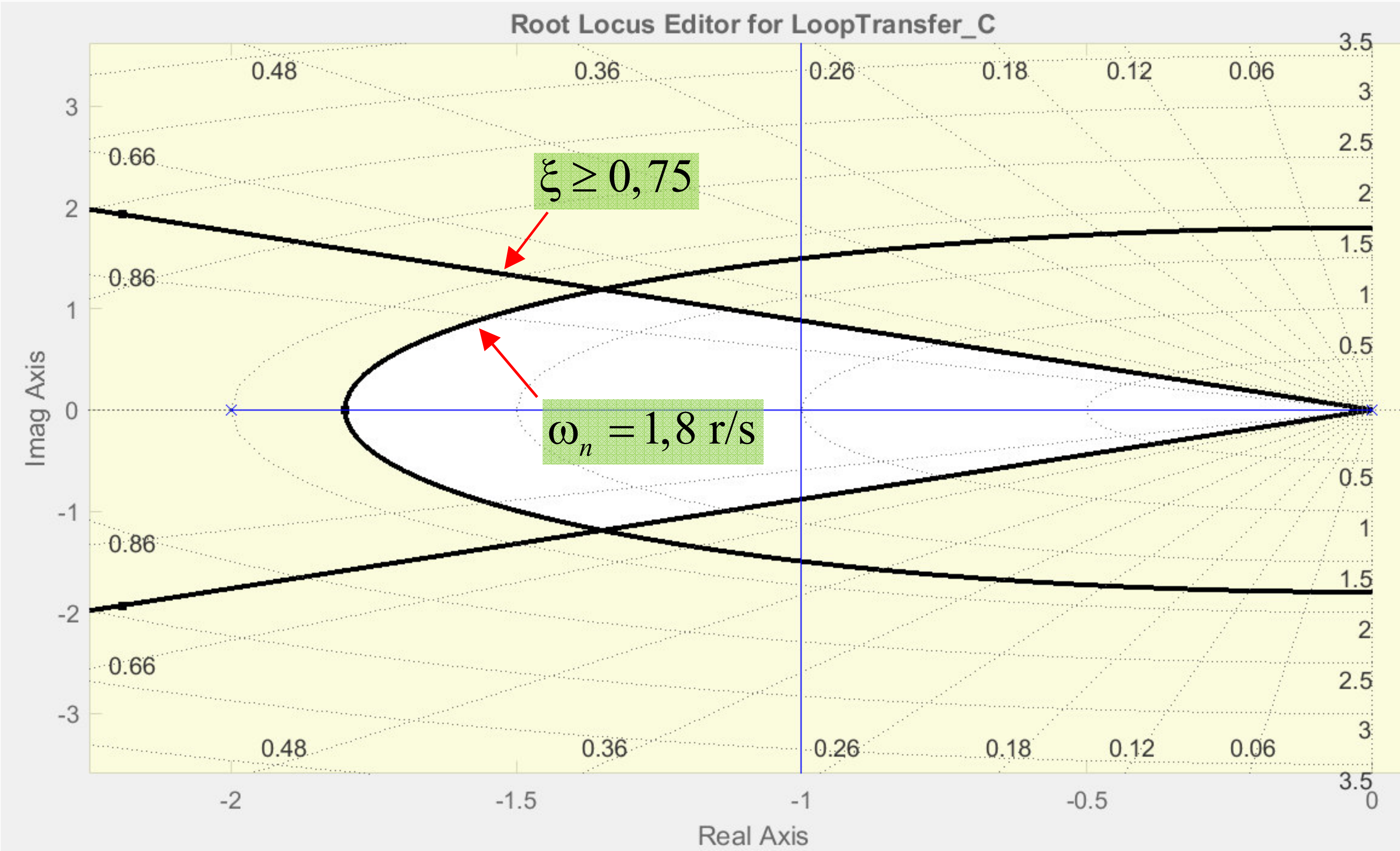
$$\boxed{P_c(s) = s^2 + s(80K_d + 2) + 80K_p}$$

**El polinomio característico deseado es:**

$$\boxed{P_{cd}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

**Determinamos con las especificaciones, la región deseada de polos de LC**

$\xi \geq 0,75 \;\; y \;\; t_r \cong 1\,\text{seg}$ sabiendo que: $t_r \cong \dfrac{1,8}{\omega_n}$ se tiene que: $\omega_n = 1,8\,\text{rad/s}$



# Diseño de Controladores PD por Ubicación de polos

con $\xi = 0,75$ y $\omega_n = 1,8\,\mathrm{rad/s}$

**El polinomio característico deseado resulta:** $\boxed{P_{cd}(s) = s^2 + 2,7s + 3,24}$

**La FTLC deseada resulta:**

$$\boxed{G_{lcd}(s) = \frac{3,24}{s^2 + 2,7s + 3,24}}$$

**Los polos de la FTLC deseada son:**

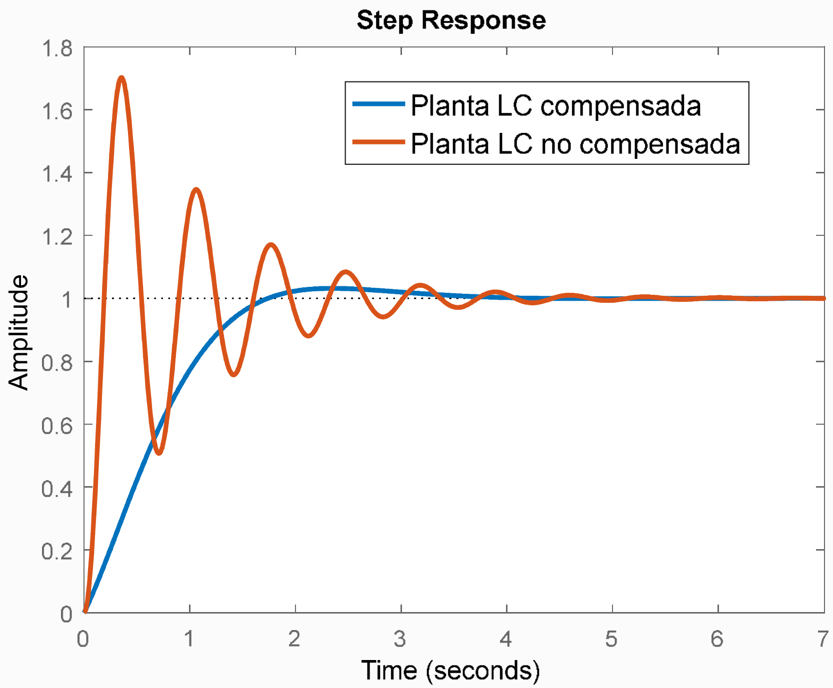
$$\boxed{\text{polos LC deseados} = -1,35 \pm j1,19}$$

**Igualando los coeficientes de ambos polinomios de igual potencia, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} 80K_d + 2 = 2\xi\omega_n = 2,7 \\ 80K_p = \omega_n^2 = 3,24 \end{cases} \Rightarrow \quad K_p = \frac{\omega_n^2}{80}; \; K_d = \frac{2\xi\omega_n - 2}{80}$$

$$G_c(s) = 0,0405 + s\,0,0088$$

## Planta compensada con PD



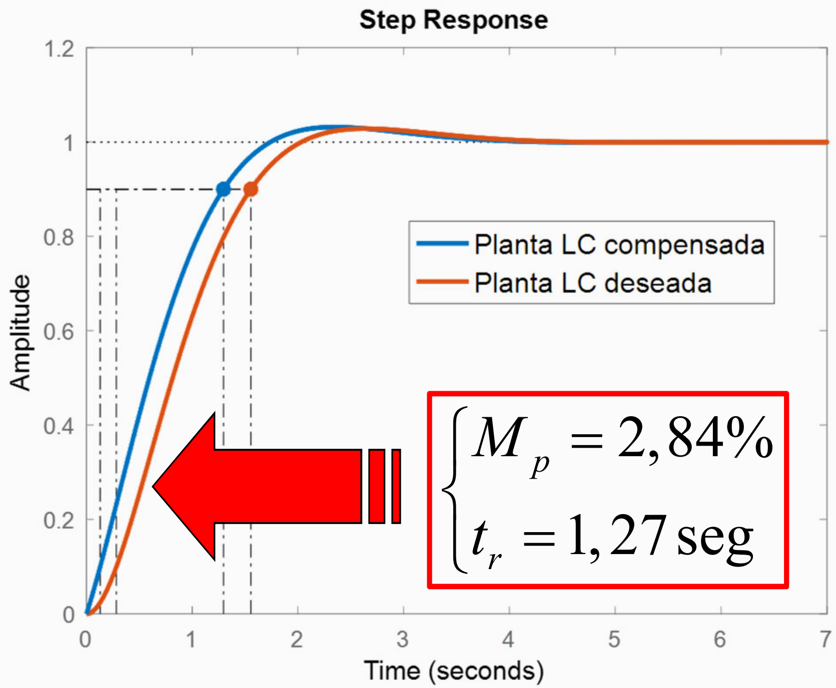

$$G_{lc}(s) = \frac{0,7s + 3,24}{s^2 + 2,7s + 3,24}$$

$$G_c(s) = 0,0405 + s\,0,0088$$

$$\begin{cases} M_p = 3,17\% \\ t_r = 1,17\ \text{seg} \end{cases}$$

## Planta deseada

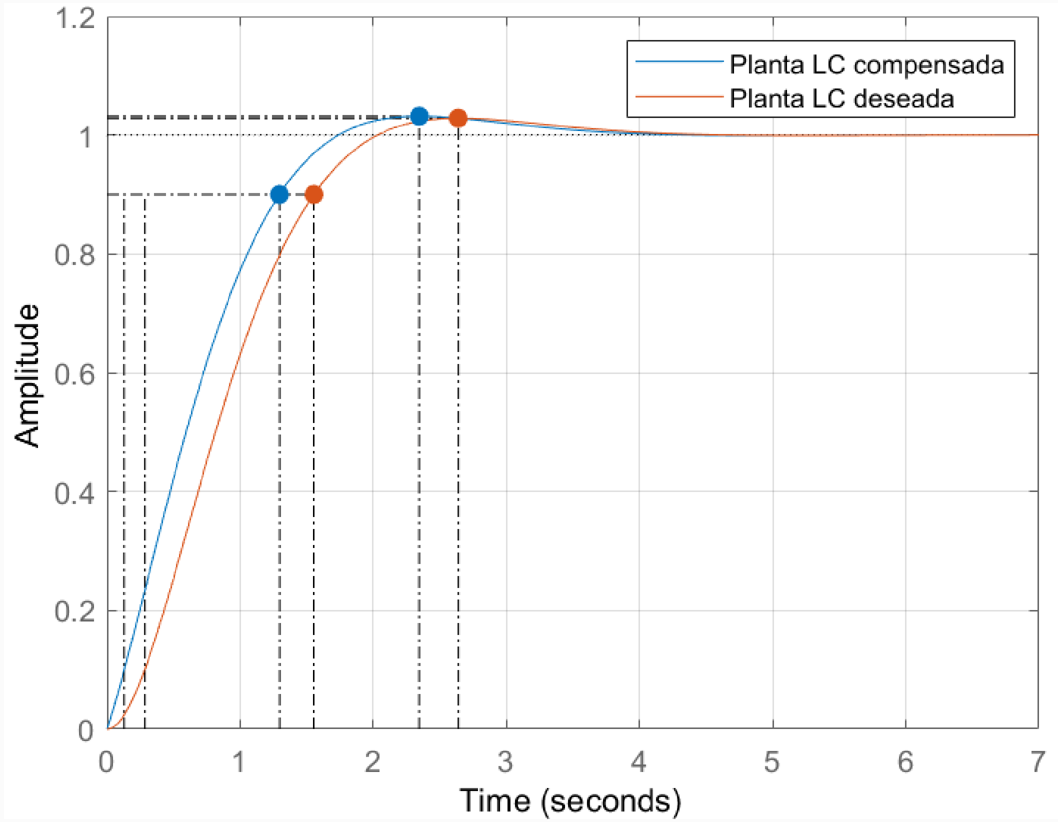
$$G_{lcd}(s) = \frac{3,24}{s^2 + 2,7s + 3,24}$$

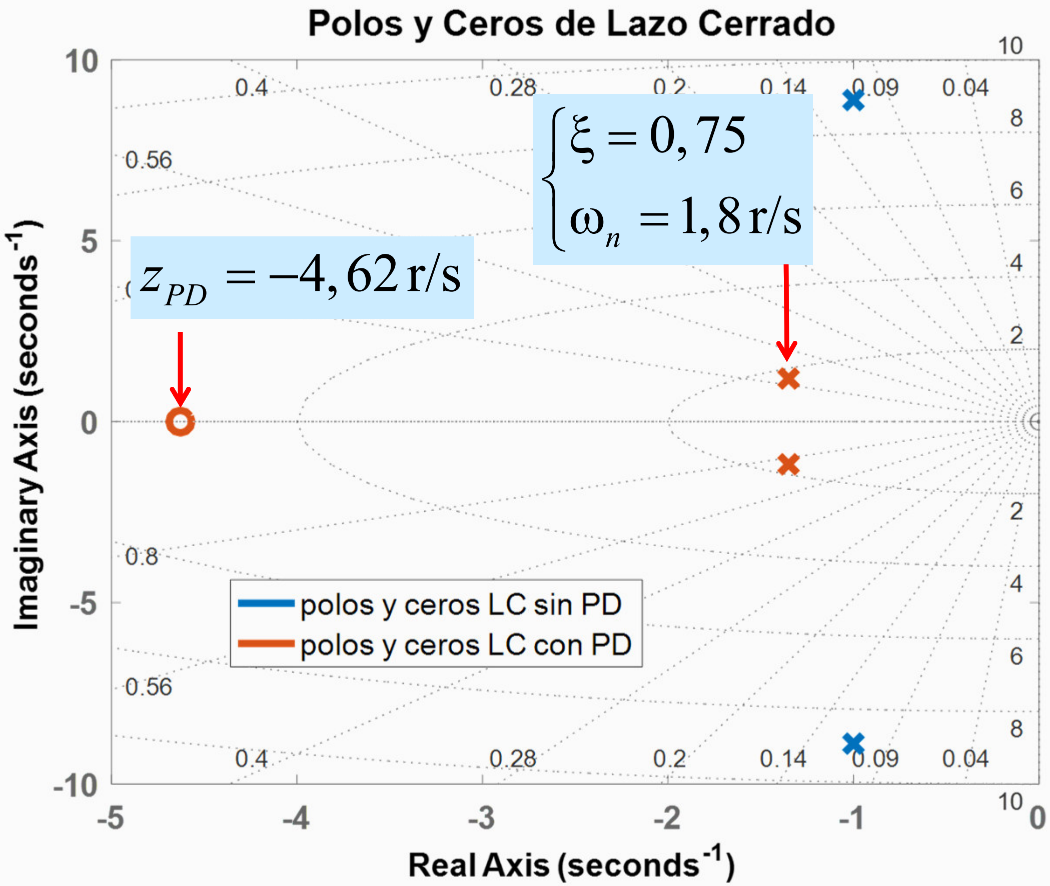



$$\begin{cases} M_p = 2,84\% \\ t_r = 1,27\ \text{seg} \end{cases}$$

$$K_p = 0{,}0405;\ \ K_d = 0{,}0088 \Rightarrow \text{cero PD} = -\frac{K_p}{K_d} = -4{,}6286 \text{ rad/s}$$

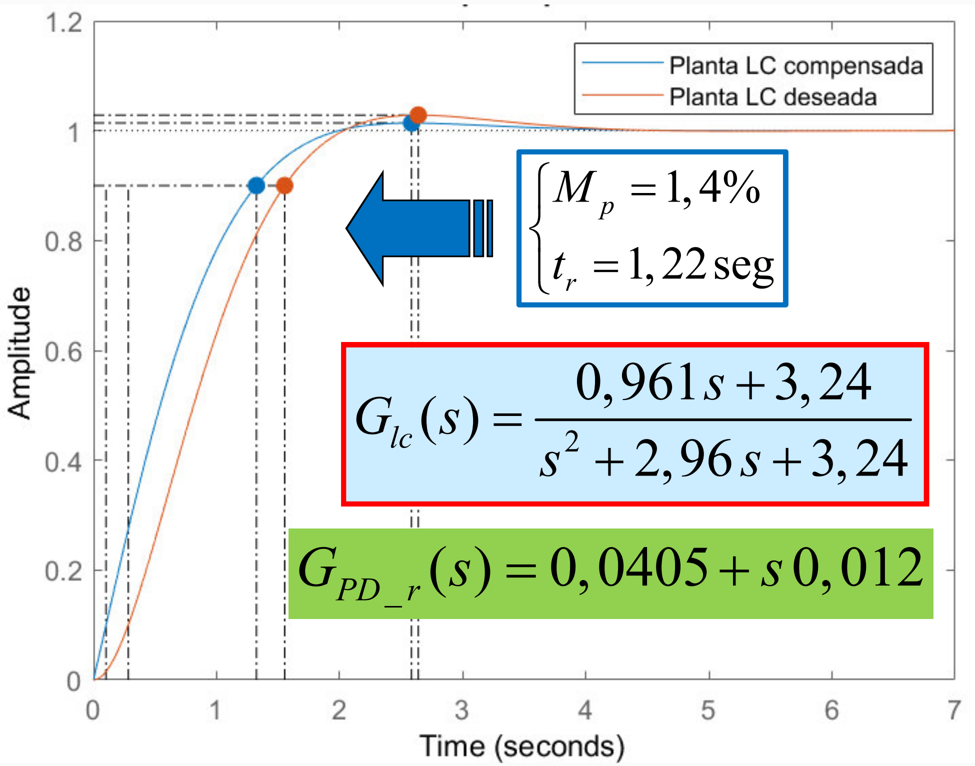
**Los polos deseados de LC son reubicados de acuerdo a lo especificado y el cero del PD permite mejorar significativamente la etapa transitoria, aumentando la estabilidad.**



# Reajuste del diseño utilizando

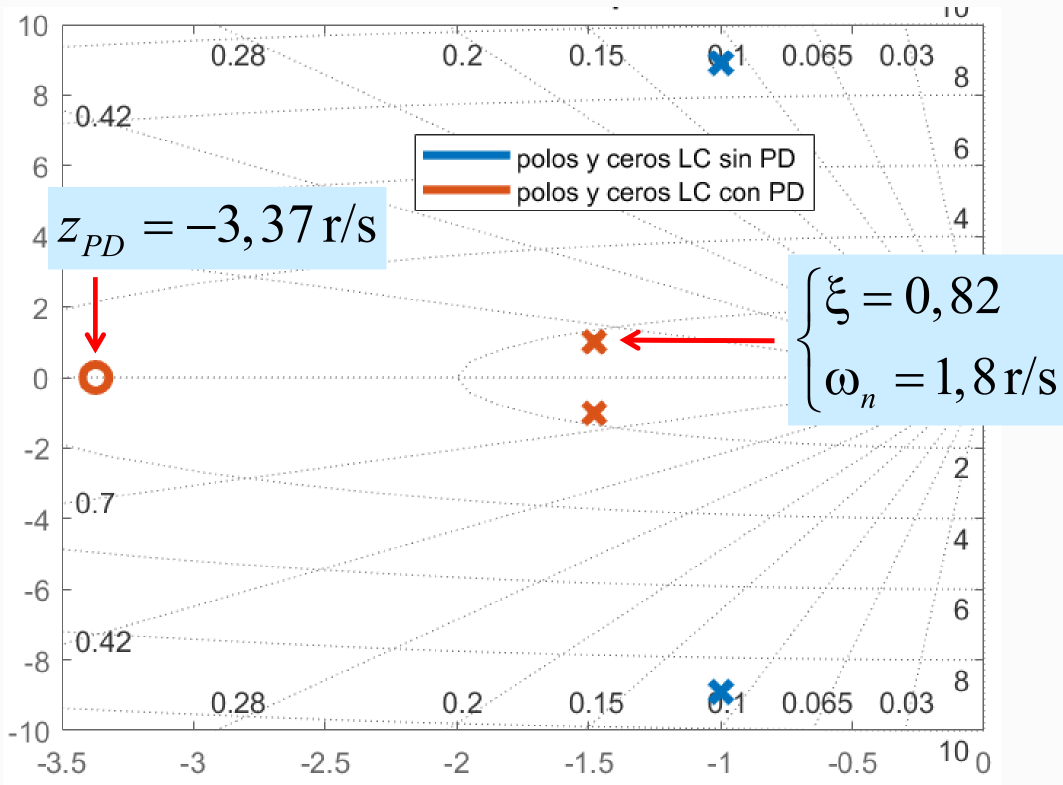
$$K_p = 0,0405;\; K_d = 0,012 \Rightarrow \text{cero PD} = -\frac{K_p}{K_d} = -3,37 \text{ rad/s}$$




$$\begin{cases} M_p = 1,4\% \\ t_r = 1,22\,\text{seg} \end{cases}$$

$$G_{lc}(s) = \frac{0,961\,s + 3,24}{s^2 + 2,96\,s + 3,24}$$

$$G_{PD\_r}(s) = 0,0405 + s\,0,012$$

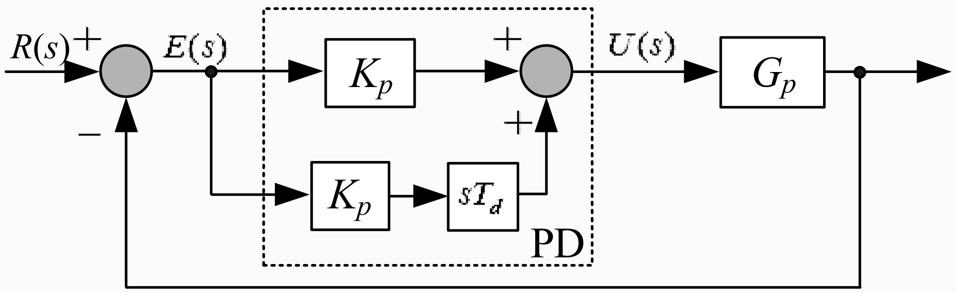



$$z_{PD} = -3,37 \text{ r/s}$$

$$\begin{cases} \xi = 0,82 \\ \omega_n = 1,8 \text{ r/s} \end{cases}$$

**Se observa que la respuesta presenta menor sobrepaso a la deseada, y ahora los tiempos de subida son prácticamente iguales entre la respuesta deseada y la realmente obtenida con PD**

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico para el controlador P+D:

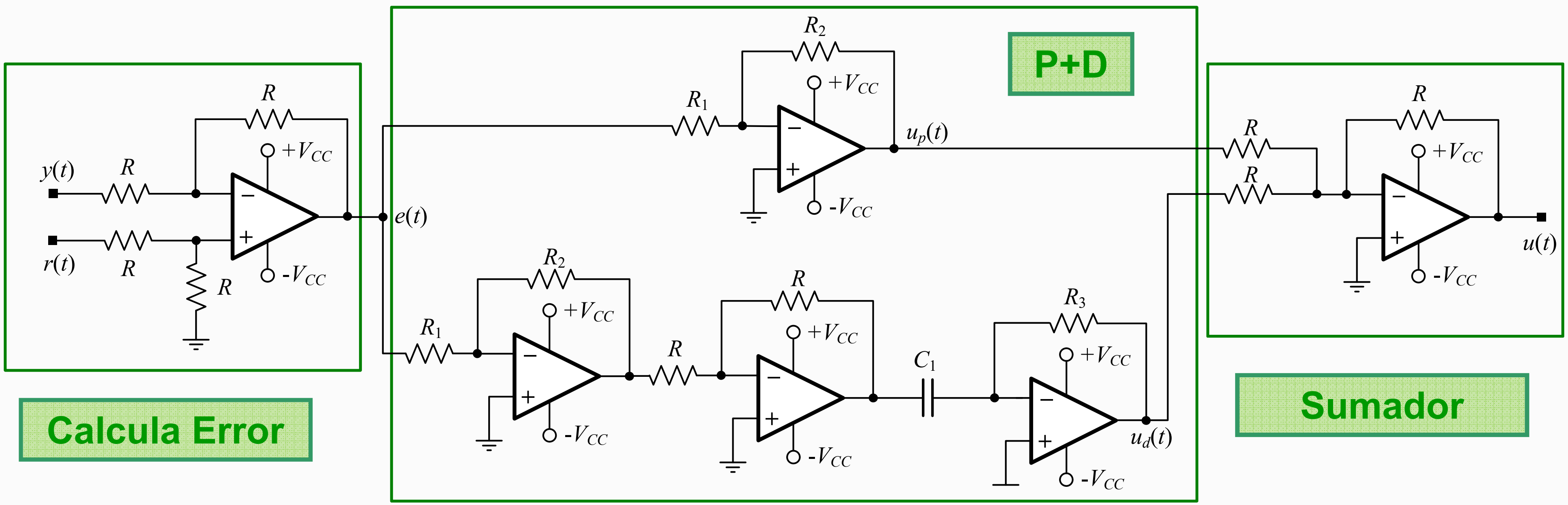



$$K_p = 0{,}0405;\ \ K_d = 0{,}0088 \Rightarrow T_d = \frac{K_d}{K_p} = 0{,}216\,\mathrm{s}$$

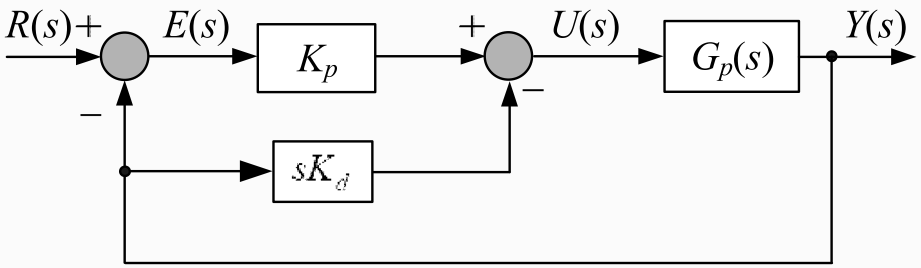
$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \ \text{si}\ R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega} \rightarrow R_2 = 405\,\Omega \cong 470\,\Omega$$

$$T_d = R_3 C_1 \ \text{si}\ C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} \rightarrow R_3 = \frac{T_d}{C_1} = 216\,\mathrm{k\Omega} \cong 220\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R = 10\,\mathrm{k\Omega}$$



## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico para el controlador P-D:

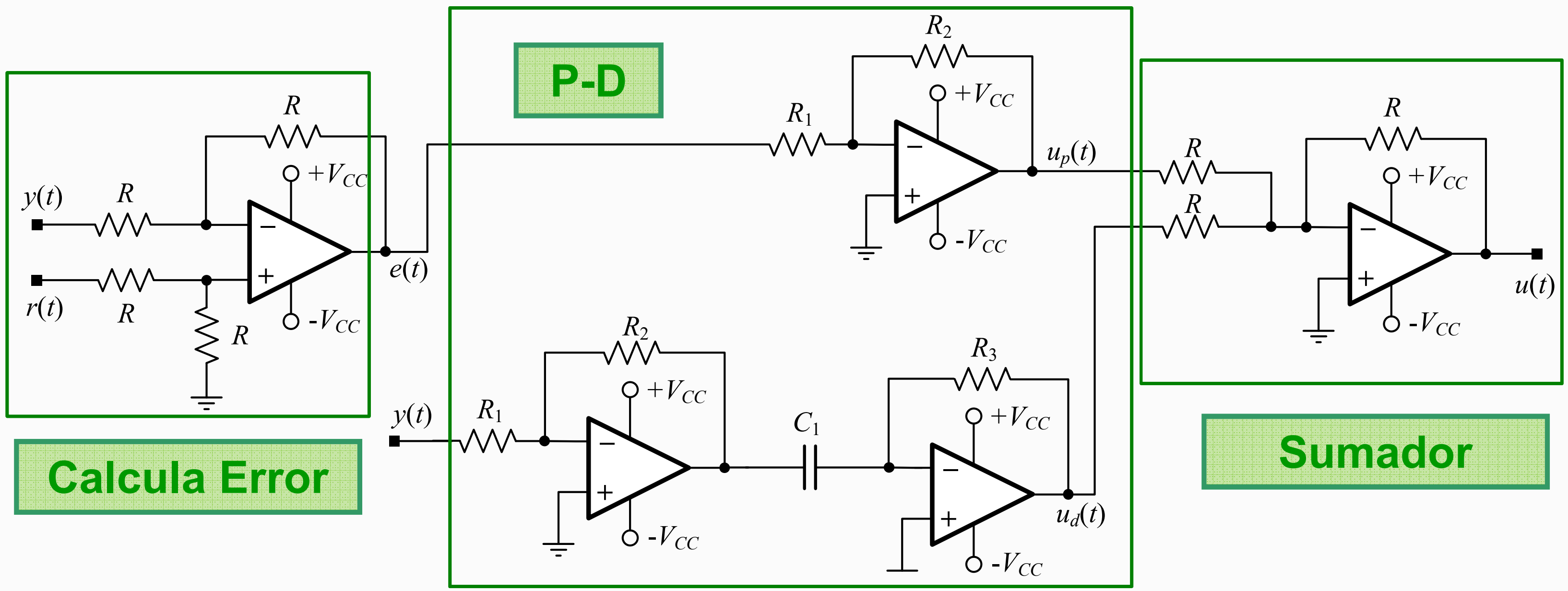



$$K_p = 0,0405;\ K_d = 0,0088 \Rightarrow T_d = \frac{K_d}{K_p} = 0,216\,\text{s}$$

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \text{ si } R_1 = 10\,\text{k}\Omega \rightarrow R_2 = 405\,\Omega \cong 470\,\Omega$$

$$T_d = R_3 C_1 \text{ si } C_1 = 1\,\mu\text{F} \rightarrow R_3 = \frac{T_d}{C_1} = 216\,\text{k}\Omega \cong 220\,\text{k}\Omega$$

$$R = 10\,\text{k}\Omega$$



# Diseño de Controladores por Reubicación de polos

## Sistema de 1er Orden: Control de velocidad de Motor CC con Controlador PID

$$K_m = 3{,}333 \quad V_a = 250\,\mathrm{V}$$

$$\tau_m = 6{,}166\,\mathrm{s} \quad H_s = 10/250[\mathrm{V/(r/s)}]$$

**Planta:** $$G_{va}(s) = \frac{K_m}{s\tau_m + 1} = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)}$$

**PID:** $$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d = \frac{s^2 K_d + sK_p + K_i}{s}$$

**F.T.L.A:** $$G_{la}(s) = \left(\frac{s^2 K_d + sK_p + K_i}{s}\right)\left(\frac{V_a K_m}{s\tau_m + 1}\right)$$

**F.T.L.C:** $$G_{lc}(s) = \frac{V_a K_d K_m s^2 + V_a K_m K_p s + V_a K_i K_m}{(\tau_m + V_a H_s K_d K_m)s^2 + (V_a H_s K_m K_p + 1)s + V_a H_s K_i K_m}$$

**El polinomio característico del sistema en lazo cerrado es:**

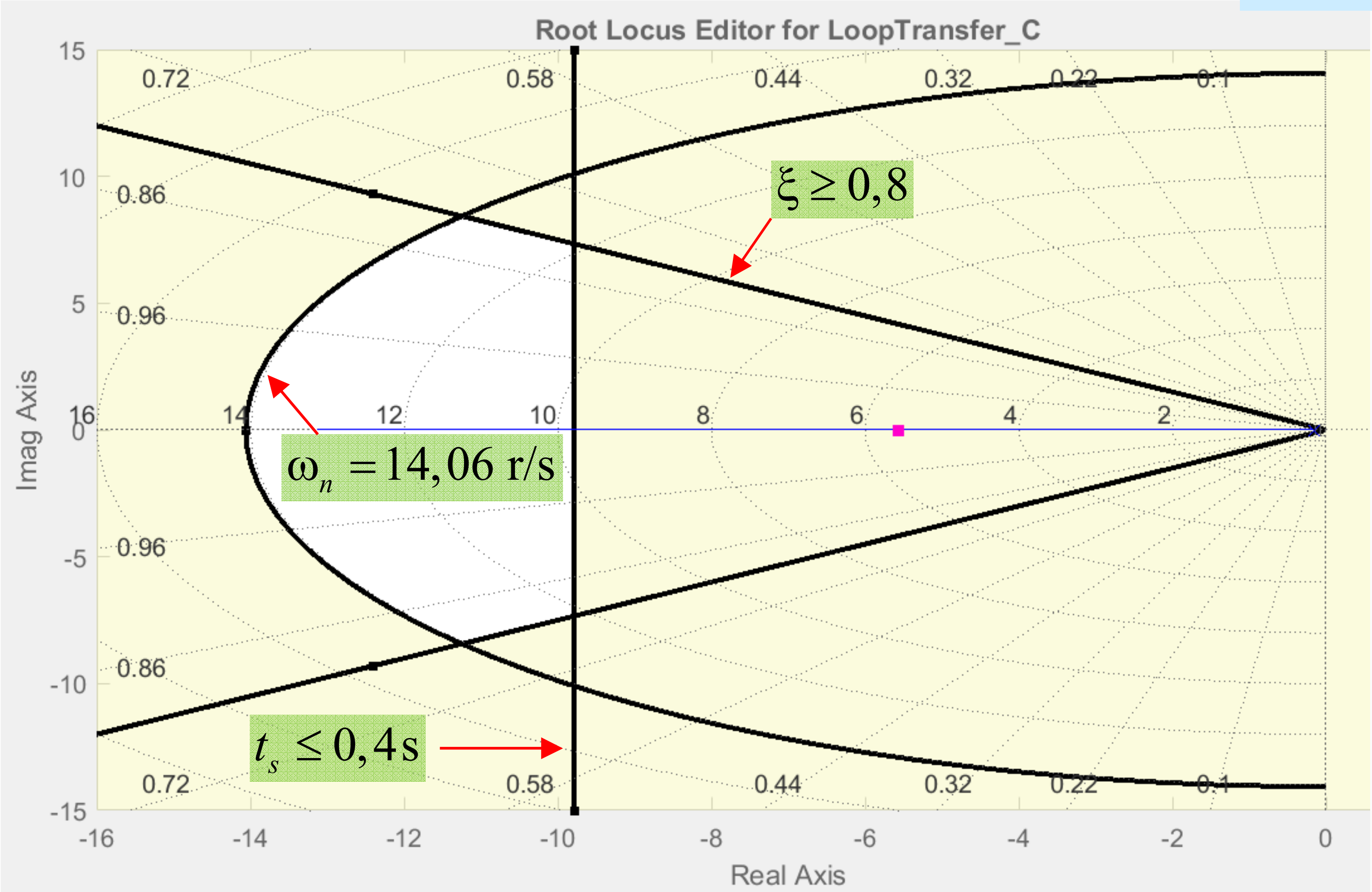
$$\boxed{P_c(s) = s^2 + As + B}$$

$$A = \frac{V_a H_s K_m K_p + 1}{\tau_m + V_a H_s K_d K_m} \quad y \quad B = \frac{V_a H_s K_i K_m}{\tau_m + V_a H_s K_d K_m}$$

**El polinomio característico deseado es:** $P_{cd}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

**Las especificaciones transitorias son:** $\xi \geq 0,8 \;\; y \;\; t_s \cong 0,4\,\text{seg}$

$$\omega_n = \frac{4,5}{\xi t_s} = 14,06\,\text{r/s}$$



# Diseño de Controladores PID por Ubicación de polos

con $\xi = 0,8$ y $\omega_n = 14,06\,\text{r/s}$

**El polinomio característico deseado resulta:**

$$\boxed{P_{cd}(s) = s^2 + 22,5s + 197,8}$$

**La FTLC deseada resulta:**

$$\boxed{G_{lcd}(s) = \frac{197,8}{s^2 + 22,5s + 197,8}}$$

**Los polos de la FTLC deseada son:** $\boxed{\text{polos LC deseados} = -11,25 \pm j8,44}$

**Igualando los coeficientes de ambos polinomios de igual potencia, se obtiene:**

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = A \\ \omega_n^{\,2} = B \end{cases} \Rightarrow \quad K_d = \frac{(V_a H_s K_m K_p + 1) - (2\xi\omega_n\tau_m)}{2\xi\omega_n V_a H_s K_m} \quad K_i = \frac{\omega_n^{\,2}(\tau_m + V_a H_s K_d K_m)}{V_a H_s K_m}$$

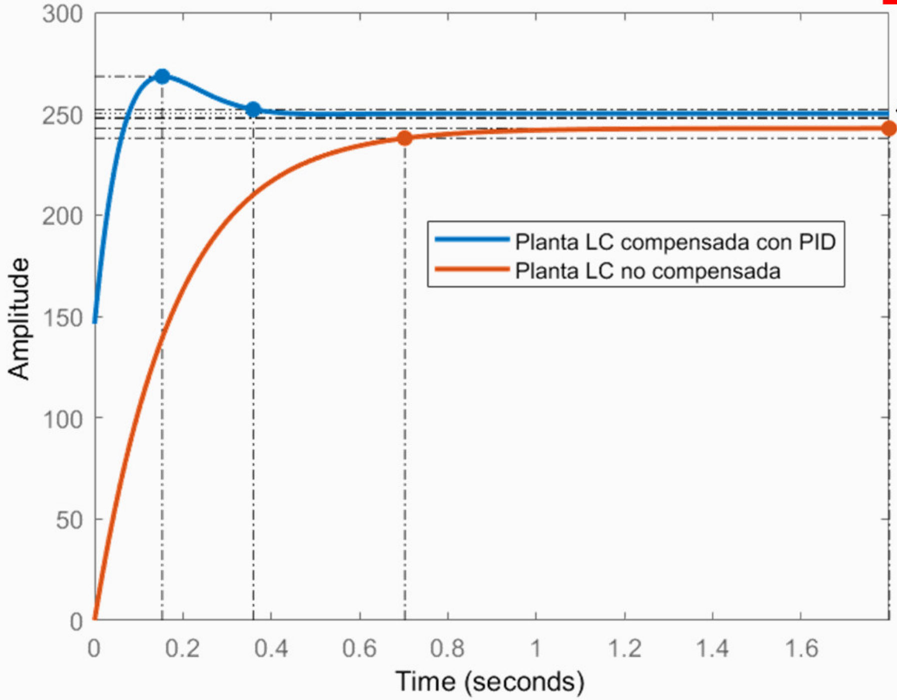
**Tomando $K_p = 10$:**

$$G_{PID}(s) = 10 + \frac{88,15}{s} + s\,(0,2608)$$

## Planta compensada con PID

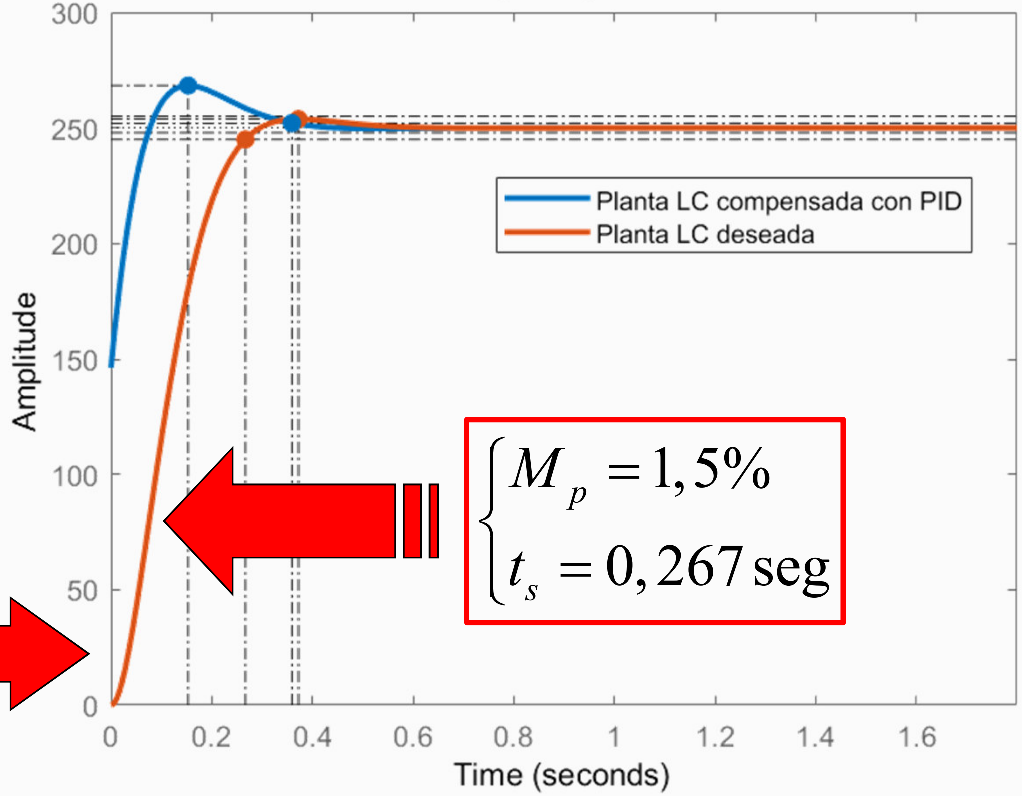
$$G_{lc}(s) = \frac{14,625\,(s+24,61)(s+13,74)}{s^2+22,5s+197,8}$$

$$\begin{cases} M_p = 7\% \\ t_s = 0,36\,\text{seg} \end{cases}$$




## Planta deseada

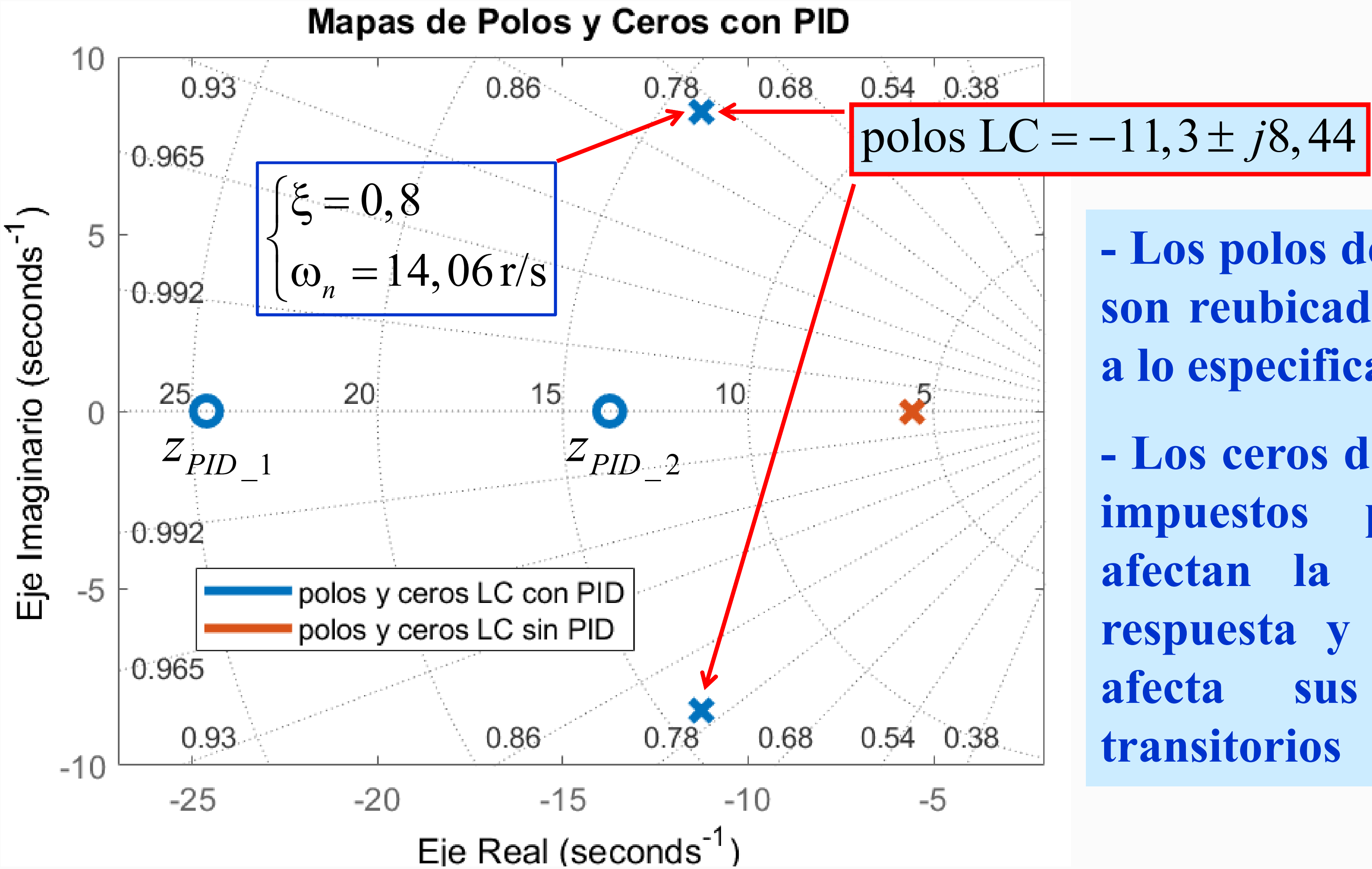
$$G_{lcd}(s) = \frac{197,8}{s^2+22,5s+197,8}$$




$$\begin{cases} M_p = 1,5\% \\ t_s = 0,267\,\text{seg} \end{cases}$$

# Diseño de Controladores PID por Ubicación de Polos

$$z_{PID\_1} = -24,6\,\mathrm{r/s} \quad y \quad z_{PID\_2} = -13,7\,\mathrm{r/s}$$




**- Los polos deseados de LC son reubicados de acuerdo a lo especificado.**

**- Los ceros de lazo cerrado impuestos por el PID afectan la forma de la respuesta y por lo tanto, afecta sus parámetros transitorios**

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador P+I+D:

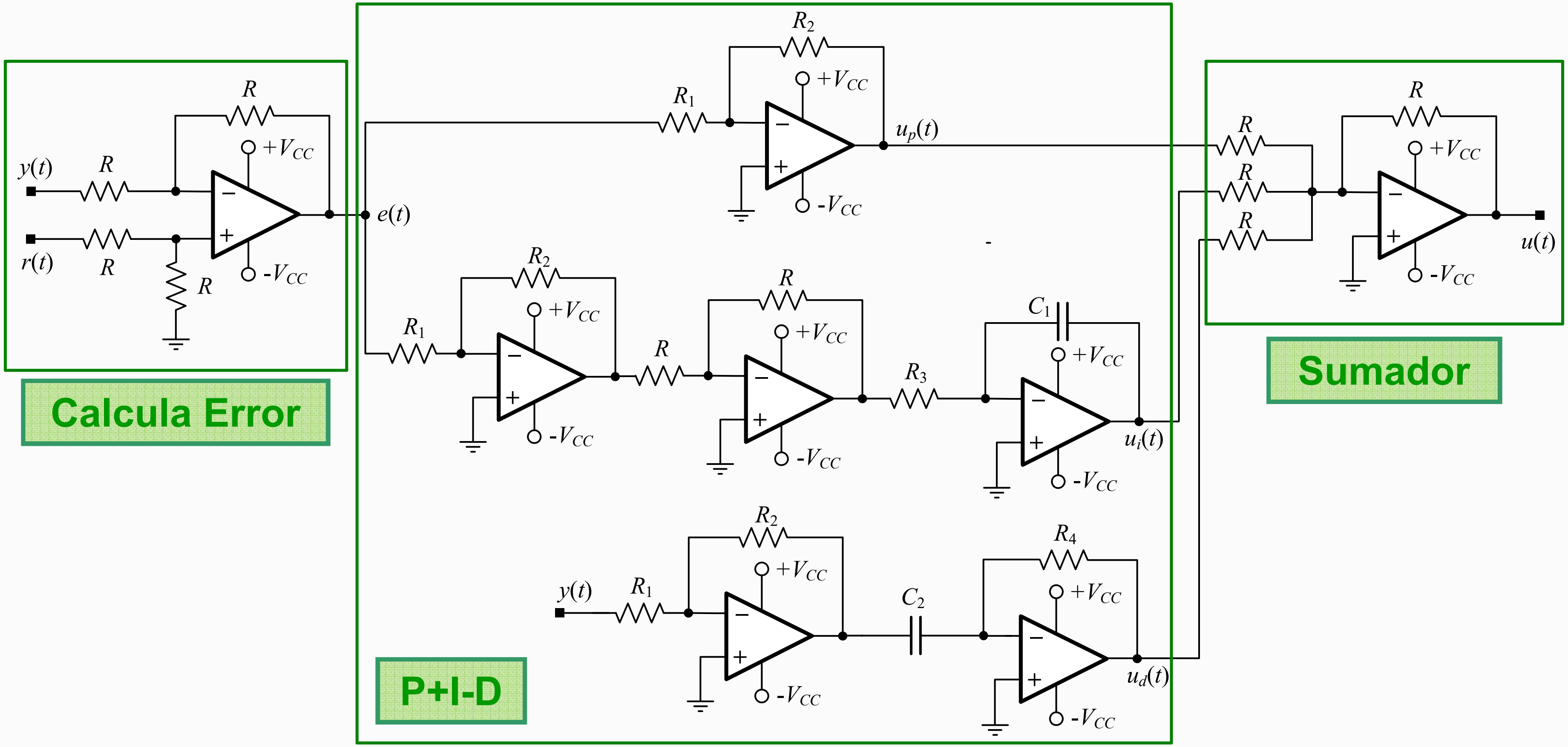
$$K_p = 10;\ T_i = \frac{K_p}{K_i} = 0{,}1134\ \text{s};\ \ T_d = \frac{K_d}{K_p} = 0{,}02607\,\text{s}$$

$$K_p = \frac{R_2}{R_1}\ \text{si}\ R_1 = 10\,\text{k}\Omega \rightarrow R_2 = 100\,\text{k}\Omega$$

$$T_i = R_3 C_1\ \text{si}\ C_1 = 4{,}7\,\mu\text{F} \rightarrow R_3 = 24{,}127\,\text{k}\Omega$$

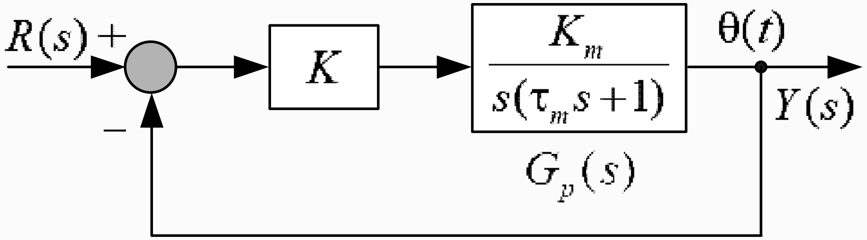
$$T_d = R_4 C_2\ \text{si}\ C_2 = 1\,\mu\text{F} \rightarrow R_4 = 26{,}07\,\text{k}\Omega$$

$$R = 10\,\text{k}\Omega$$



# Método del Lugar de las Raíces: Introducción

La estabilidad relativa y comportamiento transitorio del sistema a LC están relacionados con las ubicaciones de los polos en el plano-s de las raíces del $P_c(s)$.




$$G_{lc} = \frac{KK_m / \tau_m}{s^2 + \frac{1}{\tau_m}s + \frac{KK_m}{\tau_m}}$$

$$\tau_m = \frac{JR_a}{bR_a + K_t K_b}$$

$$K_m = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_b}$$

$$P_c(s) = s^2 + \frac{1}{\tau_m}s + \frac{KK_m}{\tau_m} = 0$$

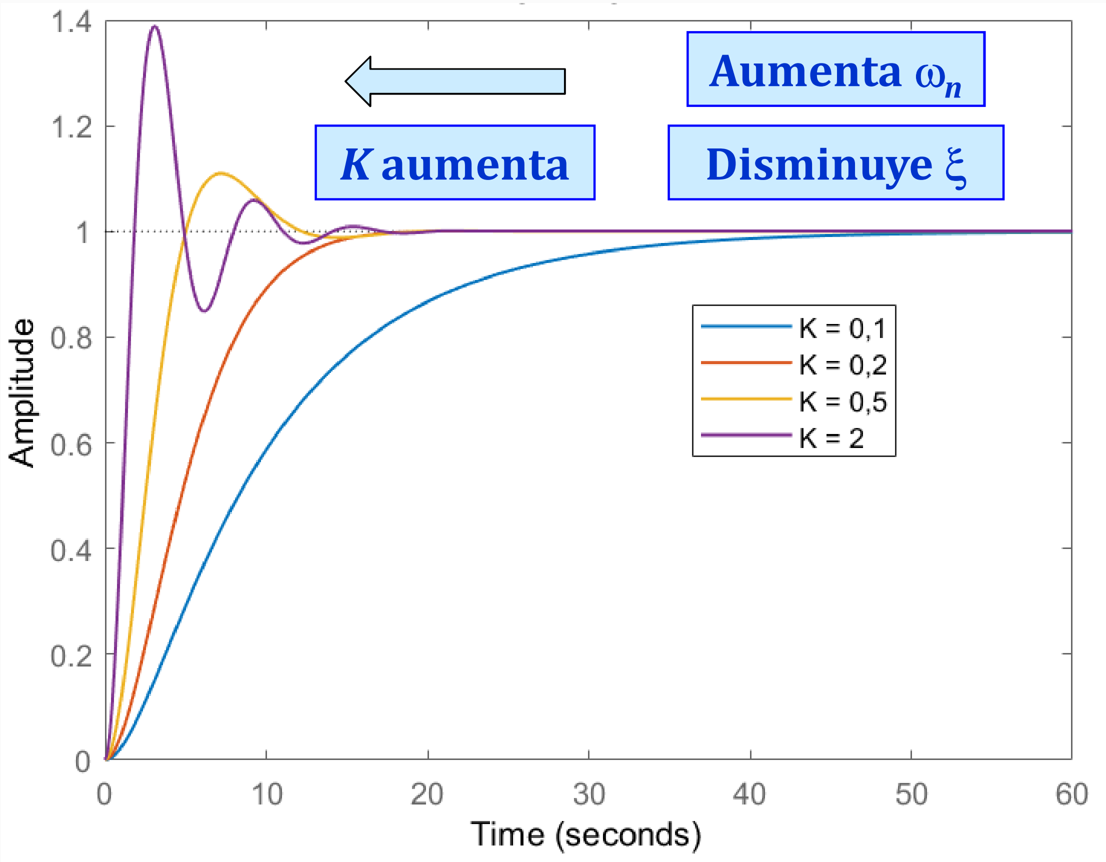
**Las raíces del $P_c$ pueden variar según se varíe $K$ o también según varíen los parámetros de la planta.**

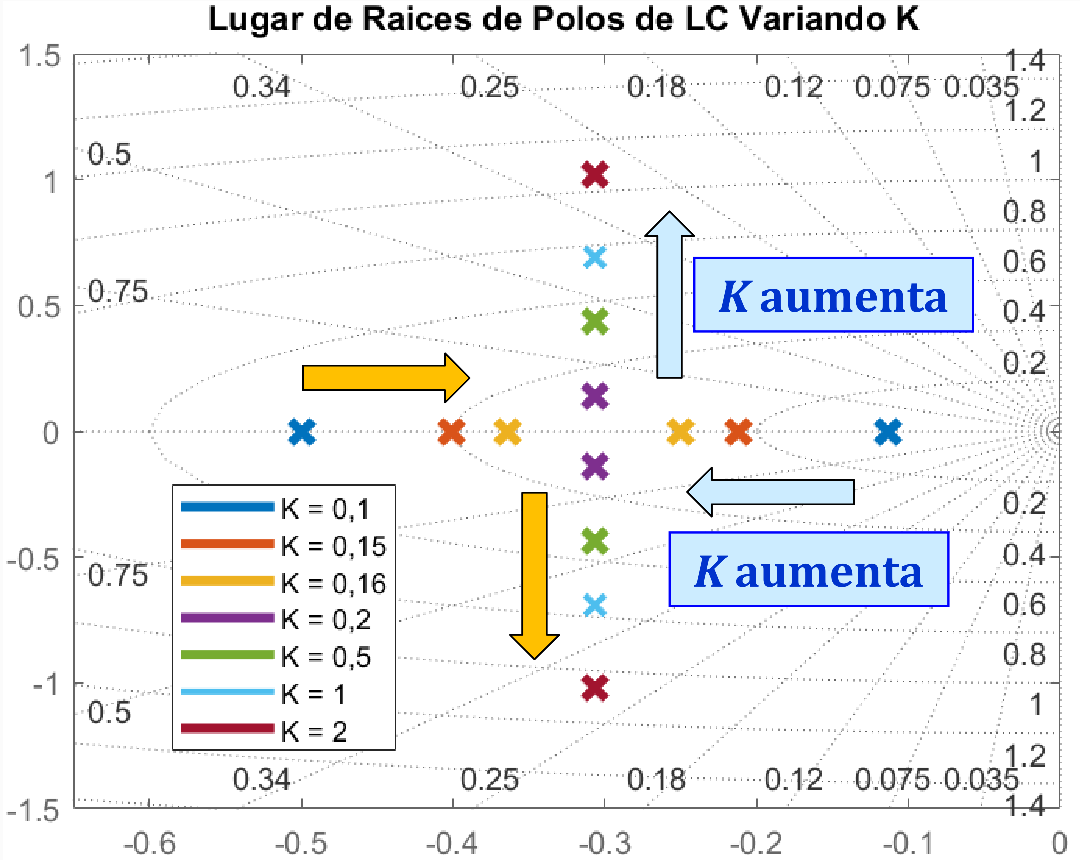
$$R_a = 0{,}8\,\Omega;\ L_a = 0{,}005\,\text{H};\ b = 0{,}1\,\text{N.m/(r/s)};\ J = 2{,}2\,\text{N.m/(r/s}^2);\ K_t = K_b = 1\,\text{N.m/A}$$

**Se analizan las ubicaciones de los polos de LC variando primero la ganancia $K$ y luego el parámetro $R_a$.**

# Método del Lugar de las Raíces: Introducción

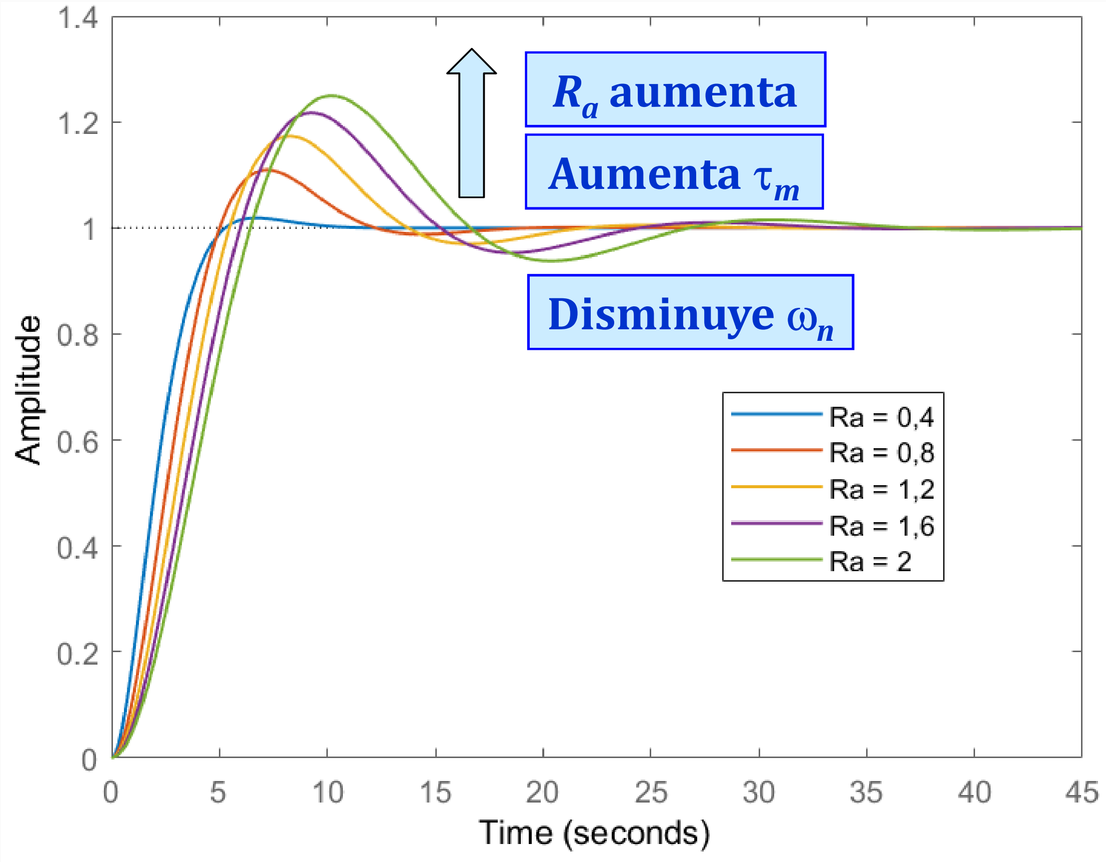
**Se analizan las ubicaciones de los polos de LC variando la ganancia *K*.**

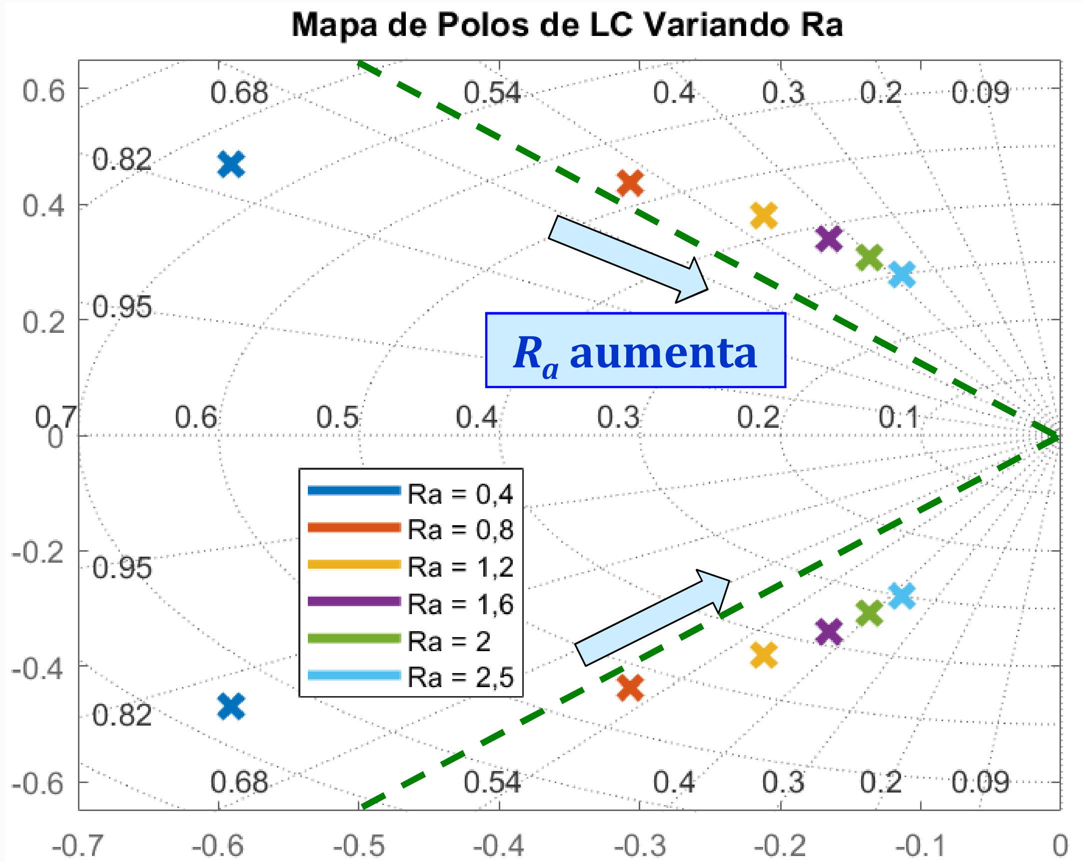


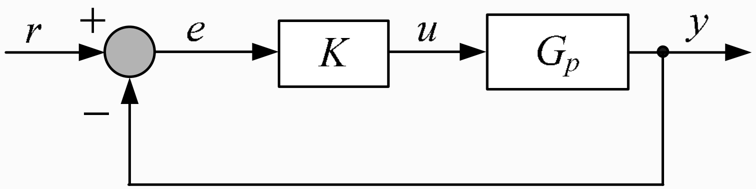
# Método del Lugar de las Raíces: Introducción

**Se analizan las ubicaciones de los polos de LC variando el parámetro $R_a$**



# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado




$$G_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \textbf{(1)}$$

Sea el proceso en LC con realimentación unitaria de la figura; $G_p(s)$ una Función Racional "*Estrictamente Propia*" dada por (1) con $n > m$, y $K$ una constante real, la FTLC puede escribirse de la siguiente forma:

$$G_{lc}(s) = \frac{KG_p(s)}{1+KG_p(s)} = \frac{K\dfrac{N(s)}{D(s)}}{1+K\dfrac{N(s)}{D(s)}} = \frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$$

Los polos de $G_{lc}(s)$ son las raíces de: $D(s) + KN(s)$ **(2)**

o lo que es lo mismo, la solución de la ecuación: $1 + KG_p(s) = 0$ **(3)**

Donde**:** $KG_p(s)$ es la Función de Transferencia de lazo abierto

# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado

**Las raíces solución de la ecuación** $1 + KG_p(s) = 0$ **en función de *K*, definen:**

**El Lugar Geométrico de las Raíces del sistema de Control en LC**

**EL LGR, ES EL LUGAR DE LOS POLOS DE LAZO CERRADO CUANDO *K* VARIA DE 0 A ∞**

**Siendo** $G_p(s)$ **una relación de polinomios, asumimos que puede estar representada, por ejemplo, de la siguiente forma:**

$$G_p(s) = \frac{K_s(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \qquad \textbf{(4)}$$

"$K_s$" una constante real (+) o (-)

**El polinomio característico de LC** $$1 + \frac{K\,K_s(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

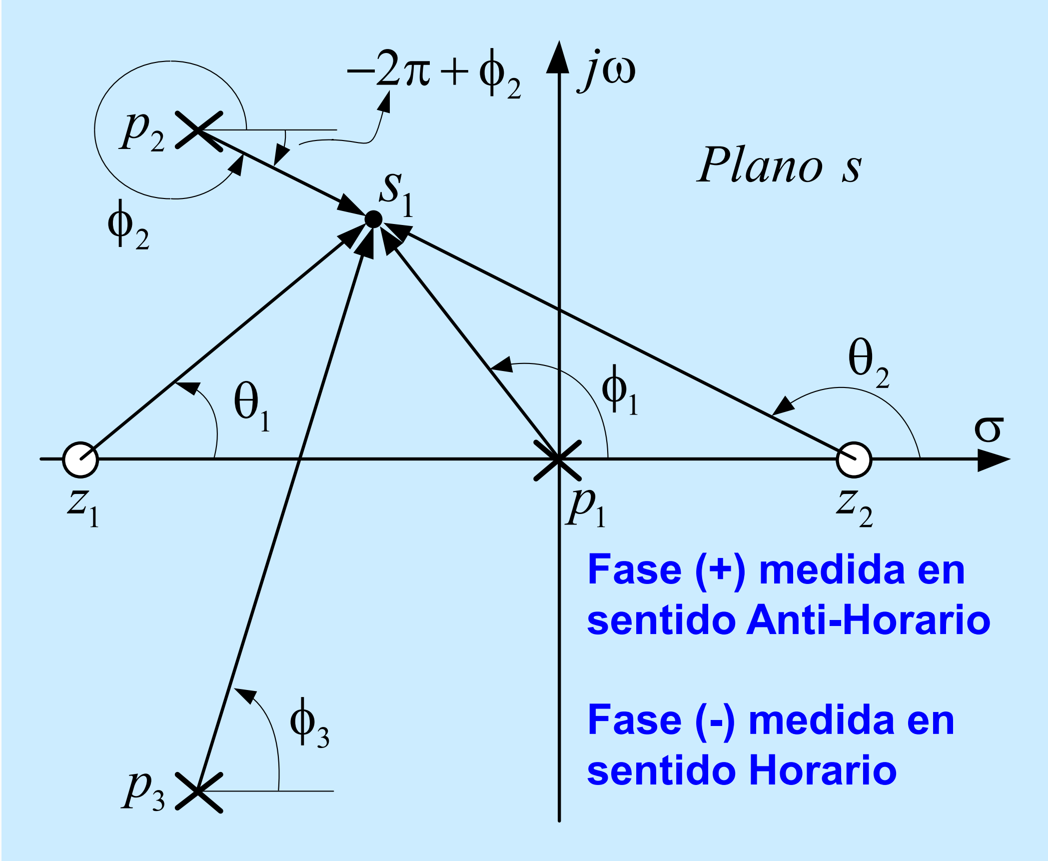
**Siendo *s* una variable compleja, la (5) se puede representar** $$\left|KG_p(s)\right| \measuredangle KG_p(s) = -1 \qquad \textbf{(6)}$$

# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado

## Significado geométrico de la ecuación (6)

**Los vectores trazados desde cada cero o polo al punto $s_1$ poseen una magnitud y fase:**

- **¿Qué representa el punto $s_1$? Es el polo que se desea imponer en lazo cerrado en base a las especificaciones de desempeño.**
- **La fase es el ángulo medido a partir del eje real.**
- **La magnitud es el valor absoluto del vector medido desde el polo o cero al punto $s_1$.**



**Cada vector al punto $s_1$ puede ser expresado:**

$$s_1 + z_i = \left|s_1 + z_i\right| e^{j\measuredangle(s_1+z_i)} = \left|s_1 + z_i\right| e^{j\theta_i} \qquad s_1 + p_i = \left|s_1 + p_i\right| e^{j\measuredangle(s_1+p_i)} = \left|s_1 + p_i\right| e^{j\phi_i}$$

**Sustituyendo en la (6):**

$$\frac{\left|K_s\right|\left|s_1 + z_1\right|\left|s_1 + z_2\right| e^{j(\measuredangle K_s + \theta_1 + \theta_2)}}{\left|s_1 + p_1\right|\left|s_1 + p_2\right|\left|s_1 + p_3\right| e^{j(\measuredangle \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}} = -\frac{1}{K} \qquad \textbf{(7)}$$

**La ecuación (7) consta de 2 partes:**

**LA CONDICIÓN DE MAGNITUD:**

$$\boxed{\frac{\left|K_s\right|\left|s_1 + z_1\right|\left|s_1 + z_2\right|}{\left|s_1 + p_1\right|\left|s_1 + p_2\right|\left|s_1 + p_3\right|} = \left|-\frac{1}{K}\right|} \qquad \textbf{(8)}$$

# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado

## LA CONDICIÓN DE FASE:

$$\boxed{\angle K_s + (\theta_1 + \theta_2) - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \angle\left(-\frac{1}{K}\right)} \quad \textbf{(9)}$$

$$\angle K_s = 0 \quad \text{si} \quad K_s > 0$$

$$\angle K_s = \pm\pi \quad \text{si} \quad K_s < 0$$

$$\angle\left(-\frac{1}{K}\right) = \begin{cases} \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi,\ \ldots \rightarrow si \quad K > 0 \\ 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots \quad \rightarrow si \quad K < 0 \end{cases}$$

**Dos ángulos serán considerados iguales, si ellos difieren en ±2π o ±360º o sus múltiplos**

# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado

**Usando esta convención, la CONDICIÓN DE FASE en la (9) resulta:**

$$\text{Fase Total} = \angle K_s + \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \begin{cases} \pi & si\ K > 0 \\ 0 & si\ K < 0 \end{cases} \qquad (10)$$

**O en forma genérica:**

$$\text{Fase Total} = \angle K_s + \sum_m \theta_j - \sum_n \phi_k = \left\{ \begin{matrix} \pm\pi(2i+1) & si\ K > 0 \\ \pm\pi(2i) & si\ K < 0 \end{matrix} \right\} \ i = 0,1,2,3,\ldots.. \qquad (11)$$

- **Se observa que *K* no aparece de forma explícita en la condición de fase (10).**
- **La construcción del Lugar de las Raíces es por lo tanto la búsqueda para todos los $s_i$ en los cuales la fase total de $G(s_i)$ es igual a 0 o $\pi$.**
- **Si existe una raíz $s_1$ que satisface la condición (10), existe entonces una ganancia $K_1$ tal que $D(s_1) + K_1 N(s_1) = 0$, y $K_1$ puede ser calculado utilizándose la (8)**

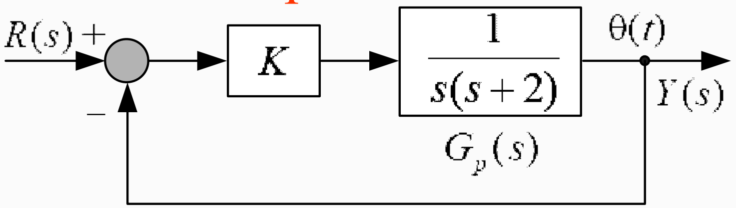
# Lugar Geométrico de las Raíces. Significado

## Resumen de lo presentado:

- Al lugar geométrico de los puntos del plano-*s* **que satisfacen la condición de ángulo** se lo denomina “Lugar de las Raíces del Sistema en Lazo Cerrado”.
- Los polos de lazo cerrado que satisfacen la **condición de ángulo**, cumplen las especificaciones de desempeño, y por ende pertenecen al Lugar de las Raíces (LGR) del Sistema en LC.
- Si esos polos pertenecen al LGR, el valor de ganancia *K* para hacer cumplir las especificaciones de desempeño, surge de la **condición de magnitud**.
- O dicho de otra forma: A partir de la condición de magnitud, puede obtenerse el valor de la ganancia para los polos de lazo cerrado que cumplen las especificaciones de desempeño.

## Lugar Geométrico de las Raíces. Ejemplo

Tomemos la planta del motor con la posición como salida, dada al inicio de esta unidad 4.

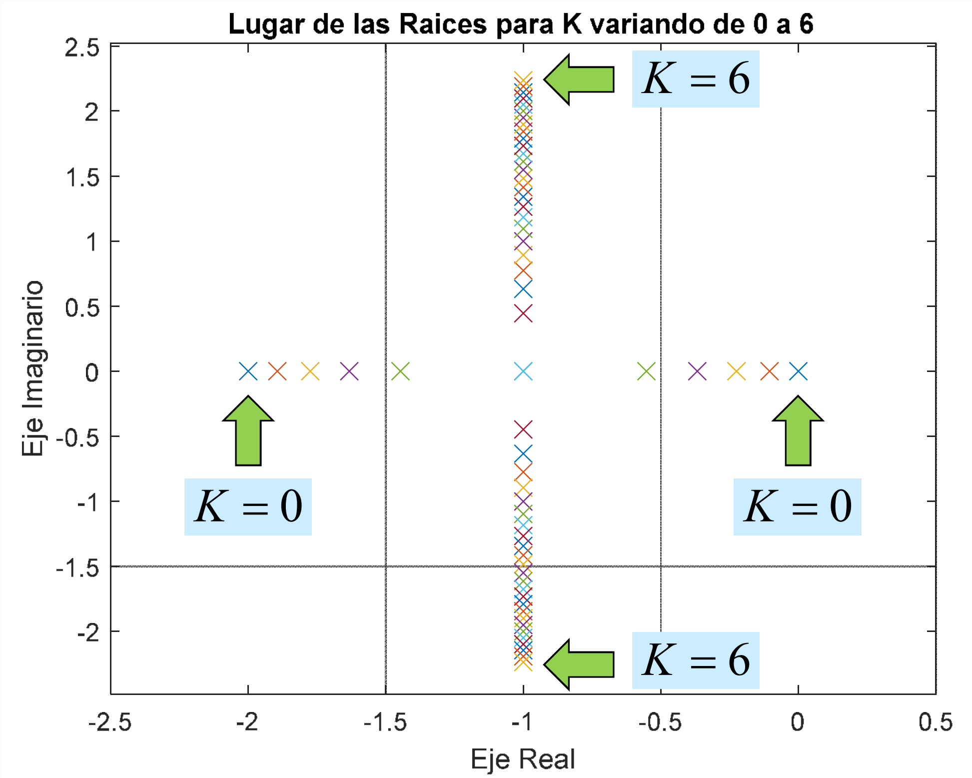



$$G_{lc} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

$$P_c(s) = s^2 + 2s + K = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

El lugar de las raíces a medida que varía *K*, se halla haciendo que:

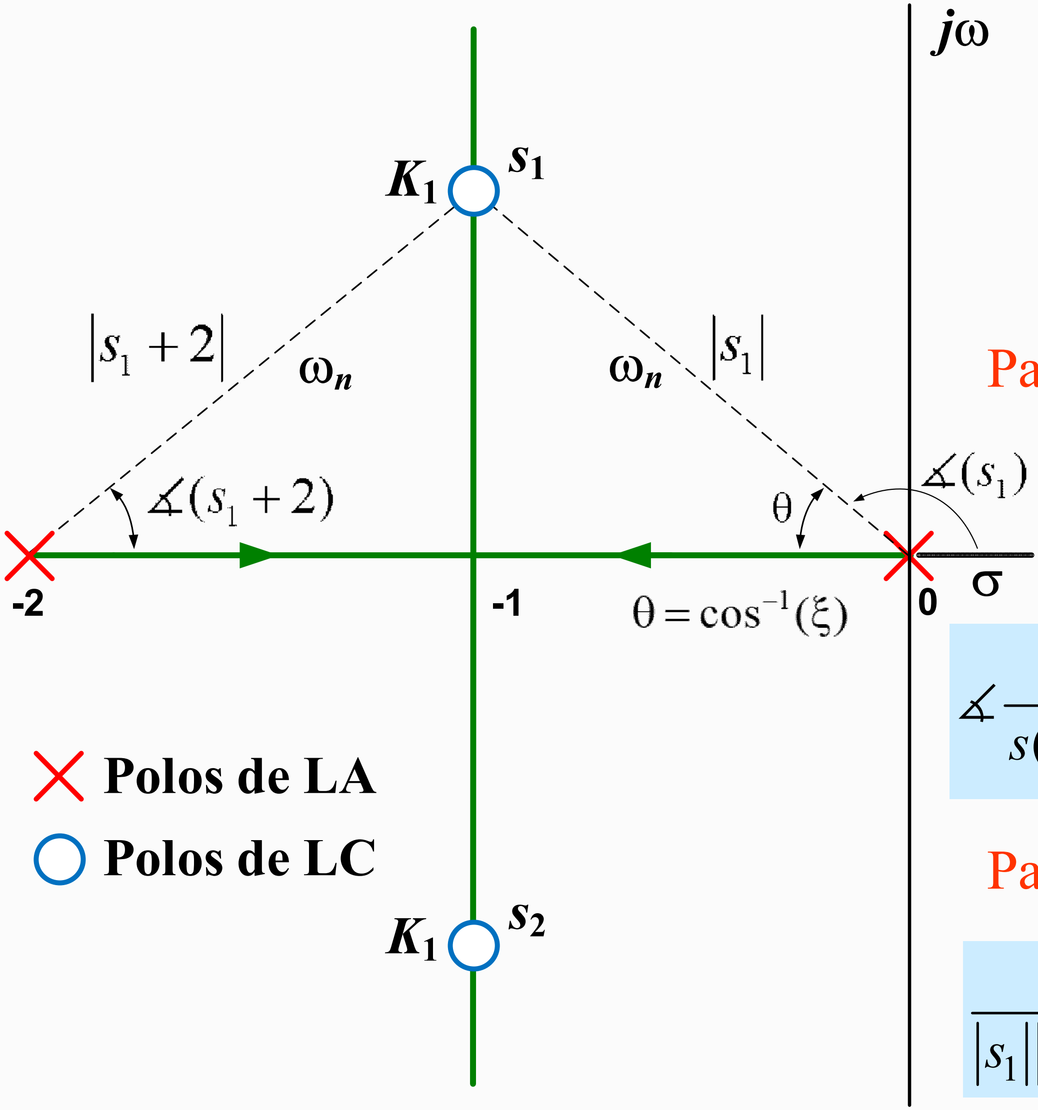
$$\measuredangle G_{la}(s_i) = \pm\pi \;\; y \;\; |G_{la}(s_i)| = 1$$




Supóngase que debe encontrarse una raíz $s_1$ que posea una frecuencia $\omega_n$ y un factor $\xi$ determinados para cumplir con determinadas características de la respuesta transitoria.

Esta raíz debe satisfacer la ecuación de $P_c(s) = 0$ y además, para pertenecer al lugar de las raíces del sistema en LC debe cumplir la condición de fase y de magnitud.

## Lugar Geométrico de las Raíces. Ejemplo




Especificaciones para $s_1$:

$$\xi = 0,58 \ \text{ y } \ \omega_n = 1,73\,\text{r/s}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,58) = 54,8°$$

Para satisfacer el requisito de fase: $\measuredangle G_{la}(s_1) = \pm\pi$

$$\measuredangle \left.\frac{K_1}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = -\measuredangle s_1 - \measuredangle(s_1+2) = -(180° - \theta) - \theta = -180°$$

Para obtener la ganancia en $s_1$ : $|G_{la}(s_1)| = 1$

$$\frac{K_1}{|s_1||s_1+2|} = 1 \Rightarrow K_1 = |s_1||s_1+2| = \omega_n^{\,2}$$

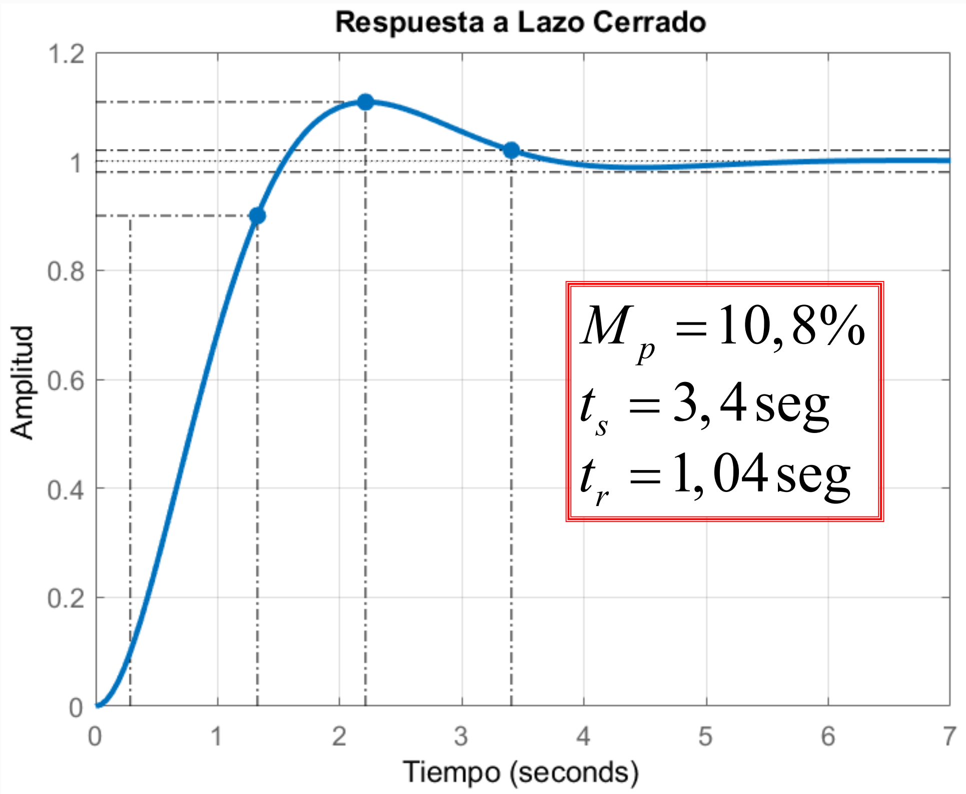
$$K_1 \cong 3$$

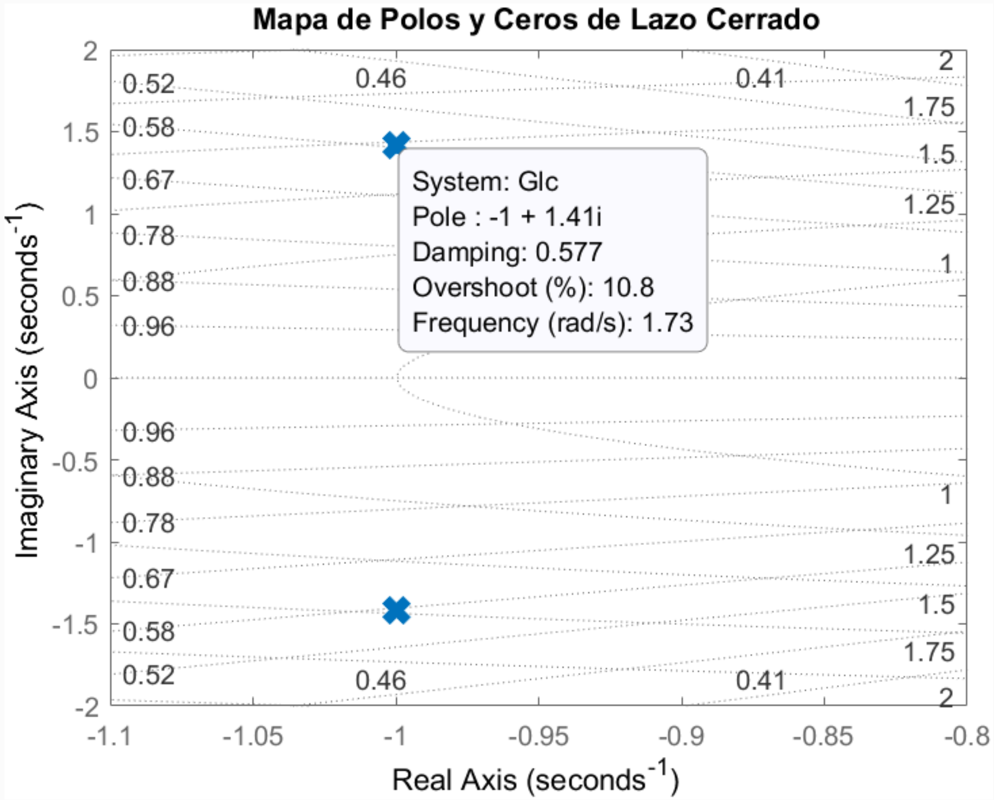
# Lugar Geométrico de las Raíces. Ejemplo

Especificaciones para $s_1$: $\xi = 0,58 \;\; \text{y} \;\; \omega_n = 1,73 \, \text{r/s}$

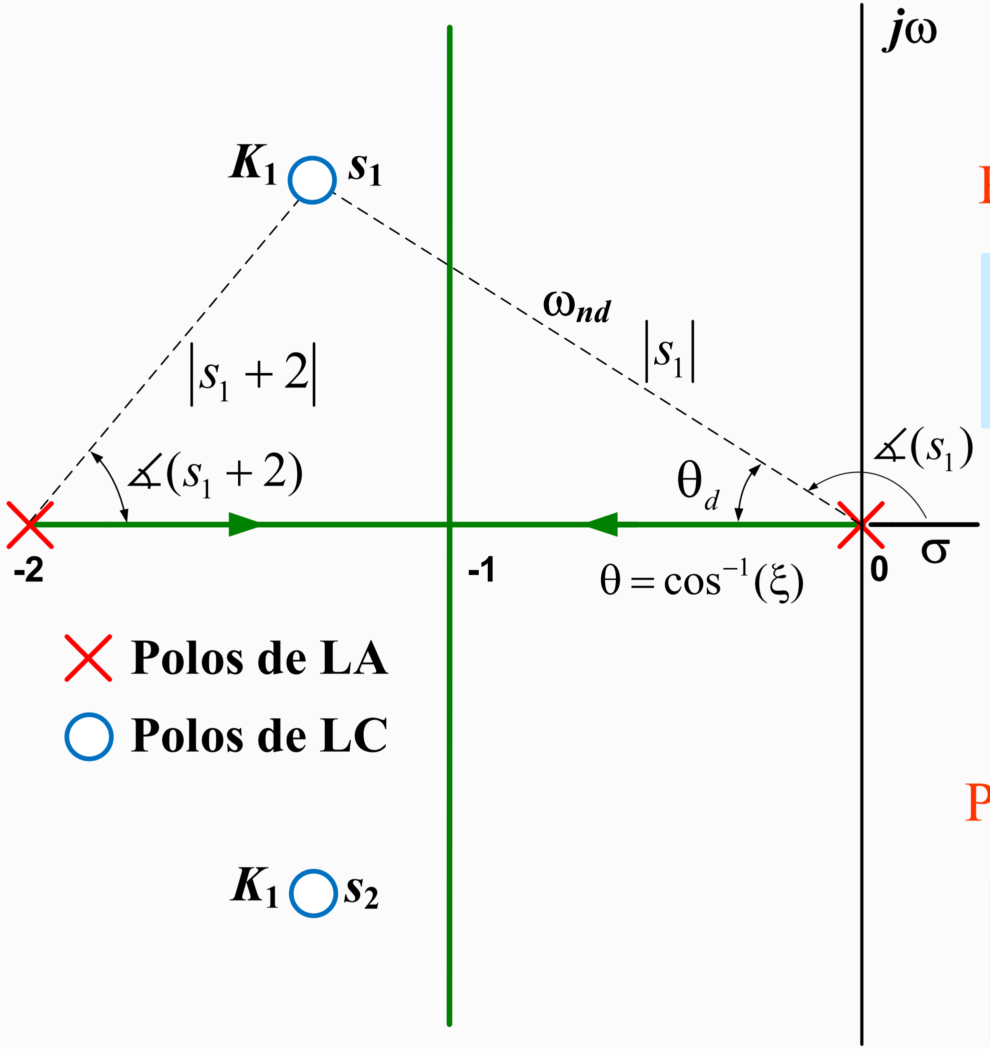
Resultados para corroborar el valor obtenido de $K_1$

$$G_{lc}(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow \omega_n \approx \sqrt{3} \, \text{r/s}$$



# Lugar Geométrico de las Raíces. Ejemplo




Especificaciones para $s_1$:

$$\xi = 0,65 \ \text{ y } \ \omega_n \cong 1,85\,\text{r/s} \qquad \theta = \cos^{-1}(0,65) \cong 50°$$

Para satisfacer el requisito de fase: $\measuredangle G_{la}(s_1) = \pm\pi$

$$\measuredangle \left.\frac{K_1}{s(s+2)}\right|_{s=s_1} = -\measuredangle s_1 - \measuredangle(s_1+2) = -130° - 60° = -190°$$

Se observa que hay una deficiencia de ángulo en $s_1$ de 10°, que habrá que corregir para que se cumplan las especificaciones.

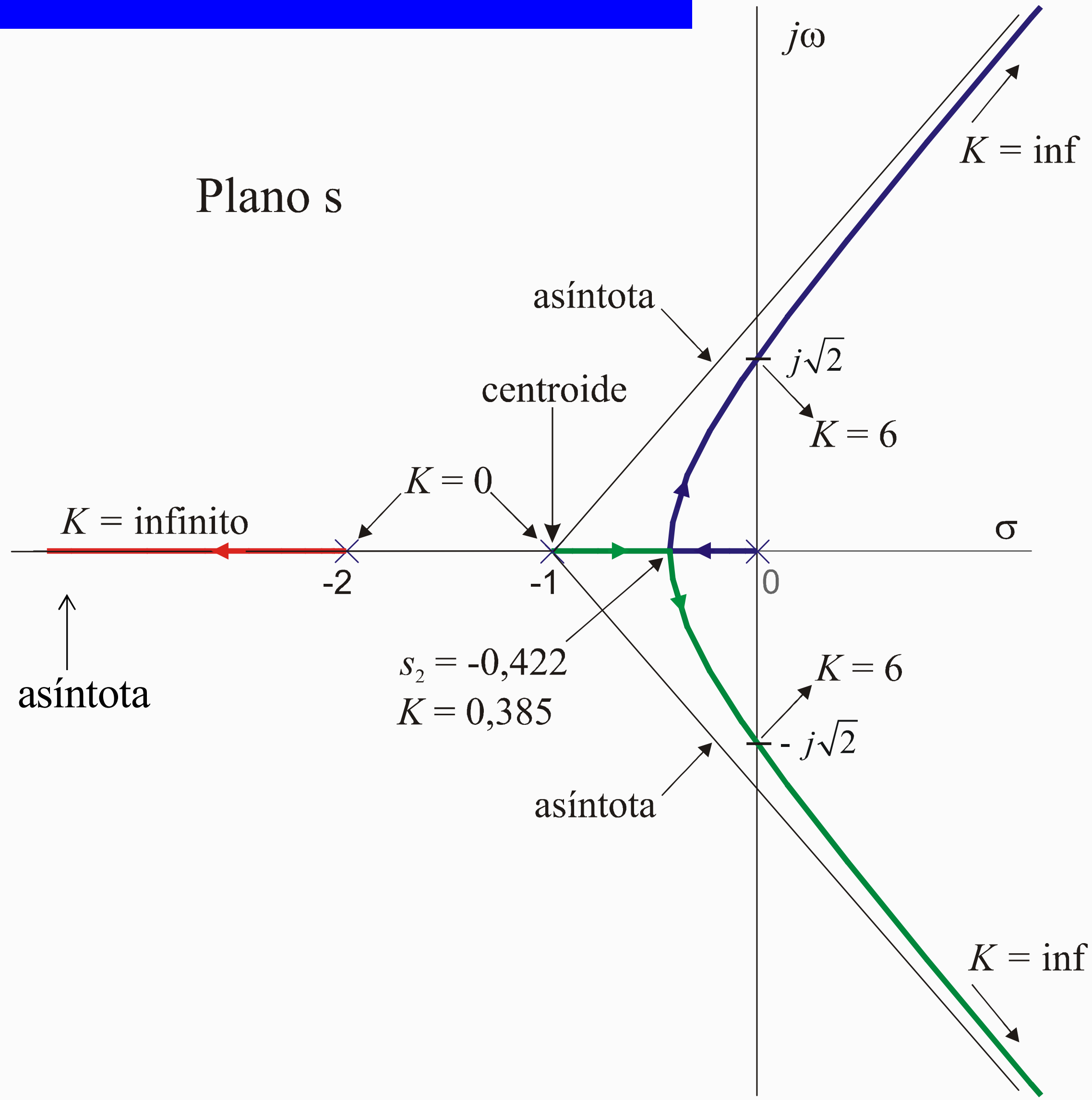
Para obtener la ganancia en $s_1$ : $|G_{la}(s_1)| = 1$

$$\frac{K_1}{|s_1||s_1+2|} = 1 \Rightarrow K_1 = 1,85 \times 1,62 = 2,99$$

# Lugar Geométrico de las Raíces: Trazas Comunes

**Lugar de las Raíces para una planta tipo 1 y 2 polos reales**

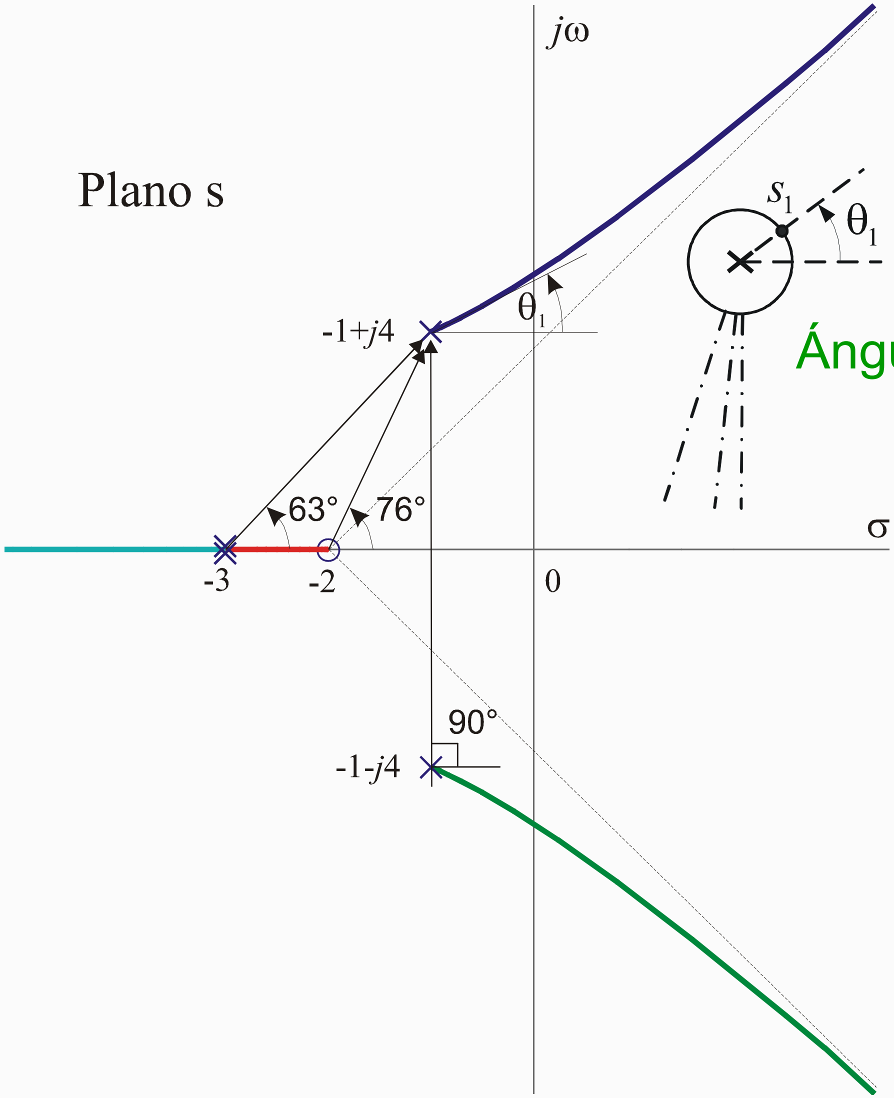
$$G_{la}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



# Lugar Geométrico de las Raíces: Trazas Comunes

$$G(s) = \frac{2(s+2)}{(s+3)^2(s+1+j4)(s+1-j4)}$$

**Lugar de las Raíces para una planta tipo 0 polos complejos conjugados y un cero**



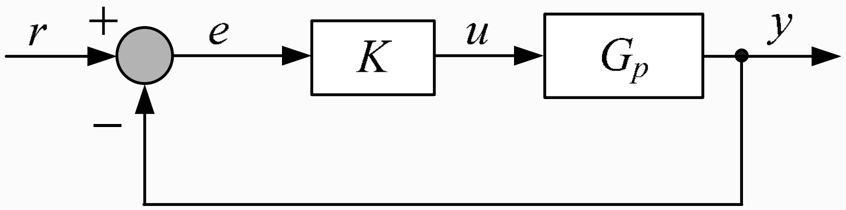

Ángulo de Partida:

$$\boxed{\theta_1 = 40°}$$

# Lugar Geométrico de las Raíces. Estabilidad

## Rango de Estabilidad del L.R.: Condición de Magnitud

Consideremos el siguiente sistema con realimentación unitaria:




$$G_p(s) = \frac{(s-1+j2)(s-1-j2)}{(s-1)(s+3+j3)(s+3-j3)}$$

Con el Test de Routh se obtienen los siguientes límites de estabilidad para la ganancia $K$: $3{,}6 < K < 5{,}54$

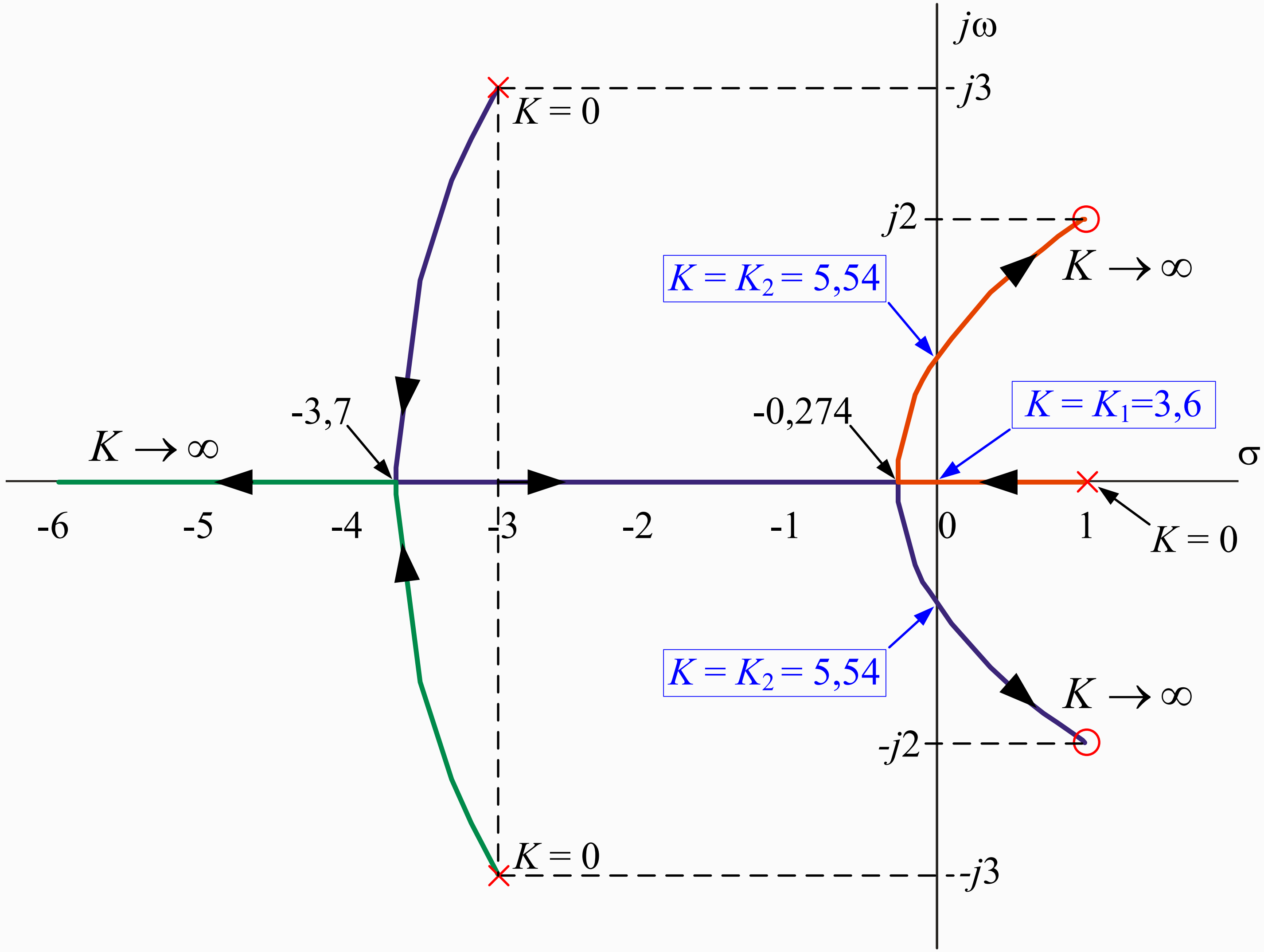
Se puede calcular el intervalo de valores de ganancia *K* que determinan los límites de la estabilidad, utilizándose la **Condición de Magnitud**:

$$\frac{(s-1+j2)(s-1-j2)}{(s-1)(s+3+j3)(s+3-j3)} = -\frac{1}{K} \quad para \;\; K > 0$$

$$\boxed{\frac{|s-1+j2||s-1-j2|}{|s-1||s+3+j3||s+3-j3|} = \frac{1}{K}}$$

# Lugar Geométrico de las Raíces. Estabilidad

$$G_p(s) = \frac{(s-1+j2)(s-1-j2)}{(s-1)(s+3+j3)(s+3-j3)}$$




Para $K$ = 0

1 polo
**inestable**
en $s = 1$

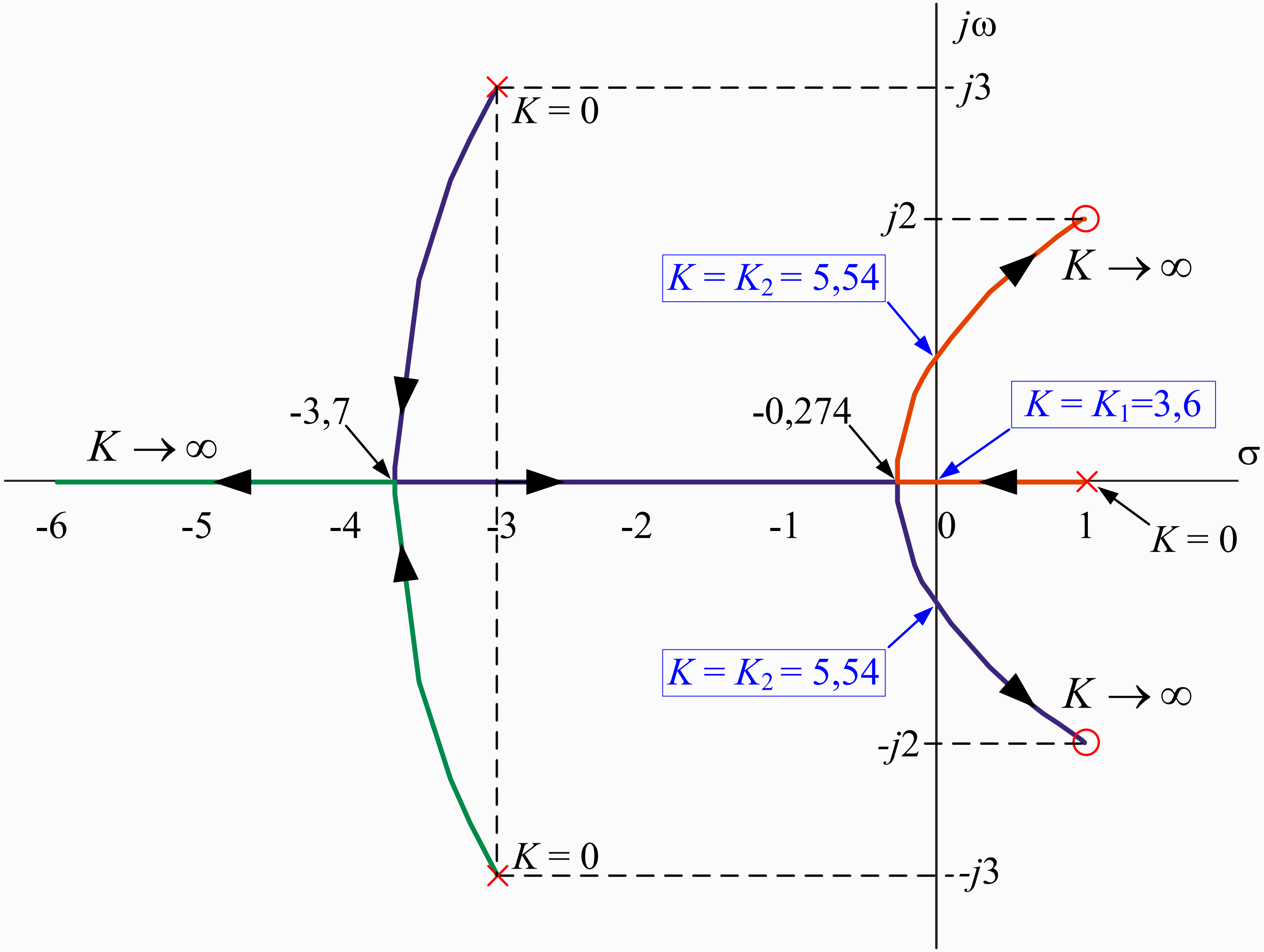
y un par de
polos C.C.
**estables**

Para $K$ > $K_1$

el sistema
**es estable**

# Lugar Geométrico de las Raíces. Estabilidad

$$G_p(s) = \frac{(s-1+j2)(s-1-j2)}{(s-1)(s+3+j3)(s+3-j3)}$$




Los polos de L.C. se mantienen en el S.P.I hasta

$K = K_2$

Para $K > K_2$

el sistema **es inestable**

# Lugar Geométrico de las Raíces. Estabilidad

$$\boxed{K = \frac{|s-1||s+3+j3||s+3-j3|}{|s-1+j2||s-1-j2|}}$$

**Valores de K de la Condición de Magnitud**

$$K_1 = \frac{|-1||3+j3||3-j3|}{|-1+j2||-1-j2|} = 3,6$$

$K_1$ es la ganancia crítica para $s = 0$

$$K_2 = \frac{|j1-1||3+j4||3-j2|}{|-1+j3||-1-j1|} = 5,62$$

$K_2$ es la ganancia crítica para $s = \pm j$

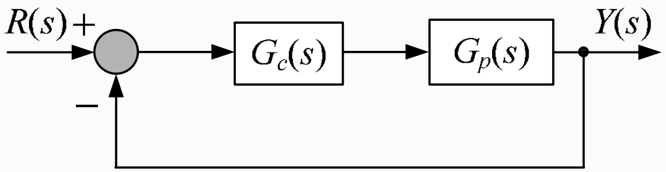
**Se obtiene el siguiente rango de valores de *K***

$$\boxed{3,6 < K < 5,6}$$

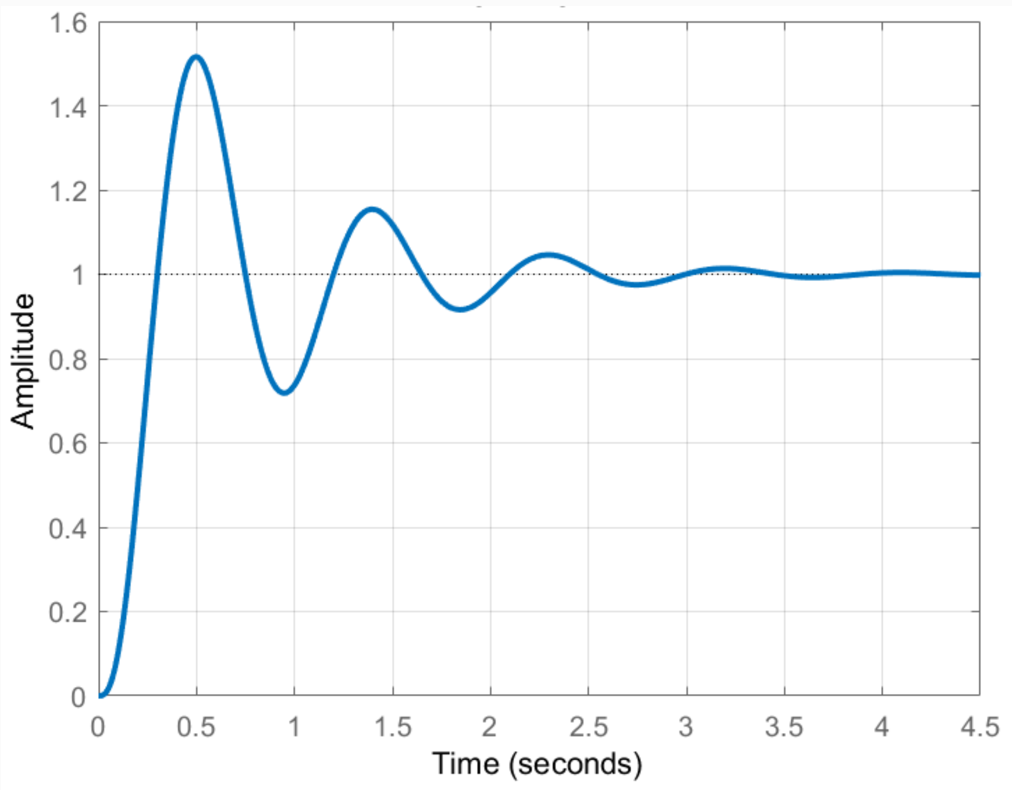
Igual resultado que el obtenido por el Test de Routh

# Diseño de Compensadores por el Método del Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional: Sistema de Tipo 1




$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)} \qquad G_c(s) = K_p$$



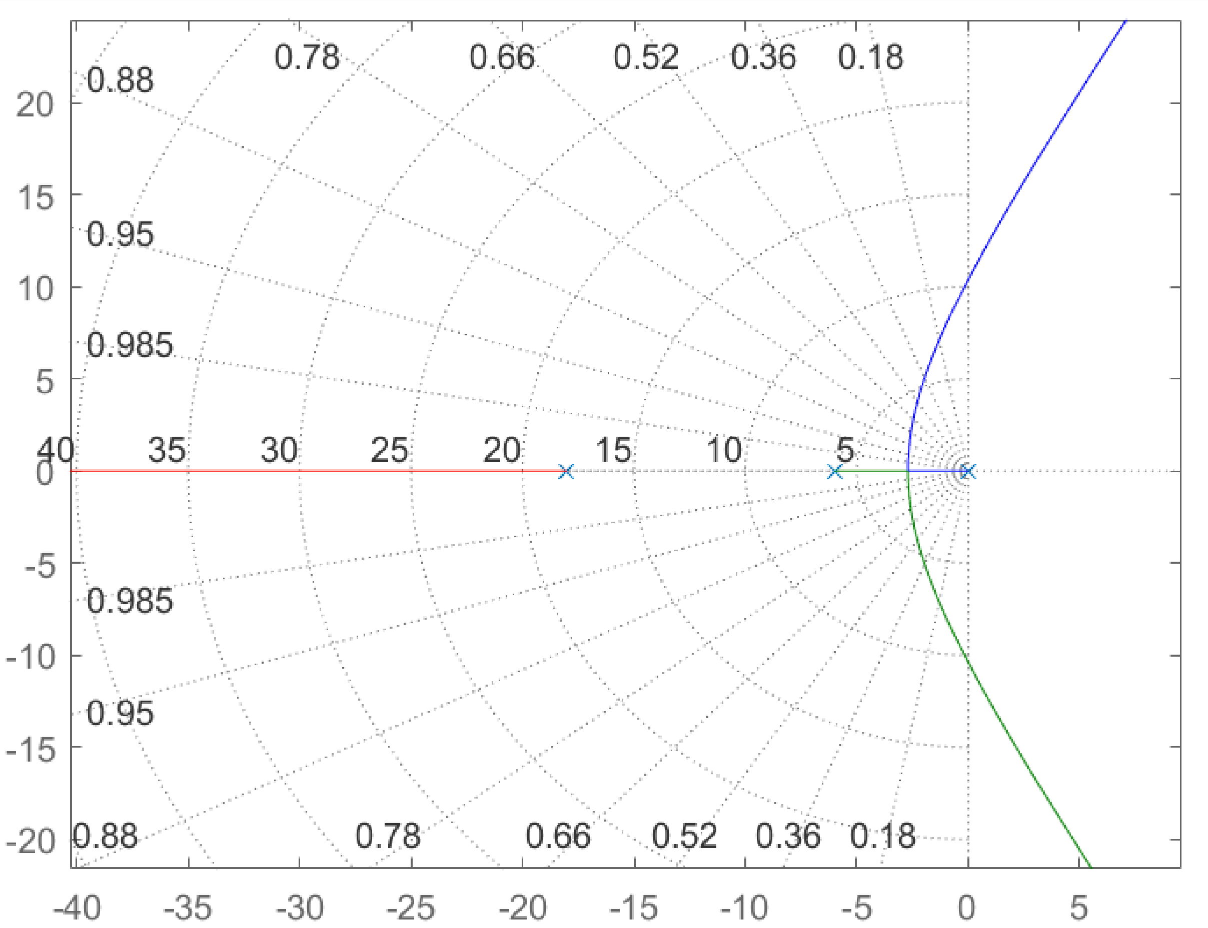

Especificaciones de la respuesta al escalón del sistema sin compensar

$$\boxed{\begin{aligned} &K_p = 1;\ M_p = 51{,}6\%; \\ &t_s = 2{,}84\,\text{seg};\ t_p = 0{,}497\,\text{seg} \\ &\mathrm{e}_{ssp} = 0;\ e_{ssv} = 10\,\% \end{aligned}}$$

Sistema de Reducida Estabilidad relativa.

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

**Lugar de las raíces de $K_p G_p$**




Raíces de L.C: $-21.3;\ -1.35 \pm j7$

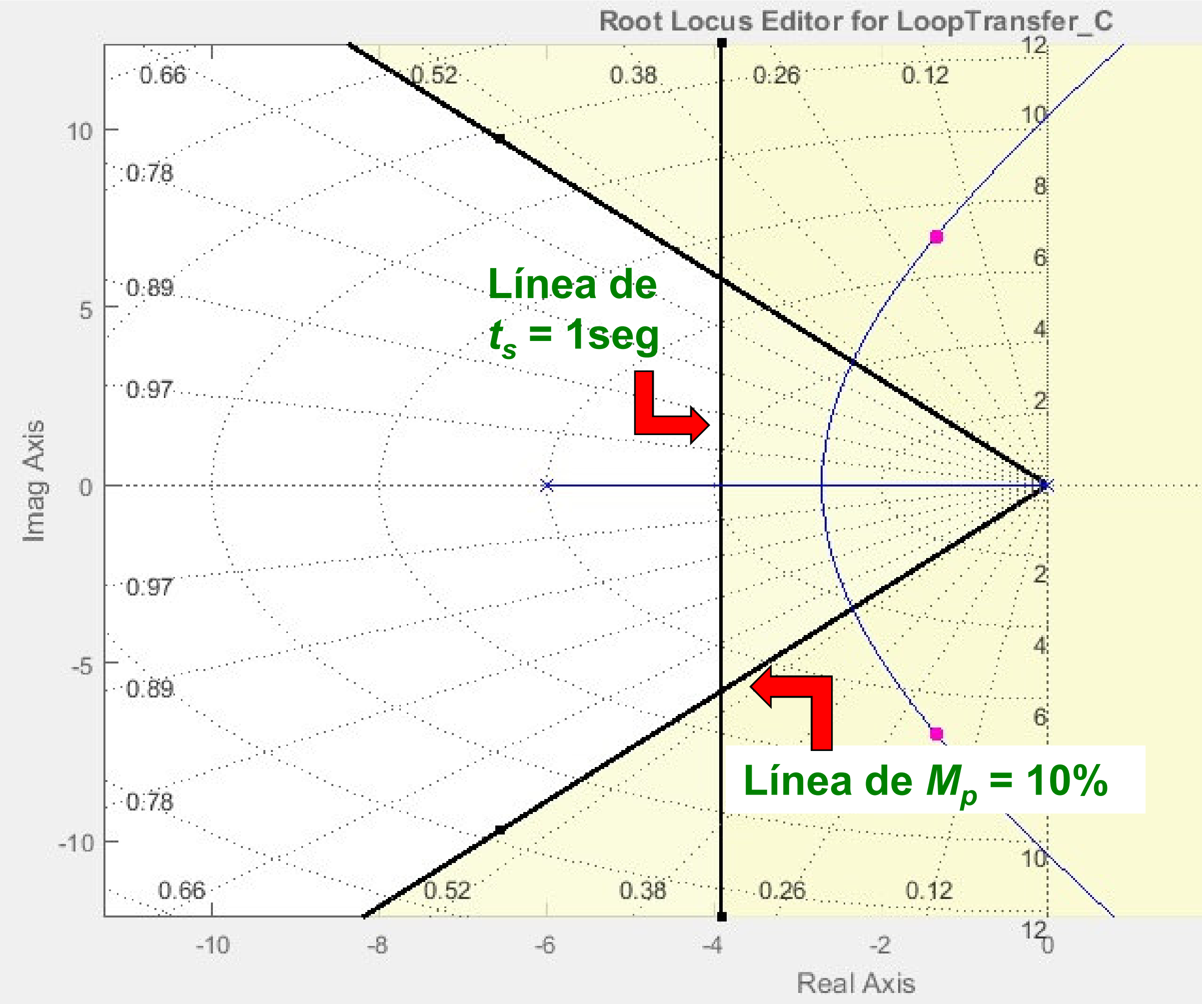
Podría aplicarse el criterio de dominancia para simplificar el diseño.

Especificaciones transitorias impuestas: $t_s$ = 1seg y $M_p$ = 10%

Polos complejos conjugados deseados:

$$s_{1,2} = -4 \pm j5,458$$

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces




$$\sigma = -\frac{4}{t_s} \text{ para el } 2\%$$

Solo variándose $K_p$, no se consigue una respuesta con un tiempo de asentamiento menor a 1 segundo

Únicamente pueden conseguirse sobrepasos Mp igual o menores al 10% con valores de $K_p$ menores a 1.

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional: Sistema de Tipo 1

Nueva Especificación: $e_{ssv} \leq 20\%$ (entrada en rampa) $K_v = \dfrac{1}{0,2} = 5 \text{ seg}^{-1}$

$$K_v = \frac{1}{e_{ssv}} = \lim_{s\to 0} s \frac{K_p 1080}{s(s+6)(s+18)} \qquad 5\,\text{seg}^{-1} = K_p \times 10 \Rightarrow K_p = 0,5 \text{ seg}^{-1}$$

Con $K_p$ = 0,5 las raíces de L.C. resultan:

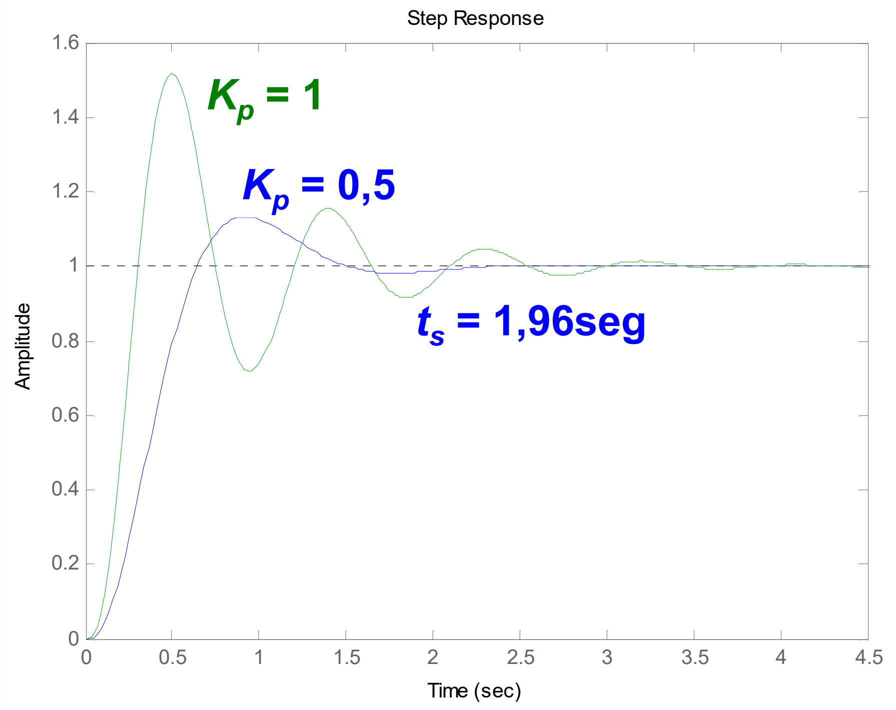
$s_{1,2} = -2,04 \pm j4,85$ (polos dominantes resultantes)
$s_3 = -20;$

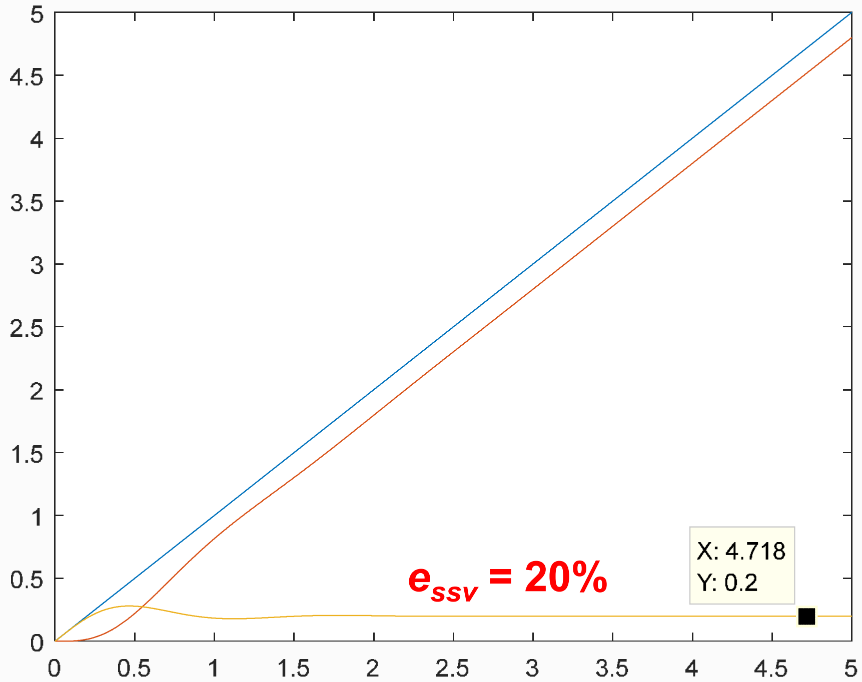
$s_{1,2} = -4 \pm j5,458$ (polos deseados)

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{2,04} = 1,96\,\text{seg} > 1\,\text{seg} \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{4,85} = 0,648\,\text{seg} \qquad M_p = e^{\frac{-\pi\sigma}{\omega_d}} = 26,65\,\% > 10\%$$

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional: Sistema de Tipo 1

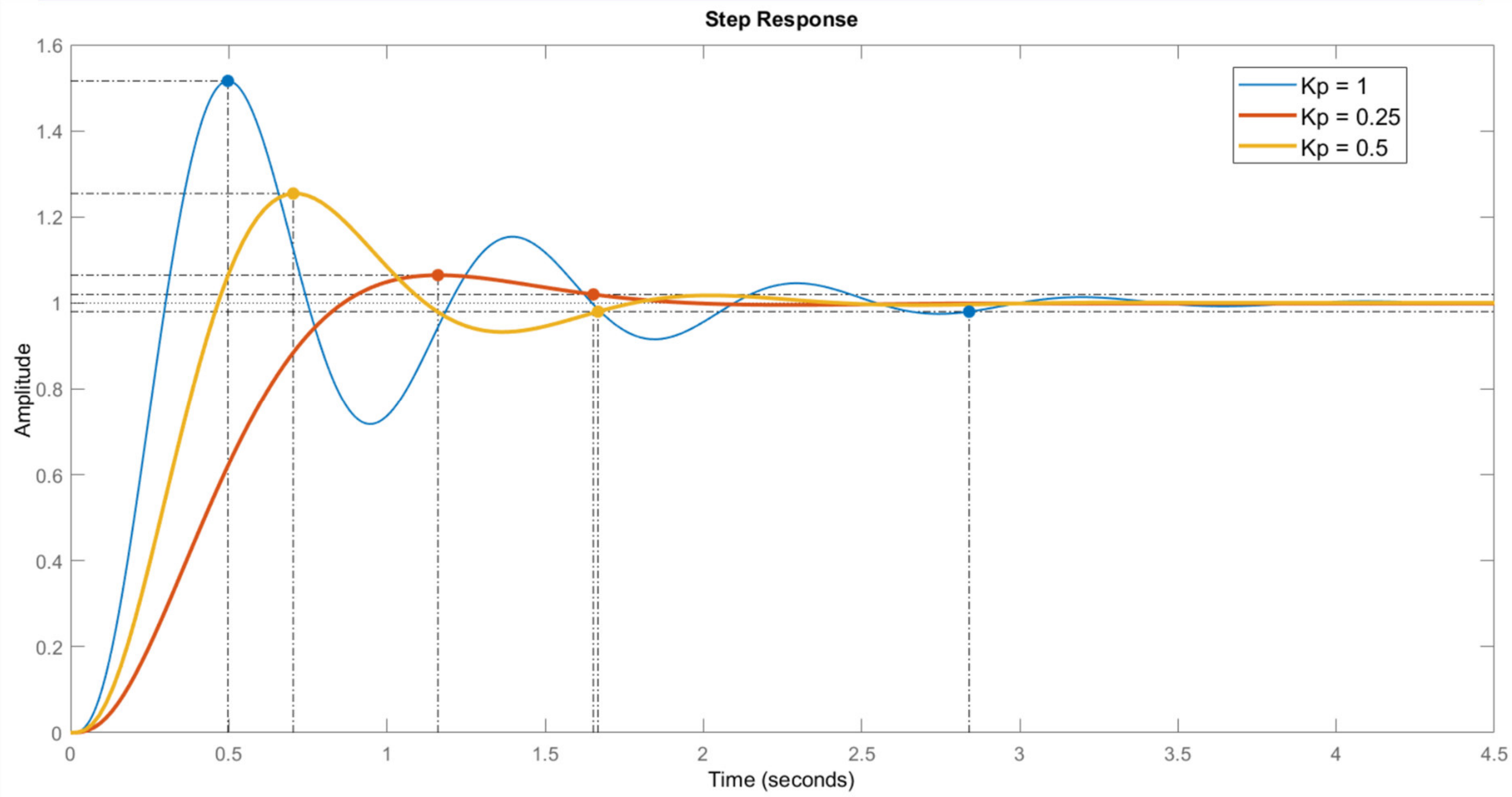



Si se especifica que el $e_{ssv}$ sea mayor: $t_p \uparrow,\ t_s \downarrow\ y\ M_p \downarrow$

Mejora la estabilidad del sistema en lazo cerrado dado que aumenta el factor de amortiguamiento relativo. Disminuyen las oscilaciones y el desempeño transitorio mejora

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

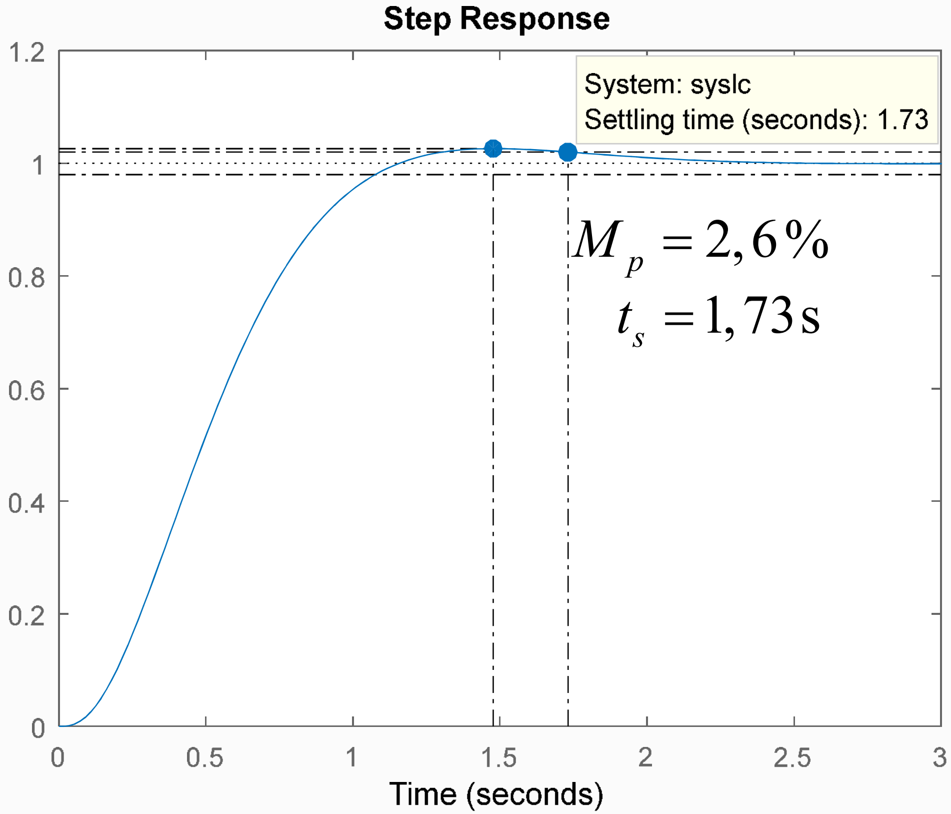


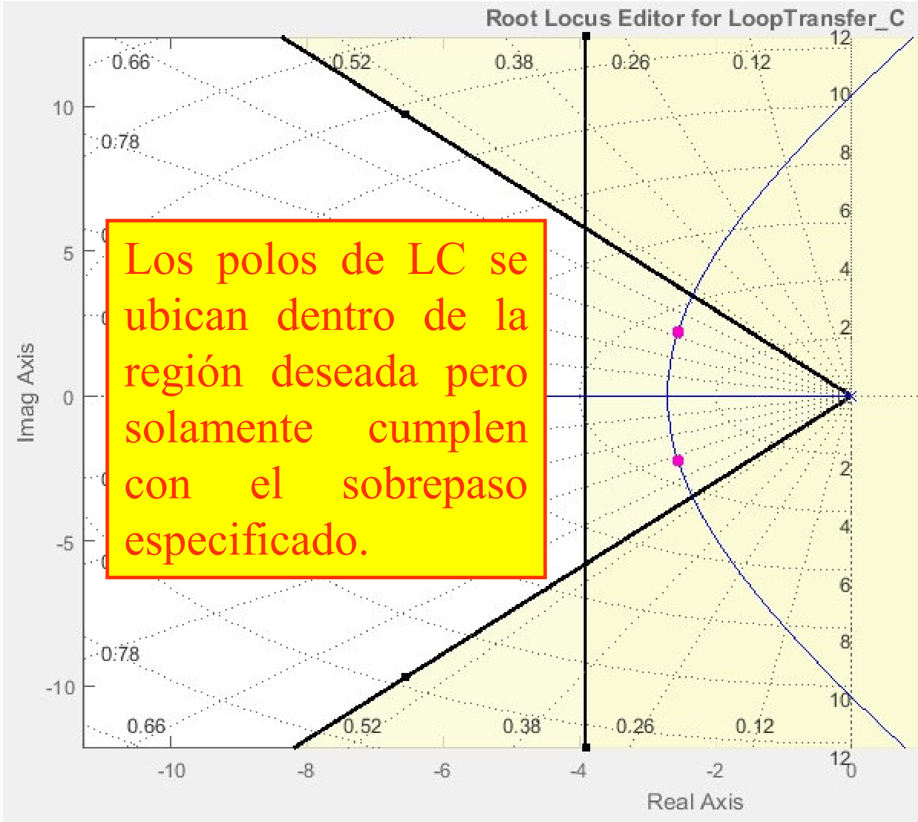

- A medida que aumenta $K_p$, el $e_{ssv}$ disminuye pero se deteriora da estabilidad para entradas en escalón.
- En sistemas que poseen una diferencia $(n - m) > 2$, o sea, por lo menos 2 polos más que ceros, un aumento de $K_p$ siempre provoca un deterioro de la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado.

# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional: Sistema de Tipo 1

$$K_p = 0,2 \qquad K_v = K_p \times 1080 / (6 \times 18) = 2 \quad \Rightarrow \quad e_{ssv} = 50\% \text{ (entrada en rampa)}$$

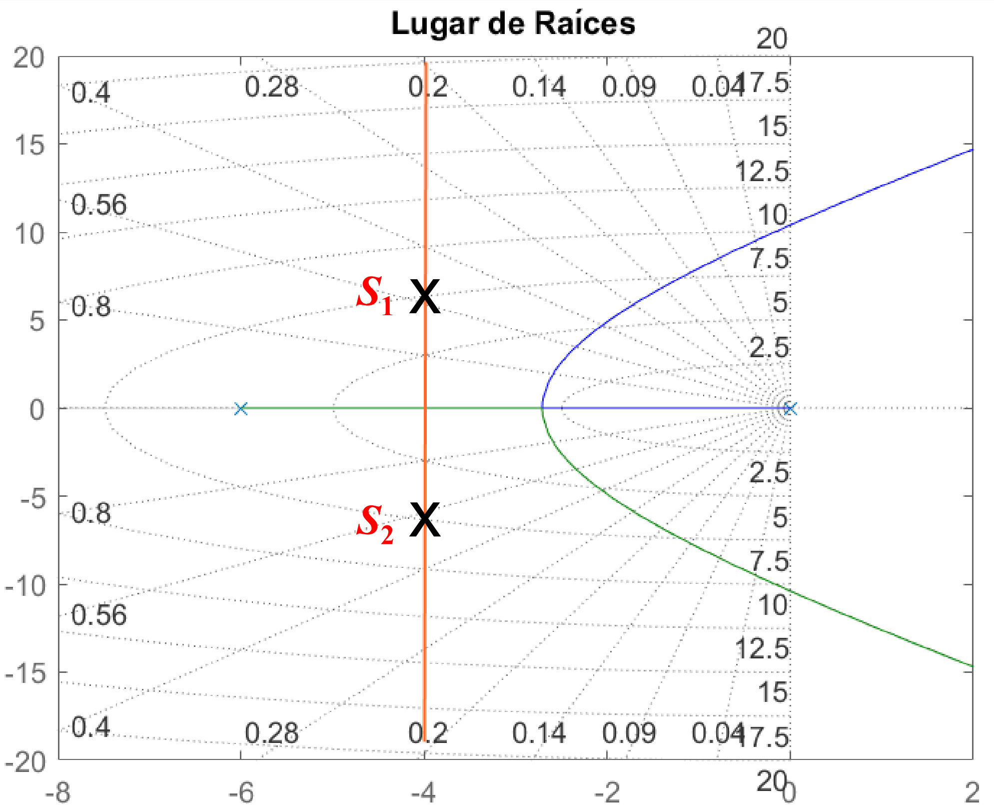


# Diseño de Compensadores por Lugar de Raíces

Para las especificaciones dadas de: $t_s \leq 1 seg \;\; y \;\; M_p = 10\%$

Los polos dominantes deben estar en: $s_{1,2} = -4 \pm j5,458$




Se deduce, observando el Lugar de la Raíces del sistema en análisis, que con un control Proporcional no pueden cumplirse las especificaciones porque ninguna rama del L.R. pasa por los polos deseados dominantes $s_{1,2}$ .

Significa que si se aplica la condición de fase de los polos de la FTLA en el punto $s_1$, la misma no se cumple.

¿Qué solución puede aplicarse para que los polos $s_{1,2}$ pertenezcan al LGR?

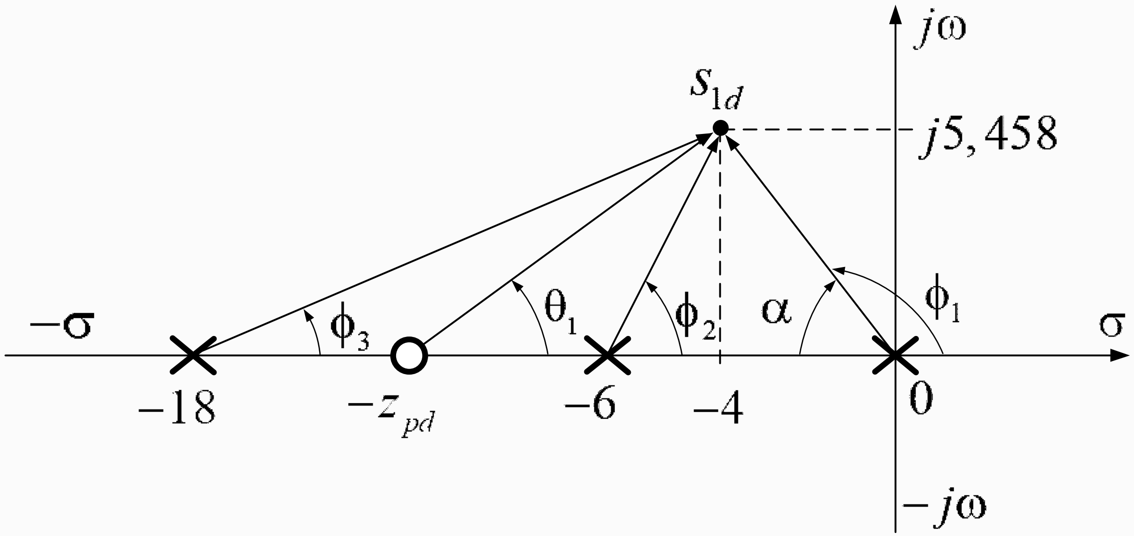
# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional-Derivativo: Sistema de Tipo 1

Especificaciones: $t_s = 1seg \;\; y \;\; M_p = 10\%$

Para que estos polos pertenezcan al L.R. se puede introducir una acción proporcional derivativa, lo que introduce un cero de LA.

Para saber la posición del cero se impone la condición de ángulo:




$$\sum \theta_{ceros} - \sum \phi_{polos} = \pm 180°$$

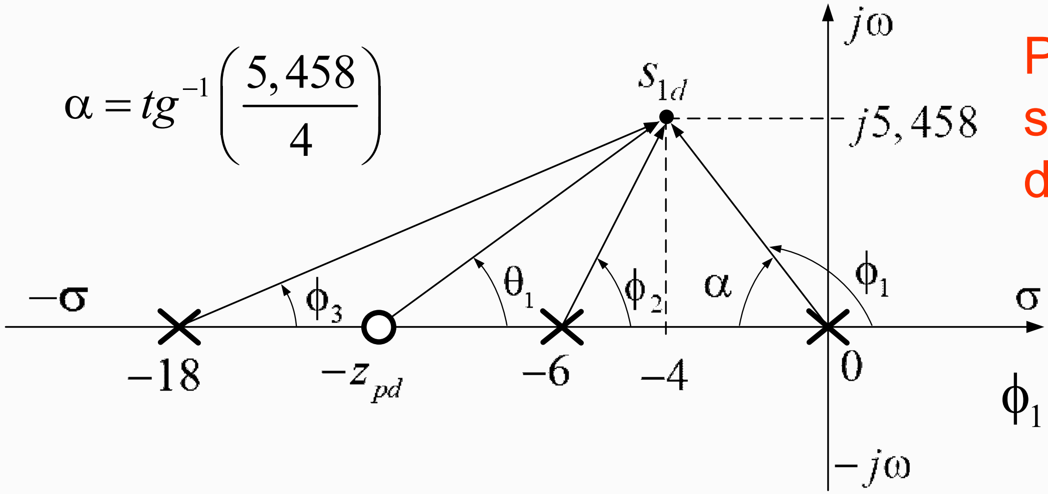
$$\theta_1 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \pm 180°$$

$$G_c(s) = K_d(s + z_{pd})$$

**Constelación de polos y ceros de la FT de lazo abierto**

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{5,458}{4}\right)$$




Primero se aplica la condición de fase en $s_{1d}$ para saber si este punto pertenece al lugar de raíces del proceso en LC:

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \pm 180°$$

$$\phi_1 = 180° - \alpha \quad \phi_2 = tg^{-1}\left(\frac{5,458}{6-4}\right) \quad \phi_3 = tg^{-1}\left(\frac{5,458}{18-4}\right)$$

$$\text{Fase Total} = -180° + (126,23° + 69,87° + 21,29°) = 37,39°$$

$$\theta_1 = -180° + 217,39° = 37,39°$$

$\theta_1$ es la fase que debe aportar el compensador para que el punto $s_{1d}$ pertenezca al LR del sistema en LC y permita que se cumplan las especificaciones de desempeño transitorio

$$\theta_1 = tg^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}(s_{1d})}{z_{pd} - \mathrm{Re}(s_{1d})}\right] \Rightarrow \boxed{z_{pd} = \mathrm{Re}(s_{1d}) + \frac{\mathrm{Im}(s_{1d})}{tg(\theta_1)} \Rightarrow z_{pd} = 11,14\,\mathrm{rad/s}}$$

## Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

Para hacer cumplir las especificaciones de desempeño, debe calcularse el valor de la ganancia $K_d$ que permite cumplir las especificaciones de la condición de magnitud:

**La FTLA es:**

$$G_{la}(s) = \frac{1080K_d(s+z_{pd})}{s(s+6)(s+18)} \Rightarrow \left.\frac{1080K_d\left|s+z_{pd}\right|}{|s||s+6||s+18|}\right|_{s=s_1} = 1$$

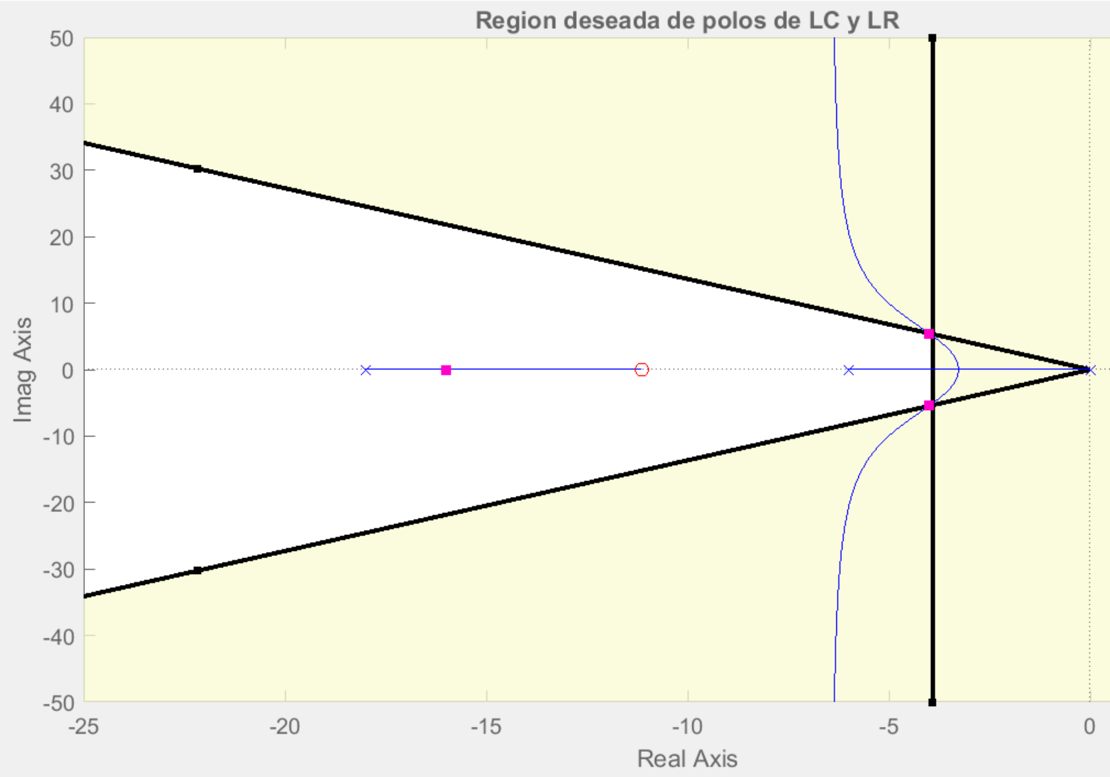
$$\boxed{K_d = \frac{\sqrt{5,458^2+4^2}\sqrt{5,458^2+(6-4)^2}\sqrt{5,458^2+(18-4)^2}}{1080\sqrt{5,458^2+(11,14-4)^2}} = 0,0609}$$

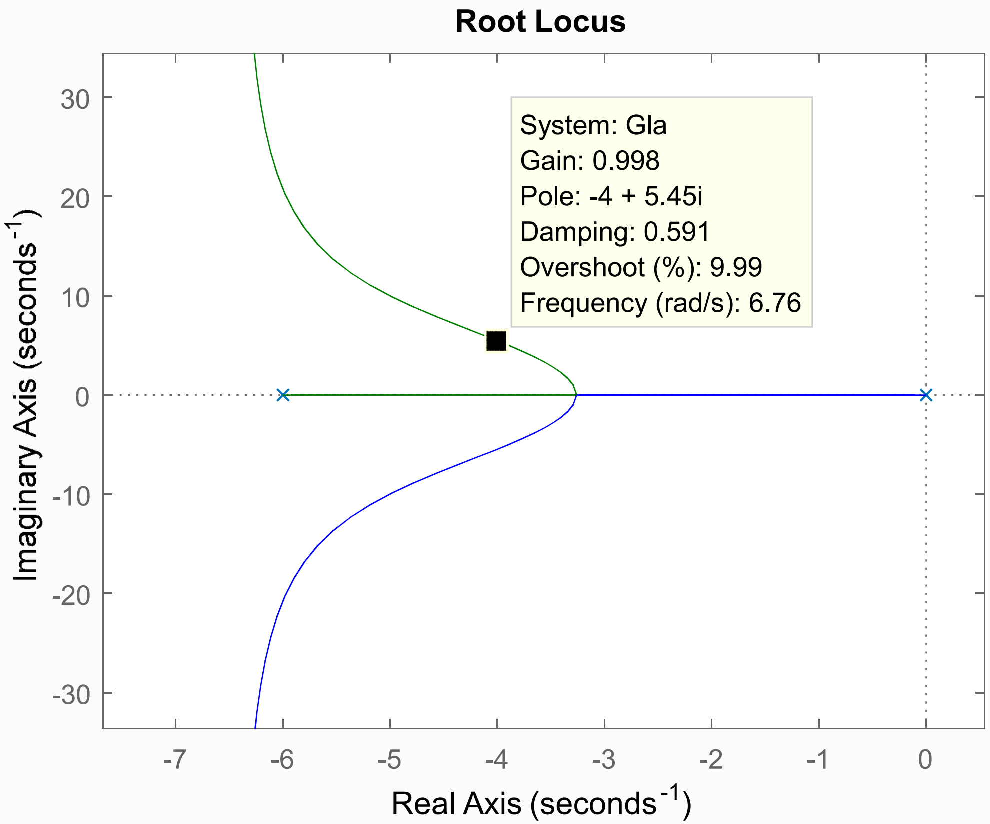
Compensador Resultante: $\boxed{G_c(s) = 0,0609(s+11,14)}$

$$T_d = \frac{1}{z_{pd}} = 0,09\text{seg} \qquad K_p = K_d / T_d = 0,678 \qquad \boxed{G_c(s) = 0,678 + s\,0,0609}$$

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

## Lugar de las Raíces y Región Deseada de polos de LC con Compensador PD



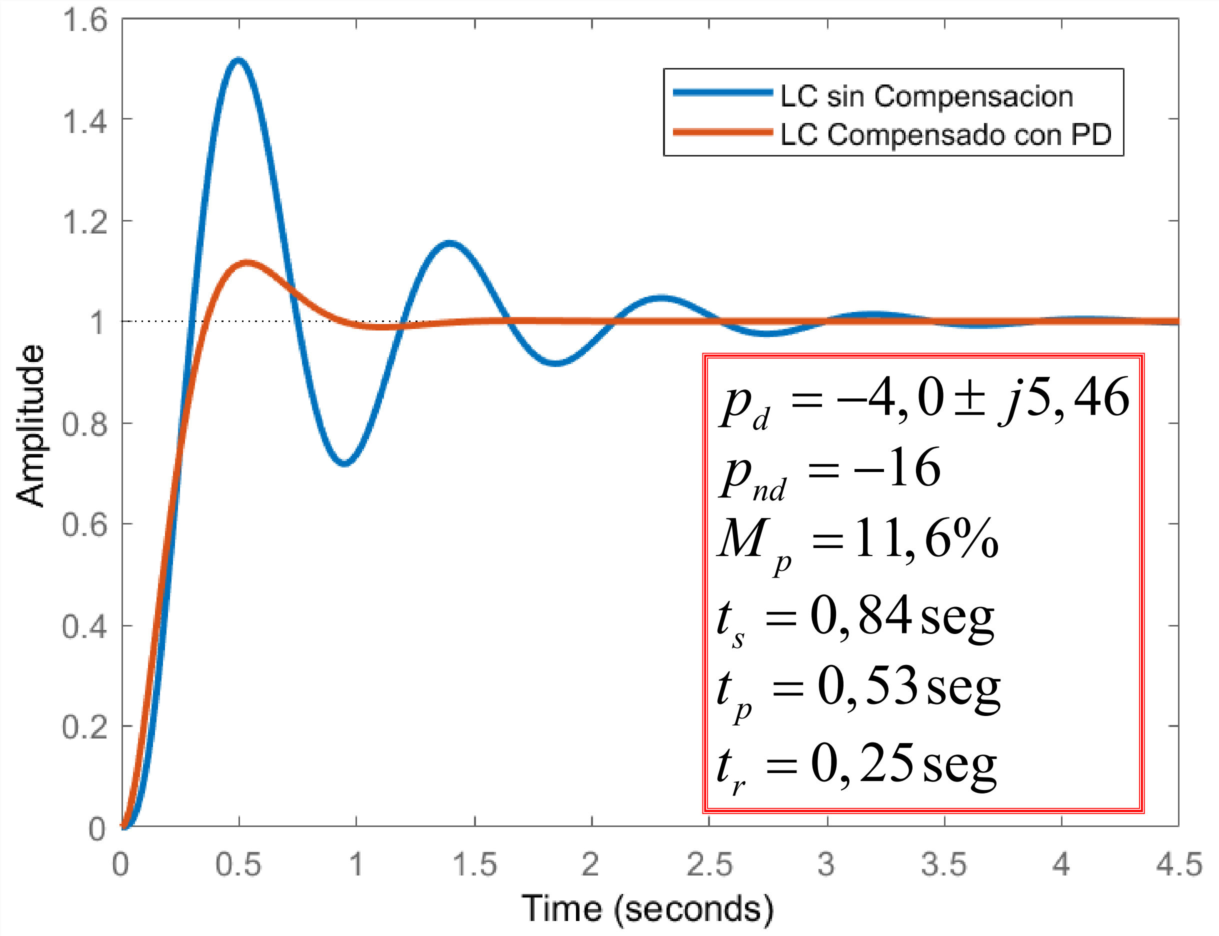




**El punto deseado pertenece al LGR del sistema compensado dado que cumple con la condición de fase y por la tanto permite que se cumplan las especificaciones de desempeño.**

## Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

### Respuesta al Escalón Unitario con Compensador PD

$$G_{lc}(s) = \frac{65,77(s+11,14)}{(s+16)(s^2+8s+45,8)}$$




$p_d = -4,0 \pm j5,46$

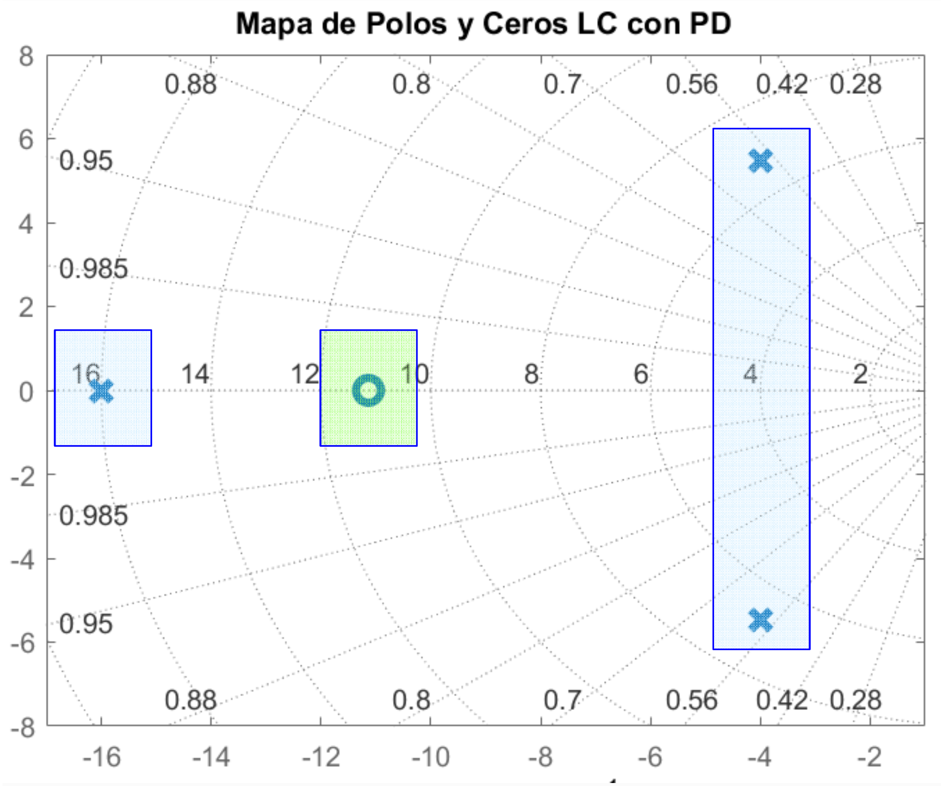
$p_{nd} = -16$

$M_p = 11,6\%$

$t_s = 0,84\,\text{seg}$

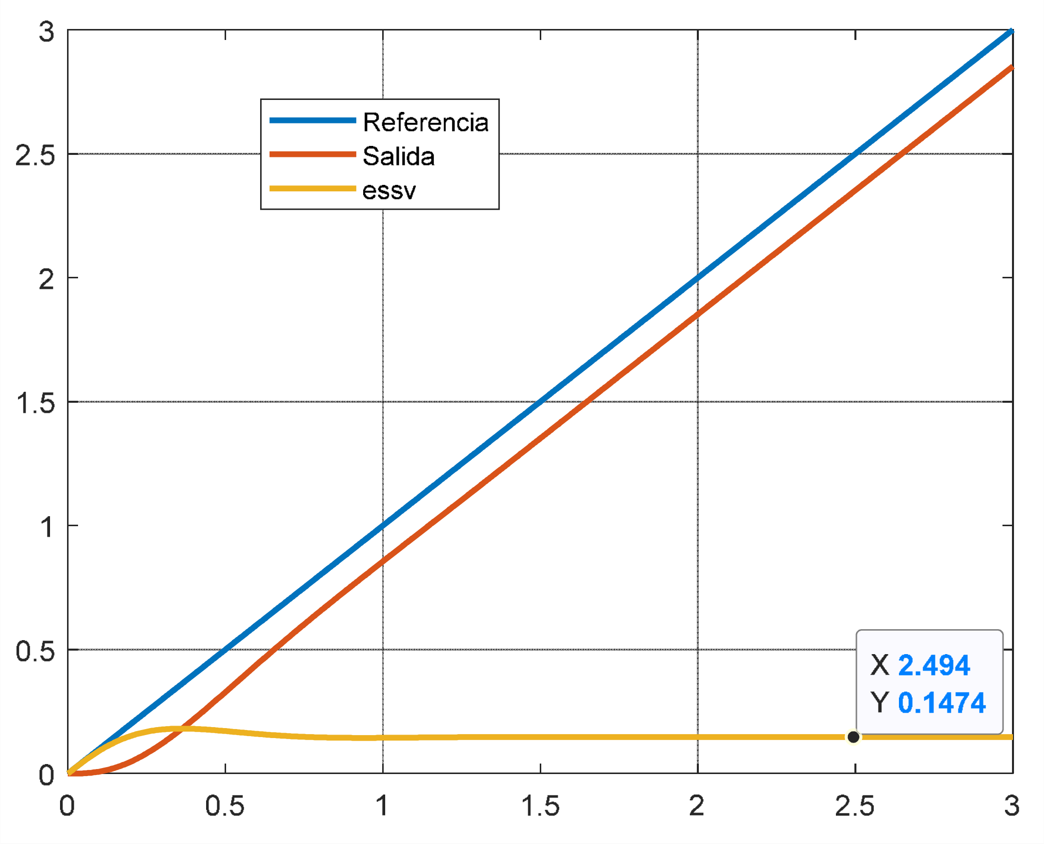
$t_p = 0,53\,\text{seg}$

$t_r = 0,25\,\text{seg}$



Podemos verificar ahora, cuanto es el error para una entrada en rampa y comparar con el proporcional que era de $e_{ssv}$ = 20%

$$K_v = \frac{1}{e_{ssv}} = \lim_{s \to 0} s \frac{0,0609(s+11,14)1080}{s(s+6)(s+18)}$$




$$K_v = 6,78 \Rightarrow e_{ssv} \cong 15\%$$

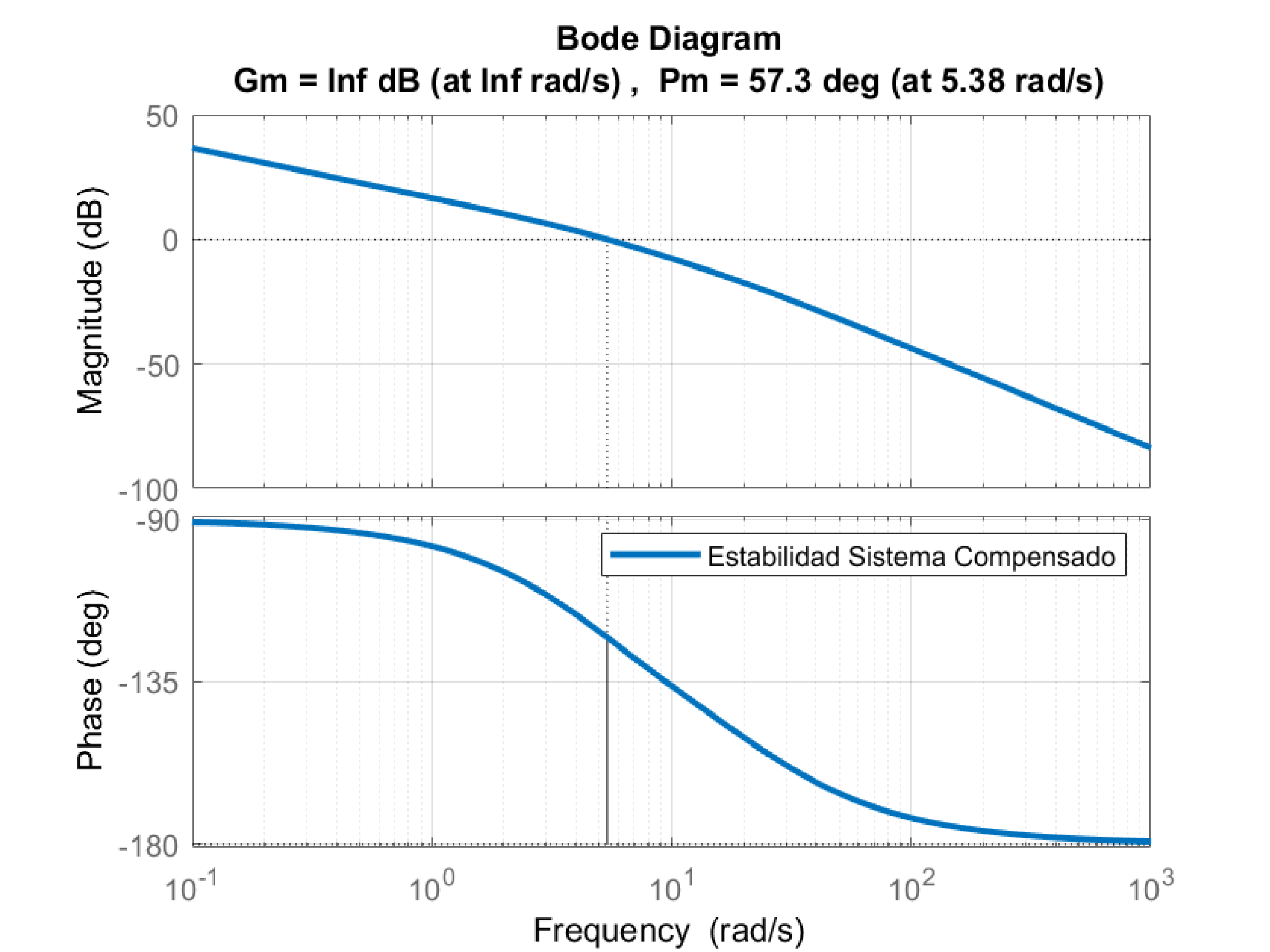
**Valor menor al especificado.**

**¿A que se debe?**

**Aumento de la ganancia del camino directo o de LA pero ahora la estabilidad no se deteriora.**

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

Mejora significativa de la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado



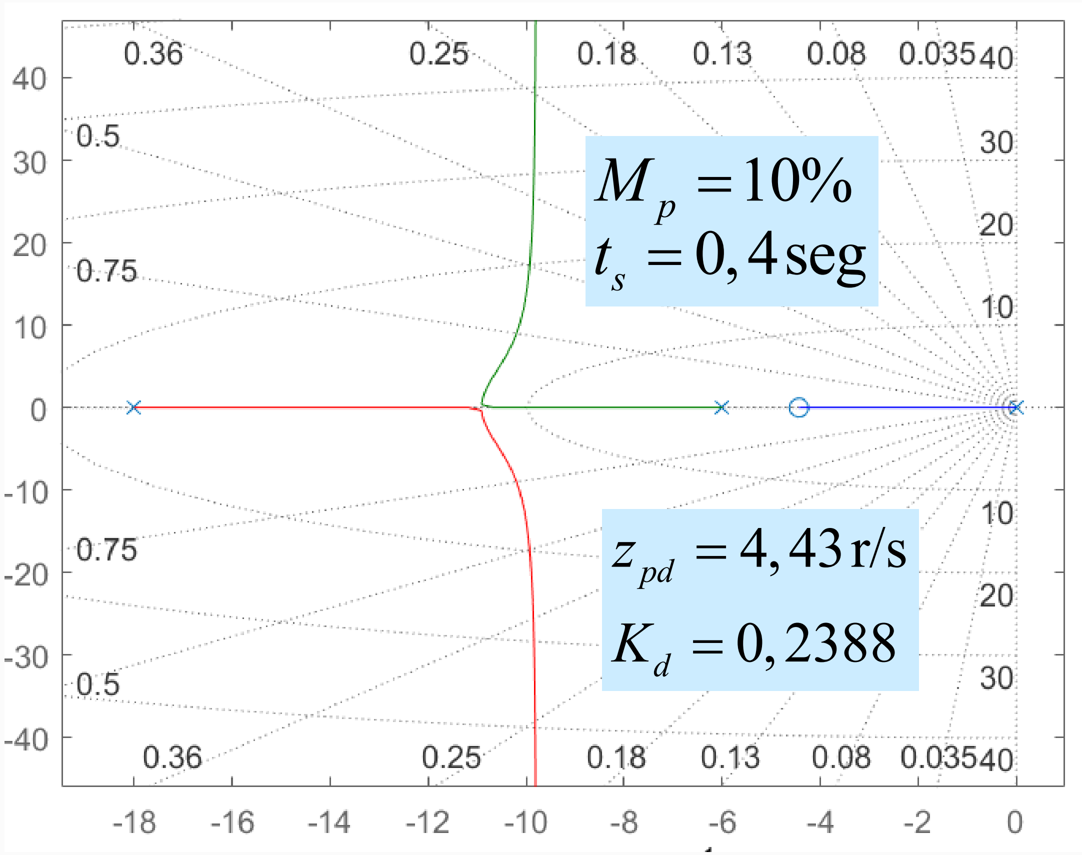

¿Qué es lo que hace posible esta mejora de la estabilidad de LC?

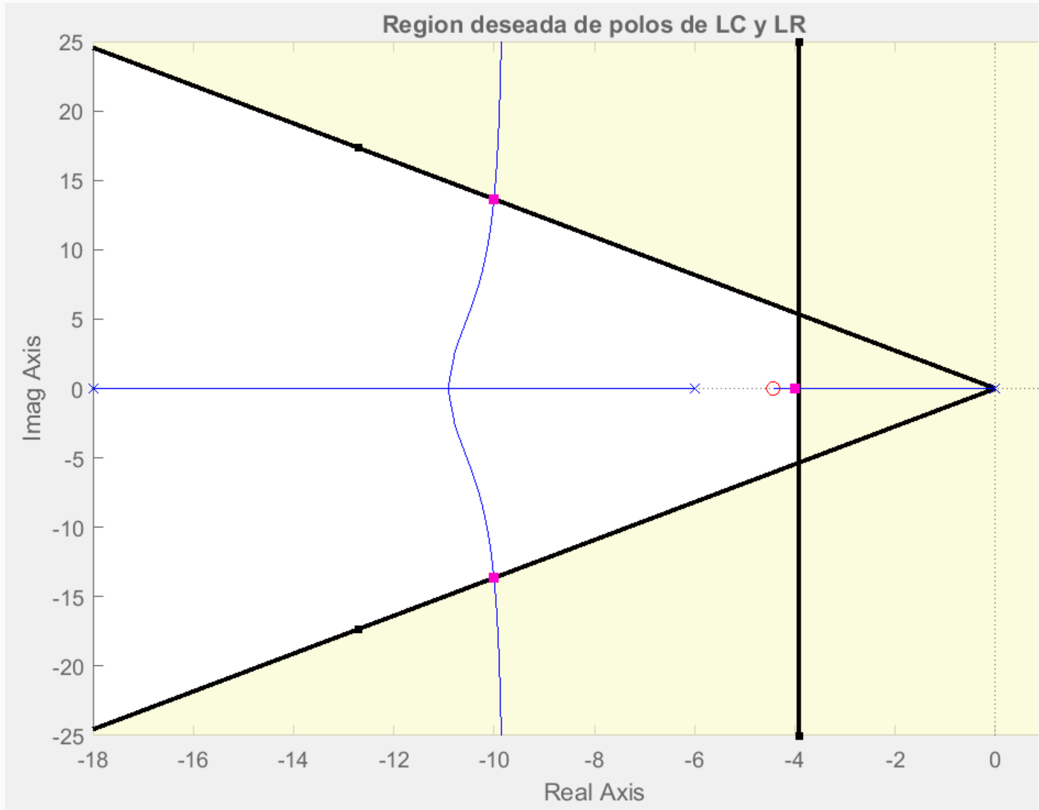
La presencia del cero del compensador PD.

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional-Derivativo: Sistema de Tipo 1

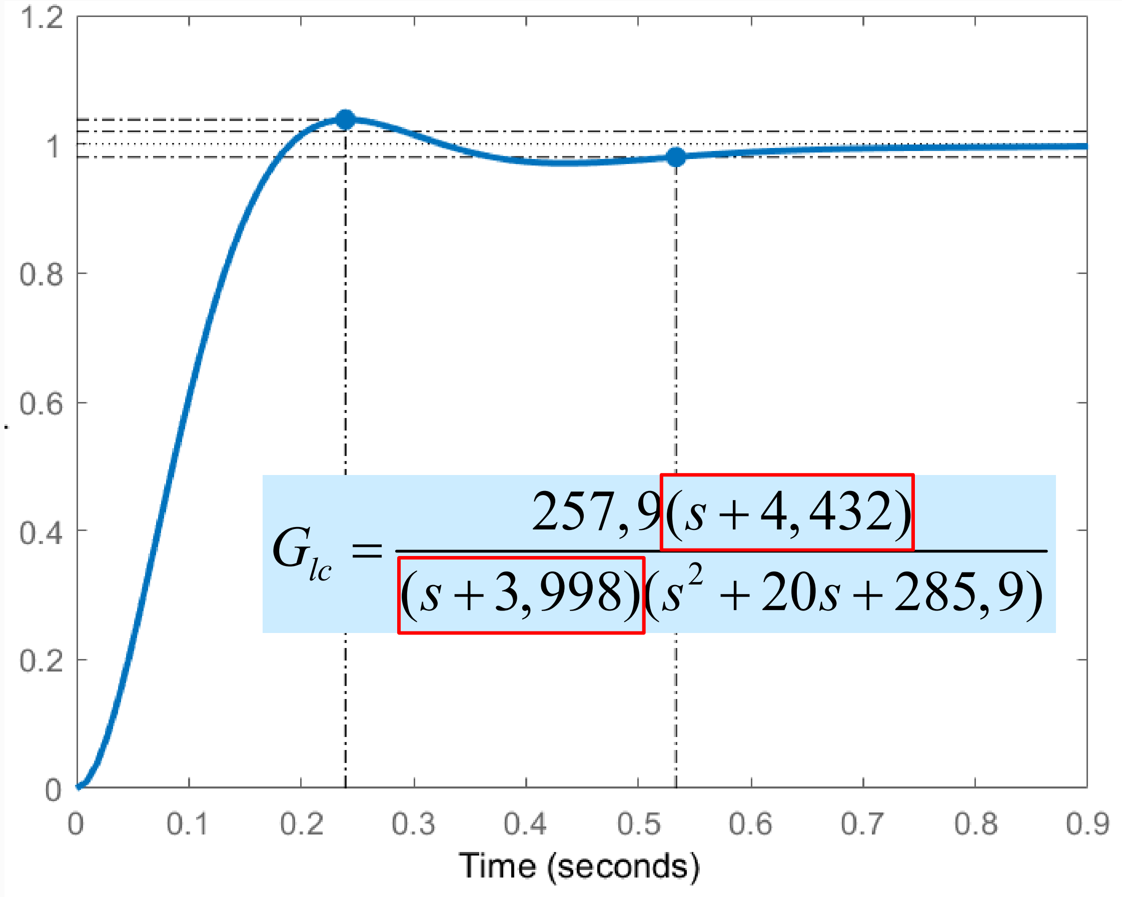
Especificaciones: Mismo Sobrepaso pero menor tiempo de asentamiento



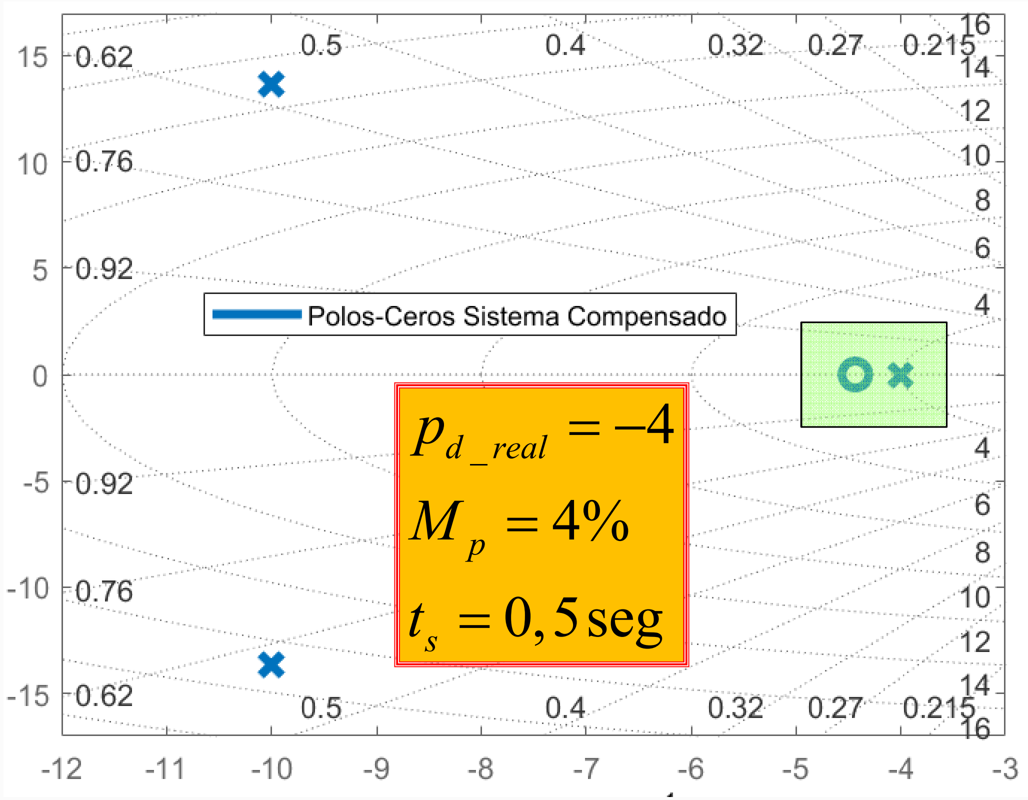



# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

Los polos dominantes en -10 ± *j*13,6 y -4. Cero en -4,43




$$G_{lc} = \frac{257,9\boxed{(s+4,432)}}{\boxed{(s+3,998)}(s^2+20s+285,9)}$$



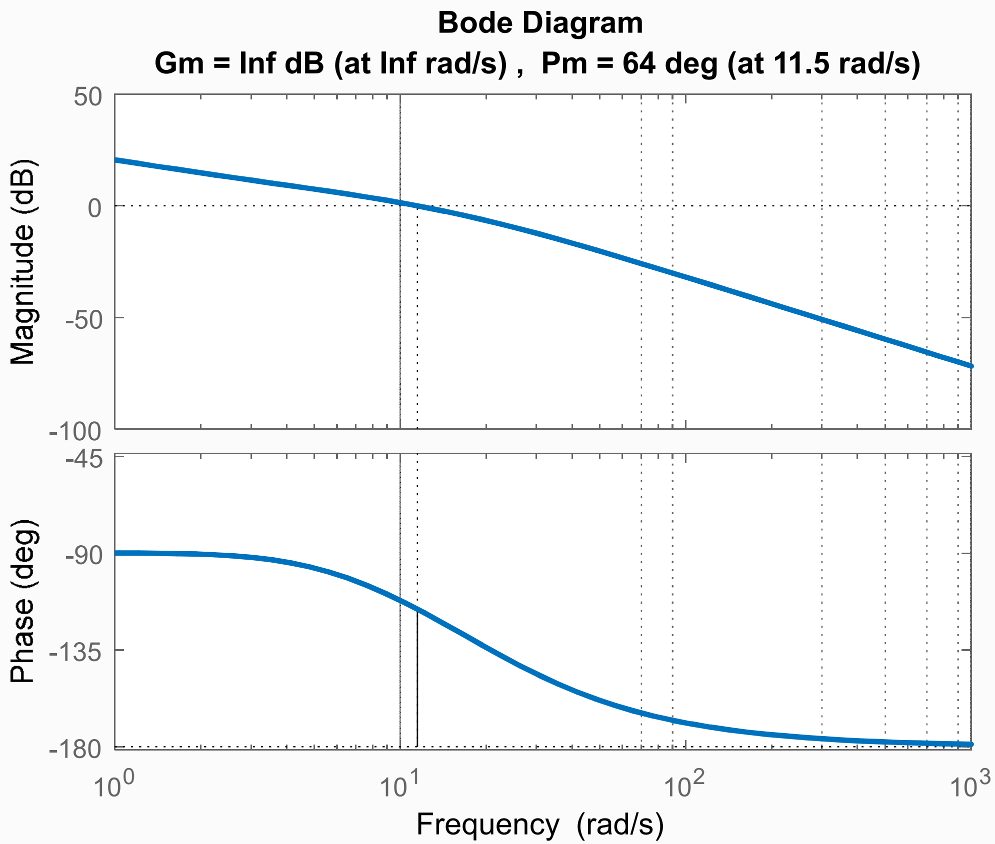

$$p_{d\_real} = -4$$

$$M_p = 4\%$$

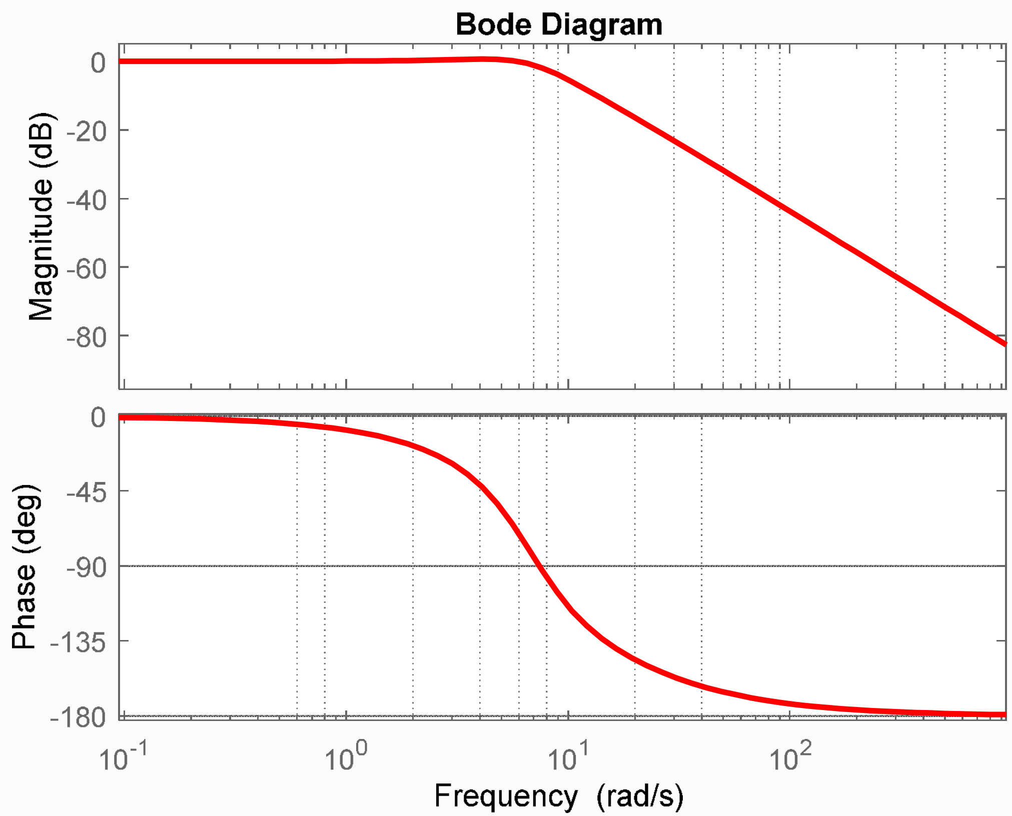
$$t_s = 0,5\,\text{seg}$$

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

Mejora adicional de la estabilidad del sistema en lazo cerrado respecto al caso anterior



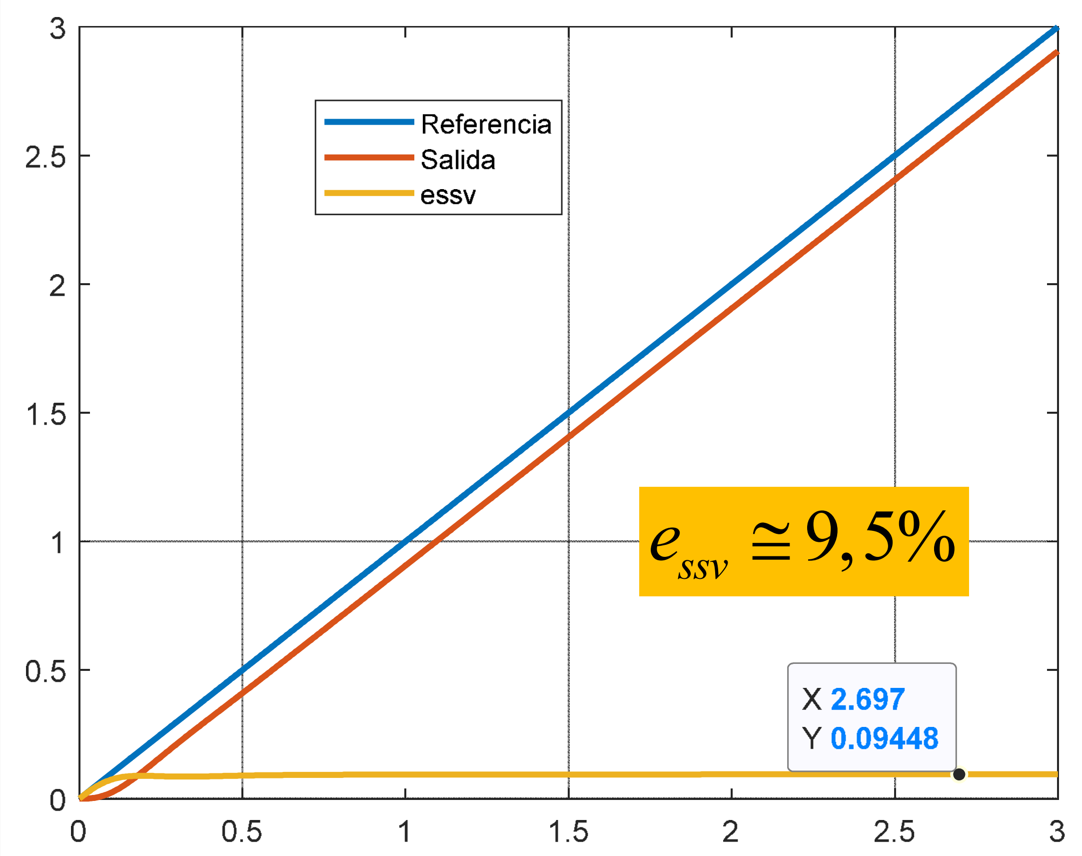

Respuesta en Frecuencia a LA




Respuesta en Frecuencia a LC

# Diseño de Compensadores PD con Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional-Derivativo: Sistema de Tipo 1



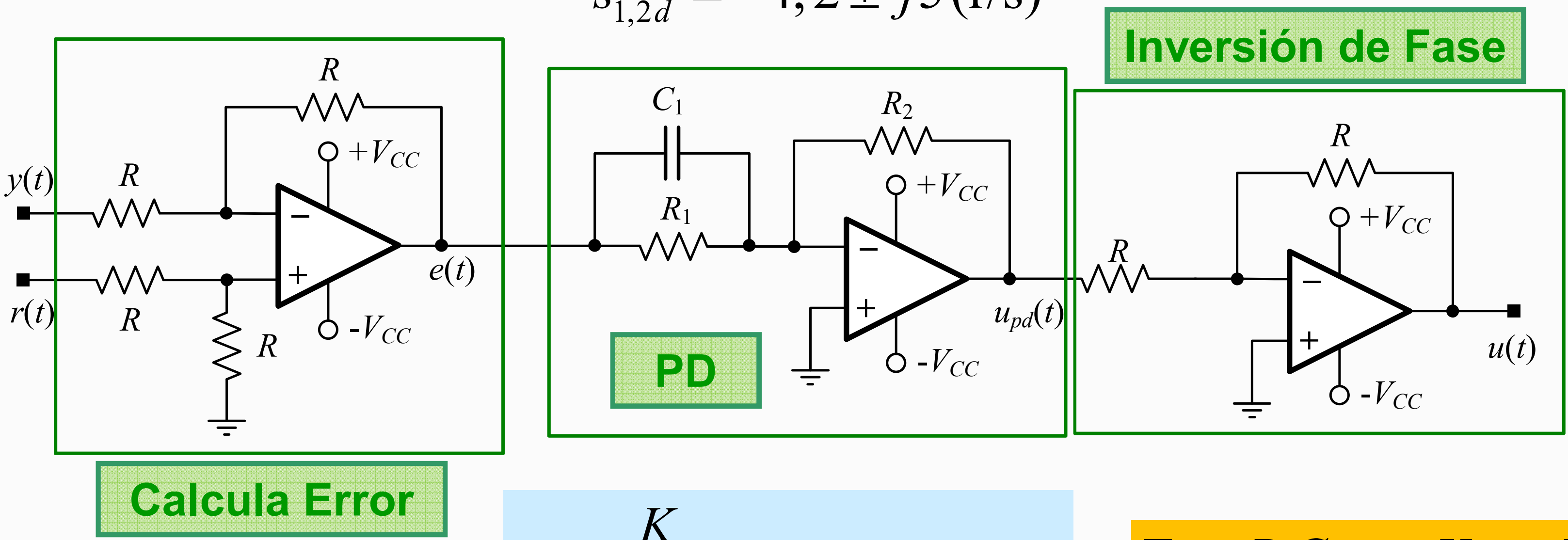

**El error para entrada en rampa se reduce de forma importante.**

**En este caso, se observa que este error de velocidad, está por debajo del 10%, que era el valor que presenta el sistema en LC sin ninguna compensación.**

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PD:

Usamos el diseño que contempla los polos deseados dentro de la región deseada.

$$s_{1,2d} = -4,2 \pm j5\,(\text{r/s})$$




El diseño resulta:

$$K_d = 0,0608$$
$$z_{pd} = 10,128\,\text{r/s}$$

$$T_d = \frac{1}{z_{pd}} = 0,0987\,\text{s}$$

$$z_{pd} = \frac{K_p}{K_d} \Rightarrow K_p = 0,6159$$

$$T_d = R_1 C_1 \;\; y \;\; K_p = R_2 / R_1$$

$$\text{Con } R_1 = 10\text{k}\Omega \rightarrow R_2 = 6159,1\Omega$$

$$C_1 = T_d / R_1 = 9,87\,\mu\text{F} \cong 10\,\mu\text{F}$$

10 μF es muy grande, imponemos entonces 1 μF

$$R_1 = T_d / C_1 = 98740\,\Omega \cong 100\,\text{k}\Omega$$

$$R_2 = K_p R_1 = 61591\Omega$$

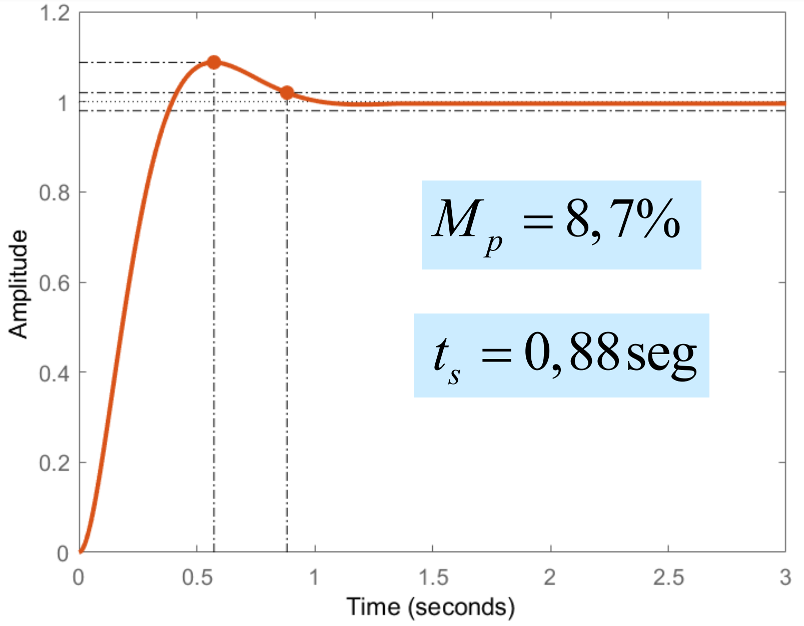
Adopto: $R_2 = 68\,\text{k}\Omega$

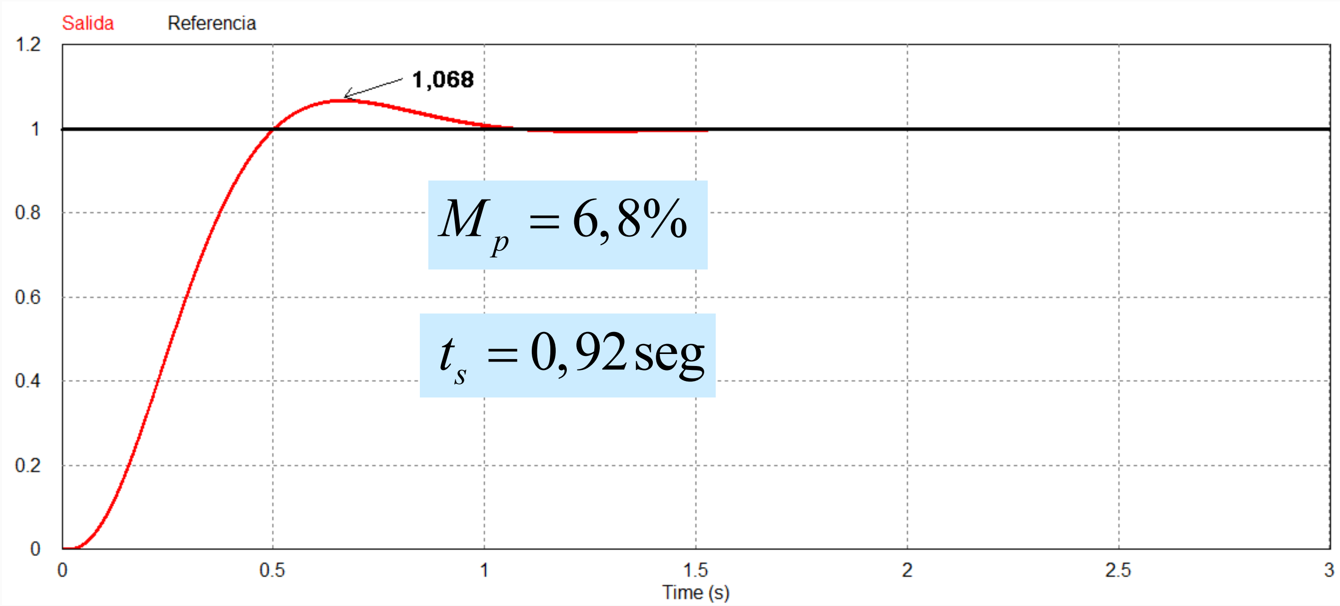
Luego de simulado: $M_p = 6,8\%$ y $t_s = 0,9\,\text{seg}$

## Resultados de Simulación del PD: $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 68\,\mathrm{k\Omega}$ $C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}$

Luego de simulado con los valores adoptados, las características de la respuesta resultan mejores a la simulación de Matlab, en cuanto al sobrepaso que es menor y el tiempo de asentamiento, aunque levemente mayor, se mantiene por debajo del especificado.

En este caso, la acción de control no está representada, no obstante la misma resulta limitada al inicio, dado que supera la tensión de alimentación de los amplificadores operacionales.

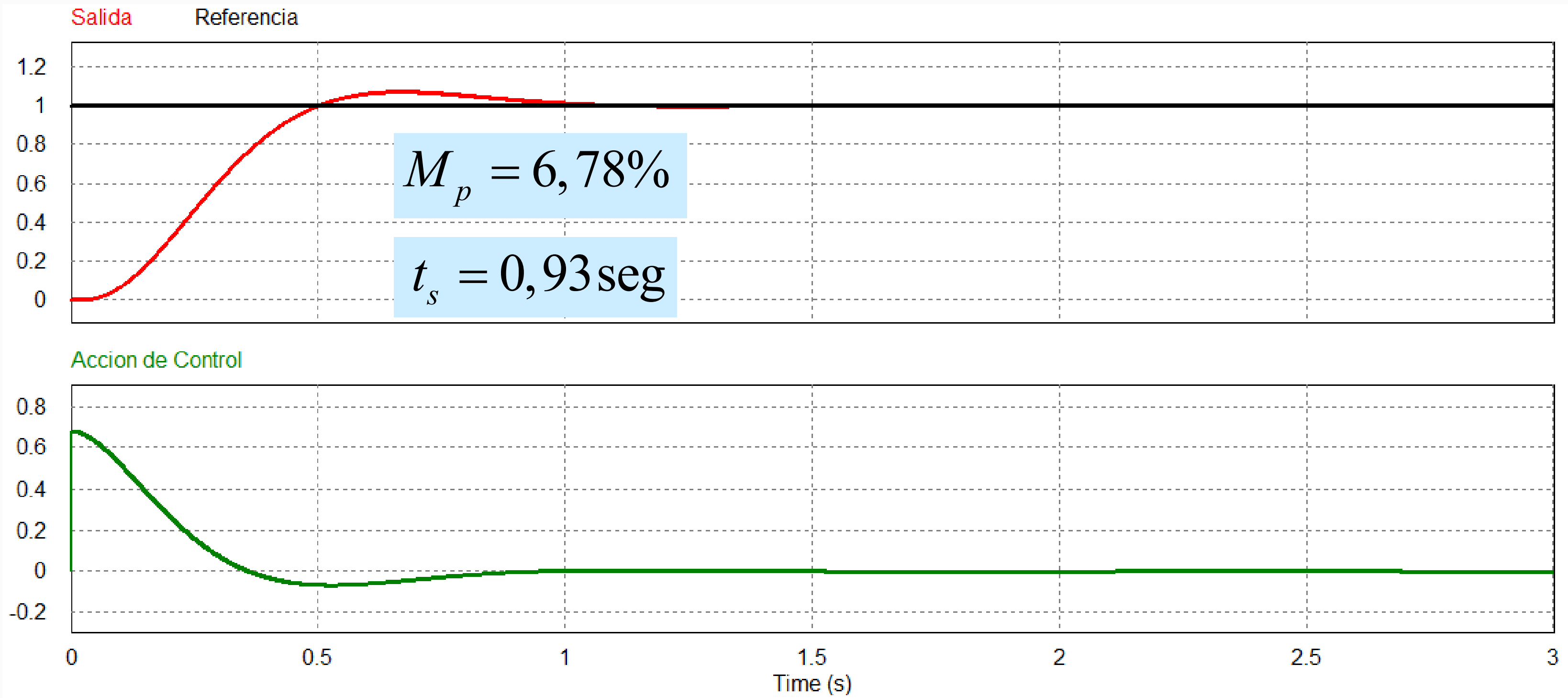



**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_01_PD.m y lugar_raices_ejemplo_01_PD_1AMPOP.psimsch**

**Simulación del P-D:** Para $K_p$: $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$ y $R_2 = 68\,\mathrm{k\Omega}$ Para $T_d$: $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$ y $C = 1\,\mu\mathrm{F}$

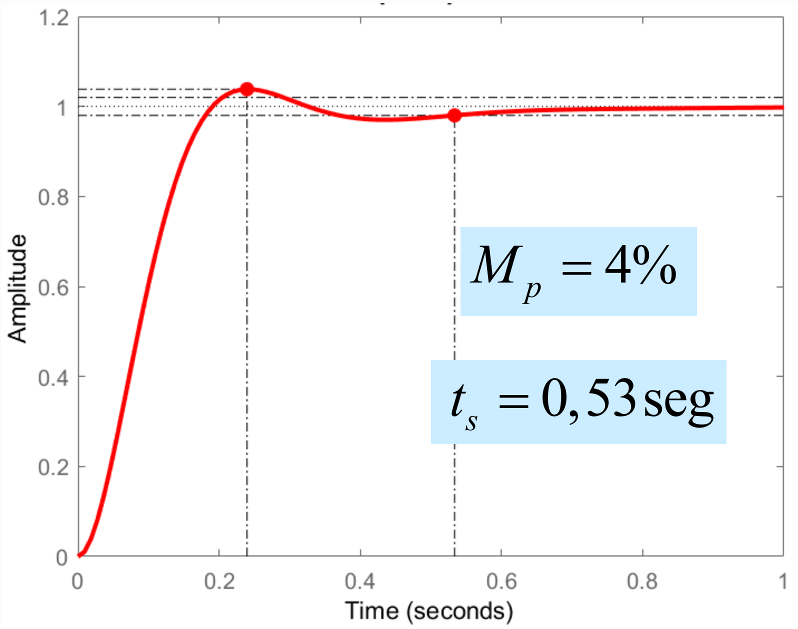
Acá se presenta la implementación con la acción derivativa a partir de la señal de salida. Se observa que el sobrepaso y el tiempo de asentamiento son los mismos que en el caso anterior, pero en este caso, la acción de control no resulta limitada y el valor máximo, en la aplicación del escalón, es menor a 1 V.

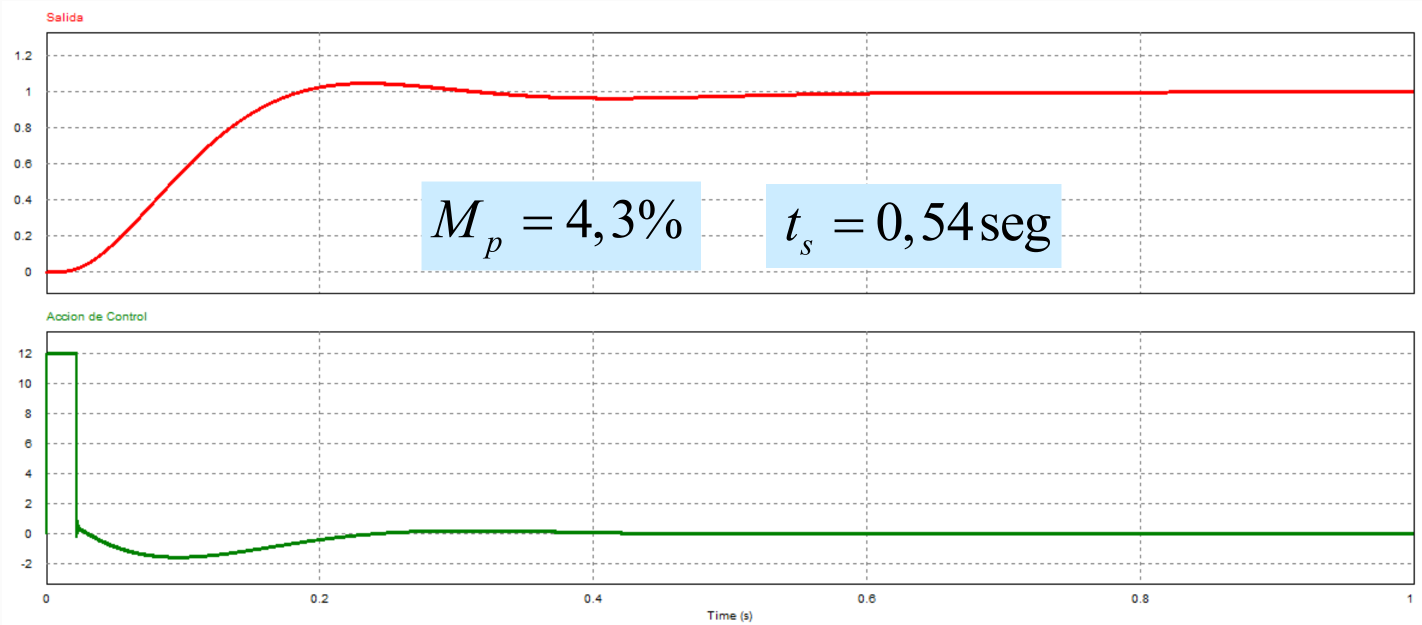



**Para esta simulación, ver archivo: lugar_raices_ejemplo_01_P-D.psimsch**

## Resultados de Simulación del PD con cero en -4,4 r/s: $R_1 = 220\,\text{k}\Omega$ $R_2 = 270\,\text{k}\Omega$ $C_1 = 1\,\mu\text{F}$

Luego de simulado con los valores adoptados, las características de la respuesta resultan iguales a la simulación de Matlab. En este caso, la acción de control resulta limitada al inicio, dado que supera la tensión de alimentación de los amplificadores operacionales, no obstante, los tiempos de respuesta del sistema a LC no se ven afectados.

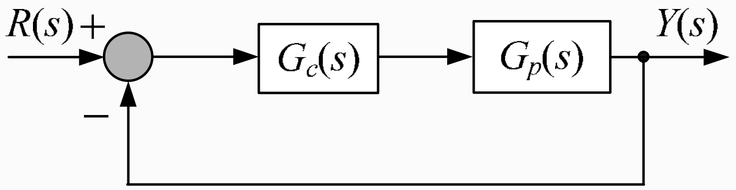



**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_01_PD.m y lugar_raices_ejemplo_02_PD_1AMPOP.psimsch**

# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional-Integral: Sistema de Tipo 0




$$G_p(s) = \frac{50}{(s+2)(s+3)}$$

Especificaciones de diseño:

A - Error nulo de régimen permanente para entrada constante;

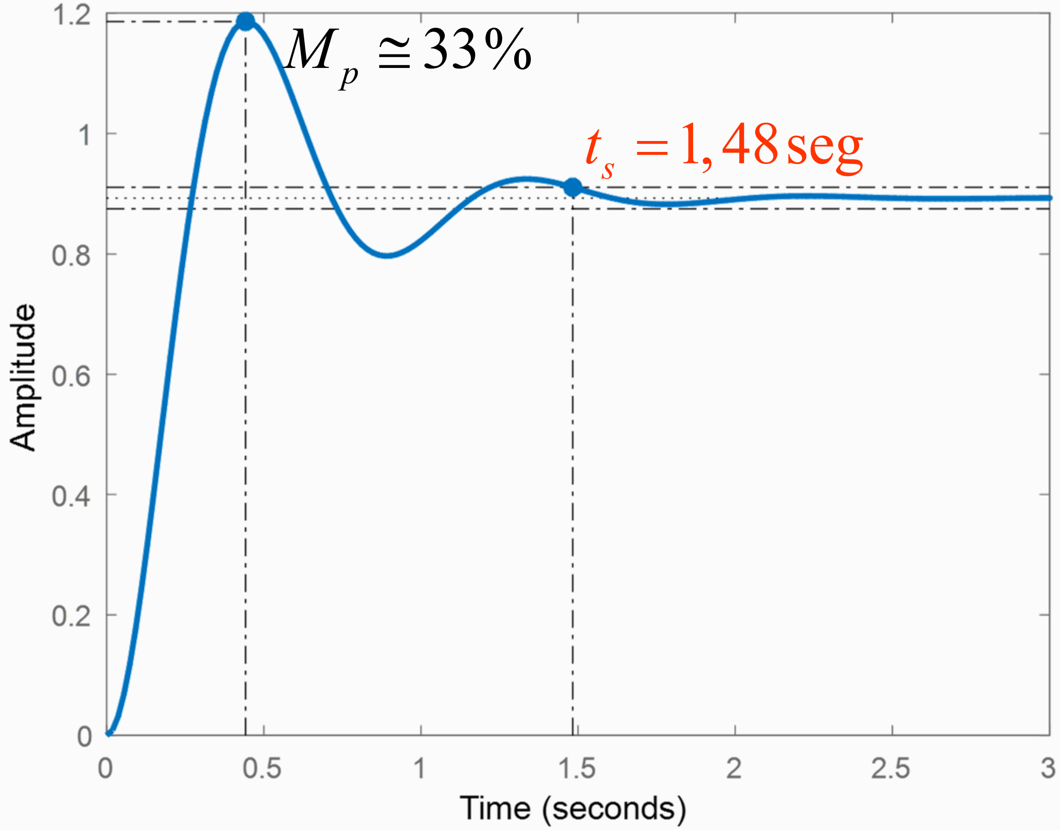
B - Error de régimen estacionario de velocidad igual a 20% para entrada rampa;

C - Máximo sobrepaso menor o igual a 5%;

D - Tiempo de asentamiento de aproximadamente 2 seg.

# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

con $G_c(s) = 1$ $\quad e_{ssp} = 10,7\%$




Las especificaciones requeridas para el sistema en LC que se desean cumplir son:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2\,\text{seg}$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi\sigma}{\omega_d}} = 5\%$$

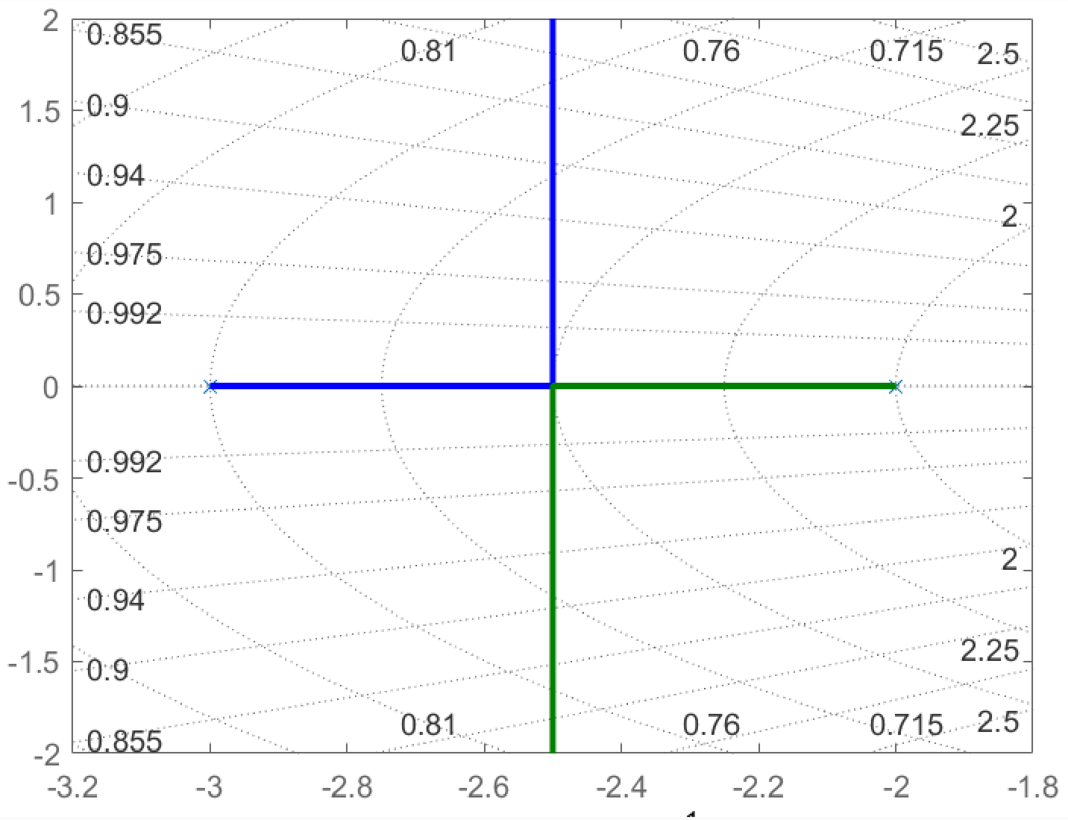
Se obtienen la parte real $\sigma$ y la parte imaginaria $\omega_d$ de las raíces dominantes

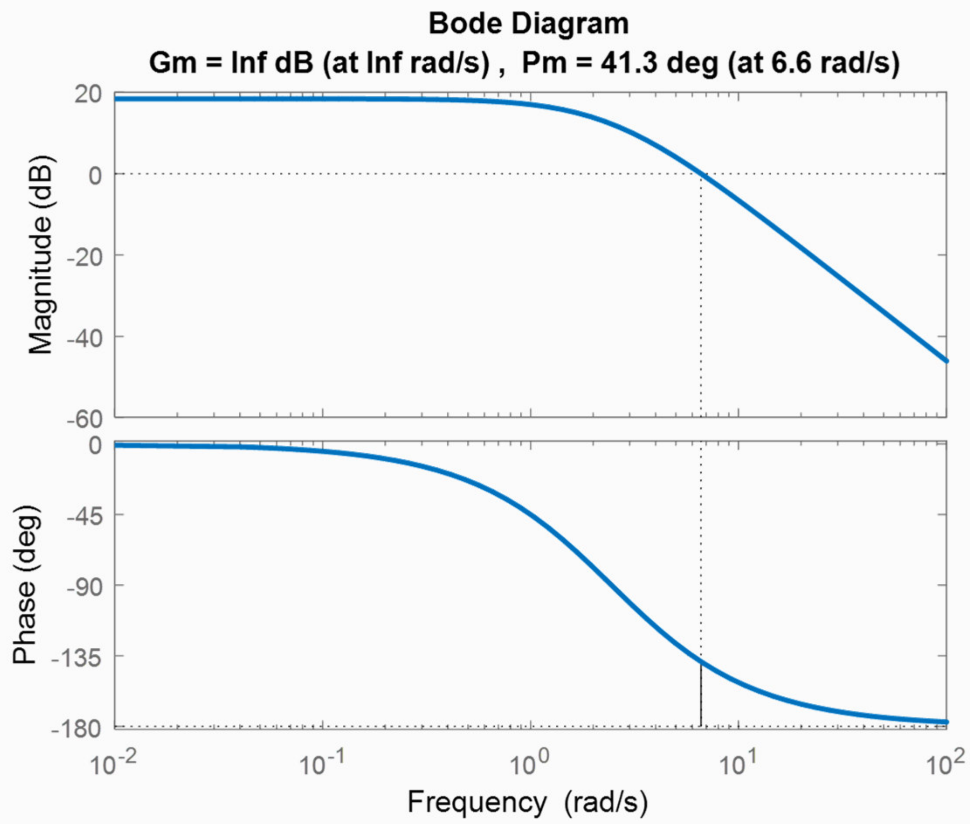
Además hay que agregar un polo al origen para que:

$$e_{ssp} = 0 \;\; y \;\; e_{ssv} \leq 20\%$$

# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

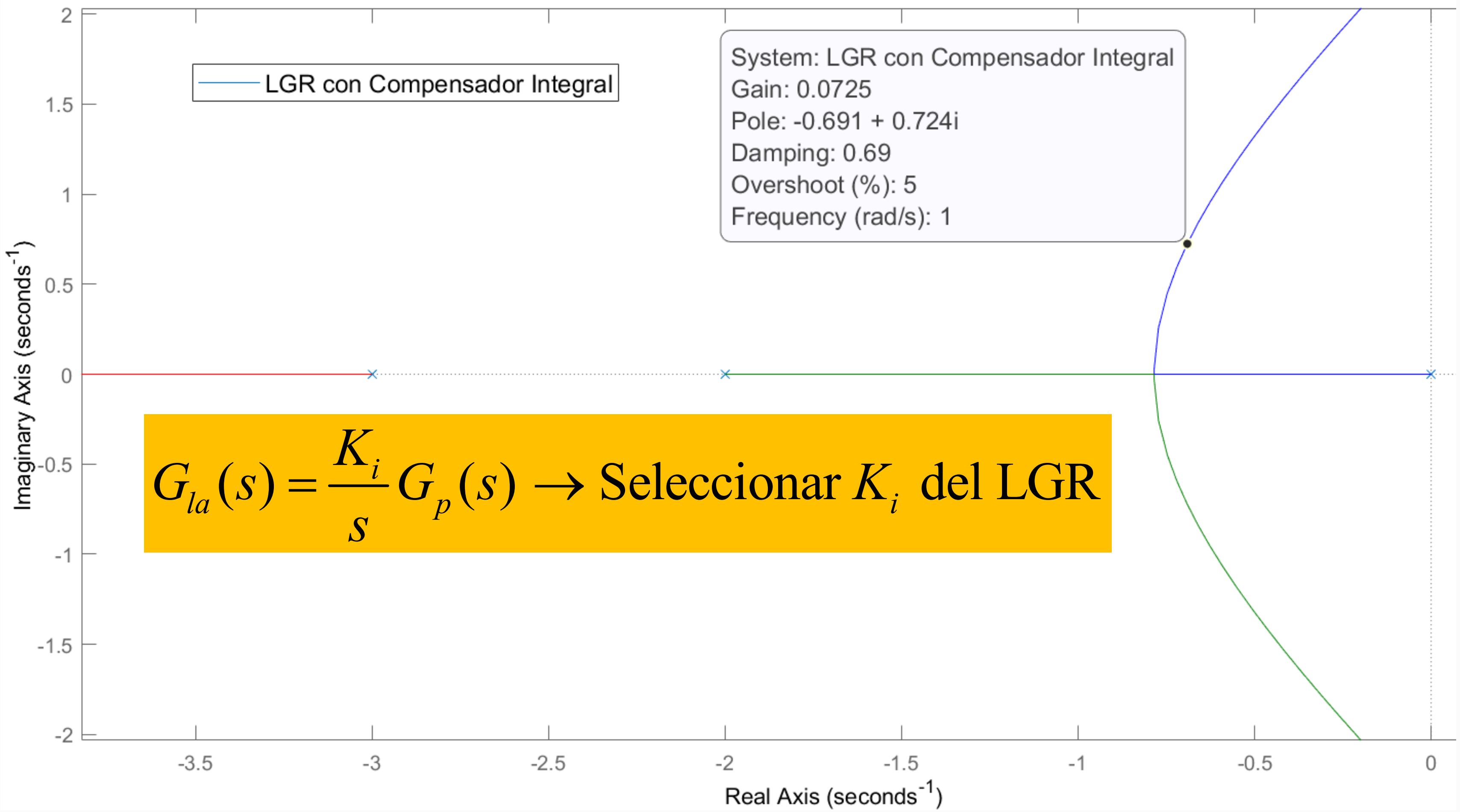
## Lugar de raíces y márgenes de estabilidad de la planta en LC sin compensación



## Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

Se introduce primero una acción integral y se traza el LGR con $G_{la}(s) = G_p(s)/s$

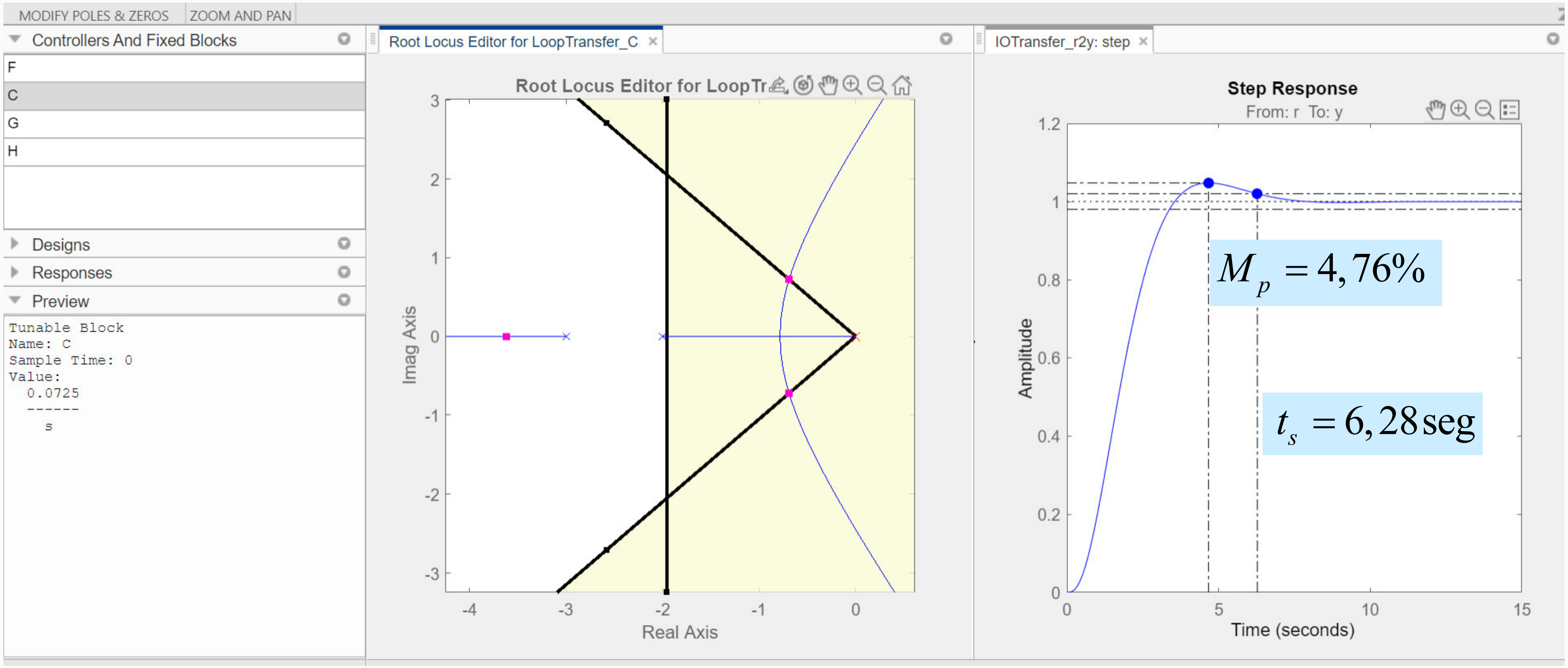



$$G_{la}(s) = \frac{K_i}{s} G_p(s) \rightarrow \text{Seleccionar } K_i \text{ del LGR}$$

## Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

$$G_c(s) = \frac{0,0725}{s}$$

**Se consigue cumplir con el sobrepaso pero no se podrá cumplir con el tiempo de asentamiento únicamente con una ganancia $K_i$.**



## Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

$$\boxed{G_c(s) = \frac{0,0725}{s}} \qquad G_{la}(s) = \frac{50K_i}{s(s+2)(s+3)} \qquad G_{lc}(s) = \frac{50K_i}{s(s+2)(s+3)+50K_i} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

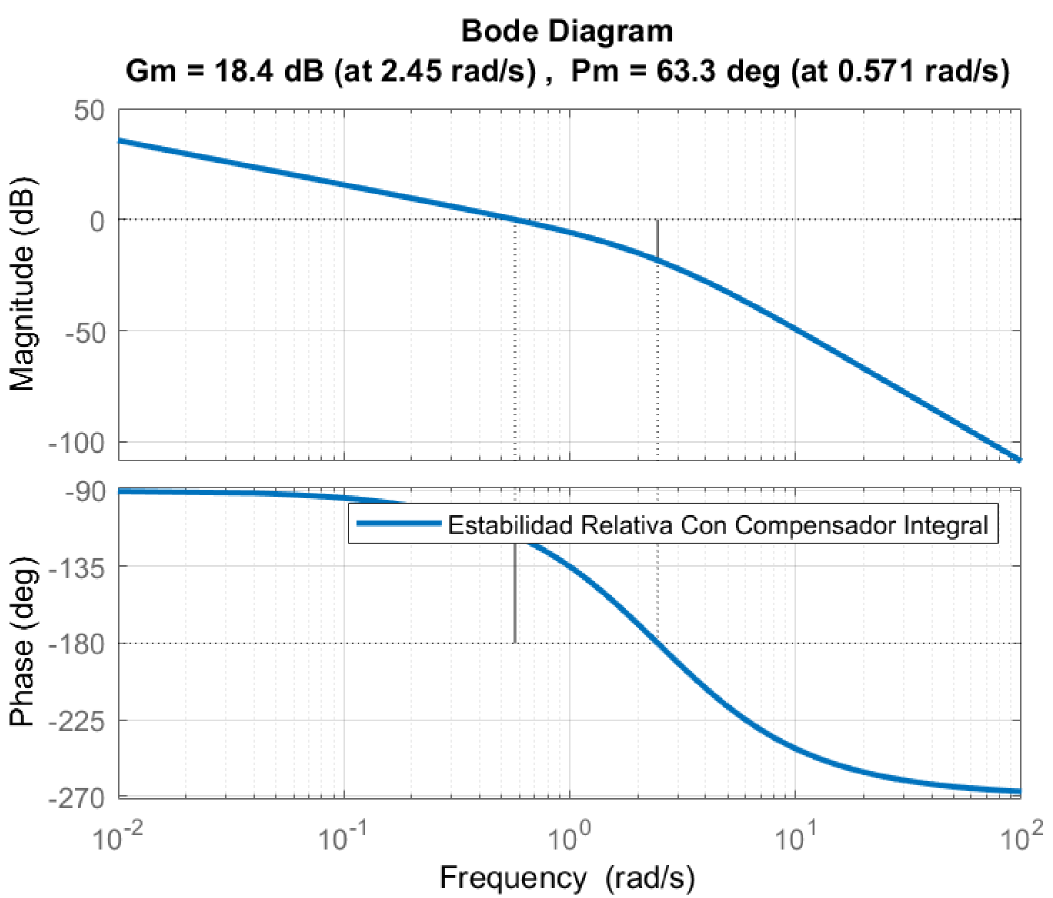
$$K_v = \frac{1}{e_{ssv}} = \lim_{s\to 0} sG_{la}(s) = \cancel{s}\,\frac{50\times 0,0725}{\cancel{s}(s+2)(s+3)} = 0,604$$

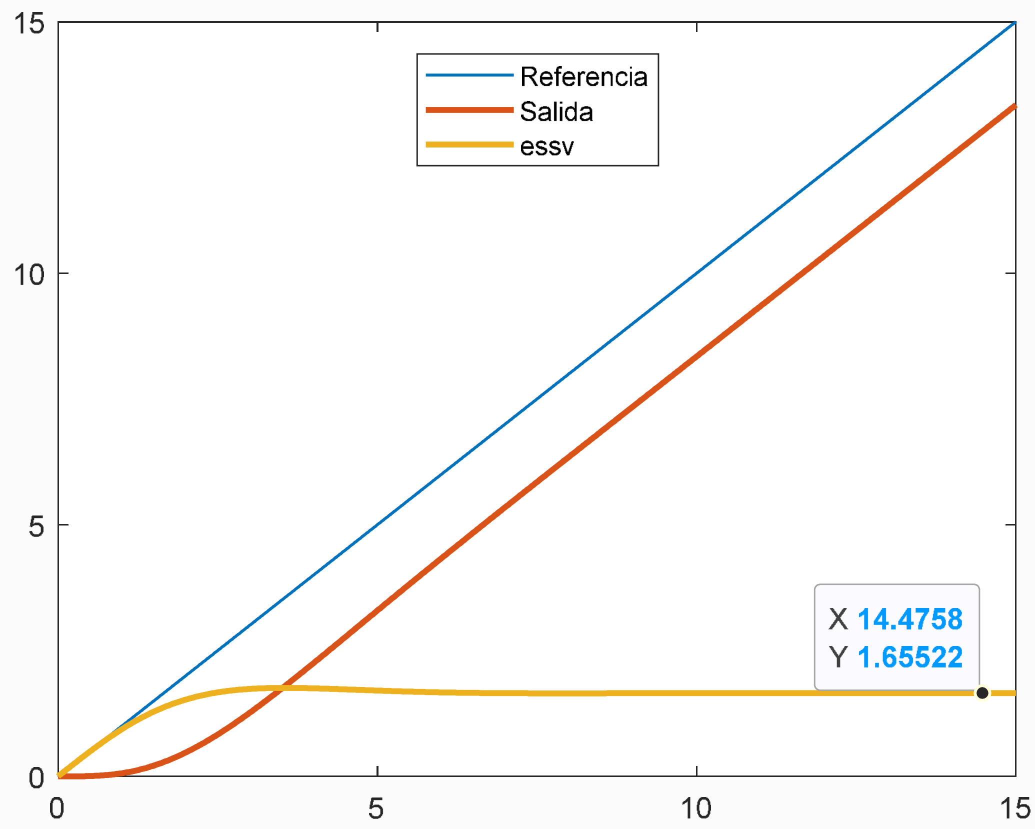
$$e_{ssv} = \frac{1}{0,604} = 1,655 \;\Rightarrow\; e_{ssv} = 165,5\,\%$$

# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

$$G_c(s) = \frac{0,0725}{s}$$

**Se consigue mejorar lógicamente la estabilidad relativa con un buen MF pero con un MG acotado debido al LGR resultante. El error de velocidad es excesivamente grande por falta de ganancia.**

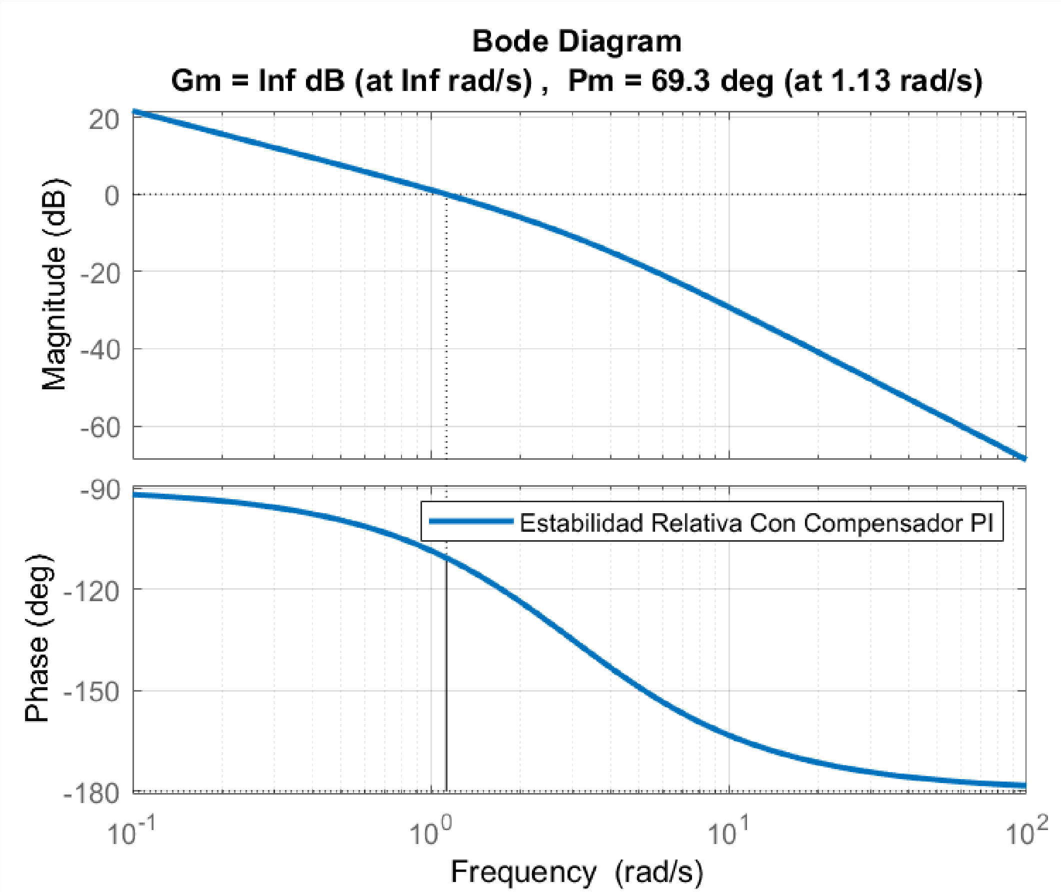


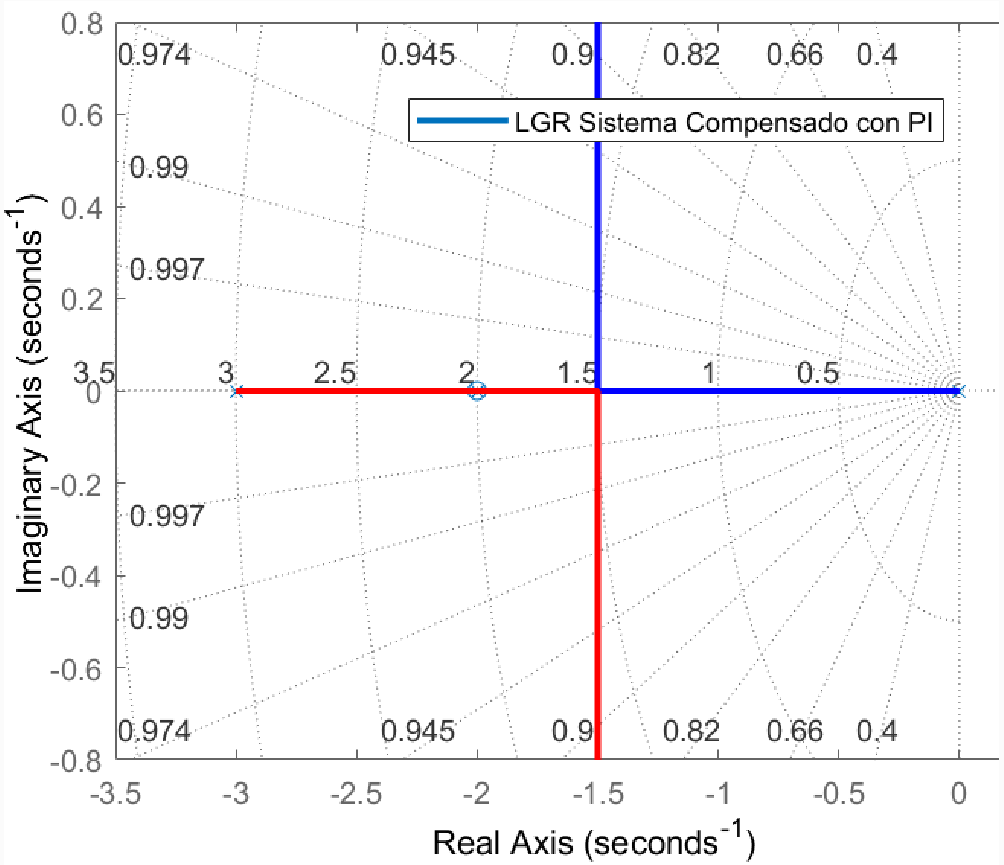



## Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

$$G_{cPI}(s) = 0{,}0725\frac{(s+2)}{s}$$

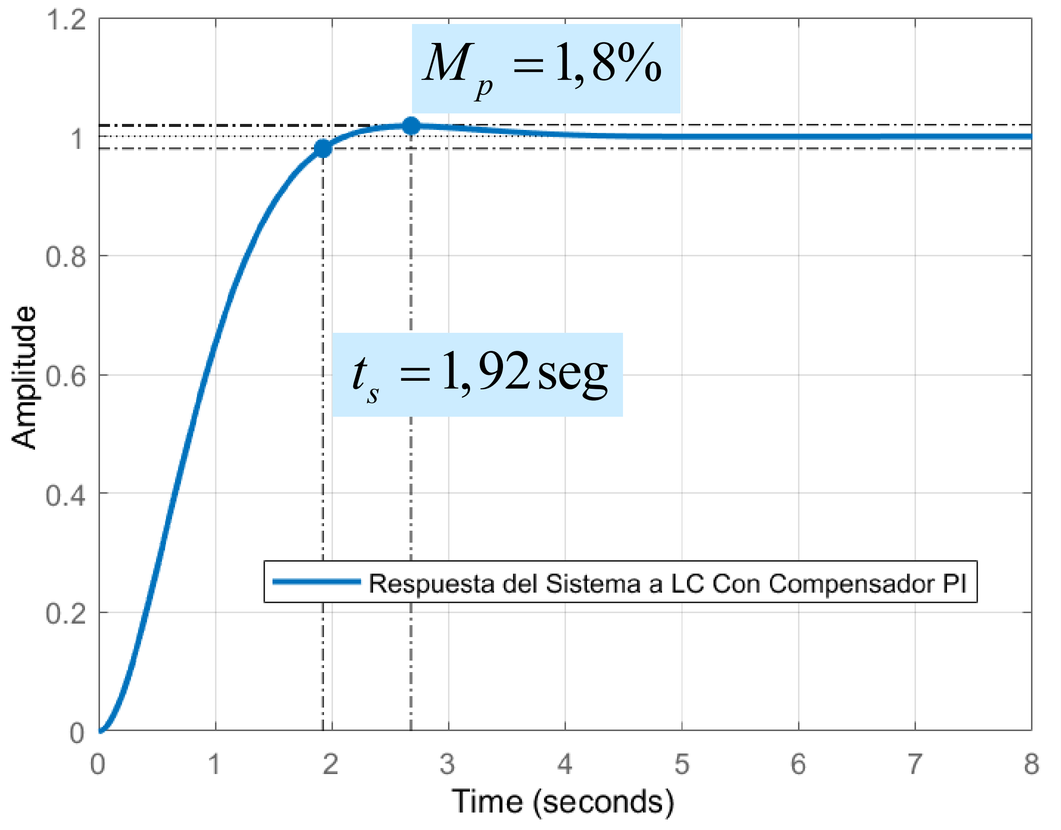
**Se consigue mejorar el MF y obtener un MG infinito debido al LGR resultante, el cual resulta igual al de la planta sin compensación.**

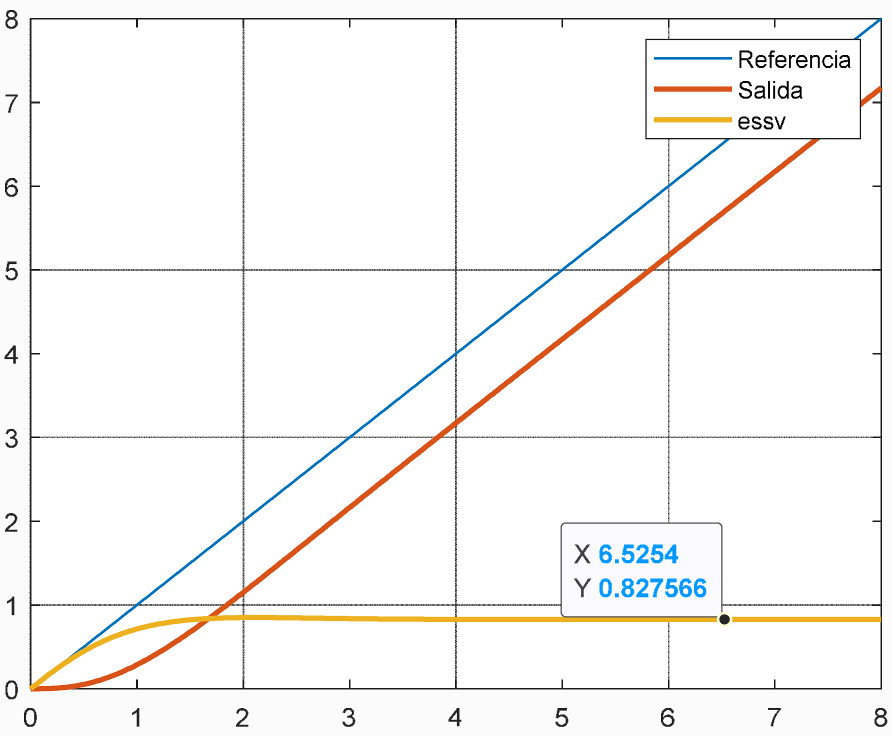


# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

Se introduce una acción PI cancelando el polo más dominante de la planta y manteniéndose igual la ganancia del compensador integral para no deteriora el $M_p$. Se consigue reducir aún más el sobrepaso y se cumple también con tiempo de asentamiento. Por otro lado, el $e_{ssv}$ continúa siendo elevado.



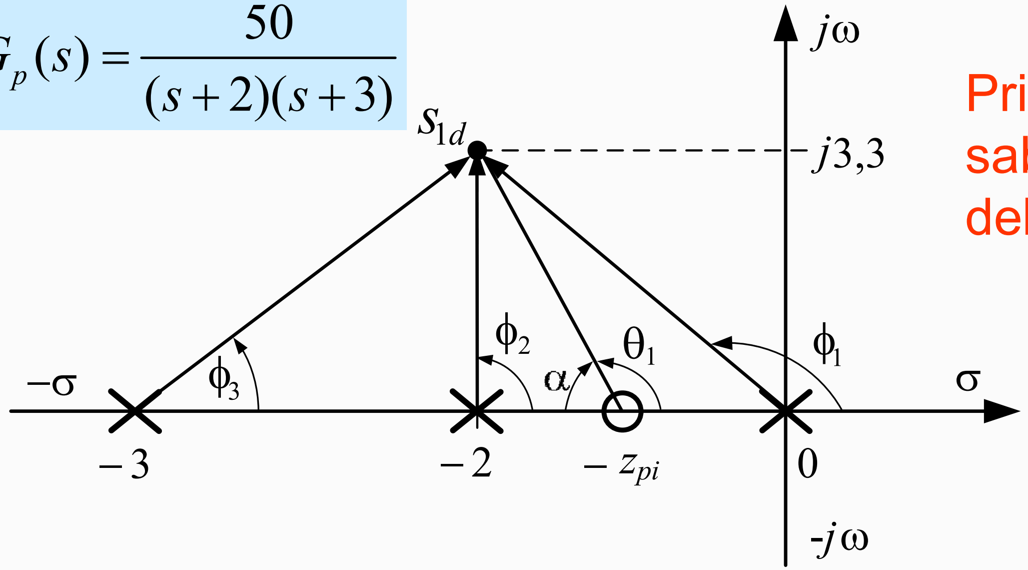



# Diseño de Compensadores Integrales y PI con Lugar de Raíces

Especificaciones transitorias $M_p \leq 15\%$ $t_s \leq 2\,\text{seg}$

$$G_{c\_PI}(s) = K_p \left( \frac{s + z_{pi}}{s} \right)$$

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+2)(s+3)}$$




Primero se aplica la condición de fase en $s_{1d}$ para saber si este punto pertenece al lugar de raíces del proceso en LC:

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \pm 180°$$

$$\text{Fase Total} = -180° - (121{,}13° + 90° + 73{,}2°) = 104{,}32°$$

$$\theta_1 = -180° + 284{,}32° = 104{,}32° \qquad \alpha = 180° - \theta_1$$

$\theta_1$ es la fase que debe aportar el compensador para que el punto $s_{1d}$ pertenezca al LGR del sistema en LC y permita que se cumplan las especificaciones de desempeño transitorio

$$\alpha = tg^{-1}\left[ \frac{\text{Im}(s_{1d})}{\text{Re}(s_{1d}) - z_{pi}} \right] \Rightarrow$$

$$z_{pi} = \text{Re}(s_{1d}) - \frac{\text{Im}(s_{1d})}{tg(\alpha)} \Rightarrow z_{pi} = 1{,}155\ \text{r/s}$$

## Diseño de Compensadores PI con Lugar de Raíces

Para hacer cumplir las especificaciones de desempeño, debe calcularse el valor de la ganancia $K_c$ que permite cumplir las especificaciones con la condición de magnitud:

**La FTLA es:**

$$G_{la}(s) = \frac{K_p 50(s+z_{pi})}{s(s+2)(s+3)} \Rightarrow \left. \frac{K_p 50\left|s+z_{pi}\right|}{|s||s+2||s+3|} \right|_{s=s_{1d}} = 1$$

$$\boxed{K_p = \frac{|s_{1d}||s_{1d}+2||s_{1d}+3|}{50\left|s_{1d}+z_{pi}\right|} = 0,2578}$$

Compensador PI Resultante:

$$\boxed{G_c(s) = 0,2578\frac{(s+1,155)}{s}}$$

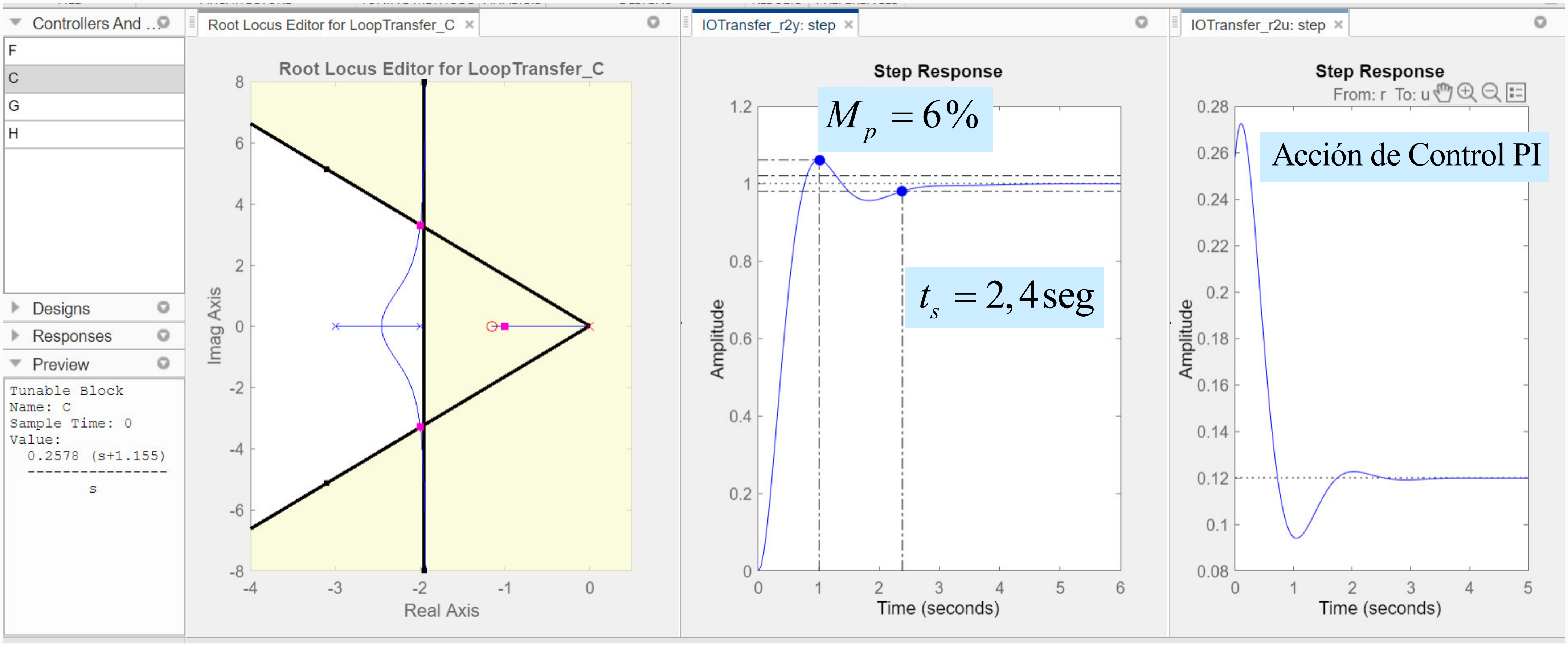
$$T_i = \frac{1}{z_{pi}} = 0,8657\,\text{seg}$$

$$K_i = K_p z_{pi} \cong 0,2978$$

$$\boxed{G_c(s) = 0,2578 + \frac{0,2978}{s}}$$

## Diseño de Compensadores PI con Lugar de Raíces

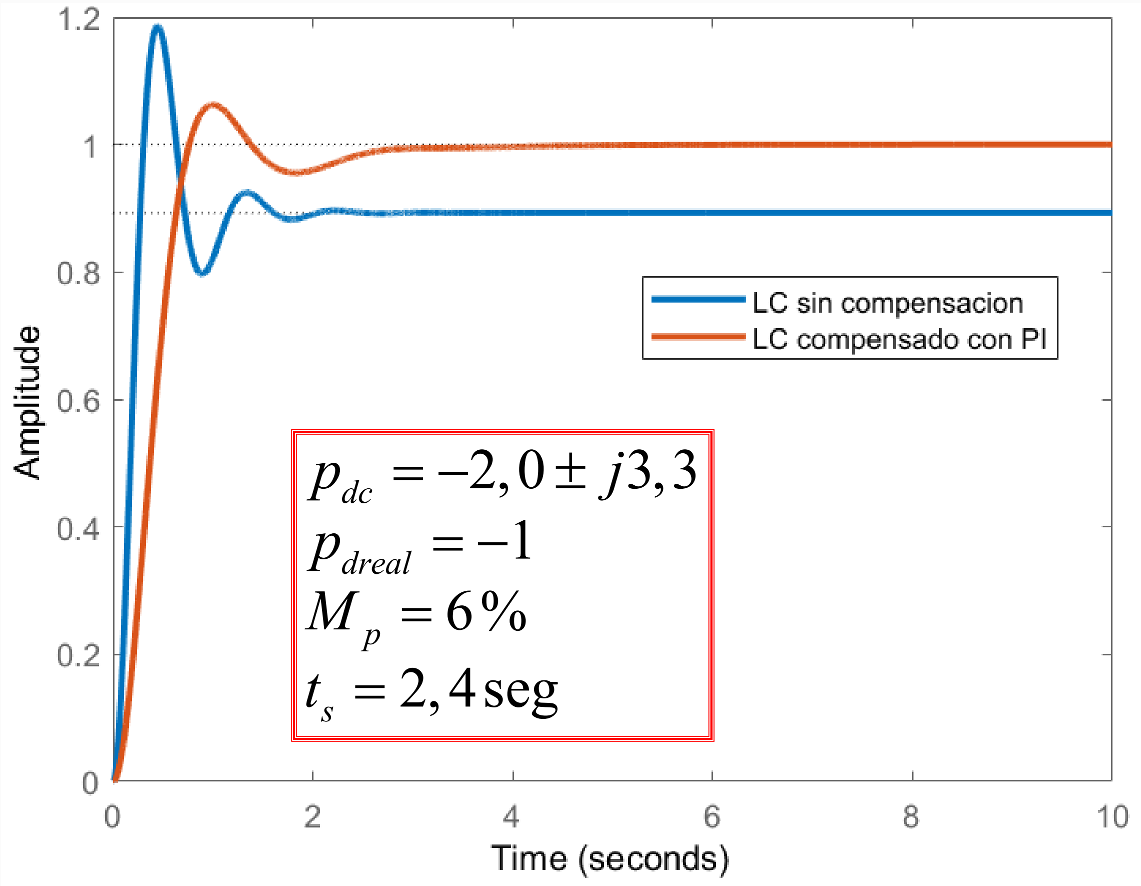
Se aprecia que se cumplen las especificaciones transitorias al encontrarse los polos deseados dentro de la región deseada y la acción de control toma valores muy bajos.

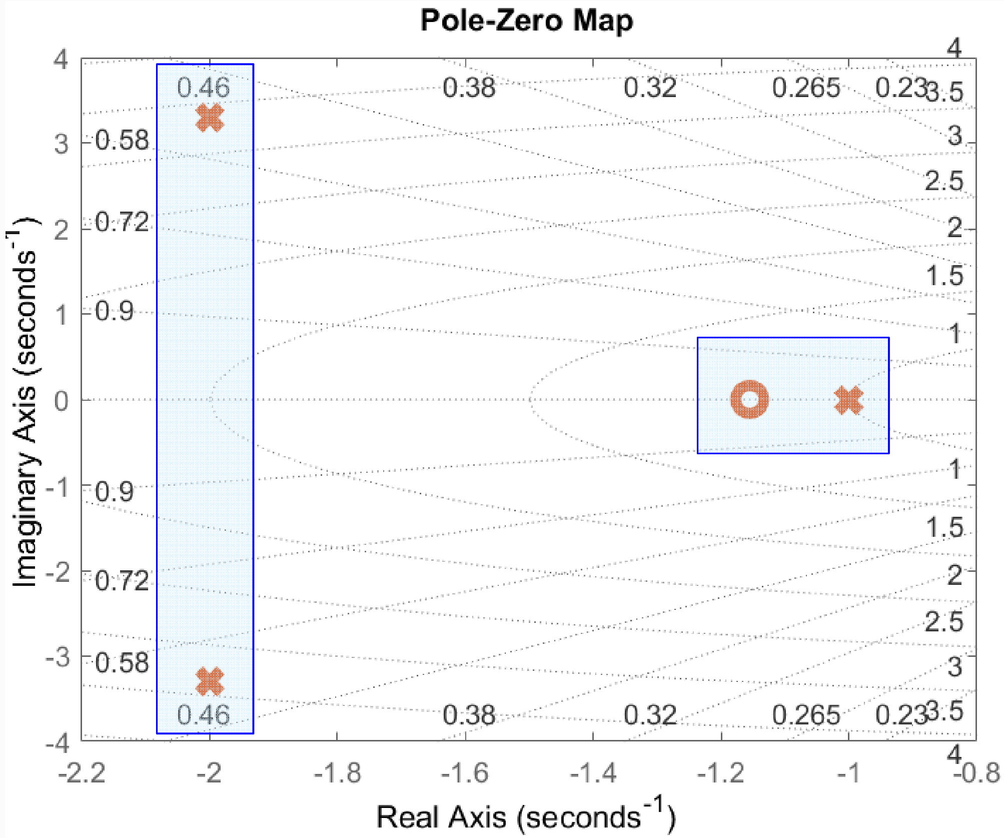


# Diseño de Compensadores PI con Lugar de Raíces

## Respuesta al Escalón Unitario con Compensador PI

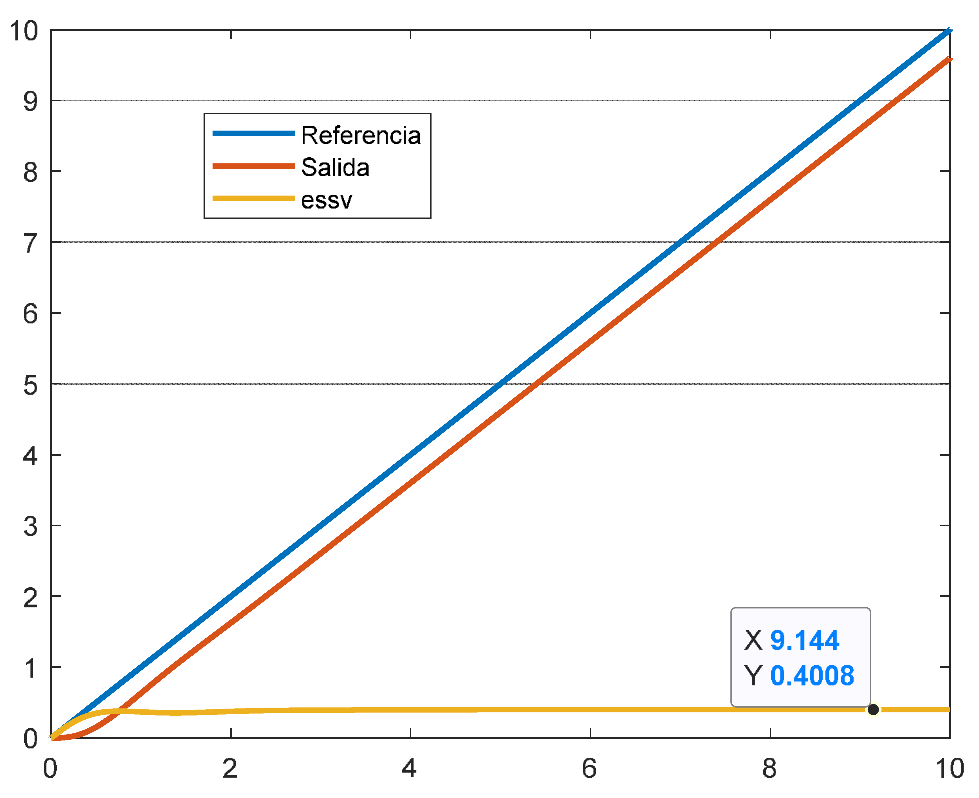
$$G_{lc}(s) = \frac{12,89(s+1,155)}{(s+1)(s^2+4s+14,89)}$$



Podemos verificar ahora, cuanto es el error para una entrada en rampa y comparar con el PI inicial que era de $e_{ssv}$ = 10%

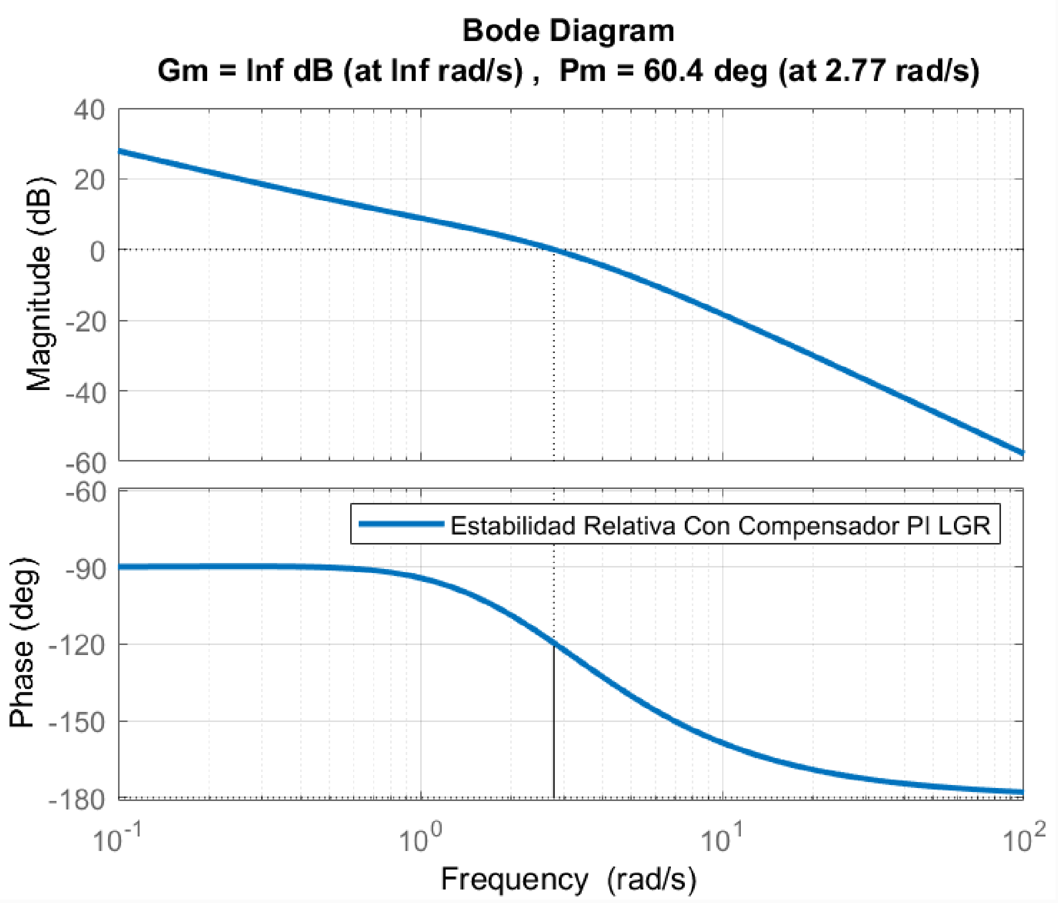
$$K_v = \frac{1}{e_{ssv}} = \lim_{s \to 0} s \frac{0,2578 \times 50\,(s+1,155)}{s(s+2)(s+3)} \quad K_v = 2,4813 \Rightarrow e_{ssv} \cong 40\%$$




**El error $e_{ssv}$ se duplicó respecto al valor exigido, a costa de disminuir la ganancia del camino directo para disminuir el sobrepaso.**

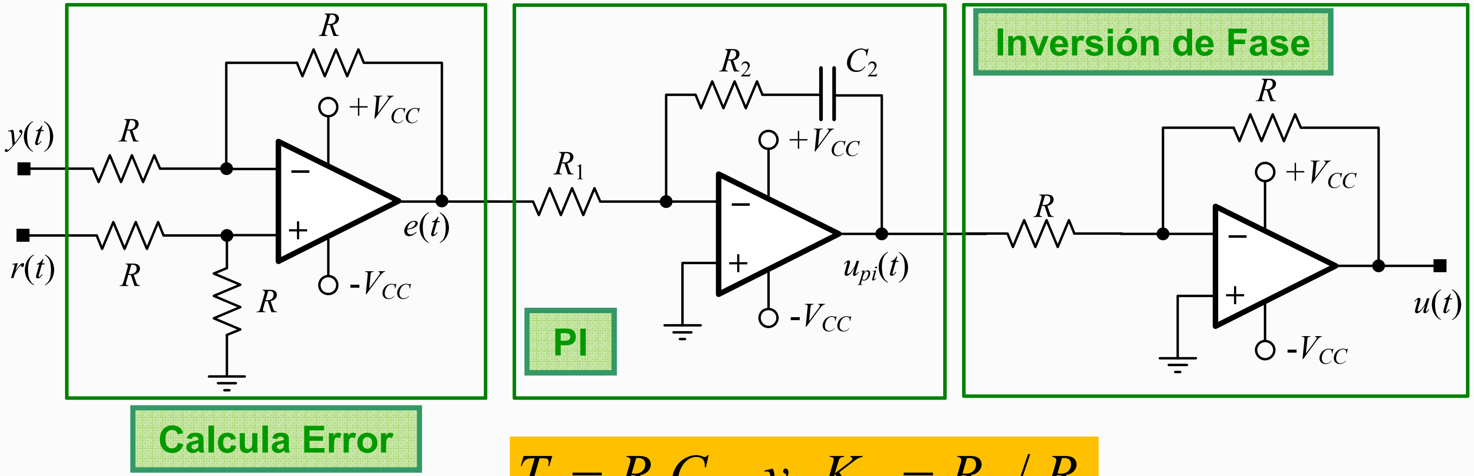
# Diseño de Compensadores PI con Lugar de Raíces

Respecto al diseño anterior por cancelación polo-cero, la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado reduce un poco el MF pero aún es un valor adecuado.



## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PI:

Usamos el primer diseño antes del reajuste. $s_{1,2d} = -2 \pm j3,3\,(\mathrm{r/s})$




El diseño resulta:

$$K_c = 0,2594 \; y \; z_{pi} = 1,154\,\mathrm{r/s}$$

$$T_i = \frac{1}{z_{pi}} = 0,866\,\mathrm{s}$$

$$z_{pi} = \frac{K_i}{K_p} \Rightarrow K_i = 0,3$$

$$T_i = R_2 C_2 \;\; y \;\; K_p = R_2 / R_1$$

$$C_2 = 4,7\,\mu\mathrm{F} \rightarrow R_2 = 184.340\,\Omega \qquad R_1 = R_2 / K_p = 710.680\,\Omega$$

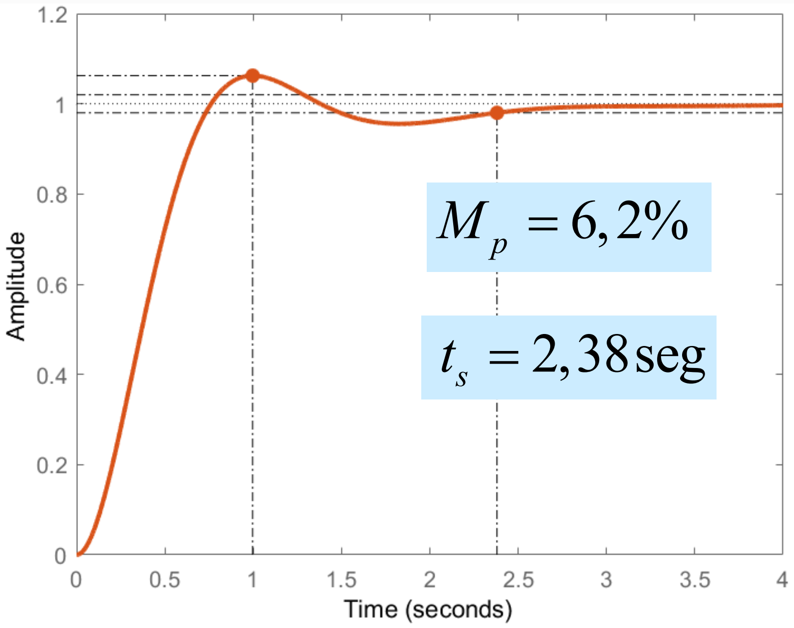
Se adoptan los siguientes valores de resistencias comerciales: $R_1 = 820\,\mathrm{k}\Omega$ $\quad R_2 = 180\,\mathrm{k}\Omega$

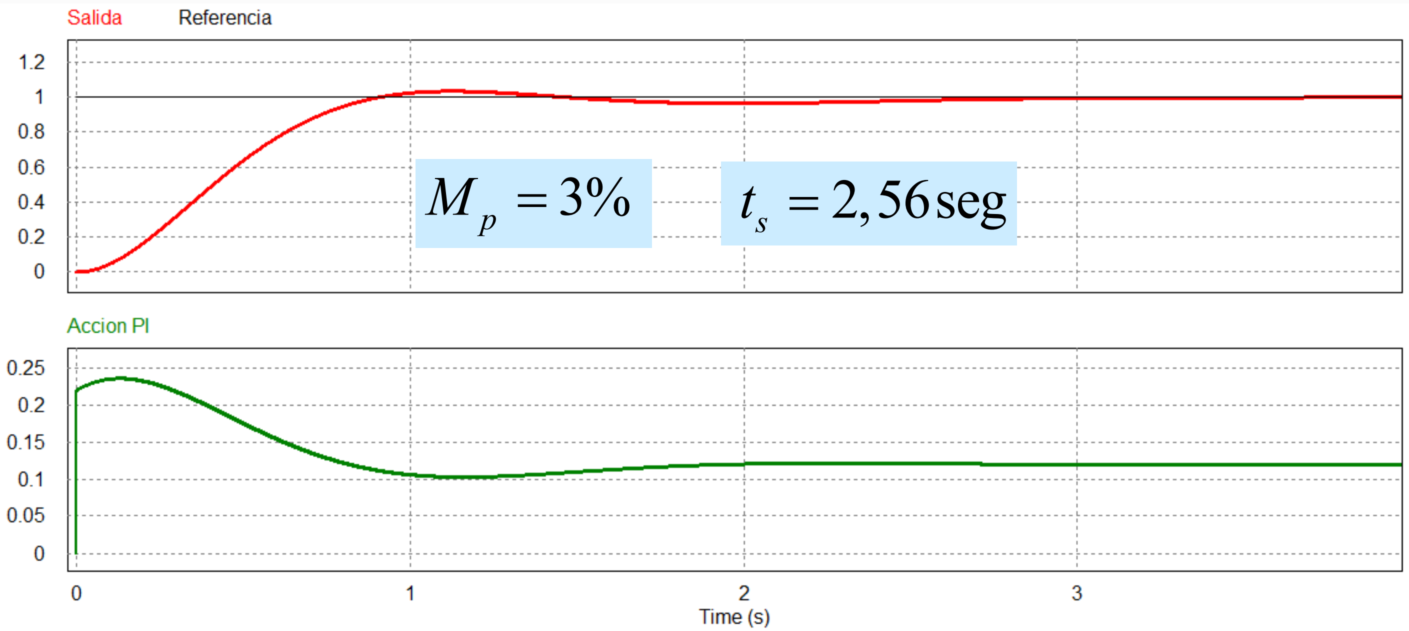
Luego de simulado con estos valores adoptados, las características transitorias de la respuesta resultan:

$$M_p = 3\% \text{ y } t_s = 2,56\,\mathrm{seg}$$

## Resultados de Simulación del PI: $R_1 = 820\,\text{k}\Omega$ $R_2 = 180\,\text{k}\Omega$ $C_2 = 4,7\,\mu\text{F}$

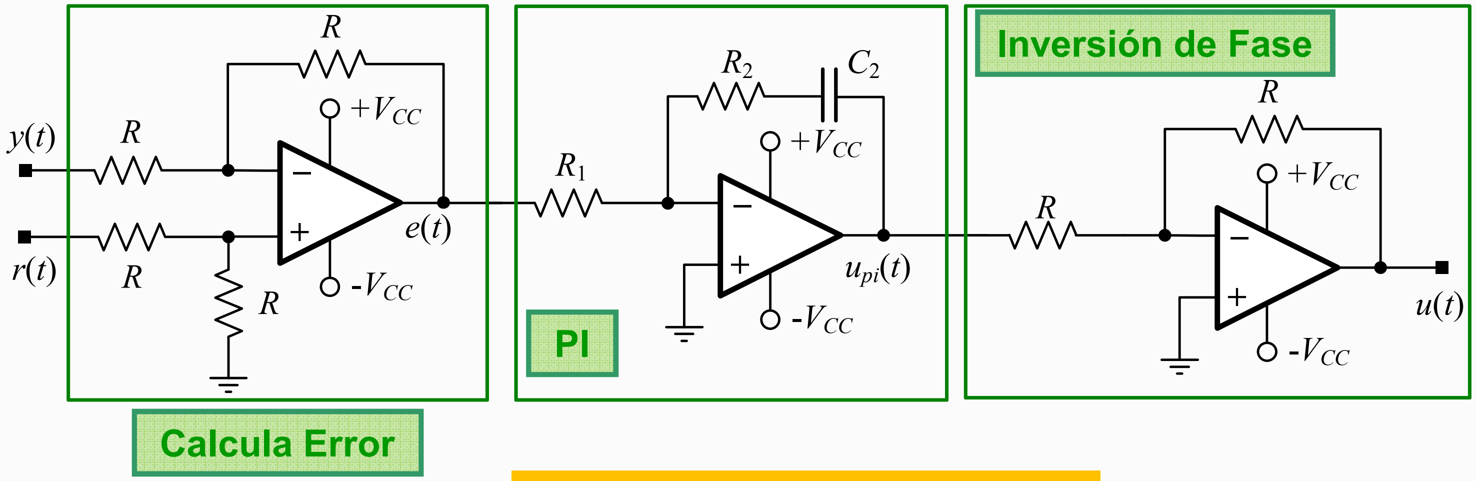
Luego de simulado con los valores adoptados, el sobrepaso resulta menor que en Matlab, y el tiempo de asentamiento, levemente mayor. Este último, en ambos casos, supera el valor especificado. En cuanto a la acción de control, la misma aumenta rápidamente al inicio, pero se mantiene en valores muy bajos, por lo que no representa inconvenientes su implementación.




**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_03_PI.m y lugar_raices_ejemplo_03_PI_1AMPOP.psimsch**

**Se realiza un reajuste del controlador PI para garantizar el $t_s$:** $s_{1,2d} = -1,98 \pm j4,01\,(\text{r/s})$




El diseño resulta:

$$K_p = 0,36272 \; y \; z_{pi} = 1,155\,\text{r/s}$$

$$T_i = \frac{1}{z_{pi}} = 0,8658\,\text{s}$$

$$z_{pi} = \frac{K_i}{K_p} \Rightarrow K_i = 0,4189$$

$$T_i = R_2 C_2 \quad y \quad K_p = R_2 / R_1$$

$$C_2 = 4,7\,\mu\text{F} \rightarrow R_2 = 184.210\,\Omega \qquad R_1 = R_2 / K_p = 507.870\,\Omega$$

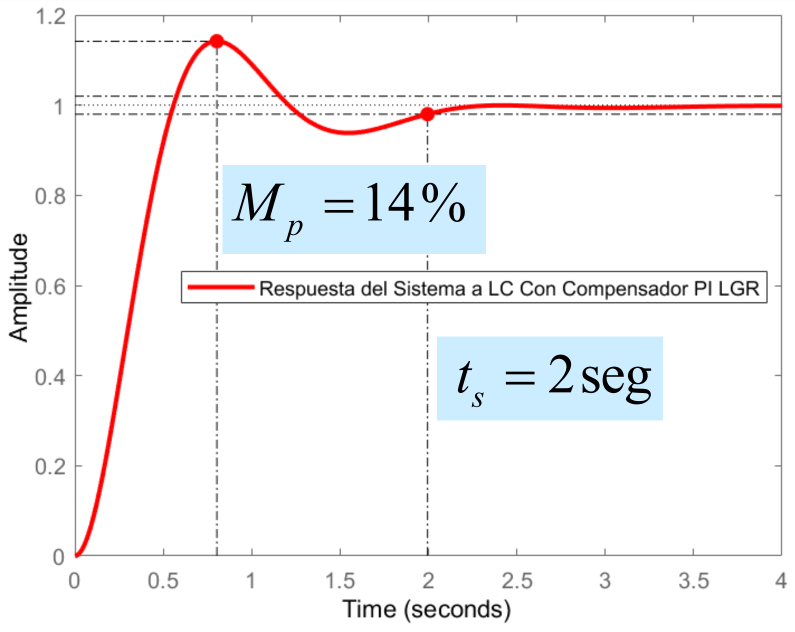
Se adoptan los siguientes valores de resistencias normalizadas:

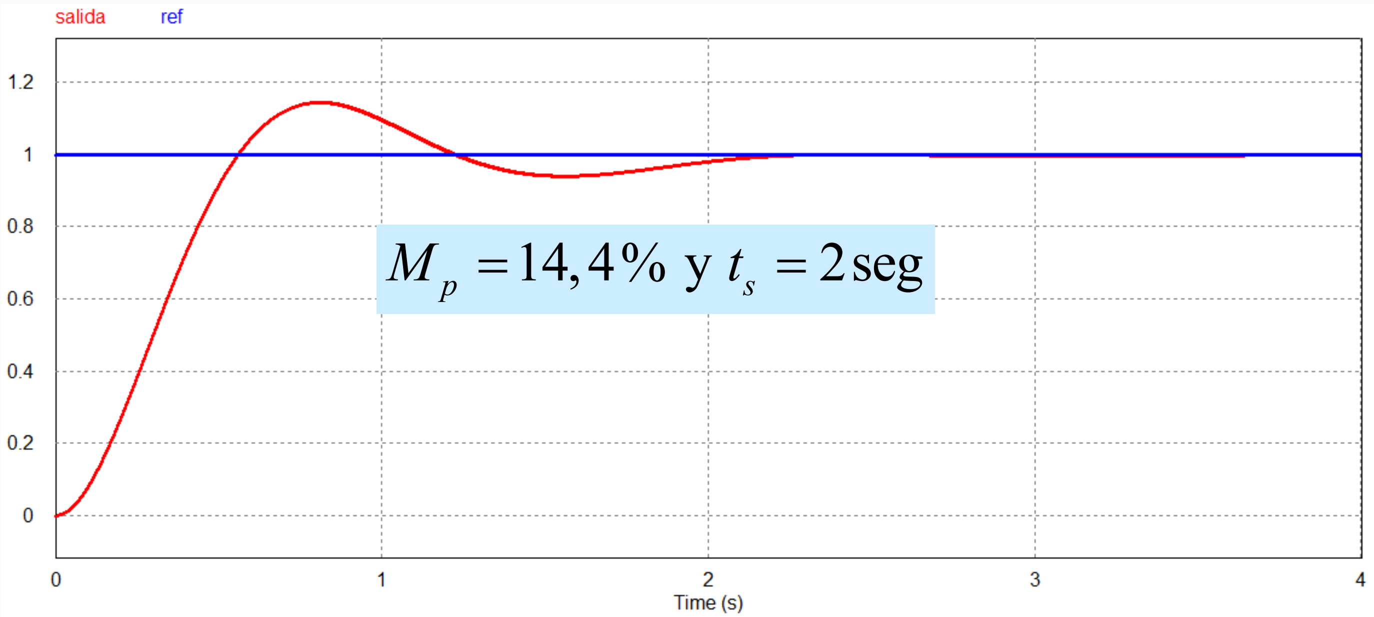
$$R_1 = 470\,\text{k}\Omega + 33\,\text{k}\Omega \qquad R_2 = 180\,\text{k}\Omega$$

## Resultados de Simulación del PI:

$R_1 = 470\,\mathrm{k\Omega} + 33\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 180\,\mathrm{k\Omega}$ $C_2 = 4,7\,\mu\mathrm{F}$

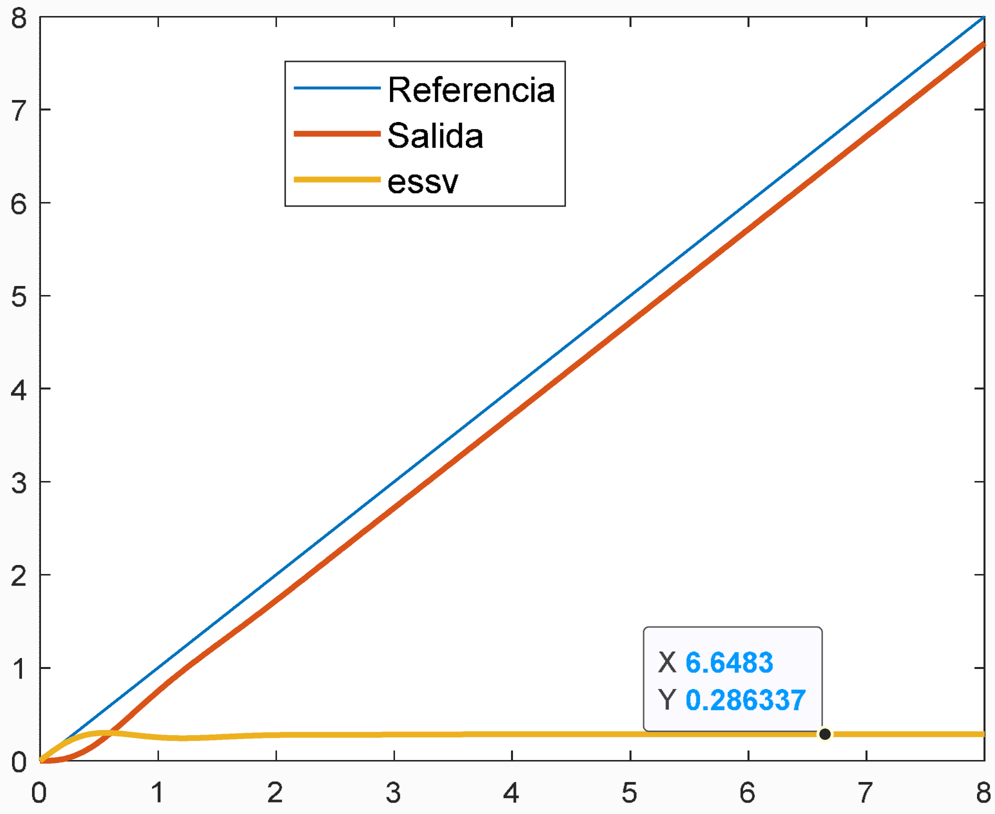
**Luego de simulado con los valores adoptados, el sobrepaso resulta del 14% y el tiempo de asentamiento es de 2 segundos, cumpliéndose con ambas especificaciones. En cuanto a la acción de control, la misma no varía significativamente respecto al caso anterior. Se reduce también un poco el MF a 51°.**

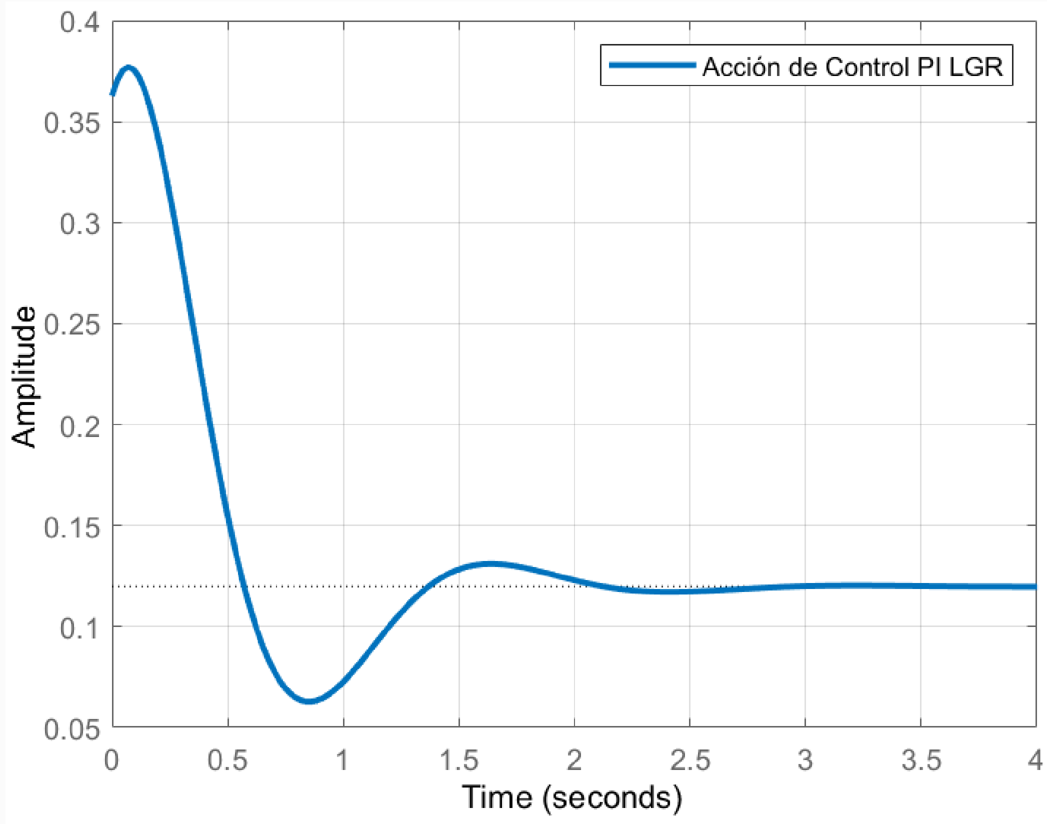



**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_03_PI.m y lugar_raices_ejemplo_03_PI_1AMPOP_reajustado.psimsch**

$$K_v = 3,4912 \Rightarrow e_{ssv} = 28,6\%$$




**Se consigue reducir el error $e_{ssv}$ a un valor próximo al deseado, pero siempre al costo de aumentar el sobrepaso. Es evidente que debe buscarse otra solución para tener buen desempeño transitorio y un error de velocidad menor.**

# Diseño de Compensadores PID por Lugar de Raíces

## Controlador Proporcional-Integral-Derivativo: Sistema de Tipo 0

Se diseña uno de los ceros del PID cancelando uno de los polos de la planta, en este caso el polo en -2 r/s. El cero restante del PID se diseñará por la condición de fase y magnitud del lugar de las raíces para cumplir con las especificaciones de sobrepaso y tiempo de asentamiento.

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_{PID}(s) = K_c \frac{(s+a)(s+b)}{s}$$

$$M_p = 15\,\% \text{ y } t_s = 2\,\text{seg}$$

Polos Dominantes de LC en base a las especificaciones: $s_{1,2d} = -2 \pm j3,3\,(\text{r/s})$

Se toma el par de polos dominantes dentro de la región deseada de polos de LC para garantizar el cumplimiento de las especificaciones: $s_{1,2d} = -2,1 \pm j2,5\ (\text{r/s})$

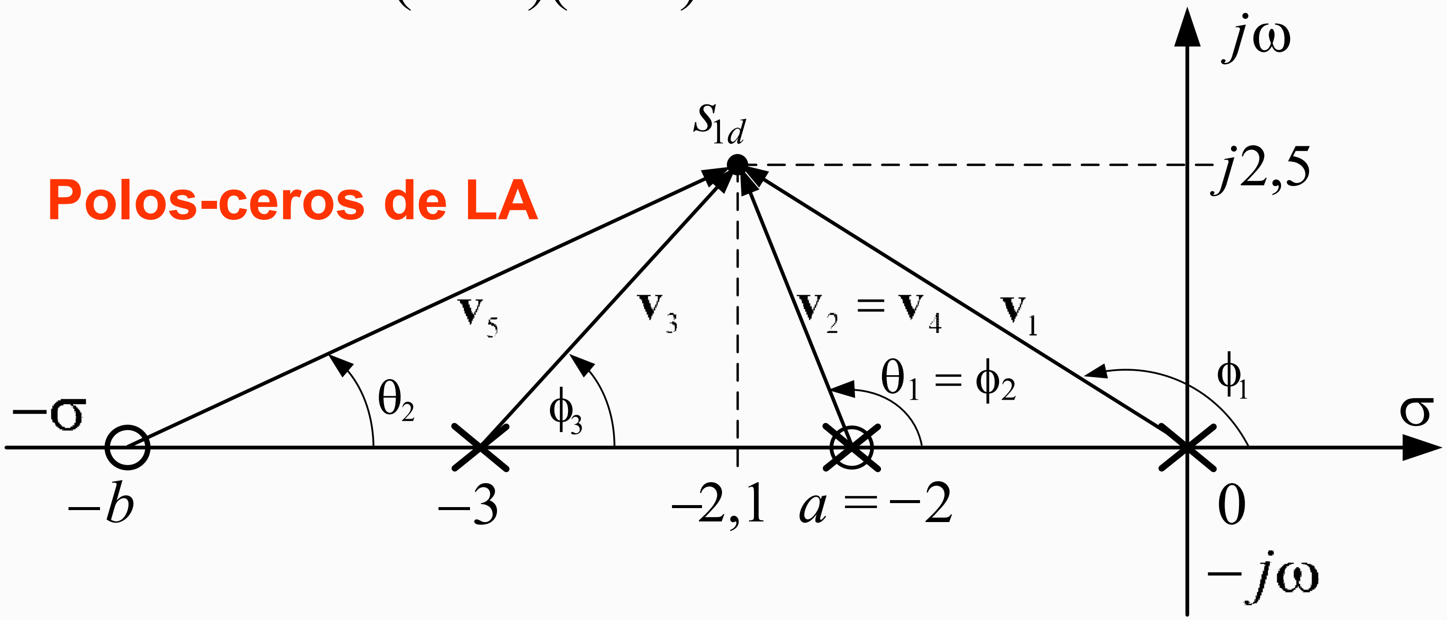
**FTLA:** $$G_{LA}(s) = \frac{50K_c(s+2)(s+b)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$a = -2\ \text{r/s}$$

# Diseño de Compensadores PID por Lugar de Raíces

$$G_{LA}(s) = \frac{50K_c(s+2)(s+b)}{s(s+2)(s+3)} \qquad s_{1,2d} = -2{,}1 \pm j2{,}5 \text{ (r/s)}$$

**Polos-ceros de LA**




**Condición de Fase:**

$$\theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180°$$

$$\theta_1 = \phi_2$$

$$\text{Fase Total} = -180° + \phi_1 + \phi_3$$

$$\text{Fase Total} = \theta_2 = 20{,}23°$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}(s_{1d})}{b - \mathrm{Re}(s_{1d})}\right] \Rightarrow b = \mathrm{Re}(s_{1d}) + \frac{\mathrm{Im}(s_{1d})}{tg(\theta_2)}$$

$$\boxed{b = 8{,}88 \text{ r/s}}$$

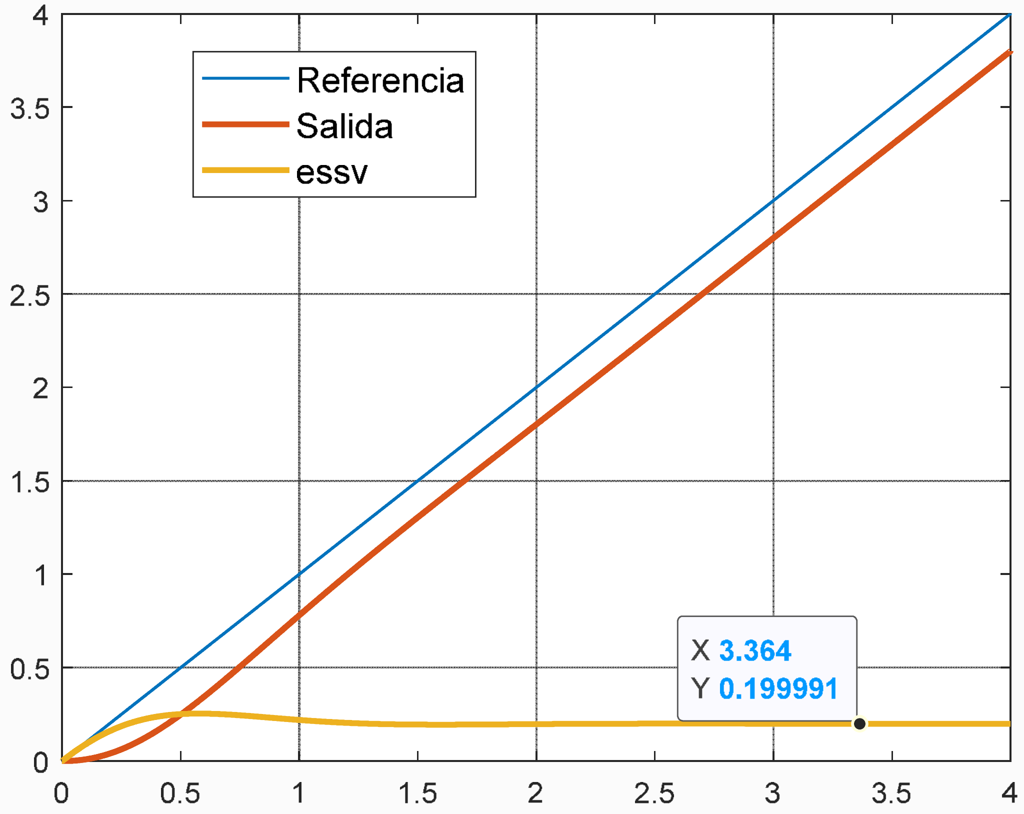
**Se obtiene el valor de ganancia del controlador para garantizar el error de velocidad mediante la expresión de la ganancia estática de velocidad Kv**

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_{LA}(s) = \cancel{s}\,\frac{50K_c\,\cancel{(s+2)}\,(s+8,88)}{\cancel{s}\,\cancel{(s+2)}\,(s+3)} \qquad \Rightarrow K_c = \frac{5\times 3}{50\times 8,8833} = 0,0338$$

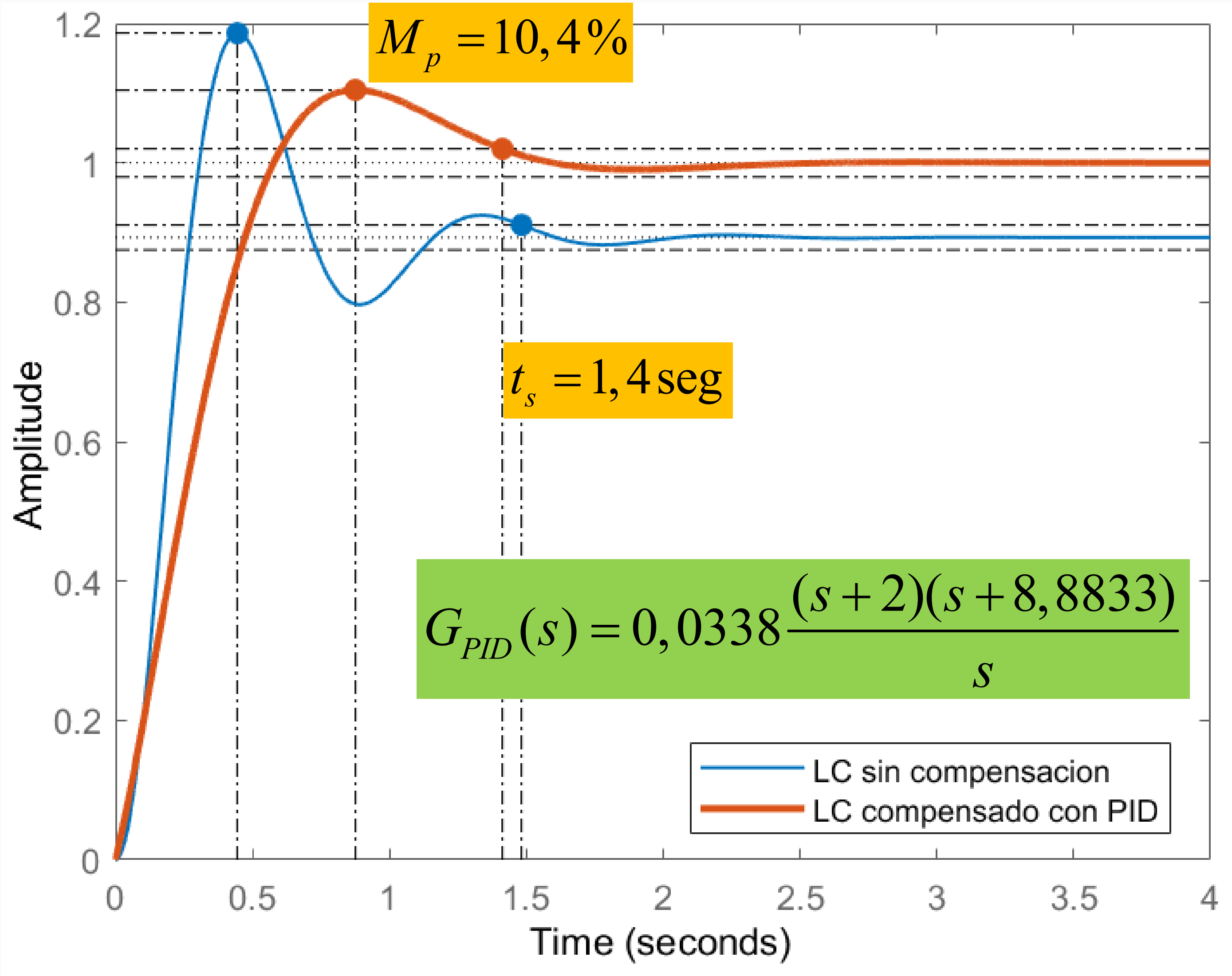
$$G_{PID}(s) = 0,0338\,\frac{(s+2)(s+8,8833)}{s}$$

**FT del PID resultante diseñado por cancelación polo-cero y LGR**

Se observa que el error $e_{ssv}$ es del 20%



# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

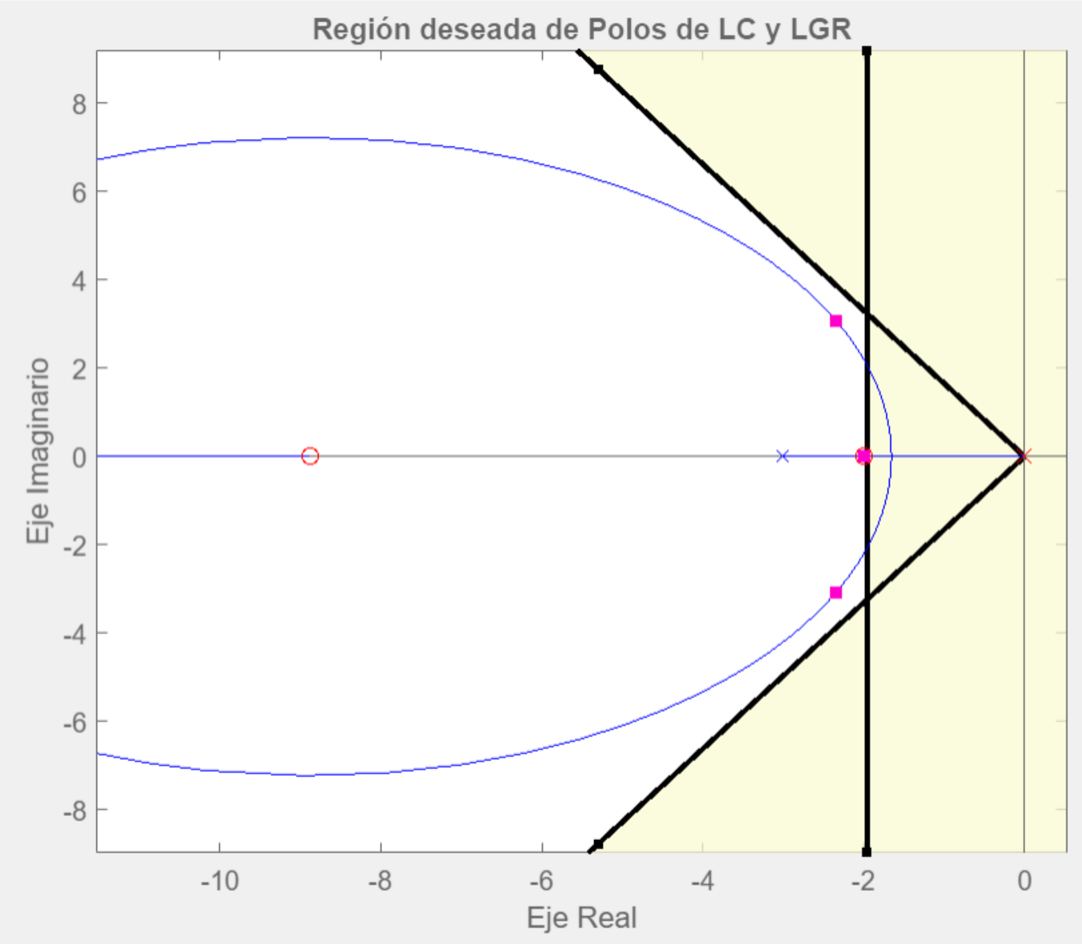



El sobrepaso se reduce del 33% al 10,4% cumpliéndose con lo especificado.

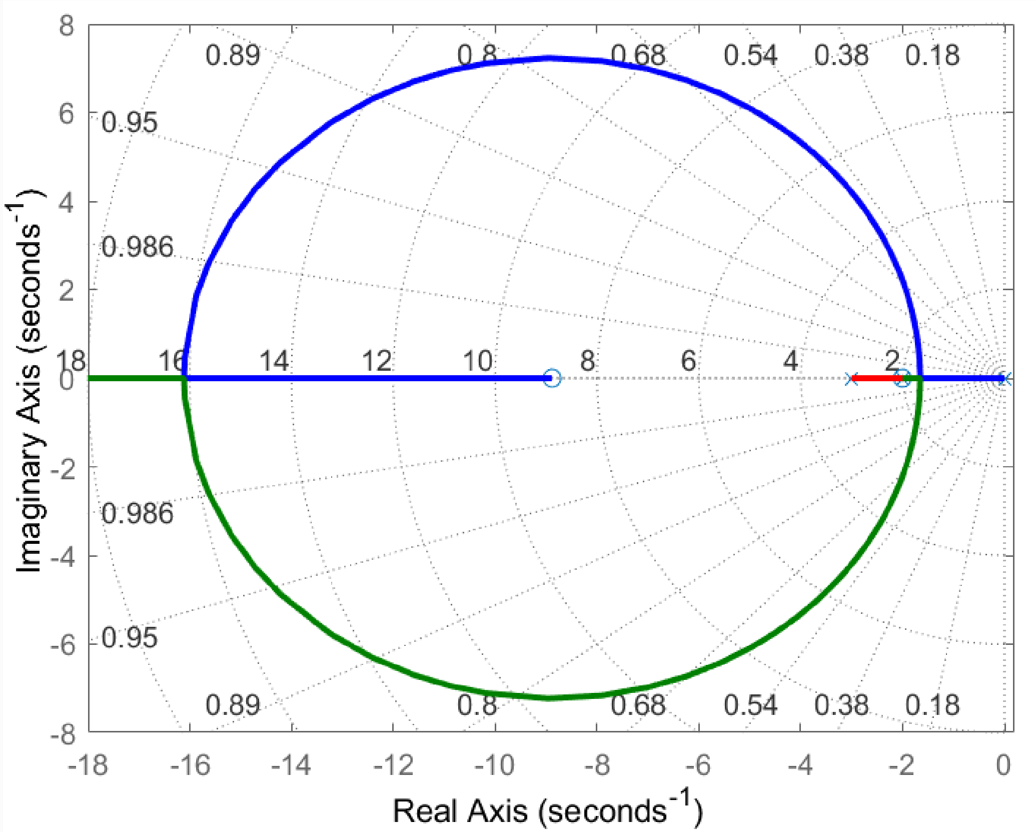
El tiempo de asentamiento se reduce levemente a 1,4 segundos pero cumple con la especificación al ser menor a 2 segundos.

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

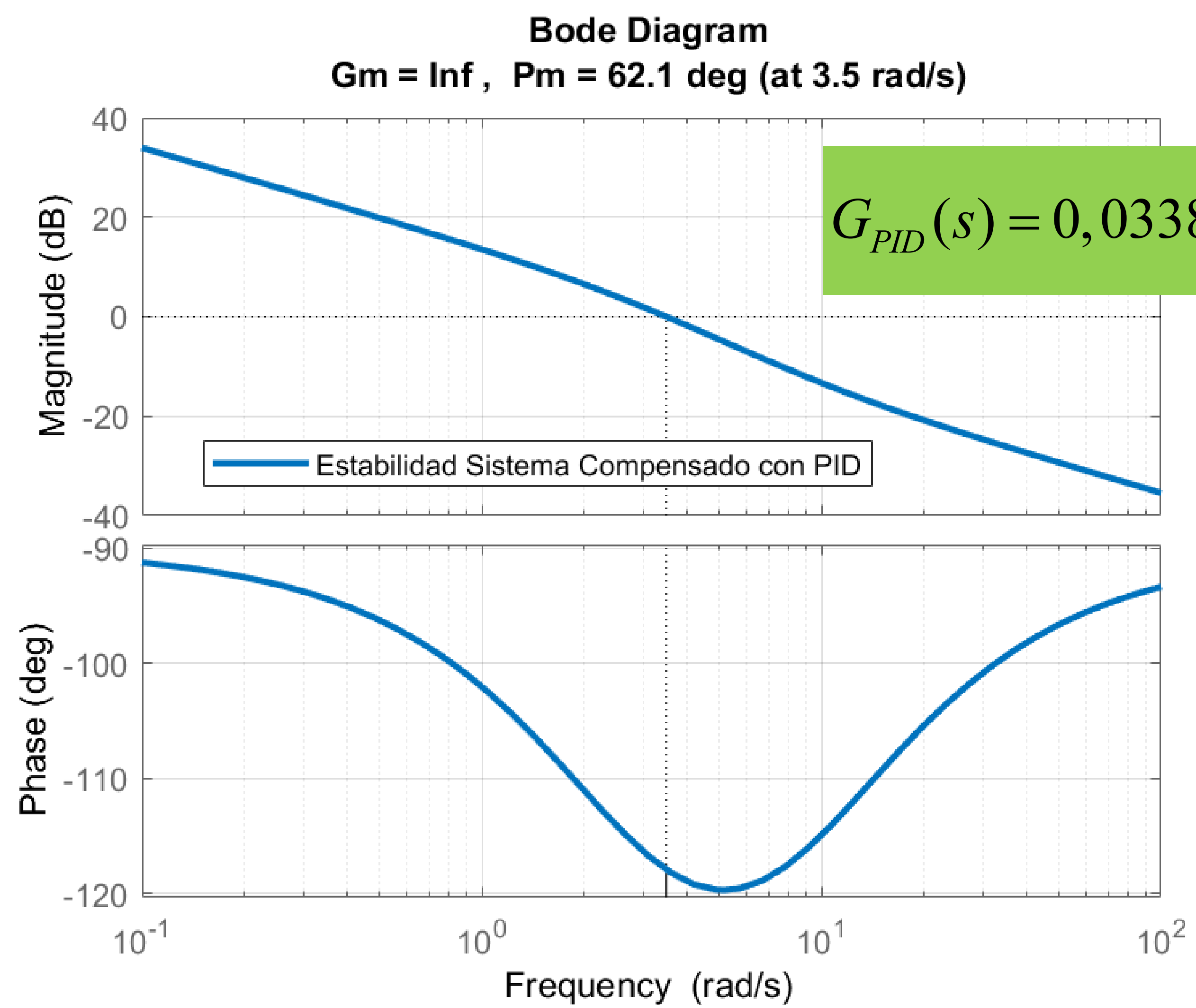
**El par de polos de LC deseados se encuentra dentro de la región deseada**




**Ninguna rama del LGR corta al eje imaginario.**



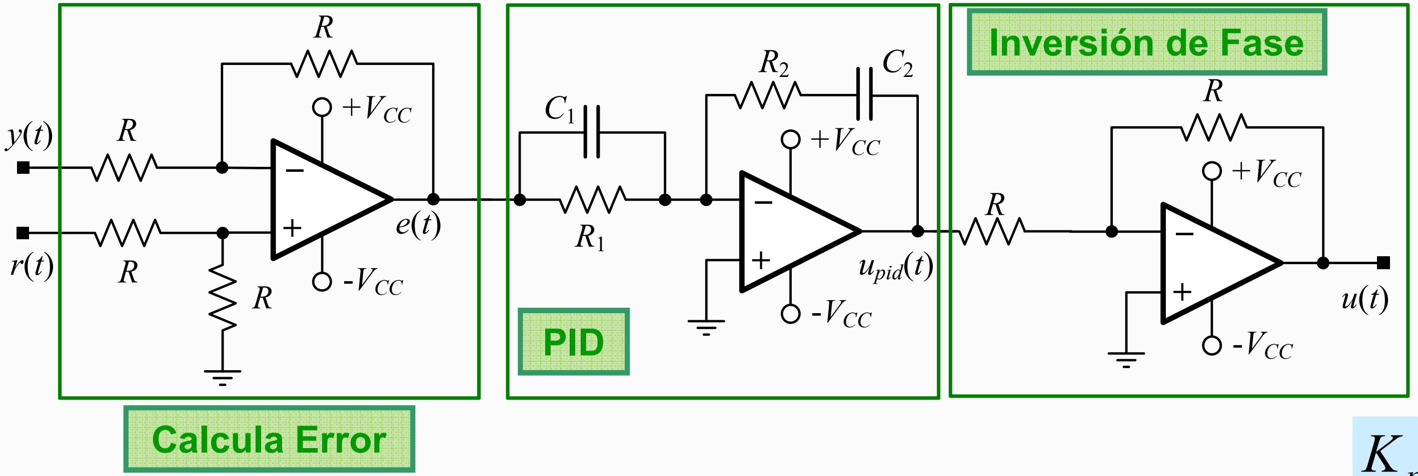
# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces




$$G_{PID}(s) = 0,0338\frac{(s+2)(s+8,8833)}{s}$$

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PID:

Usamos el primer diseño antes del reajuste. $s_{1,2d} = -2{,}1 \pm j2{,}5$ (r/s) $a = -2$ r/s y $b = -8{,}88$ r/s




El diseño resulta:

$$G_c(s) = \frac{0{,}0338\,s^2 + 0{,}3675\,s + 0{,}6}{s}$$

$$K_p = 0{,}3675;\; K_i = 0{,}6;\; K_d = 0{,}0338$$

La expresión del PID en función de los componentes del circuito electrónico está dado por:

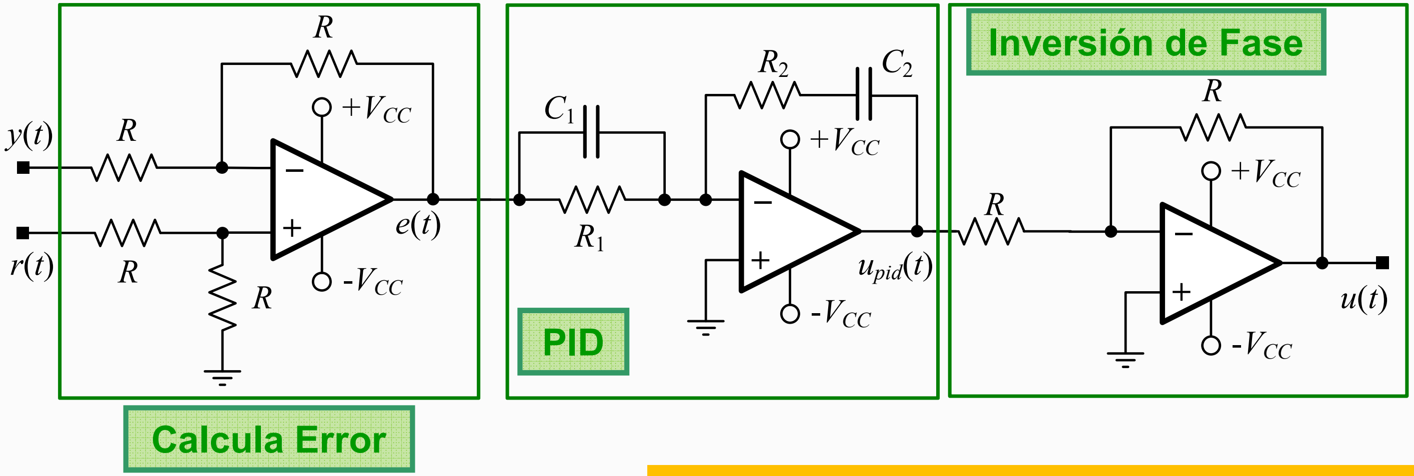
$$G_c(s) = \frac{(R_1C_1)(R_2C_2)}{R_1C_2}\,\frac{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}{s} \Rightarrow K_c = \frac{(R_1C_1)(R_2C_2)}{R_1C_2} = \frac{\tau_a\,\tau_b}{R_1C_2} \quad \tau_a = R_1C_1 \;\; y \;\; \tau_b = R_2C_2$$

$$\tau_a = 1/a = 0{,}5\,\text{s};\;\; \tau_b = 1/b = 0{,}1126\,\text{s};\;\; K_c = 0{,}0338$$

Con estos datos procedemos al cálculo de los dispositivos electrónicos

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PID:

Usamos el primer diseño antes del reajuste. $a = -2\,\mathrm{r/s}\ \ \mathrm{y}\ \ b = -8,88\,\mathrm{r/s}$




$$\tau_a = 0,5\,\mathrm{s};\ \ \tau_b = 0,1126\,\mathrm{s};$$
$$K_c = 0,0338$$

$$K_c = \frac{\tau_a\,\tau_b}{R_1 C_2} \qquad \tau_a = R_1 C_1\,;\ \tau_b = R_2 C_2$$

Se adopta el capacitor $C_2$ $\quad$ con $C_2 = 4,7\,\mu\mathrm{F} \rightarrow R_1 = \dfrac{\tau_a\,\tau_b}{K_c C_2} = 354.610\,\Omega$

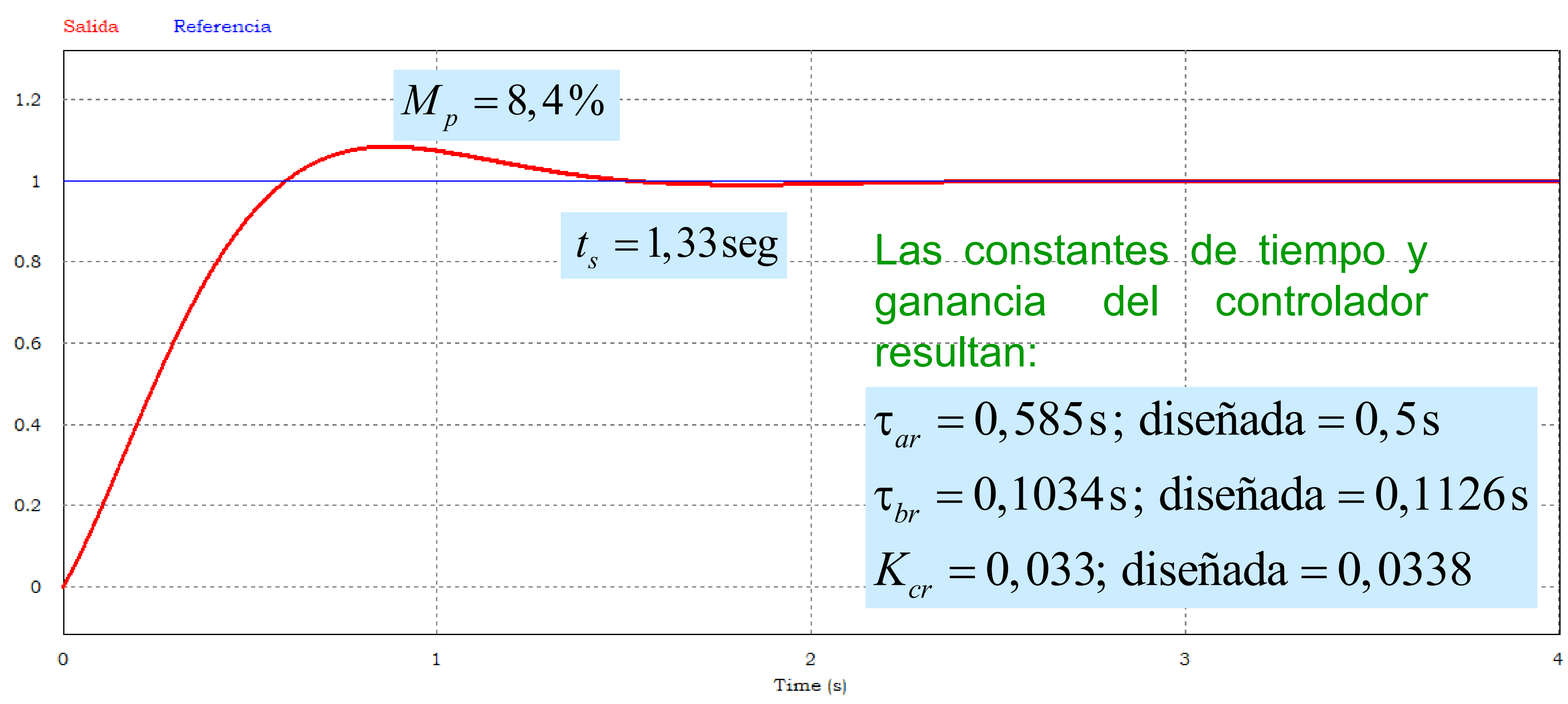
De la expresión de $\tau_a$ se obtiene $C_1$ $\quad C_1 = \dfrac{\tau_a}{R_1} = 1,41\times 10^{-6}\ \mathrm{F} \cong 1,5\,\mu\mathrm{F}$

De la expresión de $\tau_b$ se obtiene $R_2$ $\quad R_2 = \dfrac{\tau_b}{C_2} = 23.951\,\Omega$

Se adoptan los siguientes valores comerciales de resistores: $R_1 = 390\,\mathrm{k}\Omega$ $\qquad R_2 = 22\,\mathrm{k}\Omega$

## Resultados de Simulación del PID: $R_1 = 390\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 22\,\mathrm{k\Omega}$ $C_1 = 1{,}5\,\mu\mathrm{F}$ $C_2 = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$

Luego de simulado con los valores adoptados, las características transitorias de la respuesta resultan cualitativamente mejores a la simulación de Matlab.




Las constantes de tiempo y ganancia del controlador resultan:

$$\tau_{ar} = 0{,}585\,\mathrm{s};\ \text{diseñada} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

$$\tau_{br} = 0{,}1034\,\mathrm{s};\ \text{diseñada} = 0{,}1126\,\mathrm{s}$$

$$K_{cr} = 0{,}033;\ \text{diseñada} = 0{,}0338$$

**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_03_PID.m y lugar_raices_ejemplo_04_PID_1AMPOP.psimsch**

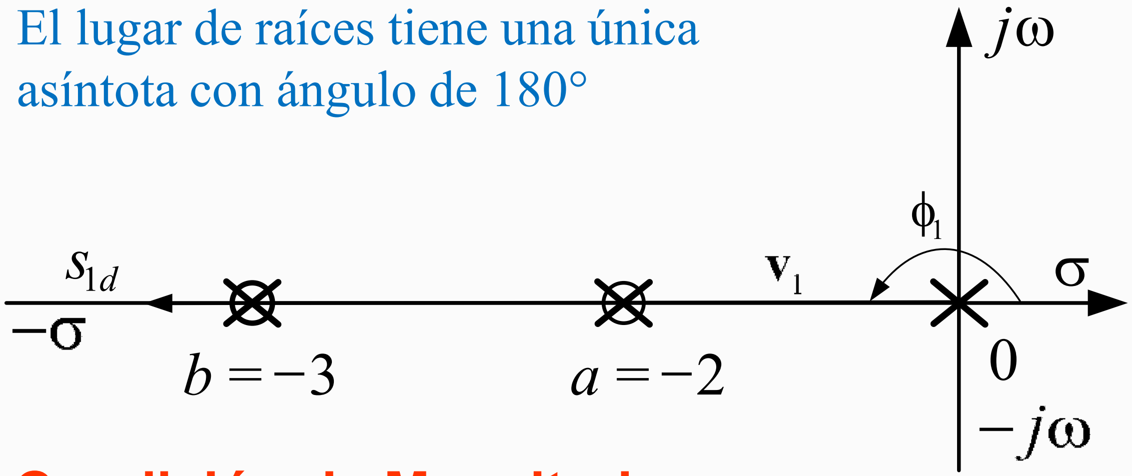
Diseño cancelando ambos polos de la planta.

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_{PID}(s) = K_c \frac{(s+a)(s+b)}{s}$$

$$a = -2\,\mathrm{r/s} \;\text{ y }\; b = -3\,\mathrm{r/s}$$

El lugar de raíces tiene una única asíntota con ángulo de 180°




**Condición de Fase:**

$$-\phi_1 = -180° \Rightarrow \phi_1 = 180°$$

La condición resultante nos indica que el sistema en lazo cerrado resulta de primer orden, con un polo real cuya lejanía al eje $j\omega$ dependerá de la ganancia que se quiera imponer a la FTLA.

**Condición de Magnitud:**

Se impone un polo real $s_{1d}$ = -5 rad/s $\quad \mathbf{v}_1 = -5 + j0$

$$K_c = \frac{|\mathbf{v}_1|}{50} = 0{,}1$$

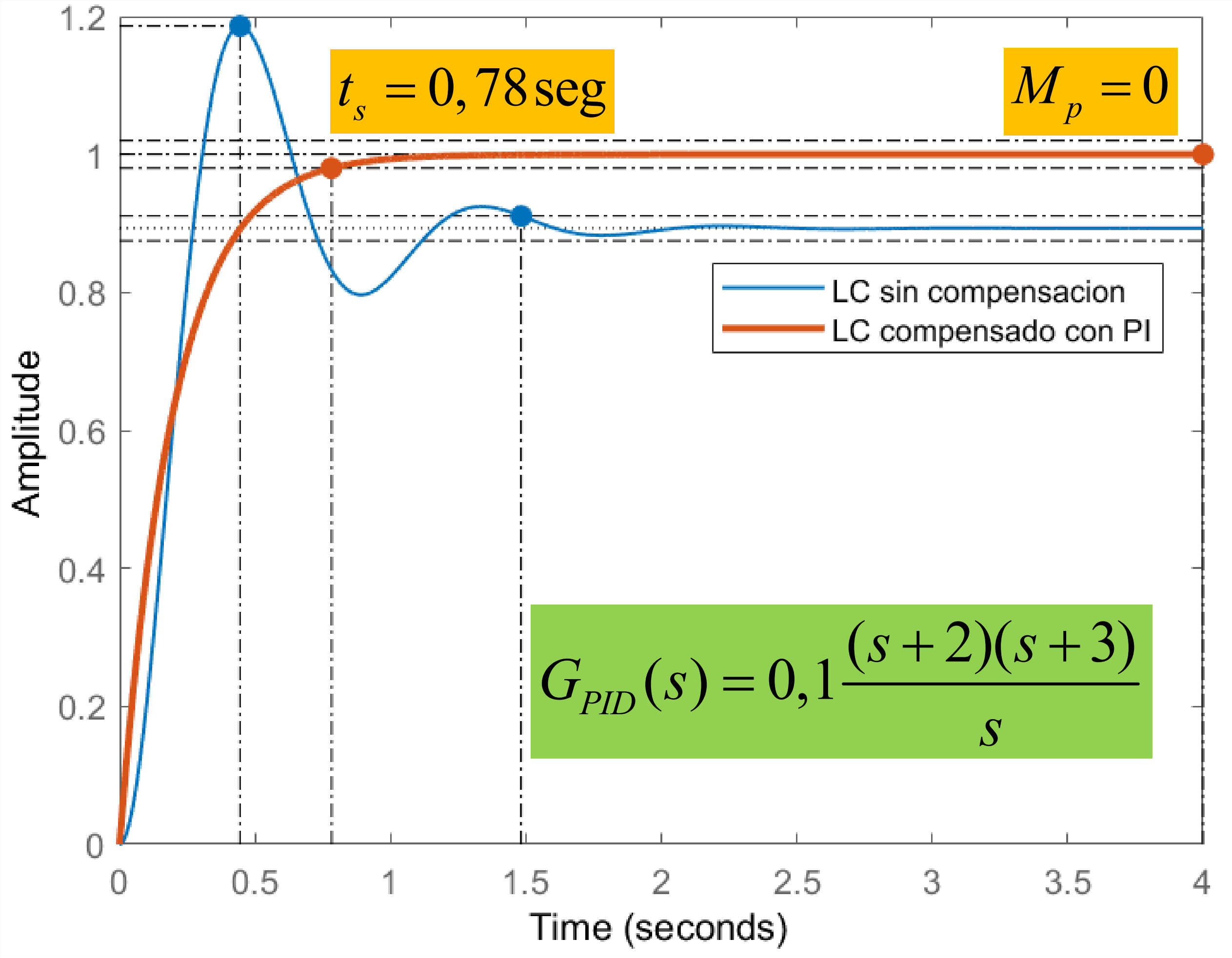
$$G_{PID}(s) = 0{,}1\frac{(s+2)(s+3)}{s}$$

$$G_{lc}(s) = \frac{5}{s+5}$$

**Sistema de Primer Orden**

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

Cancelación de ambos polos de la planta.



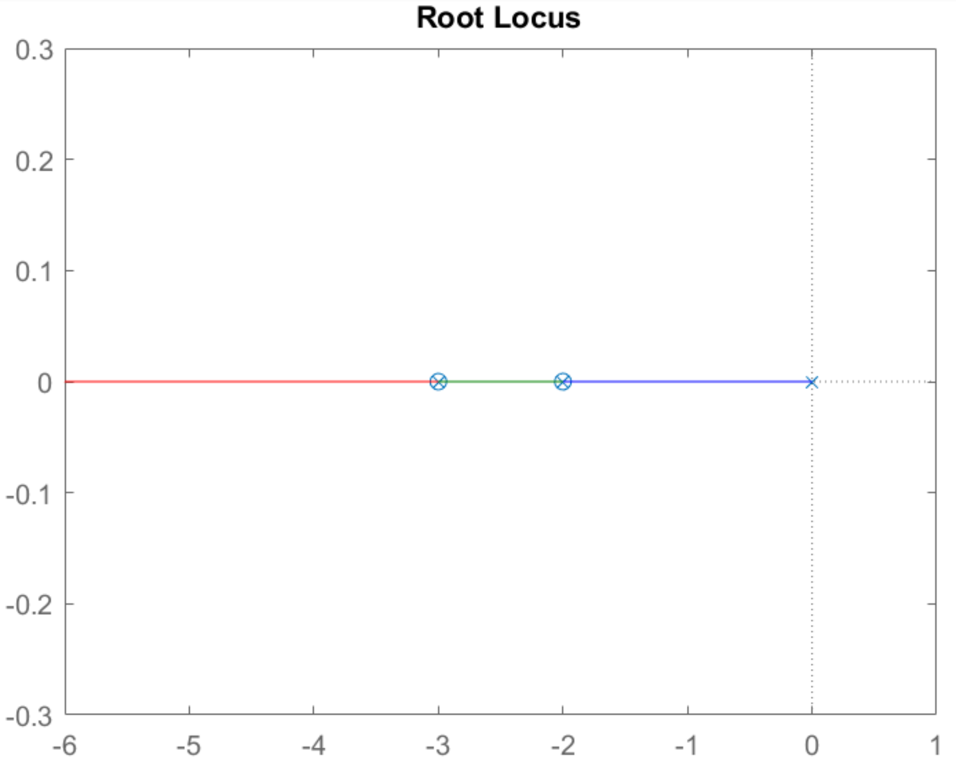

El sobrepaso se reduce a cero por ser de primer orden la FTLC (respuesta sobreamortiguada).

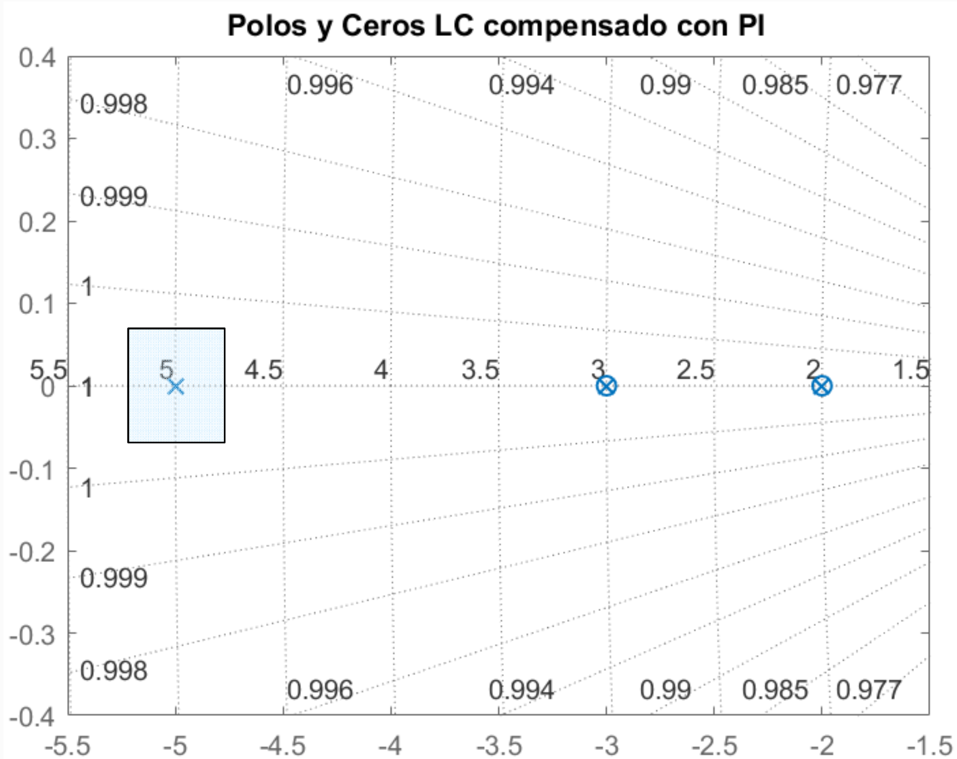
El tiempo de asentamiento resulta de 0,78 segundos, lo que equivale a aproximadamente 4 veces la constante de tiempo del polo dominante, en este caso 0,2 seg.

Este tiempo será cada vez menor, cuanto mayor sea la ganancia de la FTLA.

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

Cancelación de ambos polos de la planta.




$$G_{PID}(s) = 0{,}1\frac{(s+2)(s+3)}{s}$$

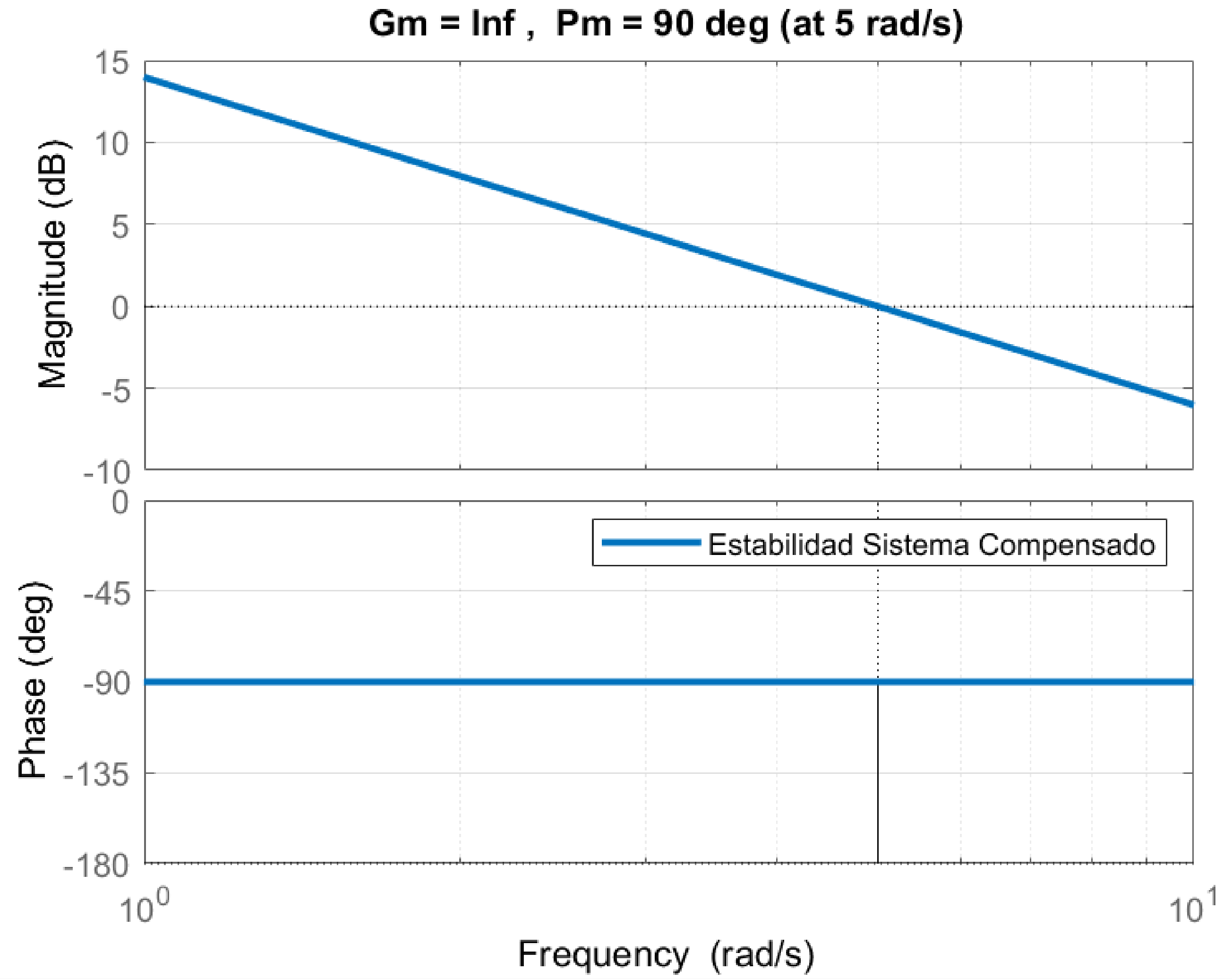
$$G_{la}(s) = \frac{5}{s}$$

$$G_{lc}(s) = \frac{5}{s+5}$$

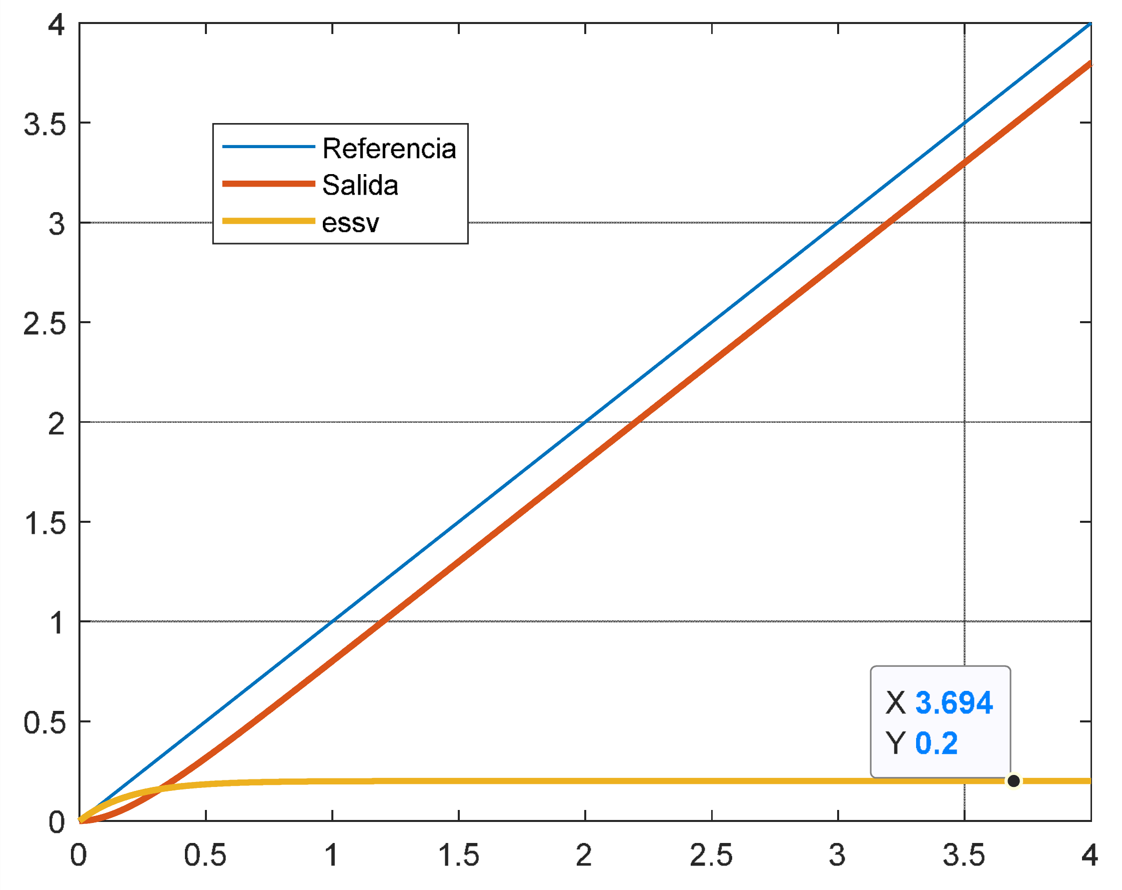
# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

Cancelación de ambos polos de la planta.

$$G_{la}(s) = \frac{5}{s}$$



# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces




El error de velocidad para entrada en rampa resulta del 20% como exigido en las especificaciones. Esto se debe a la selección del polo real que determina la respuesta.

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{5}{s} = 5 \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K_v} \times 100 = 20\%$$

Si se hubiera elegido el polo real en -10 r/s, el error de velocidad para entrada en rampa sería del 10%.

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PID:

Cancelación de ambos polos de la planta. $\tau_a = 0,5\,\text{s};\ \ \tau_b = 0,333\,\text{s};\ \ K_c = 0,1$

$$G_c(s) = \frac{(R_1C_1)(R_2C_2)}{R_1C_2}\frac{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}{s} \qquad K_c = \frac{\tau_a\,\tau_b}{R_1C_2} \qquad \tau_a = R_1C_1\,;\ \tau_b = R_2C_2$$

Se adopta el capacitor $C_2$ $\text{con } C_2 = 4,7\,\mu\text{F} \rightarrow R_1 = \dfrac{\tau_a\,\tau_b}{K_cC_2} = 354.610\,\Omega$

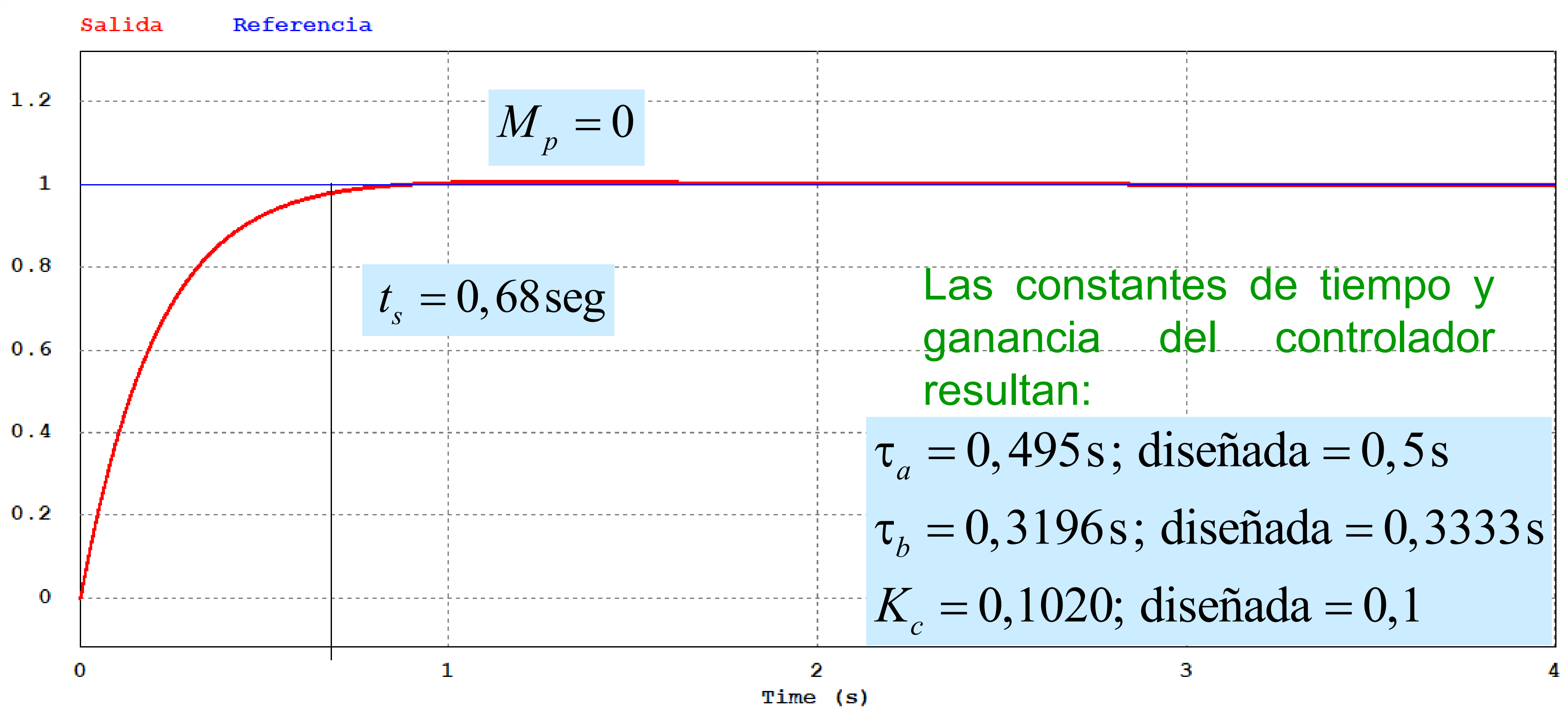
De la expresión de $\tau_a$ se obtiene $C_1$ $\quad C_1 = \dfrac{\tau_a}{R_1} = 1,41\times10^{-6}\ \text{F}$

De la expresión de $\tau_b$ se obtiene $R_2$ $\quad R_2 = \dfrac{\tau_b}{C_2} = 70.922\,\Omega$

Se adoptan los siguientes valores comerciales: $C_1 = 1,5\,\mu\text{F}$ $\quad R_1 = 330\,\text{k}\Omega$ $\quad R_2 = 68\,\text{k}\Omega$

**Resultados de Simulación del PID:** $R_1 = 330\,\mathrm{k\Omega}$ $R_2 = 68\,\mathrm{k\Omega}$ $C_1 = 1{,}5\,\mu\mathrm{F}$ $C_2 = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$

Luego de simulado con los valores adoptados, el tiempo de asentamiento resulta un poco menor a la simulación de Matlab.




Las constantes de tiempo y ganancia del controlador resultan:

$$\tau_a = 0{,}495\,\mathrm{s};\ \text{diseñada} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

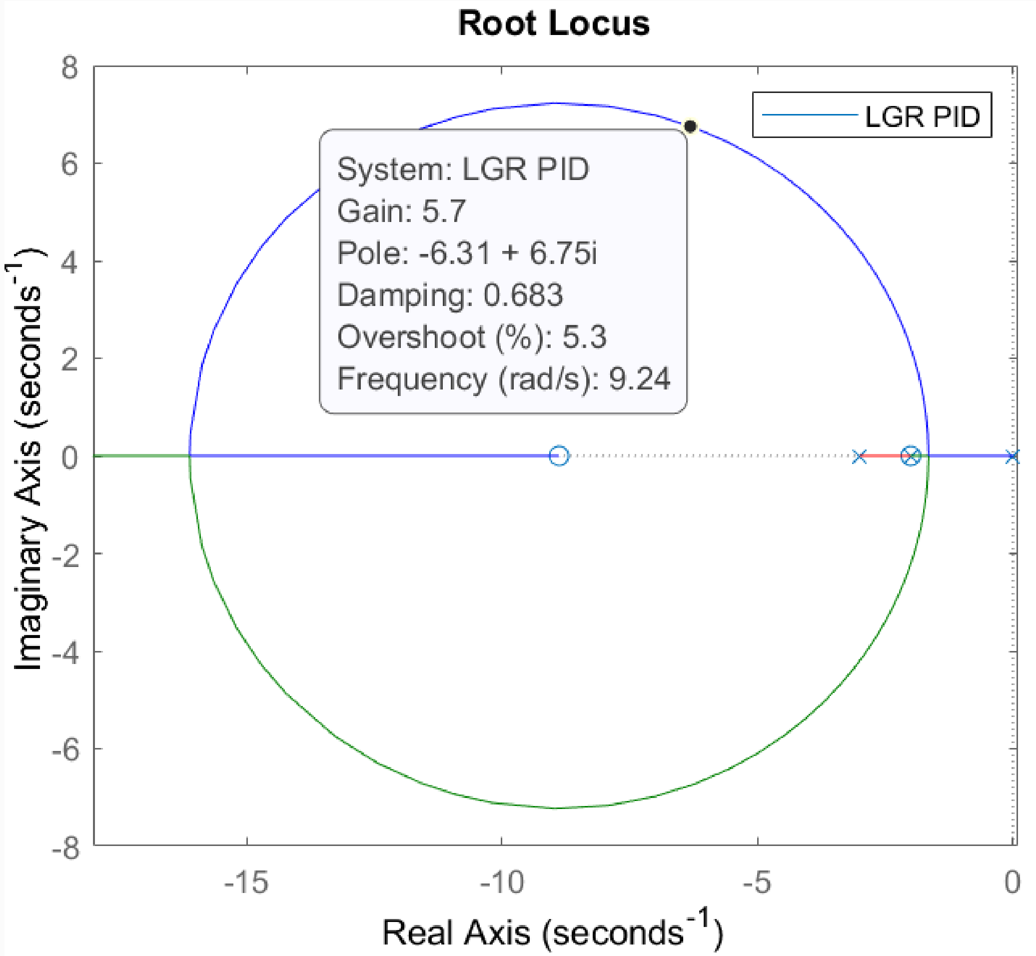
$$\tau_b = 0{,}3196\,\mathrm{s};\ \text{diseñada} = 0{,}3333\,\mathrm{s}$$

$$K_c = 0{,}1020;\ \text{diseñada} = 0{,}1$$

**Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_03_PID.m y lugar_raices_ejemplo_04_PID_1AMPOP_doble_cancelacion.psimsch**

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

En base al primer diseño del PID con el cual el $e_{ssv}$ es del 20%, se toma del LGR una ganancia elevada que permita reducir el error a un valor menor al 10%.




$a = -2\,\text{r/s}$ y $b = -8{,}88\,\text{r/s}$ $K_c = 0{,}0338$

Manteniéndose las frecuencias de los ceros, elegimos un valor de ganancia elevada del lugar de raíces:

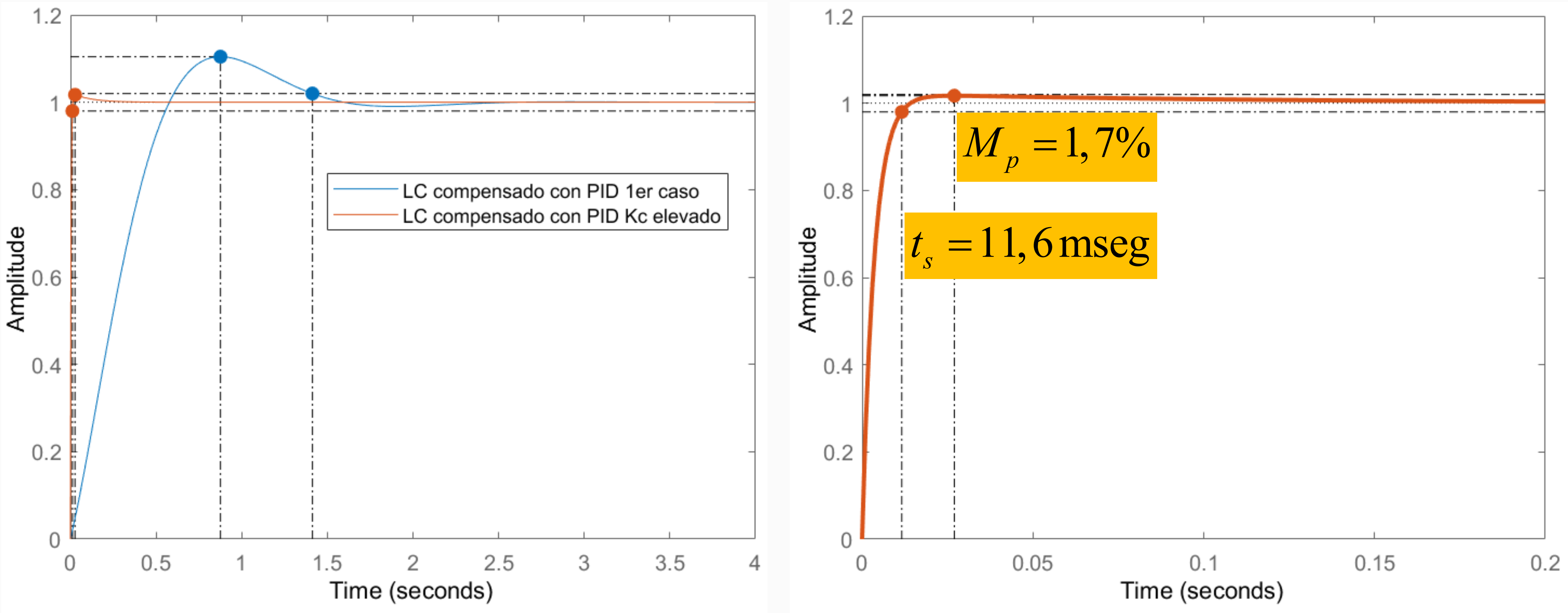
Seleccionamos una ganancia $K_c$ igual a 5,7 y la FT del PID resulta:

$$G_{PID}(s) = 5{,}7\,\frac{(s+2)(s+8{,}8833)}{s}$$

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

Diseño con ganancia de lazo directo elevada

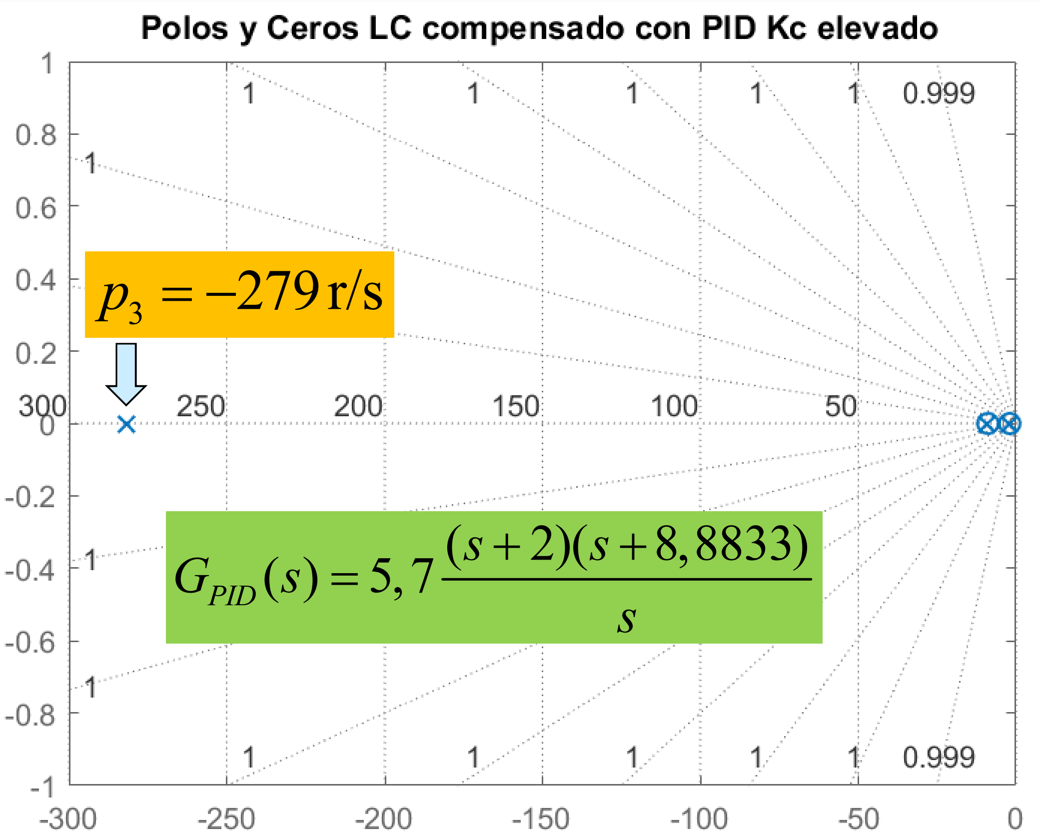
$$G_{PID}(s) = 5,7\frac{(s+2)(s+8,8833)}{s}$$

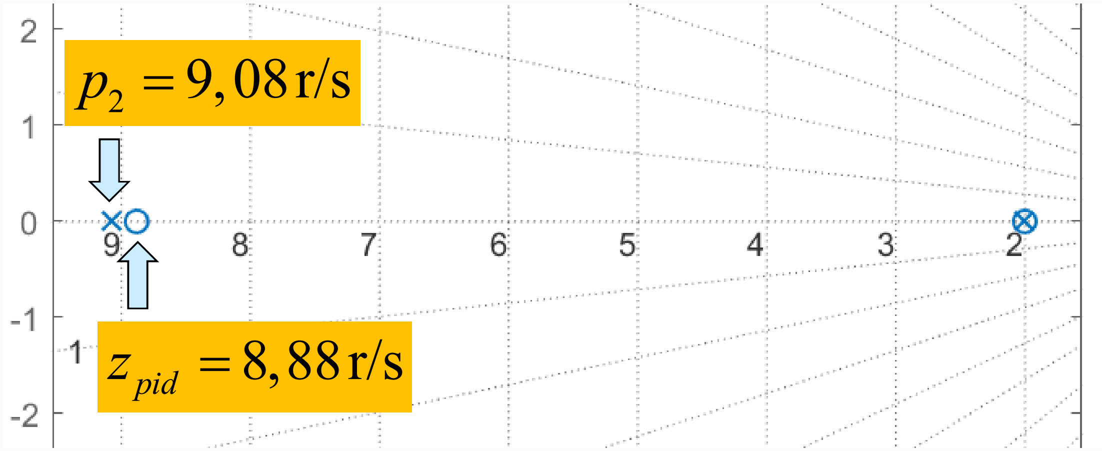


# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces

## Diseño con ganancia de lazo elevada

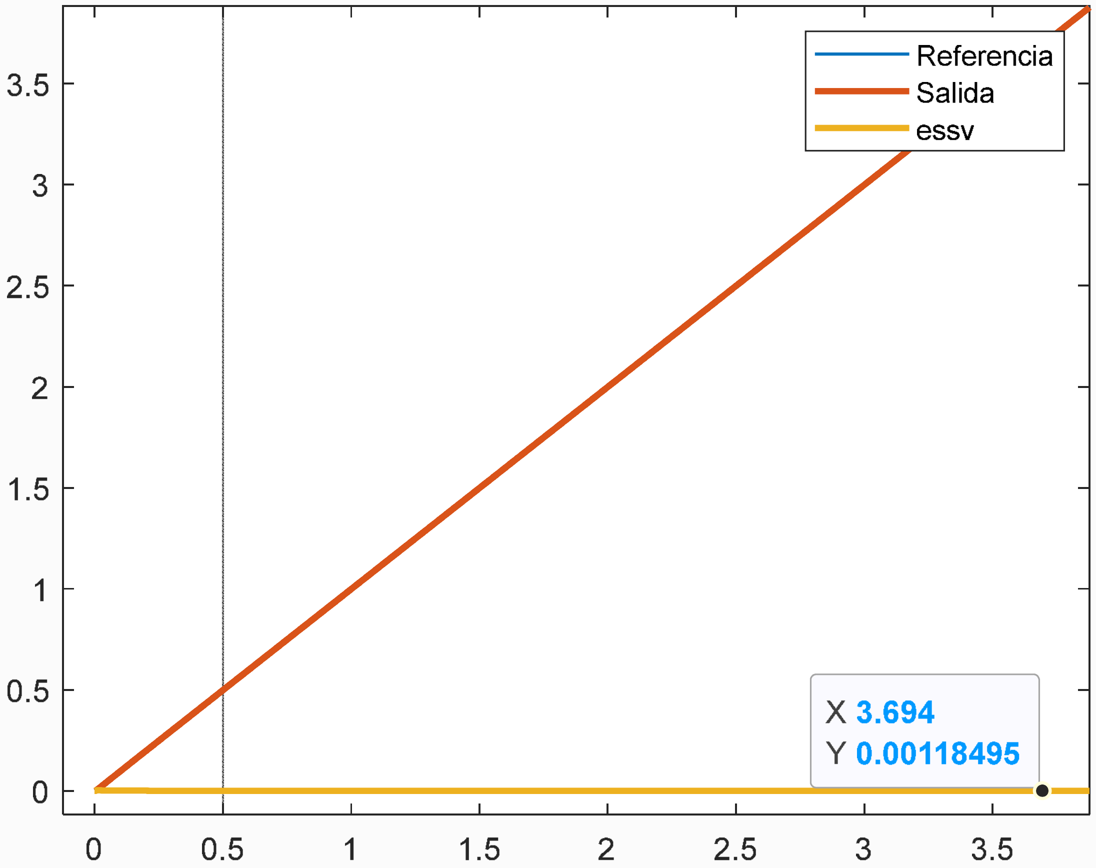
$$G_{LC}(s)=\frac{285(s+8,8833)}{(s+278,9)(s+9,077)}$$




Es posible observar que el polo de LC dominante restante, es prácticamente cancelado por el otro cero del PID, resultando básicamente una respuesta de un sistema de 1er orden, determinada por la ctte. de tiempo del polo $p_3$.

# Diseño de Compensadores PID con Lugar de Raíces




El error de velocidad para entrada en rampa resulta del 0,11%. Puede decirse que es despreciable. Esto se debe al importante incremento de la ganancia del camino directo:

**Observación: El PID es apropiado para reducir el error de velocidad manteniendo un muy buen desempeño transitorio.**

$$K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{285\times(s+8{,}8833)}{\cancel{s}(s+3)} = 843{,}9135$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v}\times 100 = 0{,}1185\%$$

## Diseño y selección de componentes para el circuito electrónico del controlador PID:

Diseño con ganancia del camino directo elevada $\tau_a = 0,5\,\mathrm{s};\ \tau_b = 0,333\,\mathrm{s};\ K_c = 5,7$

$$G_c(s) = \frac{(R_1C_1)(R_2C_2)}{R_1C_2}\frac{\left(s+1/R_1C_1\right)\left(s+1/R_2C_2\right)}{s} \qquad K_c = \frac{\tau_a\,\tau_b}{R_1C_2} \qquad \tau_a = R_1C_1\,;\ \tau_b = R_2C_2$$

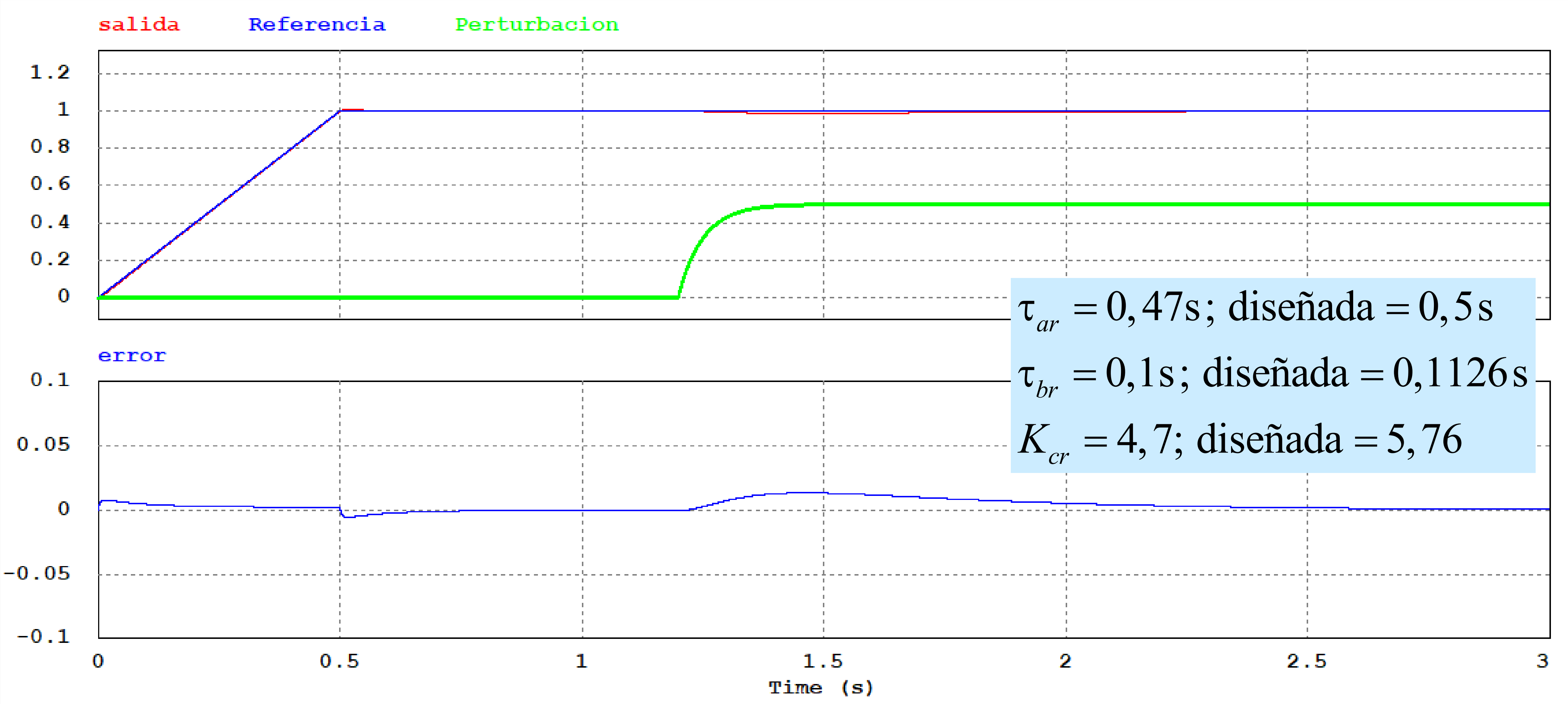
Se adopta el capacitor $C_2$ $\text{con } C_2 = 100\,\mathrm{nF} \rightarrow R_1 = \dfrac{\tau_a\,\tau_b}{K_cC_2} = 98.746\,\Omega$

De la expresión de $\tau_a$ se obtiene $C_1$ $C_1 = \dfrac{\tau_a}{R_1} = 5,0635\times10^{-6}\ \mathrm{F}$

De la expresión de $\tau_b$ se obtiene $R_2$ $R_2 = \dfrac{\tau_b}{C_2} = 1,1257\,\mathrm{M}\Omega$

Se adoptan los siguientes valores comerciales: $C_1 = 4,7\,\mu\mathrm{F}$ $R_1 = 100\,\mathrm{k}\Omega$ $R_2 = 1\,\mathrm{M}\Omega$

## Resultados de Simulación del PID con ganancia elevada:



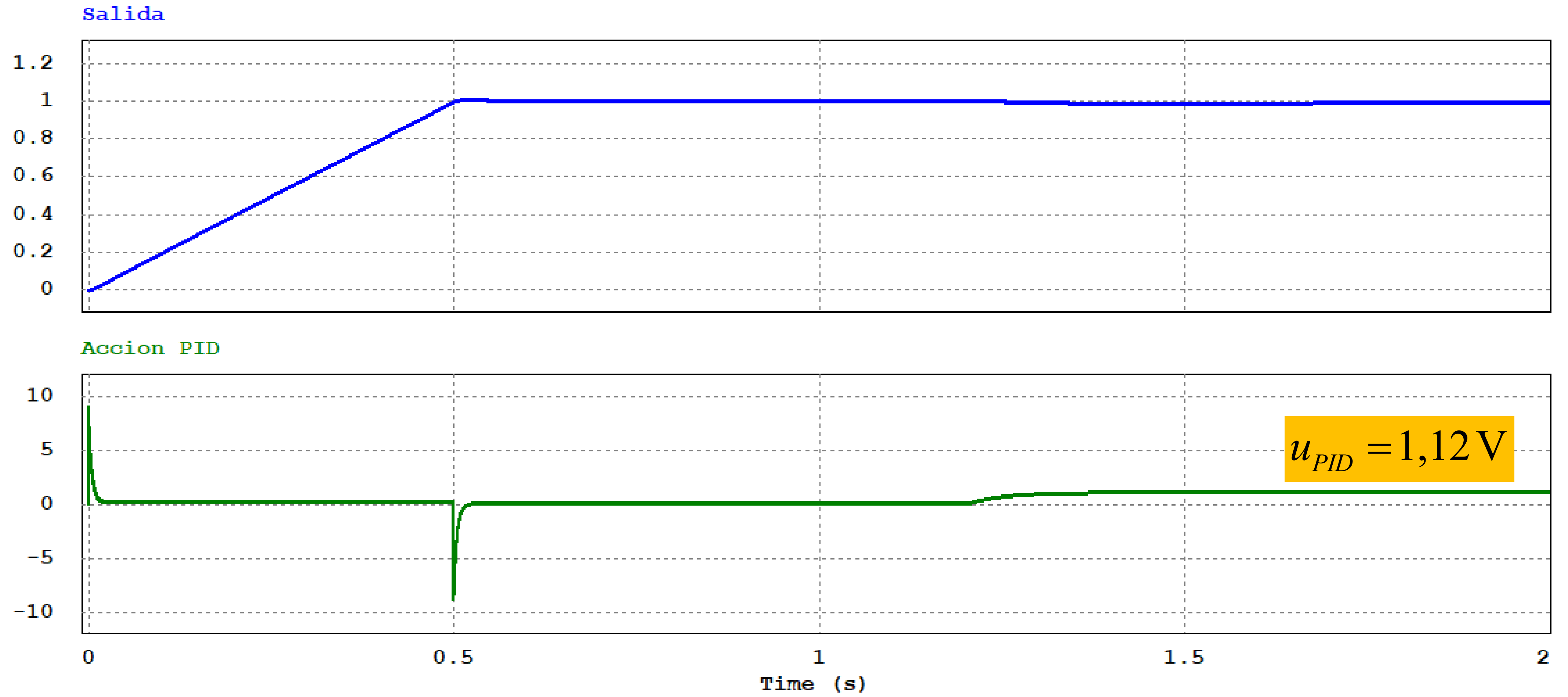

$\tau_{ar} = 0,47\,s$; diseñada $= 0,5\,s$

$\tau_{br} = 0,1\,s$; diseñada $= 0,1126\,s$

$K_{cr} = 4,7$; diseñada $= 5,76$

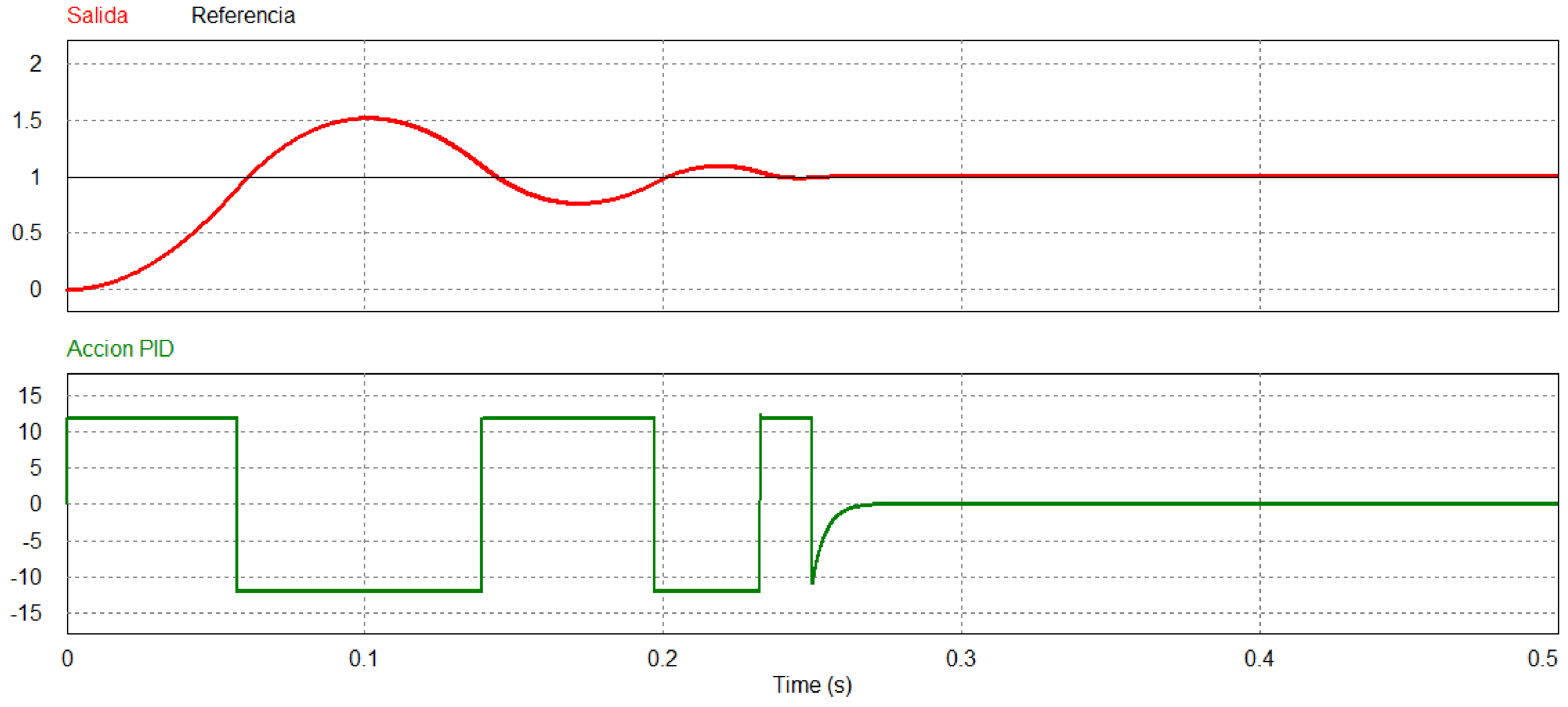
Para esta simulación, ver archivos: lugar_raices_ejemplo_03_PID.m y lugar_raices_ejemplo_04_PID_1AMPOP_Kc_elevado.psimsch

## Resultados de Simulación del PID con ganancia elevada:



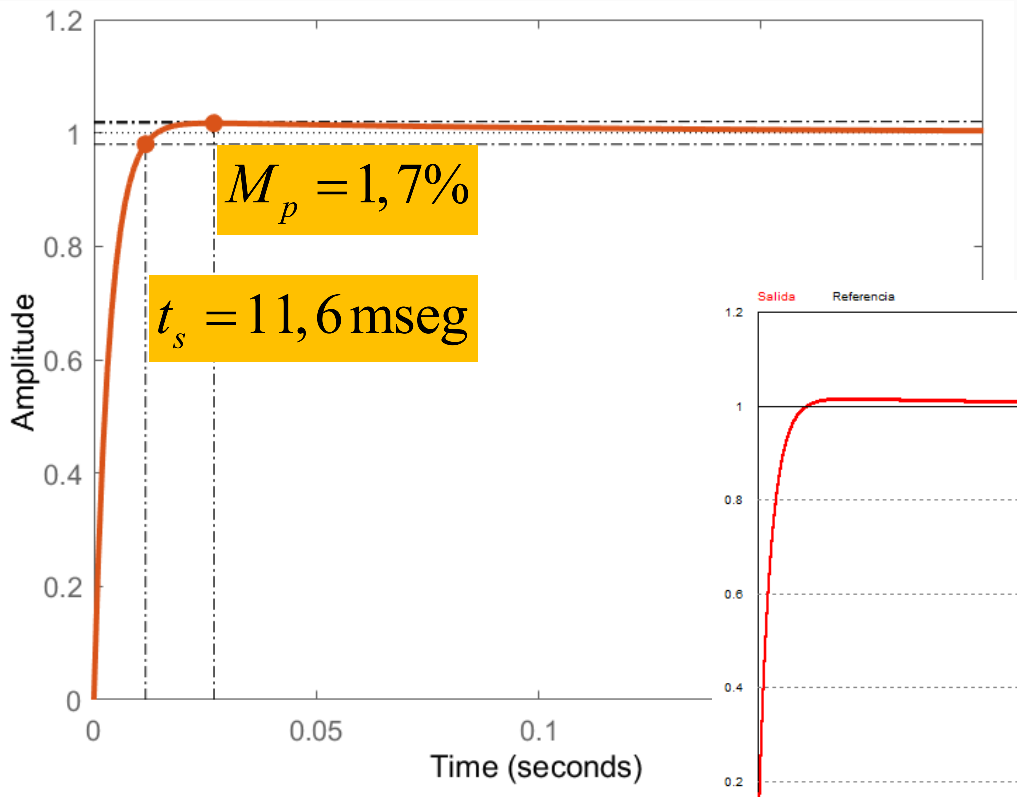

La acción de control no supera los 10 V ni en el arranque ni en el cambio de referencia.

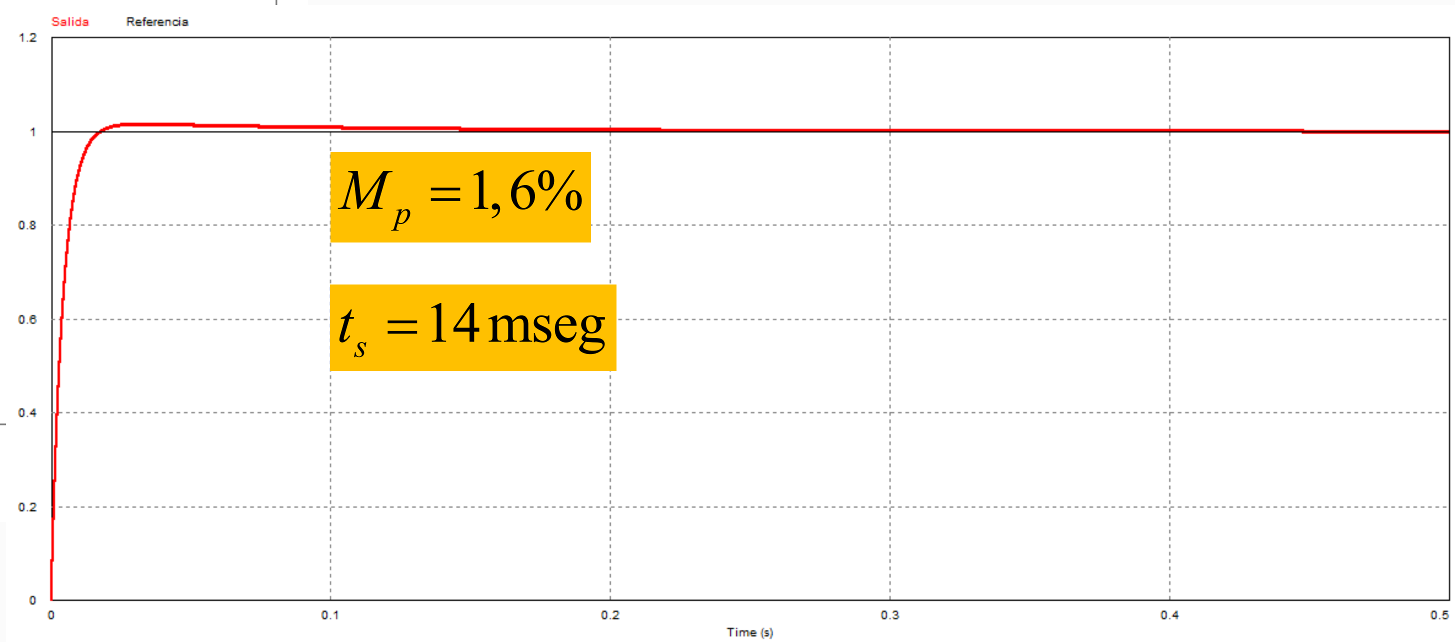
# Resultados de Simulación del PID con ganancia elevada: Referencia en escalón




Es importante observar lo que sucede cuando la referencia aplicada es en escalón, la acción de control resulta limitada varias veces por la saturación de los AMP-OP, provocando la oscilación en la salida por el efecto del aumento de la acción integral. A diferencia del resultado obtenido con la simulación de Matlab, **es que en esta última se considera que la acción de control es no limitada**.

## Resultados de Simulación del PID con ganancia elevada: Referencia en escalón



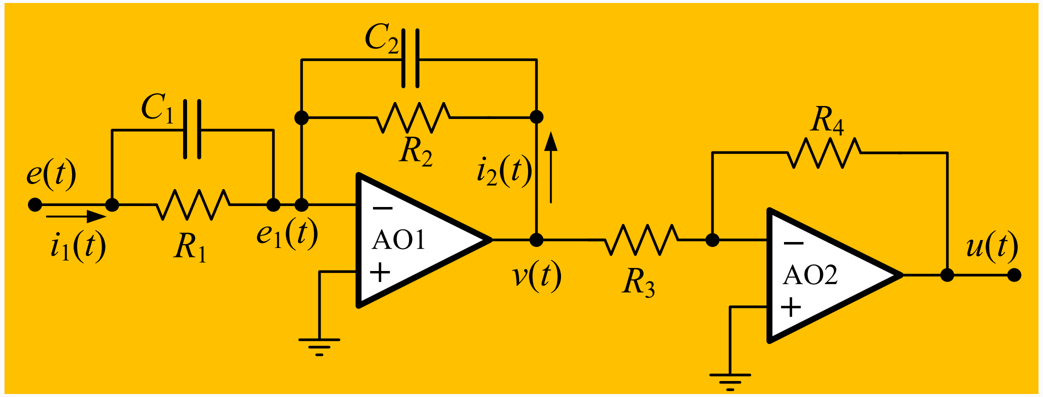




Aquí se observan ambos resultados, obtenidos con la simulación de Matlab y PSIM. En ambas, la acción de control es no limitada. Para obtener este resultado en PSIM debe colocarse un valor elevado de tensión de alimentación de los AMP-OP.

# Diseño de compensadores de adelanto y de atraso de fase

## Compensación de adelanto de fase

Habíamos visto que el circuito representado es una red electrónica que puede producir adelanto de fase en la función de transferencia del camino directo, si:



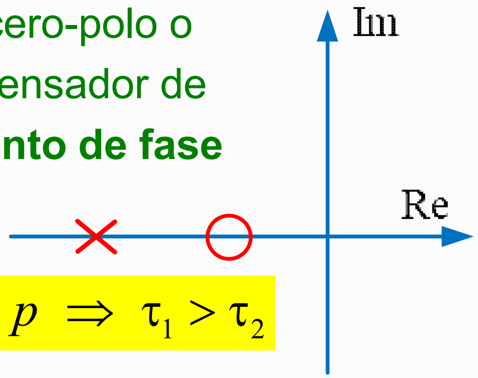

$$\tau_1 > \tau_2, \text{ o sea, si } R_1C_1 > R_2C_2$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1C_1 + 1}{sR_2C_2 + 1} \quad (1)$$

La FT del compensador puede escribirse también:

$$G_c(s) = K_c\alpha \times \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+1/T}{s+1/\alpha T} \quad (2)$$

Red cero-polo o compensador de **adelanto de fase**




Si $z < p \;\Rightarrow\; \tau_1 > \tau_2$

donde: $T = R_1C_1;\ \alpha T = R_2C_2$

donde: $\alpha = \dfrac{R_2C_2}{R_1C_1}$

Es la separación entre el cero y el polo del compensador

La ganancia que aporta este compensador es $K_c\alpha$

siendo $R_1C_1 > R_2C_2 \Rightarrow \alpha < 1$ o sea, $0 < \alpha < 1$

## Características de un compensador de adelanto de fase y cuando usarlo

- ✓ Si se tiene un sistema sin compensar con poca estabilidad relativa y buen desempeño en estado estable.
- ✓ Lo anterior significa que la compensación de adelanto de fase permite incrementar la estabilidad relativa mejorando el amortiguamiento y los tiempos de respuesta.
- ✓ Si el sistema presenta error de régimen estacionario, esta compensación puede ayudar a reducir este error, según la ganancia que aporte a Gla(s).
- ✓ **El aporte de fase** de este compensador **debe cubrir la deficiencia de** fase de la planta en el polo deseado, y esta fase no debería ser mayor a 90° para una única etapa. Si así fuera, debe dividirse la deficiencia de fase en 2 compensadores.
- ✓ **IMPORTANTE:** Si se necesita reducir el error de velocidad del sistema en lazo cerrado, debe tratar de conseguirse el mayor valor de $\alpha$ posible.

## Pasos para el diseño del compensador de adelanto de fase

1. De las especificaciones de desempeño determinar las ubicaciones deseadas de los polos de LC.

2. Mediante el LGR del proceso verificar si es posible cumplir las especificaciones ajustando únicamente una ganancia en serie con la planta. Si esto no es posible, entonces debe calcularse **la deficiencia de fase que debe aportar el compensador de adelanto** para que el nuevo LGR pase por los polos deseados de LC.

3. De la ecuación (2), los parámetros $T$ y $\alpha$ se obtienen **de la condición de ángulo** con la deficiencia calculada en el punto 2 y $K_c$ se determina **de la condición de magnitud**.

4. Si se especifica un $e_{ssv}$ a partir de un dado $K_v$, entonces puede calcularse $K_c$ de la expresión de $K_v$. Obtenidos $\alpha$ y $T$, debe aumentarse lo más posible el valor de $\alpha$ para obtener el mayor $K_v$ posible.

5. Una vez diseñado el compensador, verificar que se cumplan las especificaciones de desempeño. Si no se cumplen, repetir el procedimiento ajustando el polo y el cero y consecuentemente la ganancia $K_c$ hasta hacerlas cumplir.

## Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

Considérese el siguiente proceso: $G_p(s) = \dfrac{4}{s(s+2)}$

En LC: $G_{lc\_sc}(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{4}{s^2 + 2s + 4}$

Las raíces del polinomio característico son: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ con $\xi = 0,5$ $y$ $\omega_n = 2\,\text{r/s}$

El error de velocidad resulta:

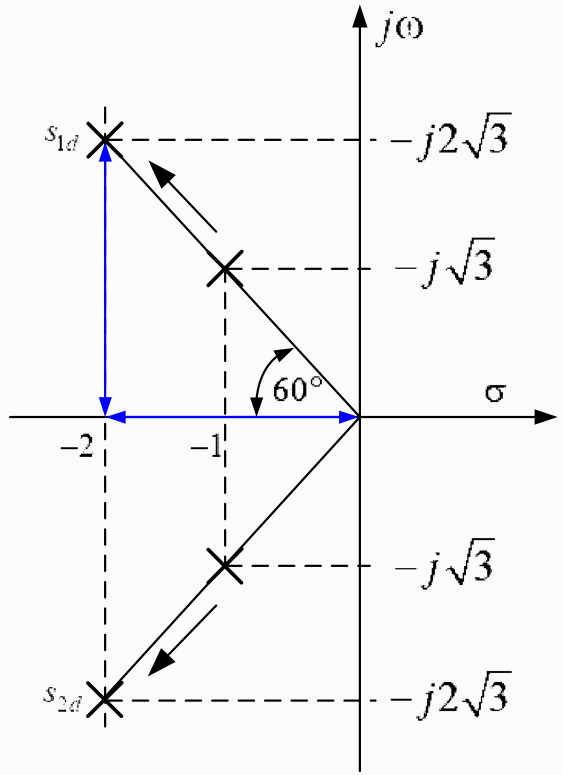
$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{4}{s(s+2)} = 2\,\text{seg}^{-1} \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 50\%$$

Se imponen las siguientes especificaciones de desempeño:

$\omega_n = 4\,\text{r/s}$ $y$ $\xi = 0,5$

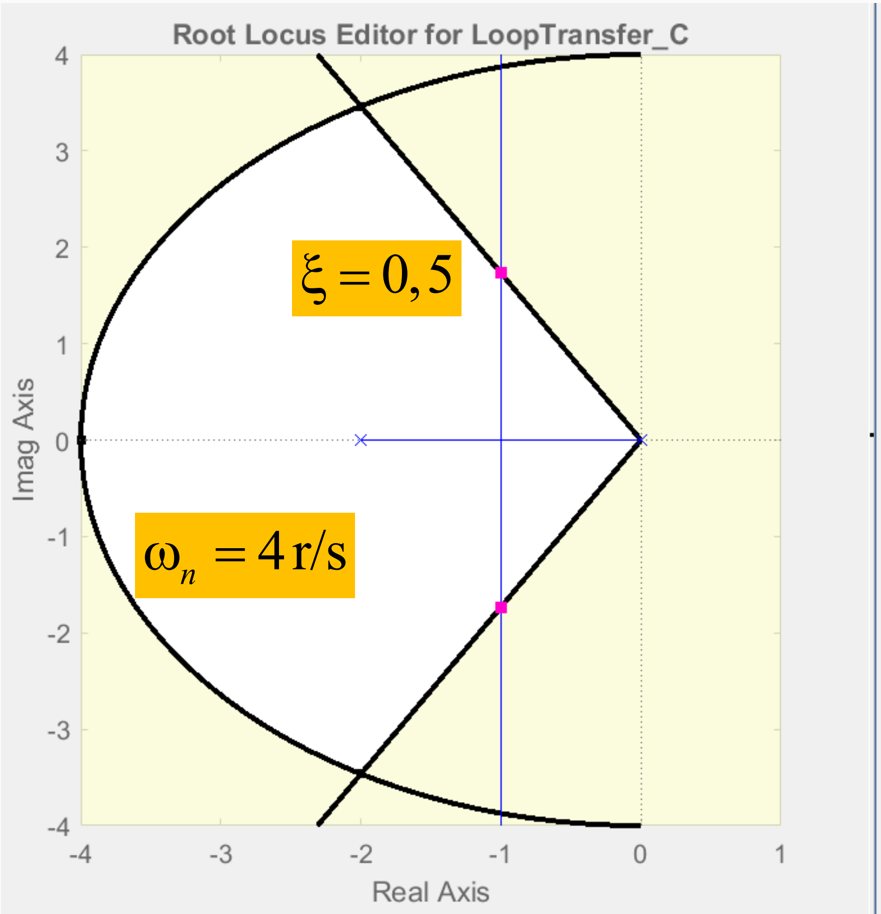
$s_{1,2d} = -2 \pm j2\sqrt{3}$

$$t_r \cong \frac{1,8}{4\,\text{r/s}} = 0,45\,\text{seg} \;\; y \;\; M_p = 16,3\%$$



# Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

Lugar de raíces y región deseada de polos de LC: $G_p(s) = \dfrac{4}{s(s+2)}$



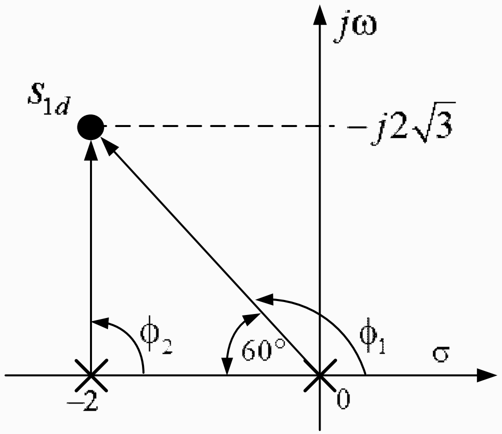


No pueden imponerse los polos de LC deseados solamente ajustando una ganancia.

## Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

La FT de lazo abierto a considerar, es la siguiente: $G_{la}(s) = K_c \frac{s+1/T}{s+1/\alpha T} \frac{4}{s(s+2)}$

Calculo la deficiencia de fase en $s_{1d}$, utilizando la condición de fase: $\measuredangle G_{la}(s_{1d}) = \pm\pi$



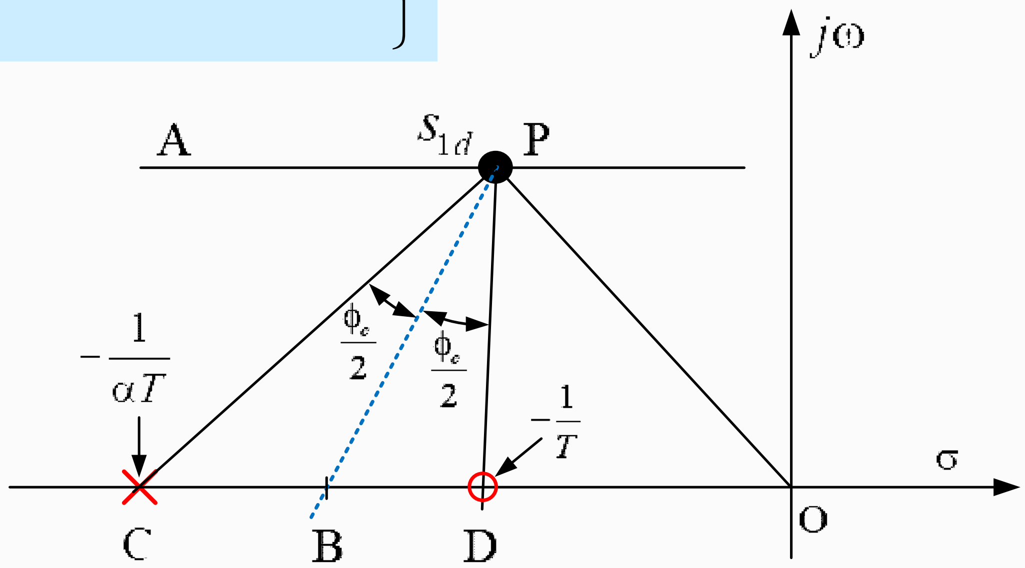

$$\left.\begin{aligned} \measuredangle \left.\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s=s_{1d}} &= -\phi_1 - \phi_2 = -(180° - 60°) - 90° \\ \phi_{planta} &= -210° \end{aligned}\right\}$$

$$\phi_c + \phi_{planta} = -180°$$

$$\phi_c = -180° + 210° = 30°$$

$$\frac{\phi_c}{2} = 15°$$

Método gráfico de obtención de $T$ y $\alpha$

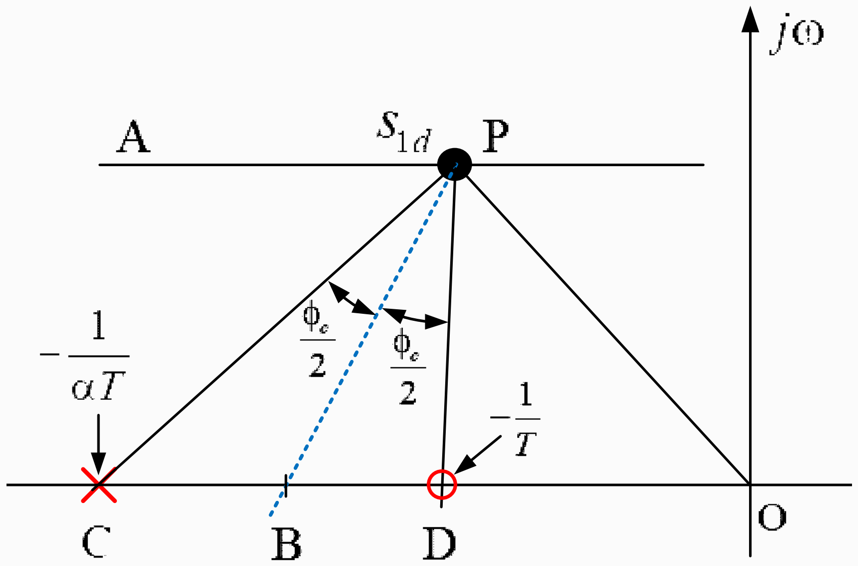


# Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

Del método gráfico se obtienen entonces:

$z_c = -2,9\,\text{r/s}$ $\quad p_c = -5,4\,\text{r/s}$

$T = \dfrac{1}{2,9} = 0,345\,\text{s}$ $\quad \alpha T = \dfrac{1}{5,4} = 0,185\ \text{s};\ \alpha = \dfrac{0,185}{0,345} = 0,537$




La FTLA resulta entonces $G_{la}(s) = \dfrac{K_c(s+2,9)}{(s+5,4)} \dfrac{4}{s(s+2)}$

Se aplica la condición de magnitud para hallar la ganancia que permite cumplir las especificaciones

$$\left|\frac{K_c 4(s+2,9)}{s(s+5,4)(s+2)}\right|_{s_{1d}} = 1 \;\Rightarrow\; K_c = \frac{|s||s+5,4||s+2|}{4|s+2,9|} = 4,675$$

$$K_c\alpha = 2,51$$

Finalmente el compensador resulta:

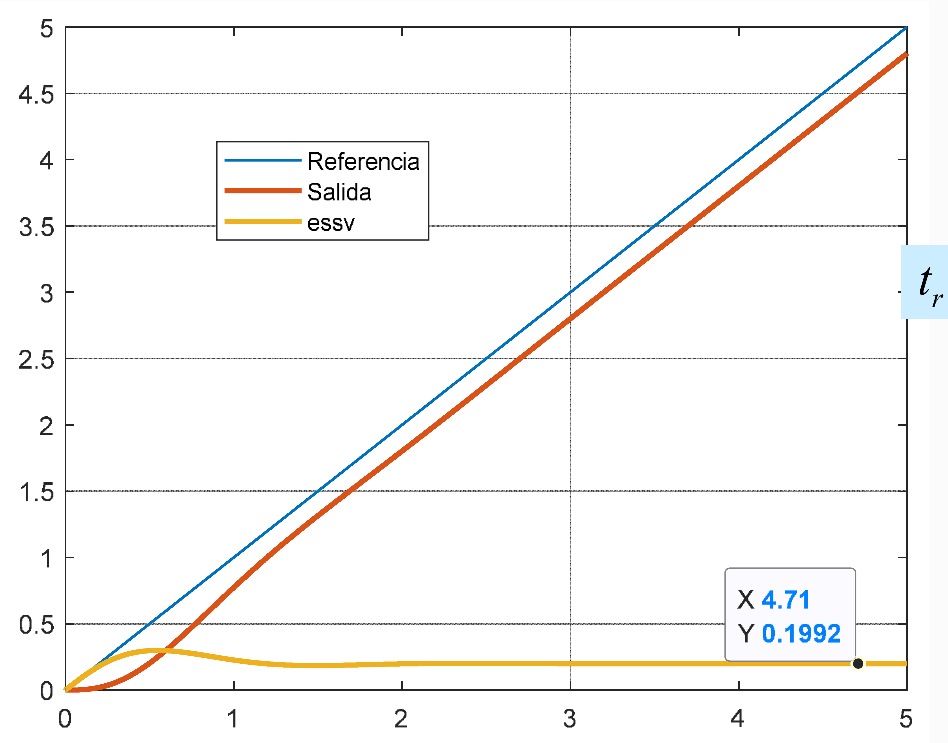
$$G_c(s) = 4,675 \times \frac{s+2,9}{s+5,4}$$

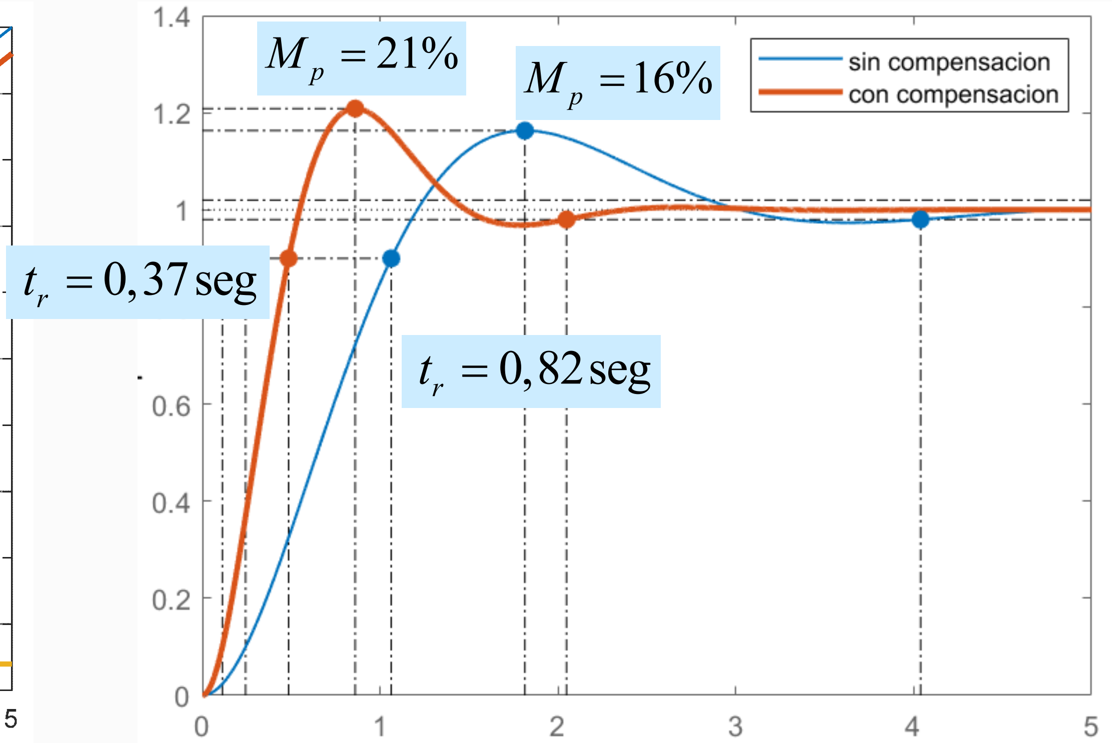
$$G_c(s) = 2,51 \times \frac{0,345\,s+1}{0,185\,s+1}$$

# Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

¿Como resulta el error de velocidad?

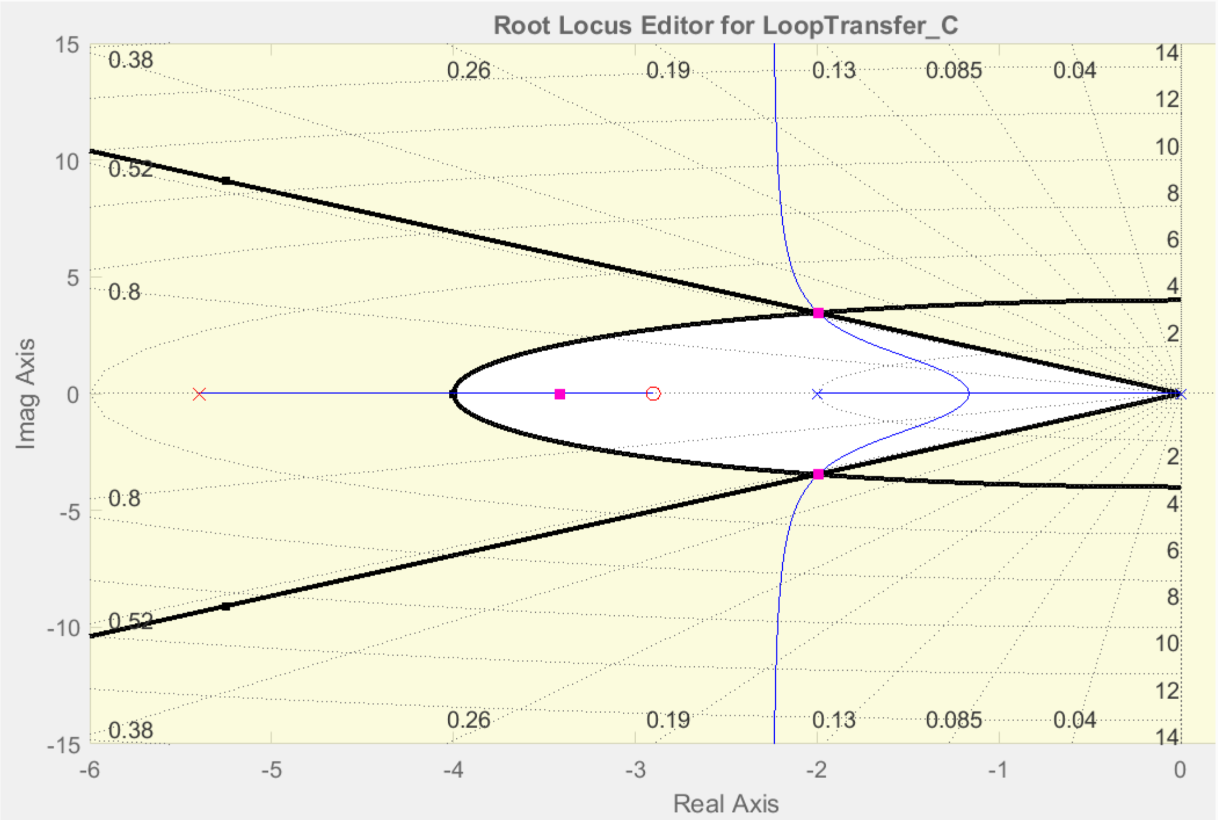
$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{4 \times 4,675(s+2,9)}{s(s+2)(s+5,4)} = 5,02\,\text{seg}^{-1} \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K_v} < 20\%$$

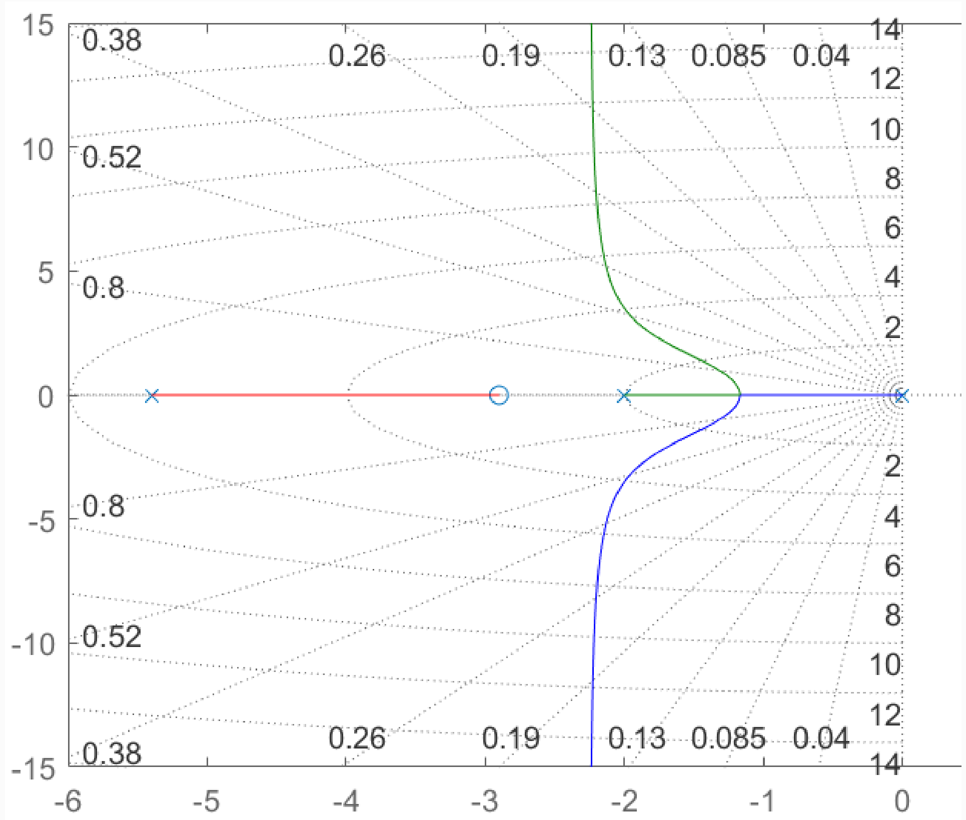


# Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

## Lugar Geométrico de las Raíces y Región Deseada de polos de LC

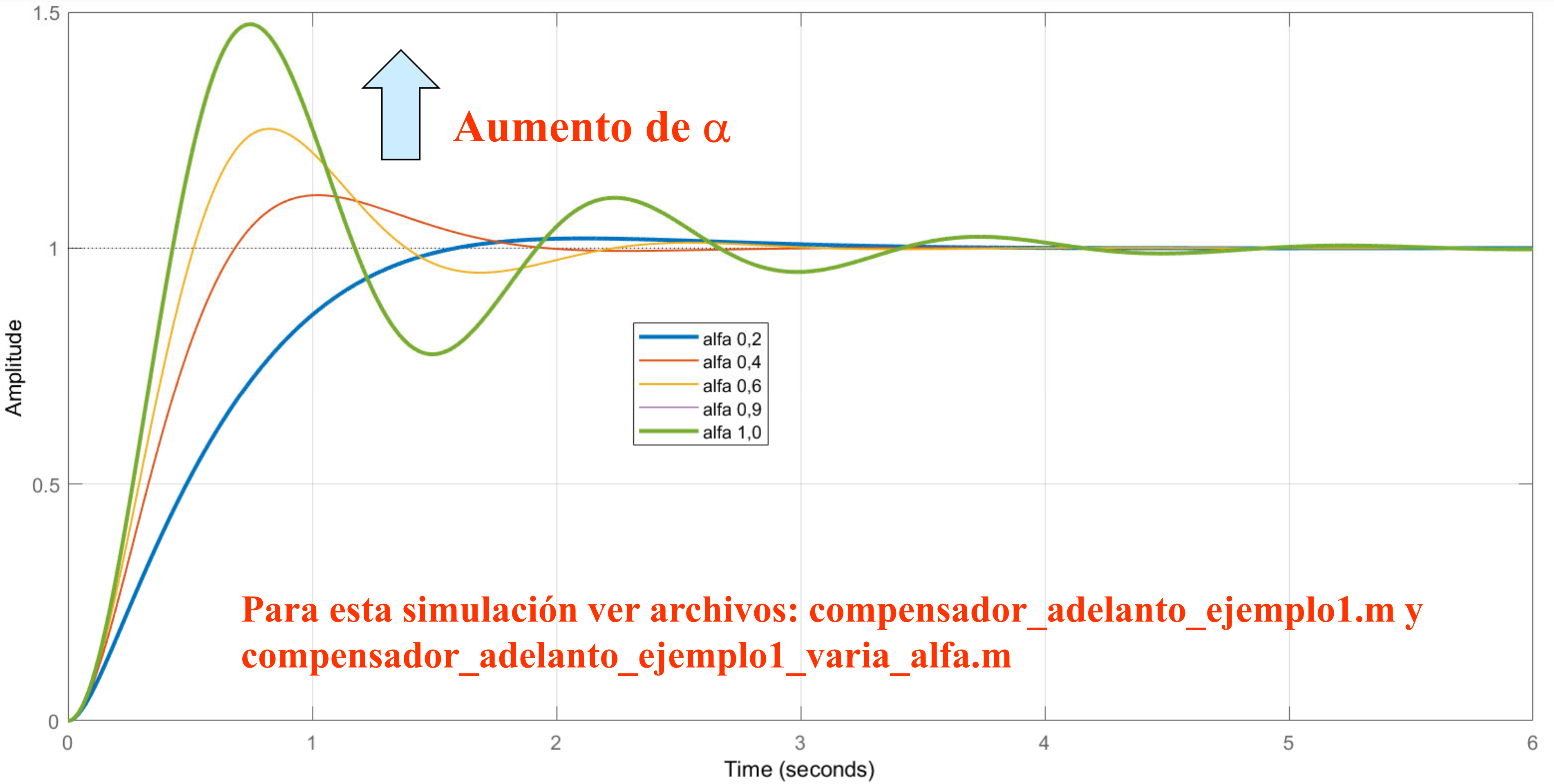



Polos de LC resultantes:
$$G_{lc}(s)=\frac{18,7(s+2,9)}{(s+3,41)(s+2+j3,45)(s+2-j3,45)}$$

# Diseño de compensadores de adelanto de fase: Ejemplo

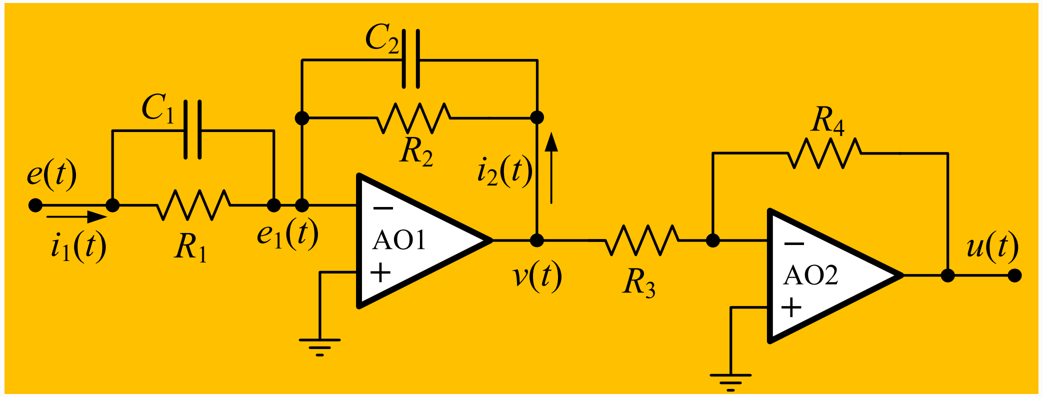
Efecto de la variación del parámetro α




**Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_ejemplo1.m y compensador_adelanto_ejemplo1_varia_alfa.m**

# Diseño de compensadores de adelanto y de atraso de fase

## Diseño y selección de los componentes del circuito electrónico




$$\tau_1 = T = R_1 C_1 \;\; y \;\; \tau_2 = \alpha T = R_2 C_2$$

$$\alpha T = 0{,}185 \text{ s}; \; \alpha = 0{,}537; \; T = 0{,}3448 \text{ s}$$

$$C_1 = 2{,}2\,\mu\text{F} \qquad R_1 = \frac{T}{C_1} = 156.730\,\Omega$$

$$C_2 = 1\,\mu\text{F} \qquad R_2 = \frac{\alpha T}{C_2} = 185.160\,\Omega$$

$$K_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = 2{,}51 \quad R_3 = 10\,\text{k}\Omega \quad R_4 = \frac{2{,}51 \times R_1 R_3}{R_2} = 21.273\,\Omega$$

Valores comerciales adoptados: $R_1 = 150\,\text{k}\Omega$ $R_2 = 180\,\text{k}\Omega$ $R_4 = 22\,\text{k}\Omega$

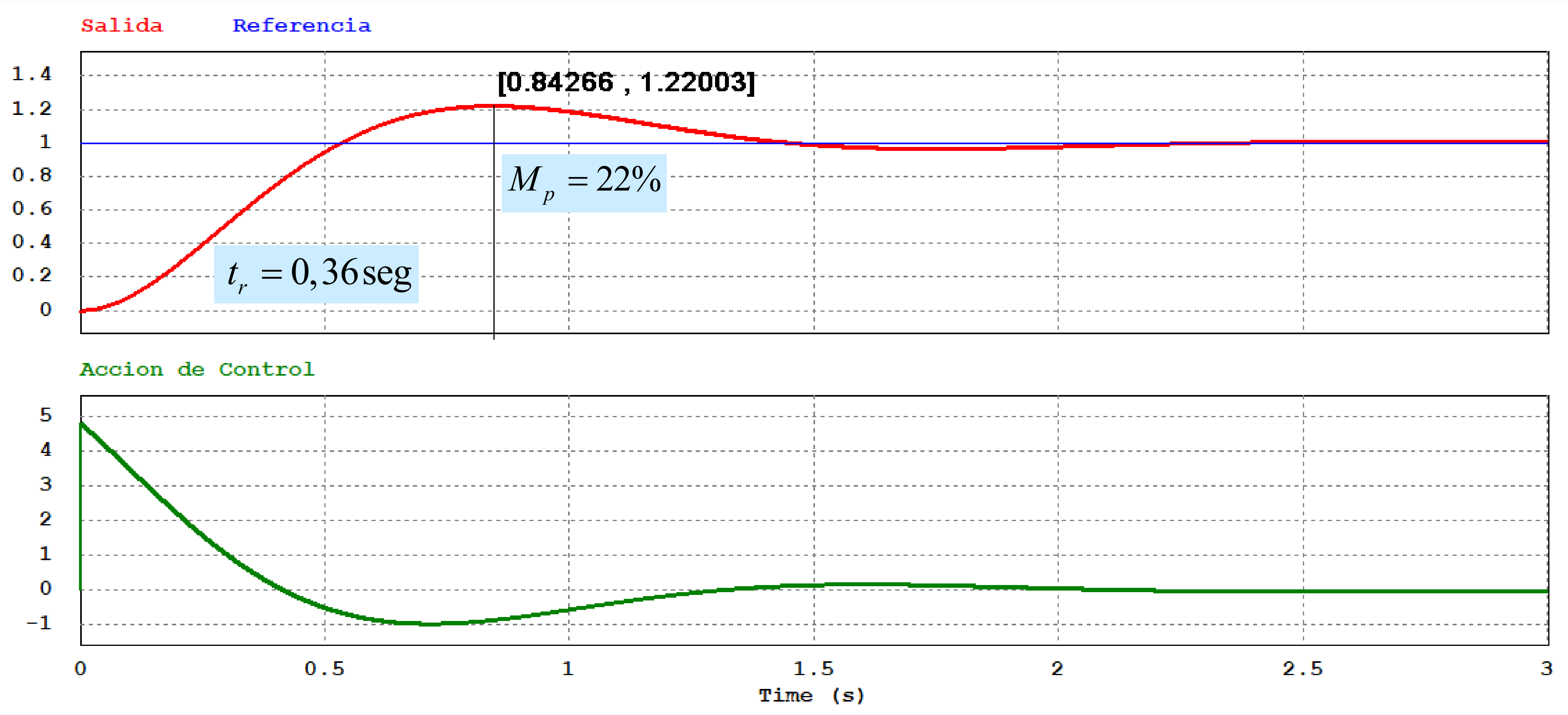
$$T = R_1 C_1 = 0{,}33\,\text{s}$$

$$\alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} = \frac{0{,}18\,\text{s}}{0{,}33\,\text{s}} = 0{,}5455$$

$$K_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = 2{,}64$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 2{,}64 \times \frac{0{,}33\,s + 1}{0{,}18\,s + 1}$$

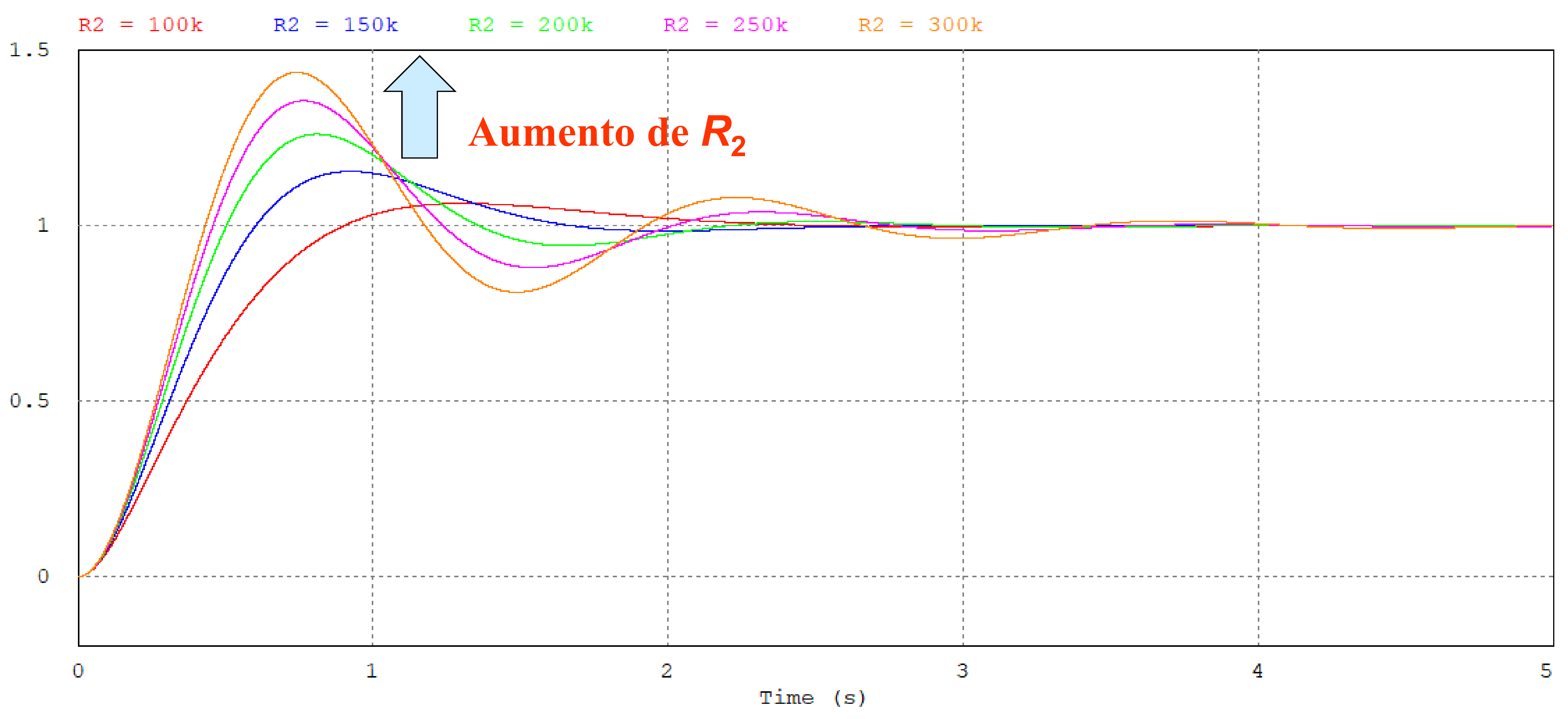
# Resultados con el circuito electrónico y valores comerciales




**Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_clase_OPAMP.psimsch**

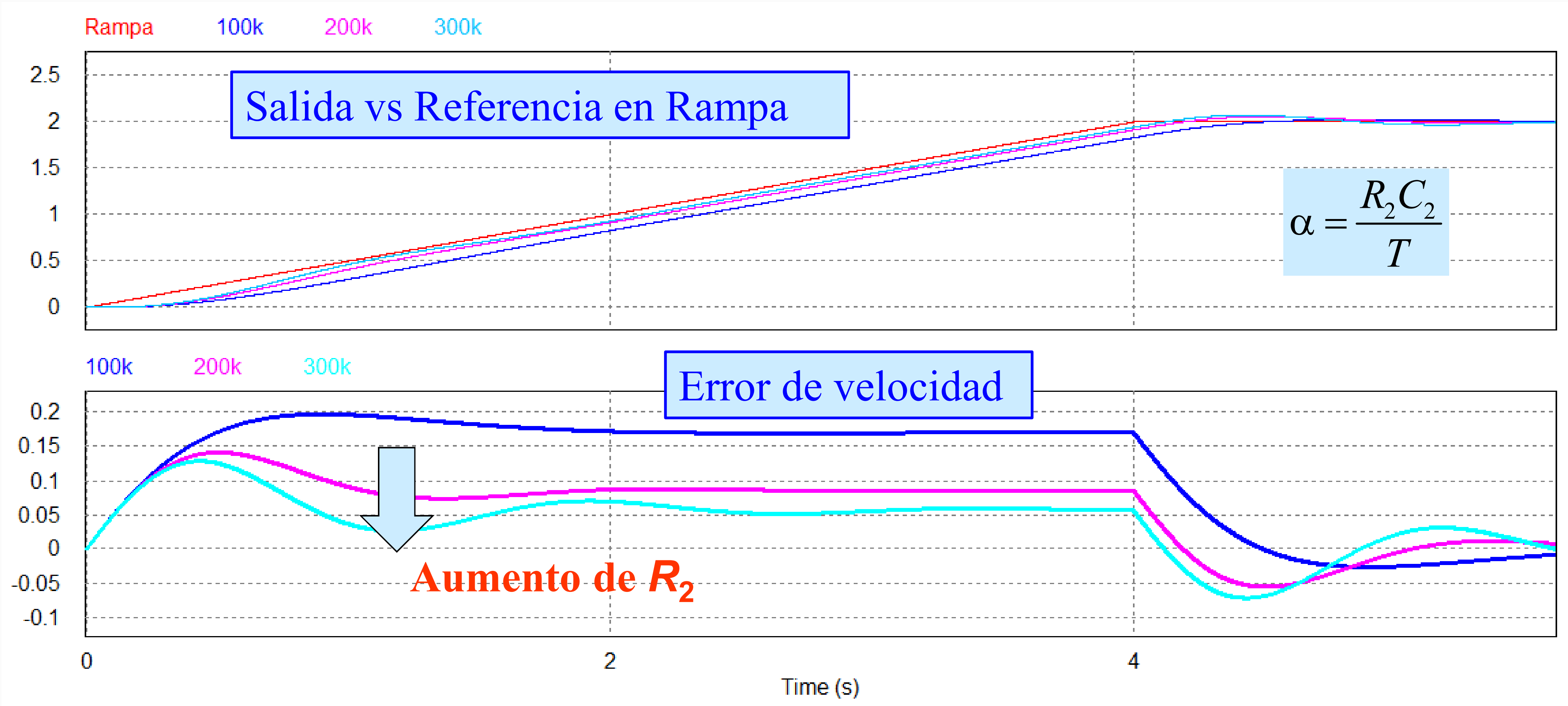
## Resultados con el circuito electrónico y valores comerciales:
## Se varía el resistor $R_2$ para variar $\alpha$

$$\alpha = \frac{R_2 C_2}{T}$$




Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_clase_OPAMP_var_alfa.psimsch

**Resultados con el circuito electrónico y valores comerciales: Se varía el resistor $R_2$ para variar $\alpha$. Se observa como reduce el $e_{ssv}$ a medida que aumenta $R_2$ y proporcionalmente lo hace $\alpha$.**

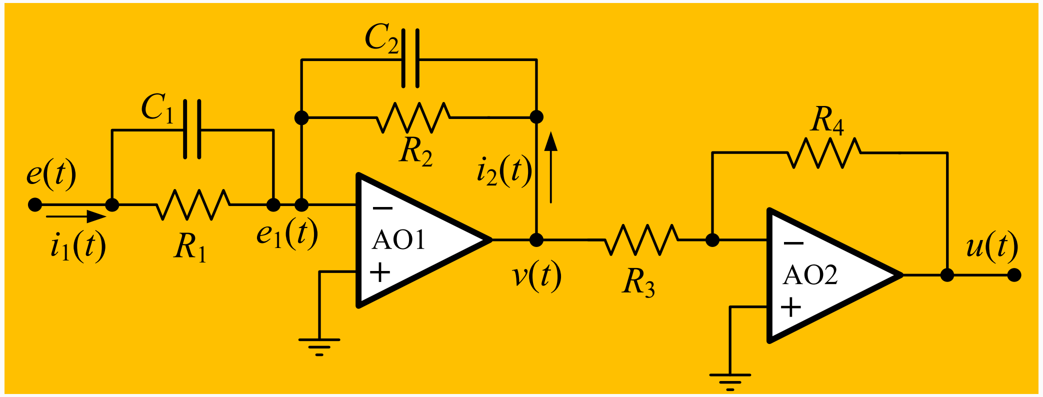



Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_clase_OPAMP_var_alfa.psimsch

# Diseño de compensadores de adelanto y de atraso de fase

## Compensación de atraso de fase

Habíamos visto que el circuito representado es una red electrónica que puede producir atraso de fase en la función de transferencia de camino directo, si:



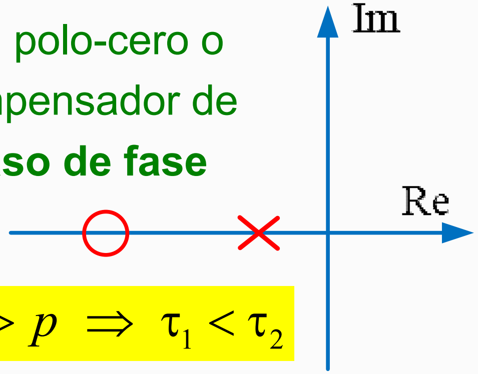

$\tau_1 < \tau_2$, o sea, si $R_1C_1 < R_2C_2$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1C_1 + 1}{sR_2C_2 + 1} \quad (1)$$

Para evitar confusión se utiliza $\beta$ en vez de $\alpha$:

$$G_c(s) = K_c\beta \times \frac{Ts+1}{\beta Ts + 1} = K_c\frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} \quad (3)$$

Red polo-cero o compensador de **atraso de fase**




Si $z > p \;\Rightarrow\; \tau_1 < \tau_2$

donde: $T = R_1C_1;\ \beta T = R_2C_2$

donde: $\beta = \dfrac{R_2C_2}{R_1C_1}$

Es la separación entre el cero y el polo

La ganancia que aporta este compensador es $K_c\beta$

siendo $R_1C_1 < R_2C_2 \Rightarrow \beta > 1$

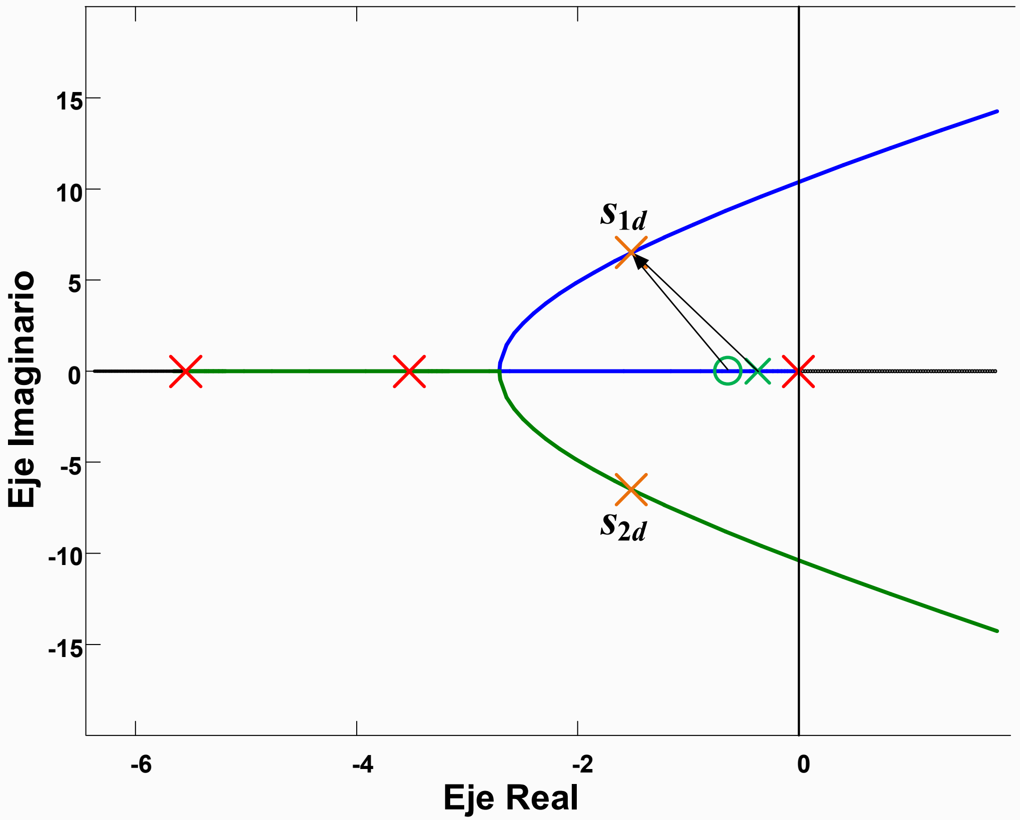
## Características de un compensador de atraso de fase y cuando usarlo

- ✓ Si se tiene un sistema compensado con buena estabilidad relativa, pero presenta mal desempeño en estado estable.
- ✓ Permite incrementar la ganancia de lazo abierto del sistema ya compensado sin alterar significativamente el desempeño transitorio.
- ✓ Para esto, **el aporte de fase** de este compensador **no debería ser mayor a los 5°** por ejemplo.
- ✓ **IMPORTANTE PARA EL DISEÑO:** El cero y el polo del compensador deben ubicarse muy próximos uno del otro y próximos al origen del plano-s.

$$\left|G_c(s)\right| = \left|K_c \frac{s+1/T}{s+1/\beta T}\right|_{s_{1d}} \simeq K_c\beta$$

- ✓ Si la ganancia $K_c$ se hace unitaria, la característica transitoria no se alterará significativamente y la ganancia total se incrementa en la magnitud de $\beta$.

# Características de un compensador de atraso de fase




La proximidad del cero y el polo al origen hace posible obtener valores grandes de $\beta$.

La constante de tiempo T debe ser lo suficientemente grande para que los polos se ubiquen próximos al origen.

La ganancia estática de velocidad $K_v$ puede aumentarse de forma importante si se obtiene un valor de $\beta$ grande.

La ganancia $K_v$ del sistema previamente compensado es

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG_{la}(s)$$

Al incorporar la FT (3) se tiene el nuevo $K_v$

$$K'_V = \lim_{s\to 0} sG_{la}(s)G_c(s)$$

$$K'_V = \lim_{s\to 0} K_c\beta \times \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} K_V = K_c\beta K_V$$

Si $K_c \approx 1$, el $K_v$ se incrementa en el valor de $\beta$.

# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

Considérese el siguiente proceso:

$$G_p(s) = \frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)}$$

En LC los polos son:

$$s_{1,2} = -0{,}33 \pm j0{,}58$$

$$s_3 = -2{,}34$$

El error de velocidad resulta:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{1{,}06}{s(s+1)(s+2)} = 0{,}53\,\text{seg}^{-1} \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 188\%$$

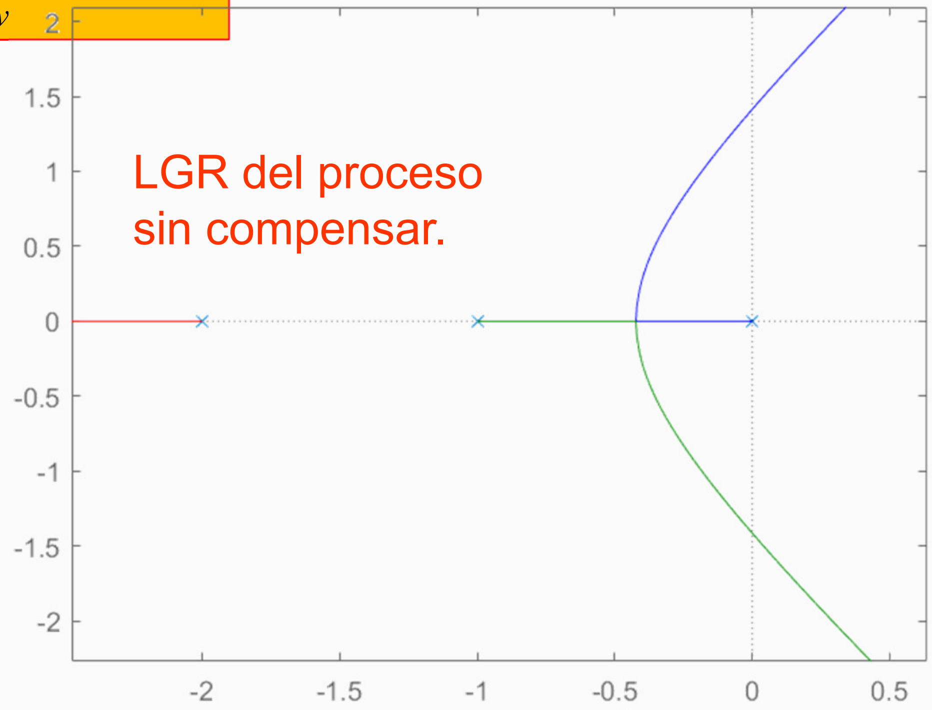
El factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural resultan:

$$\omega_n = 0{,}673\,\text{r/s} \quad y \; \xi = 0{,}49$$

Se imponen las siguientes especificaciones:

$$1\text{-}\; K_V' \geq 5\,\text{seg}^{-1} \Rightarrow e_{ssv} \leq 20\%$$

2 - No debe alterarse la dinámica transitoria de la respuesta al escalón.



# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

- Siendo: $K'_V = K_c \beta K_v = 5\,\mathrm{seg}^{-1}$ debe aumentarse la ganancia del camino directo en 10 veces o más, esto implica seleccionar un $\beta \geq 10$, haciendo $K_c \approx 1$.
- Se elije a continuación una constante de tiempo $T$ = 10 seg.

$$z_c = \frac{1}{T} = -0{,}1\,\mathrm{r/s} \quad y \quad p_c = \frac{1}{\beta T} = -0{,}01\,\mathrm{r/s}$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s+0{,}1}{s+0{,}01}$$

- Dado que no se debe alterar la dinámica del proceso en LC, los polos dominantes son los polos deseados de LC que determinan las características transitorias.

$$s_{1,2d} = -0{,}33 \pm j0{,}58$$

- Calculando los aportes angulares del cero y del polo del compensador en $s_{1d}$:

$$\measuredangle(s_{1d}+0{,}1) = 111{,}47° \text{ y } \measuredangle(s_{1d}+0{,}01) = 118{,}67°$$

$$\text{fase } G_c(s) = 118{,}67° - 111{,}47° = 7{,}2°$$

- Como es mayor a los 5° adoptamos $T$ = 20 seg: $G_c(s) = K_c \dfrac{s+0{,}05}{s+0{,}005}$

## Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

- Calculando los aportes angulares del cero y del polo del compensador en $s_{1d}$:

$$\sphericalangle(s_{1d}+0,1)=115,57° \quad \text{y} \quad \sphericalangle(s_{1d}+0,01)=119,05°$$

$$\text{fase } G_c(s)=3,47°$$

- Para calcular $K_c$ se aplica la condición de magnitud en $s_{1d}$:

$$K_c=\left|\frac{(s+0,005)}{(s+0,05)}\right|_{s_{1d}} \cong 1,03$$

- Los polos dominantes resultantes con este compensador, son: $s_{1,2d}=-0,312\pm j0,55$

- Con la ganancia $K_c$ calculada, $K_v$ resulta: $K_V'=K_vK_c\beta=5,47\,\text{seg}^{-1}$ $\quad e_{ssv}=18,26\%$

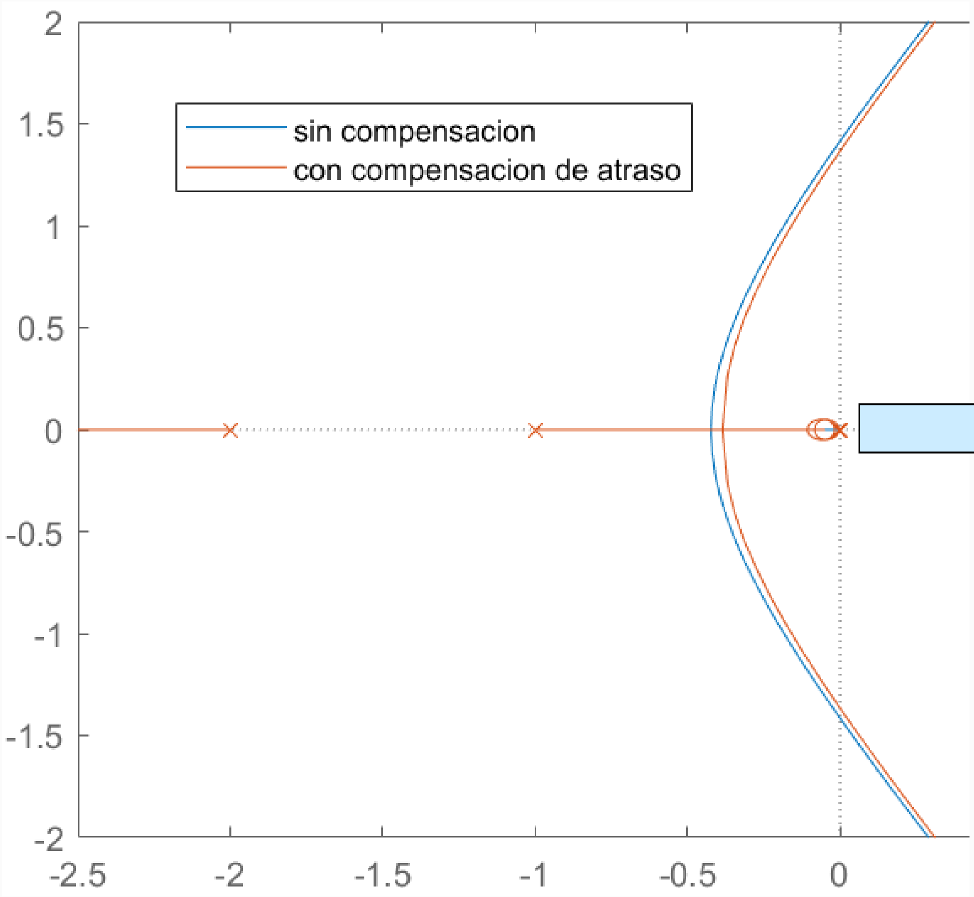
- La FTLC y polos dominantes resultan:

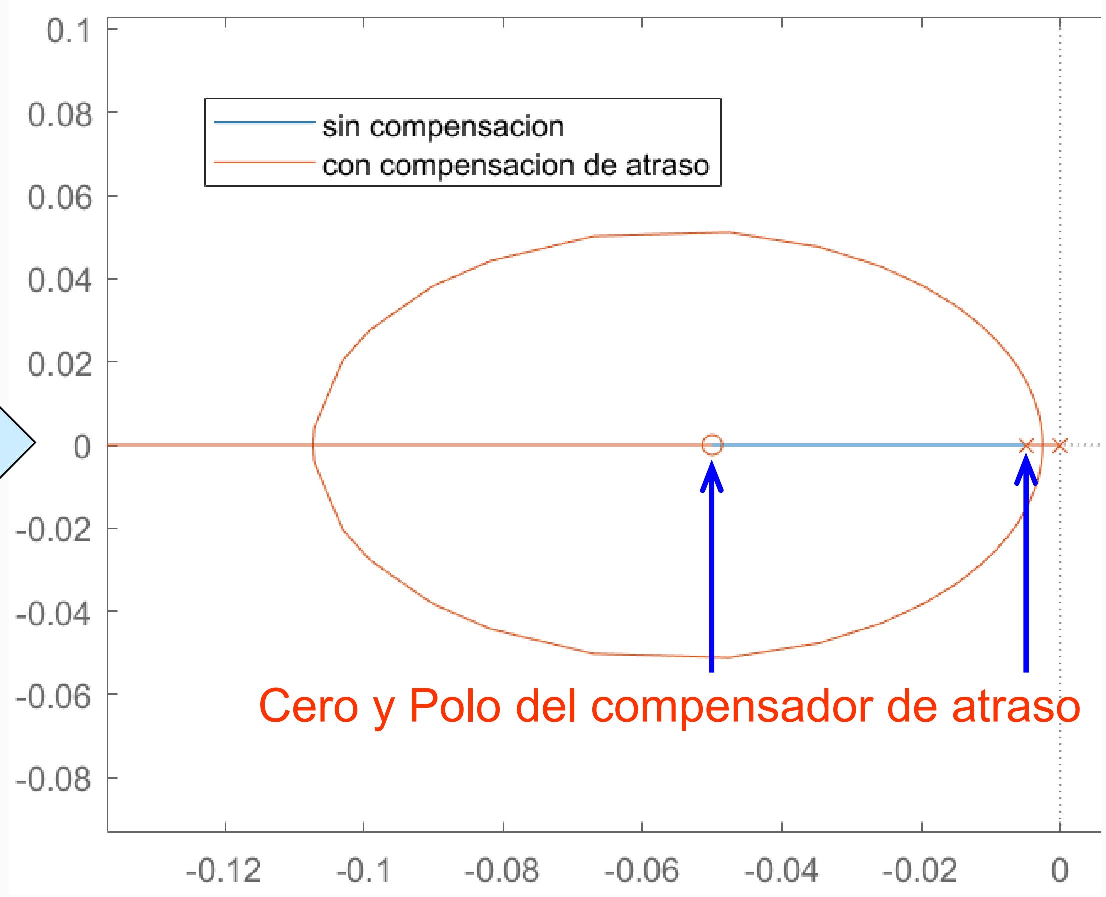
$$G_{lc}(s)=\frac{1,0282(s+0,05)}{(s+2,3)(s+0,055)(s+0,31+j0,55)(s+0,31-j0,55)}$$

$$p_{d1}=-2,3 \qquad p_{d2}=-0,055$$

# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

## Resultados



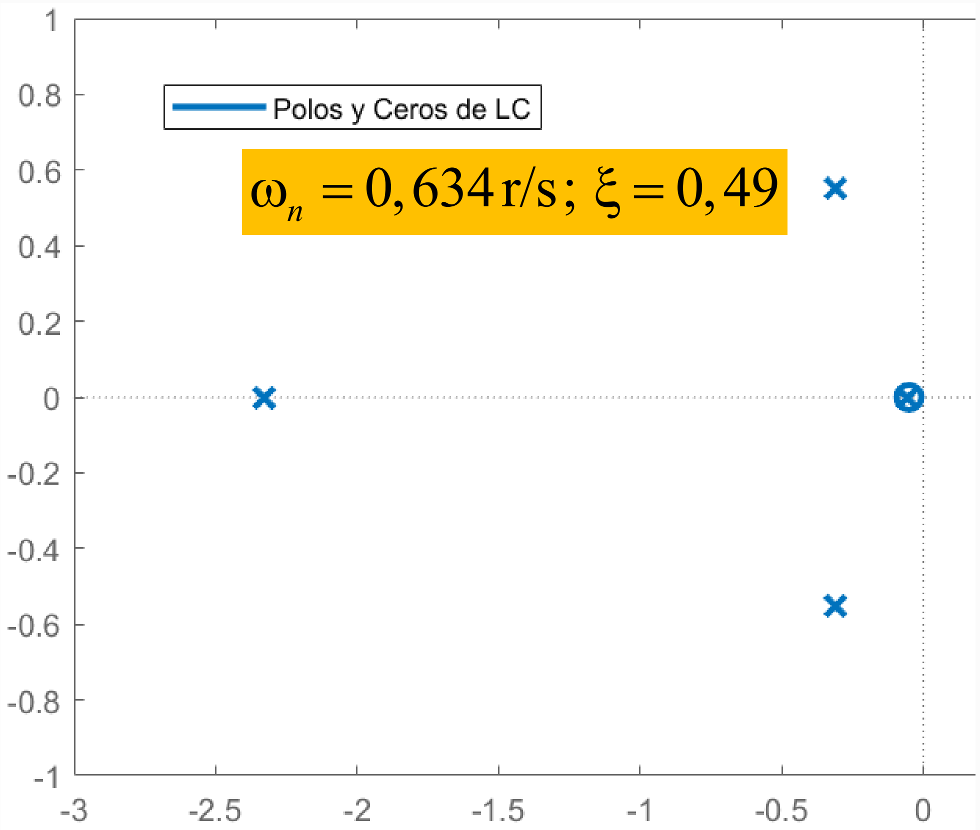

**Para esta simulación ver archivos: compensador_atraso.m**

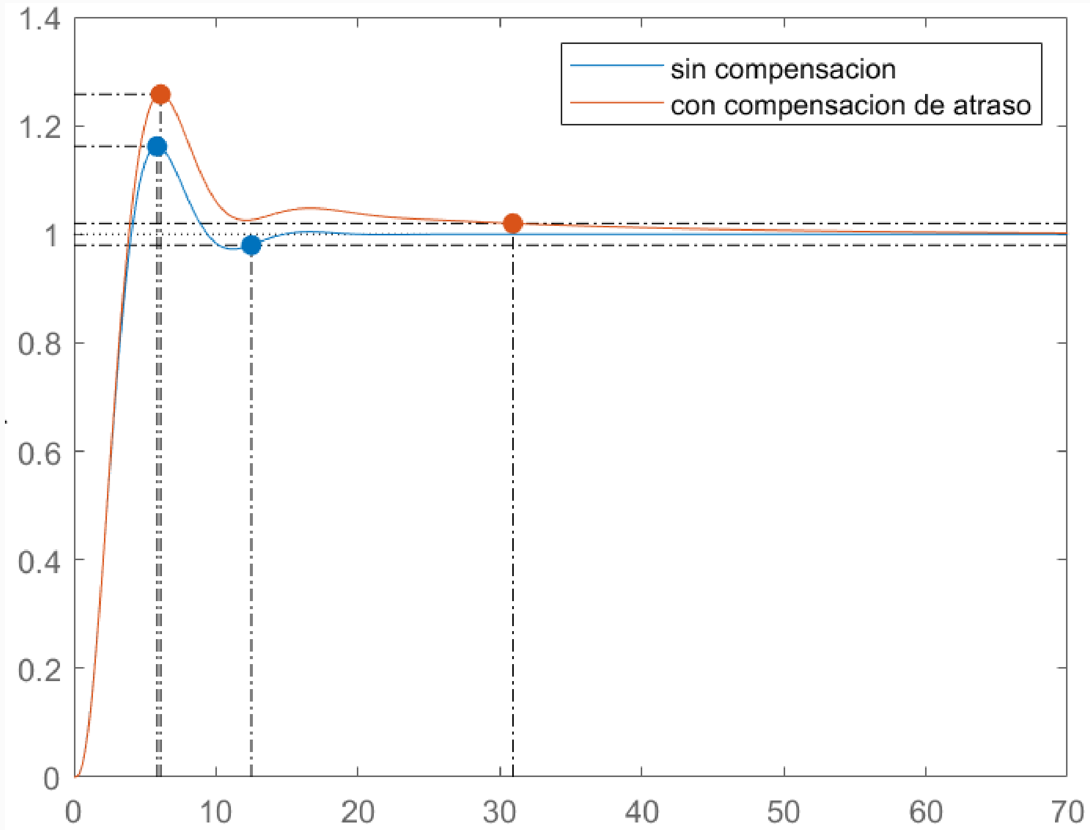
# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

## Resultados

$\omega_n$ es un 6% menor $\Rightarrow t_s$ mayor

$K_v$ aumenta y la ganancia de LA aumenta $\Rightarrow M_p$ es mayor

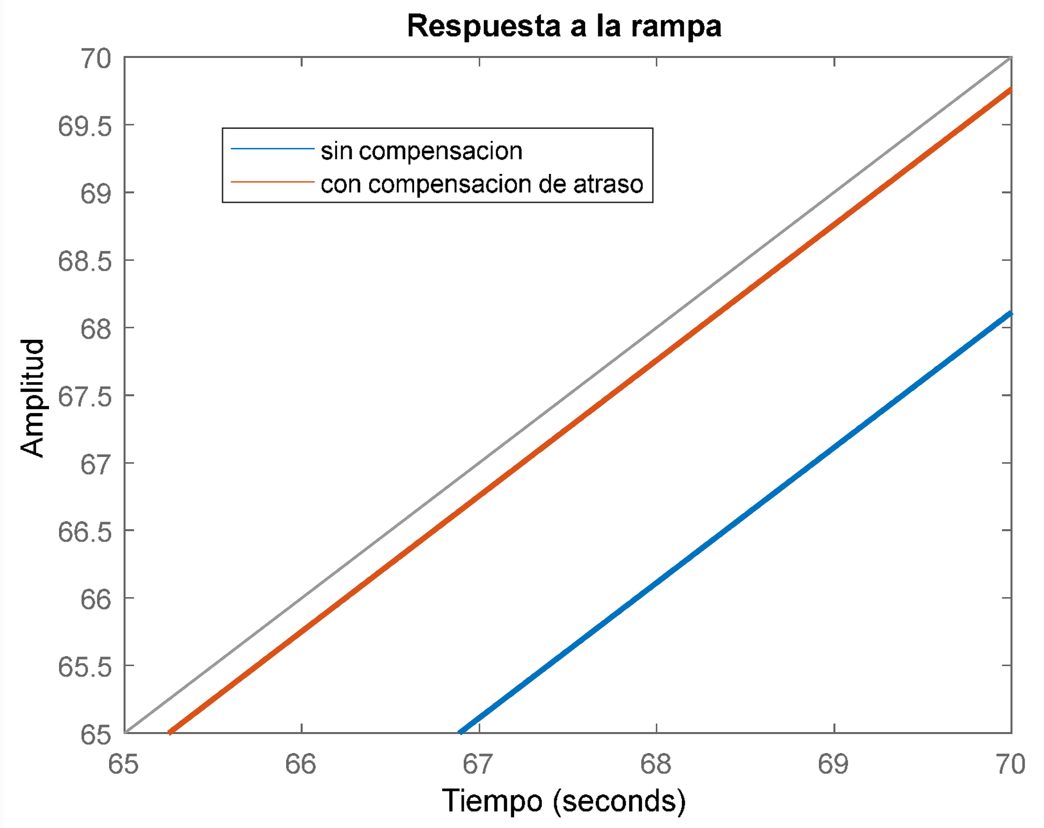


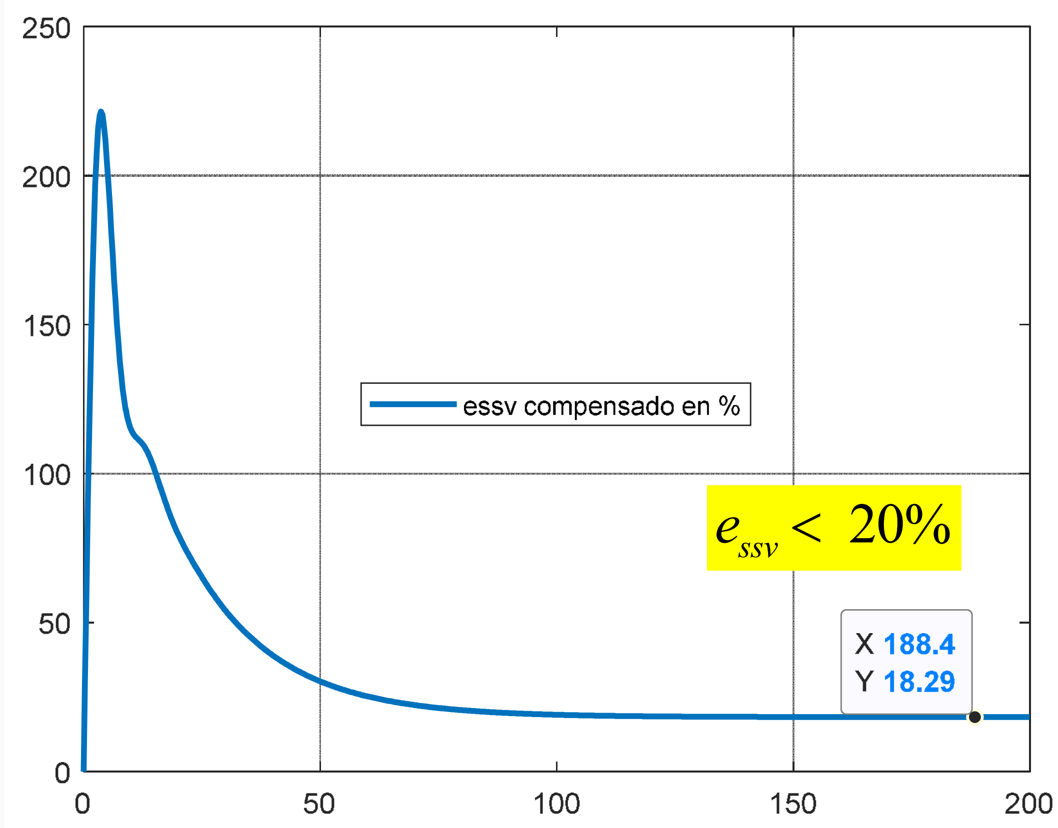



# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

## Resultados

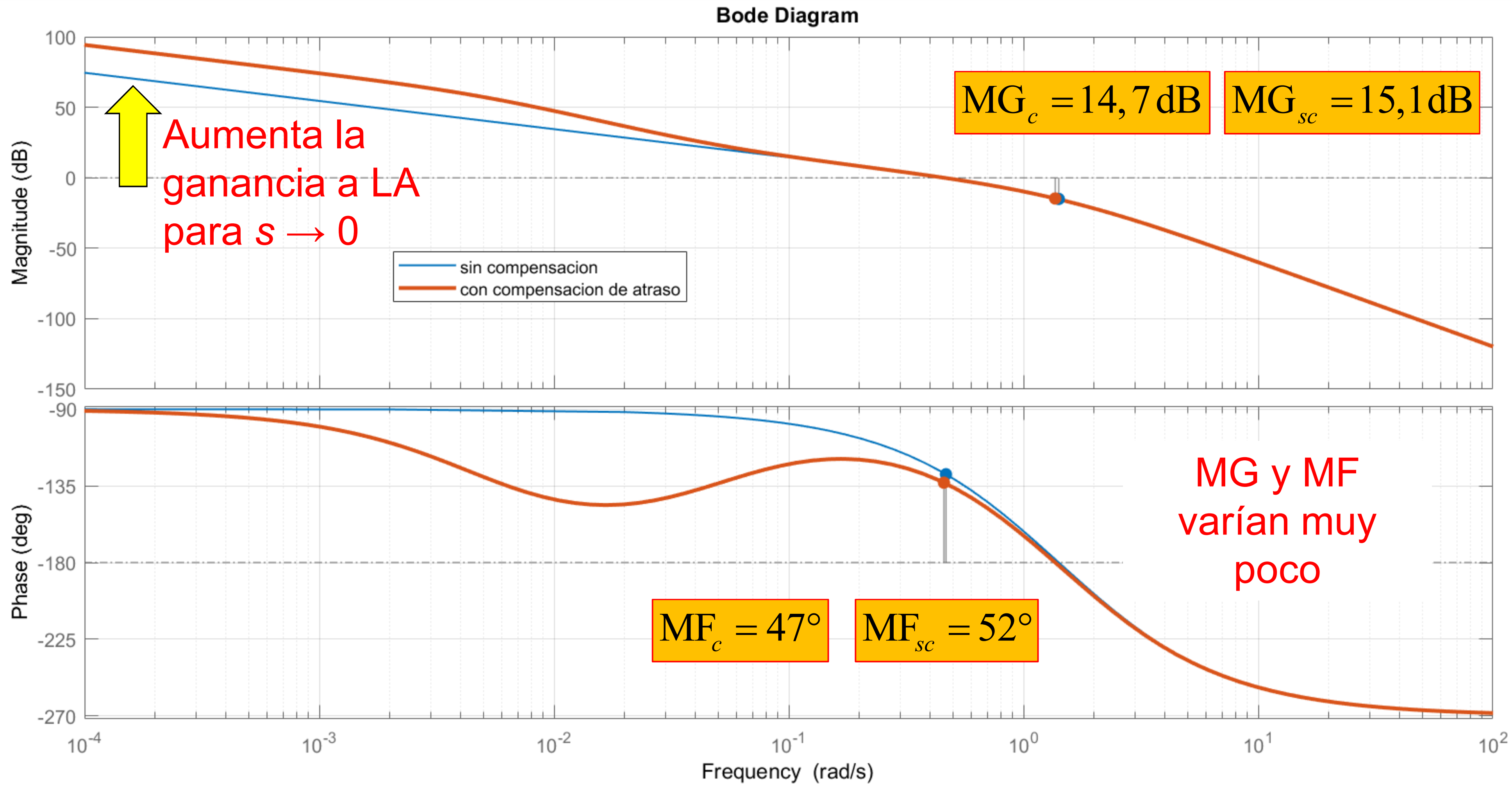
$K_v$ aumenta y se reduce el $e_{ssv}$



# Diseño de compensadores de atraso de fase: Ejemplo

## Resultados



## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

Considérese el siguiente proceso: $$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$ Al diseño obtenido se disminuye $\alpha$

Se toma el mismo cero, la misma ganancia y se elige $\alpha$ = 0,35

$$T = \frac{1}{2,9} = 0,345\,\mathrm{s} \qquad p_c = \frac{1}{\alpha T} = 8{,}286\,\mathrm{r/s} \quad \Rightarrow \quad G_{cad}(s) = 1,638 \times \frac{0,345\,s+1}{0,120\,s+1}$$

La ganancia estática de velocidad resulta:

$$K_v = 2K_c\alpha = 3,276\,\mathrm{seg}^{-1} \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K_V} = 30,5\%$$

Se desea aumentar $K_v$ el doble para disminuir el error de velocidad a la mitad o menos, sin modificar significativamente el desempeño transitorio, por lo tanto:

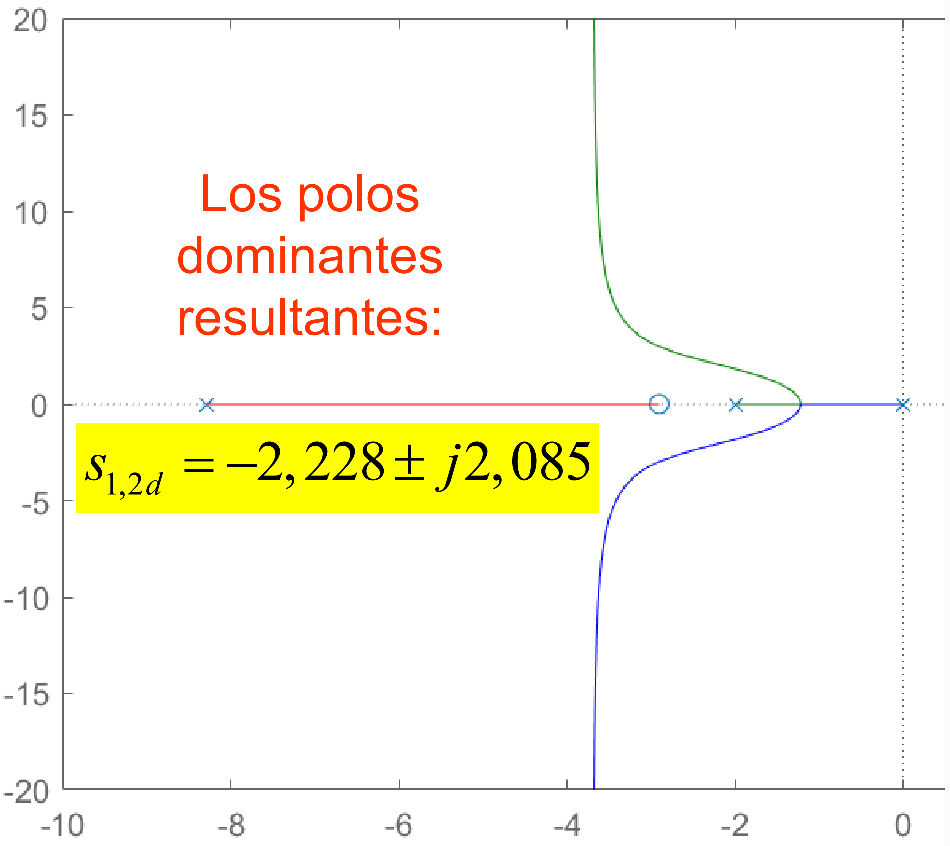
$$K_v \geq 7\,\mathrm{seg}^{-1}$$

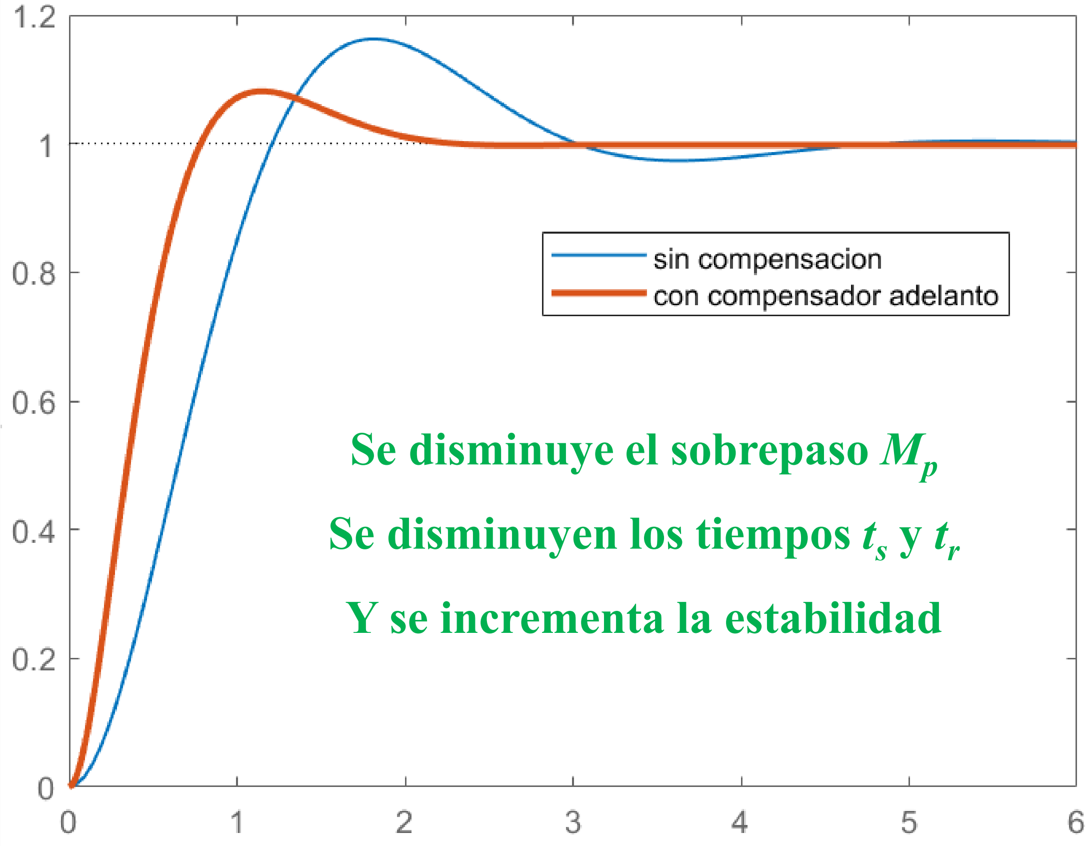
Se introduce en cascada con el compensador de adelanto, un compensador de atraso:

$$G_{cat}(s) = K_c'\,\beta \times \frac{sT_1+1}{s\beta T_1+1}$$

## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

Resultados con el compensador de adelanto de fase




El objetivo es aumentar la ganancia de LA para reducir $K_v$, sin afectar el desempeño transitorio de la respuesta en color rojo.

## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

- Debe aumentarse la ganancia del camino directo en 2 veces o más, esto implica seleccionar un $\beta$ = 2,5 para garantizar un error de velocidad menor al especificado.
- Se elije a continuación una constante de tiempo $T$ = 10 seg.

$$z_c = \frac{1}{T} = -0{,}1\,\text{r/s} \quad y \quad p_c = \frac{1}{\beta T} = -0{,}04\,\text{r/s}$$

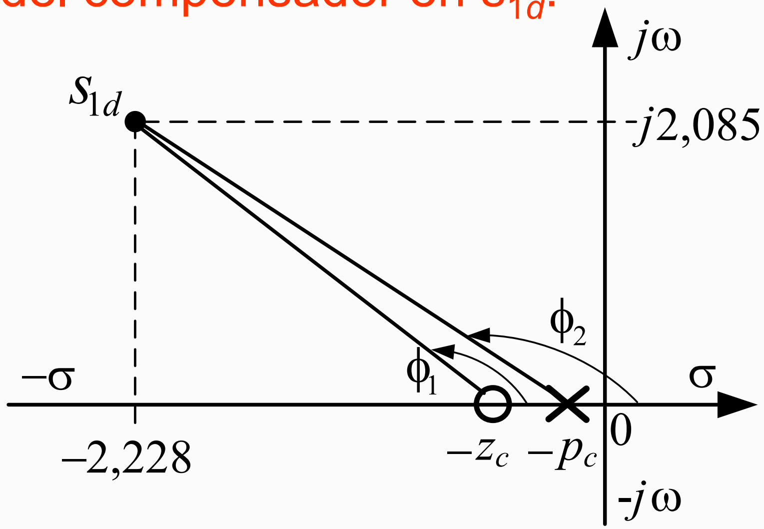
$$G_{cat}(s) = K_c' \frac{s+0{,}1}{s+0{,}04}$$

- Calculando los aportes angulares del cero y del polo del compensador en $s_{1d}$:

$$\measuredangle(s_{1d}+0{,}1) = 135{,}6° \ \text{ y } \ \measuredangle(s_{1d}+0{,}04) = 136{,}4°$$

$$\text{fase } G_c(s) = 0{,}8°$$

- El aporte de fase << 5°




- Calcular $K_c$ con la condición de magnitud en $s_{1d}$:

$$K_c = \left| \frac{(s+0{,}04)}{(s+0{,}1)} \right|_{s_{1d}} \cong 1{,}01$$

## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

- El compensador de atraso resulta: $G_{cat}(s) = 1{,}01\dfrac{s+0{,}1}{s+0{,}04}$

- Con la ganancia $K_c$ calculada, $K_v$ resulta: $K_V{}' = K_V K_c \beta = 8{,}3\,\mathrm{seg}^{-1}$ $\quad e_{ssv} = 12\%$

- El compensador de adelanto-atraso total resulta: $G_c{}'(s) = \dfrac{4{,}748(s+2{,}9)(s+0{,}1)}{(s+8{,}28)(s+0{,}04)}$

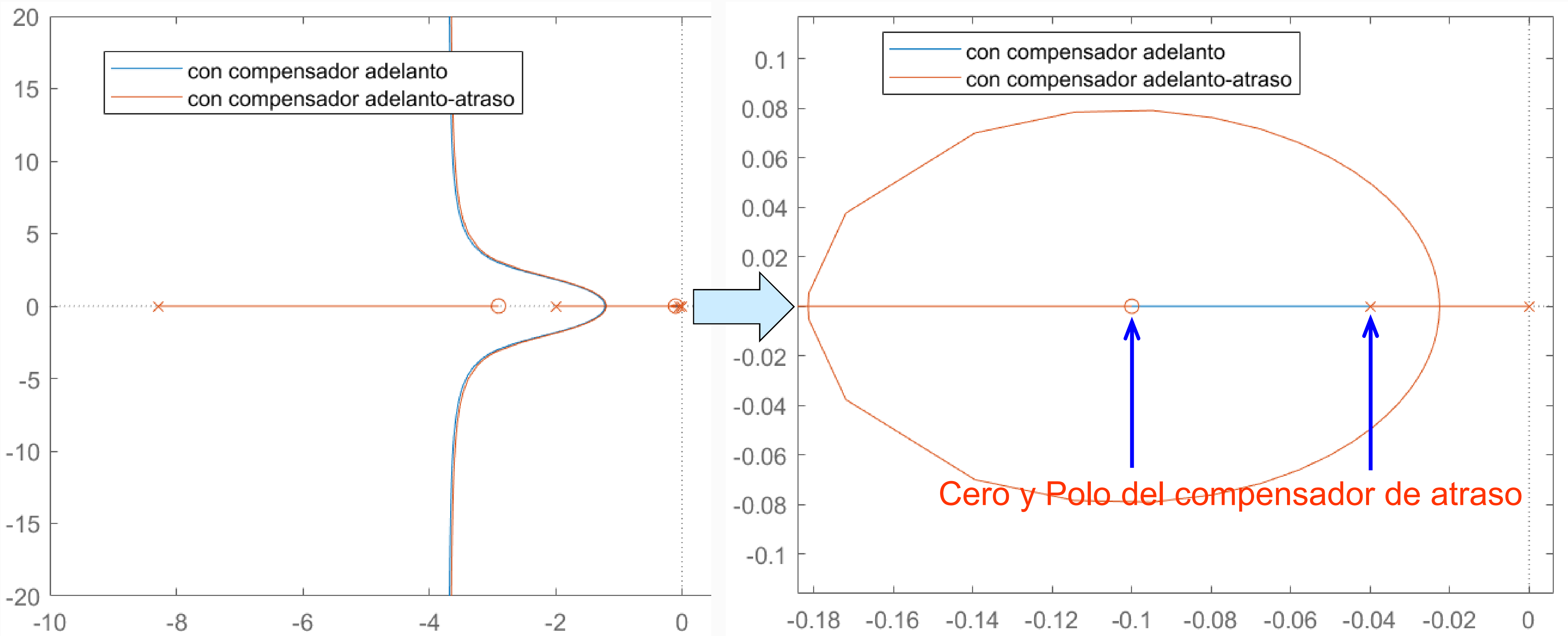
- La FTLC y polos dominantes resultan:

$$G_{lc}(s) = \frac{18{,}99(s+2{,}9)(s+0{,}1)}{(s+5{,}817)(s+0{,}1018)(s+2{,}2+j2{,}1)(s+2{,}2-j2{,}1)}$$

$p_{nd1} = -5{,}817$ $\quad p_{d1} = -0{,}1018$

## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

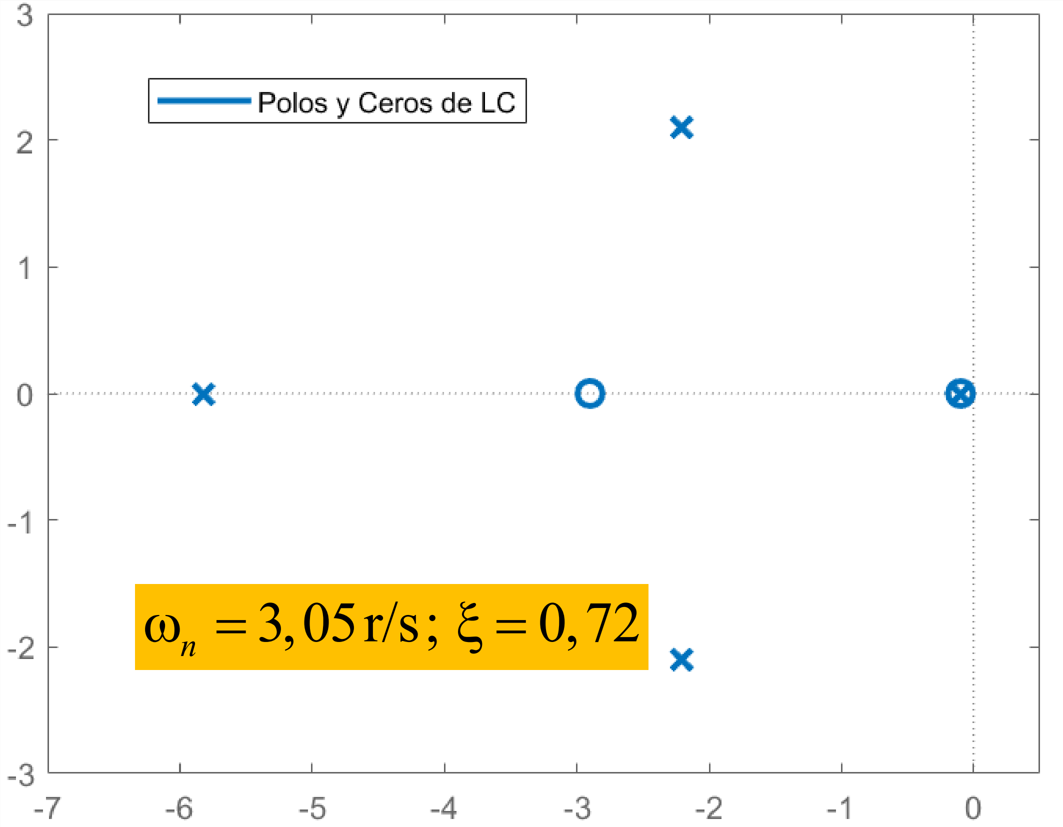
Resultados

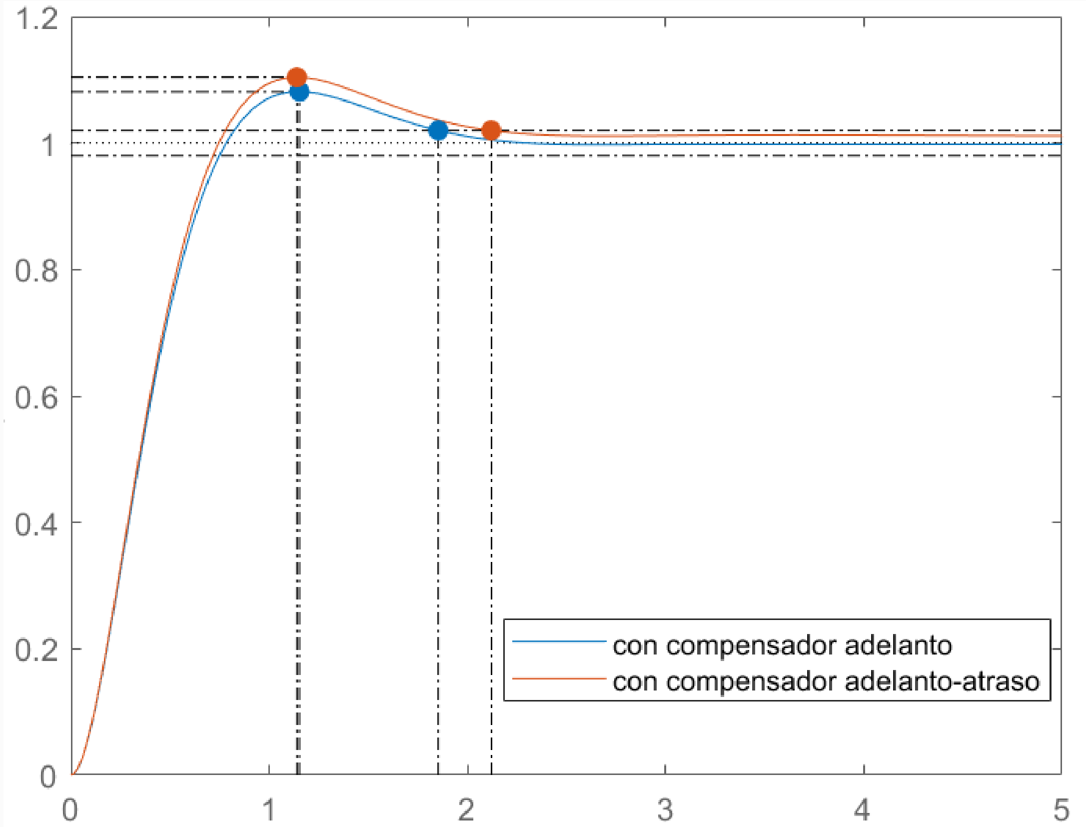


# Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

$\omega_n$ y $\xi$ no varían

$K_v$ aumenta pero el $M_p$ es $\cong$



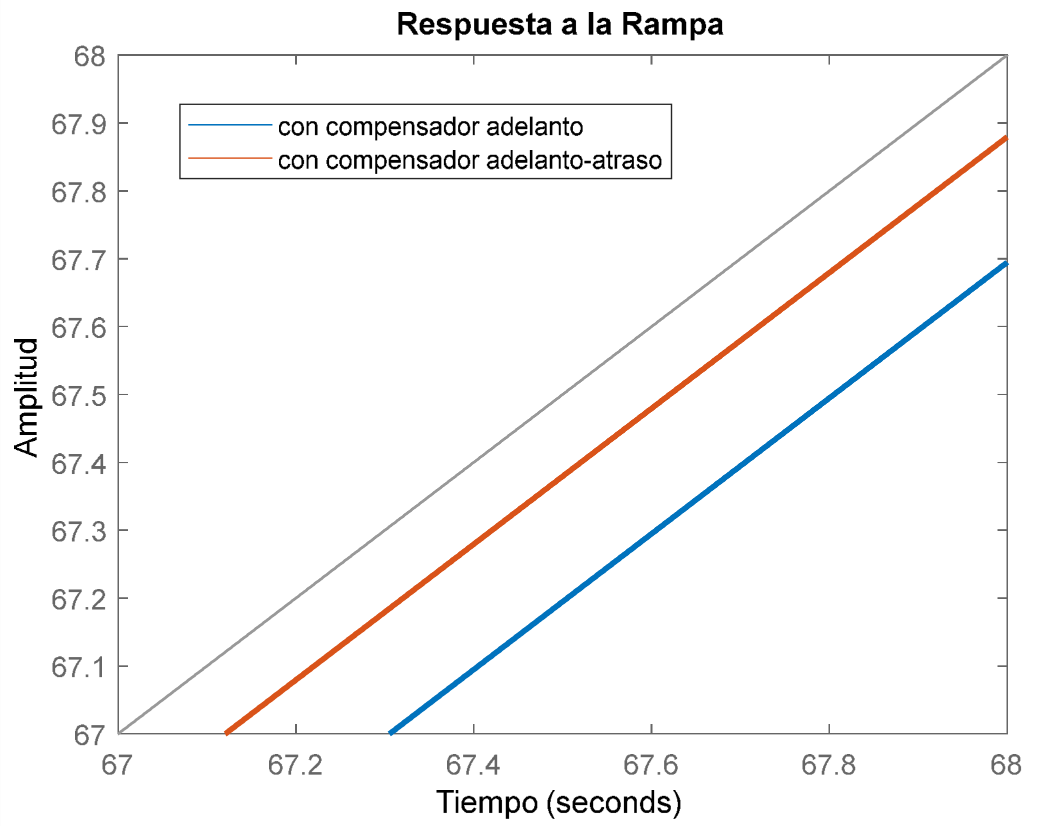



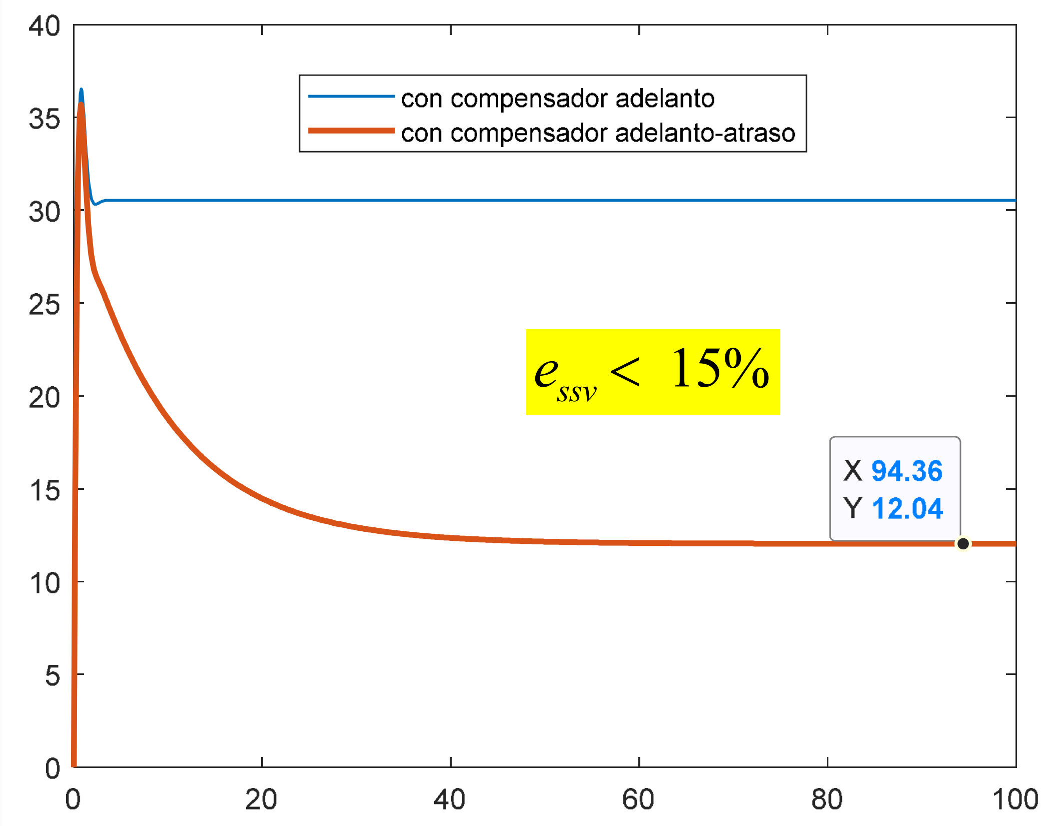

Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_atraso_ejemplo1.m

# Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

## Resultados

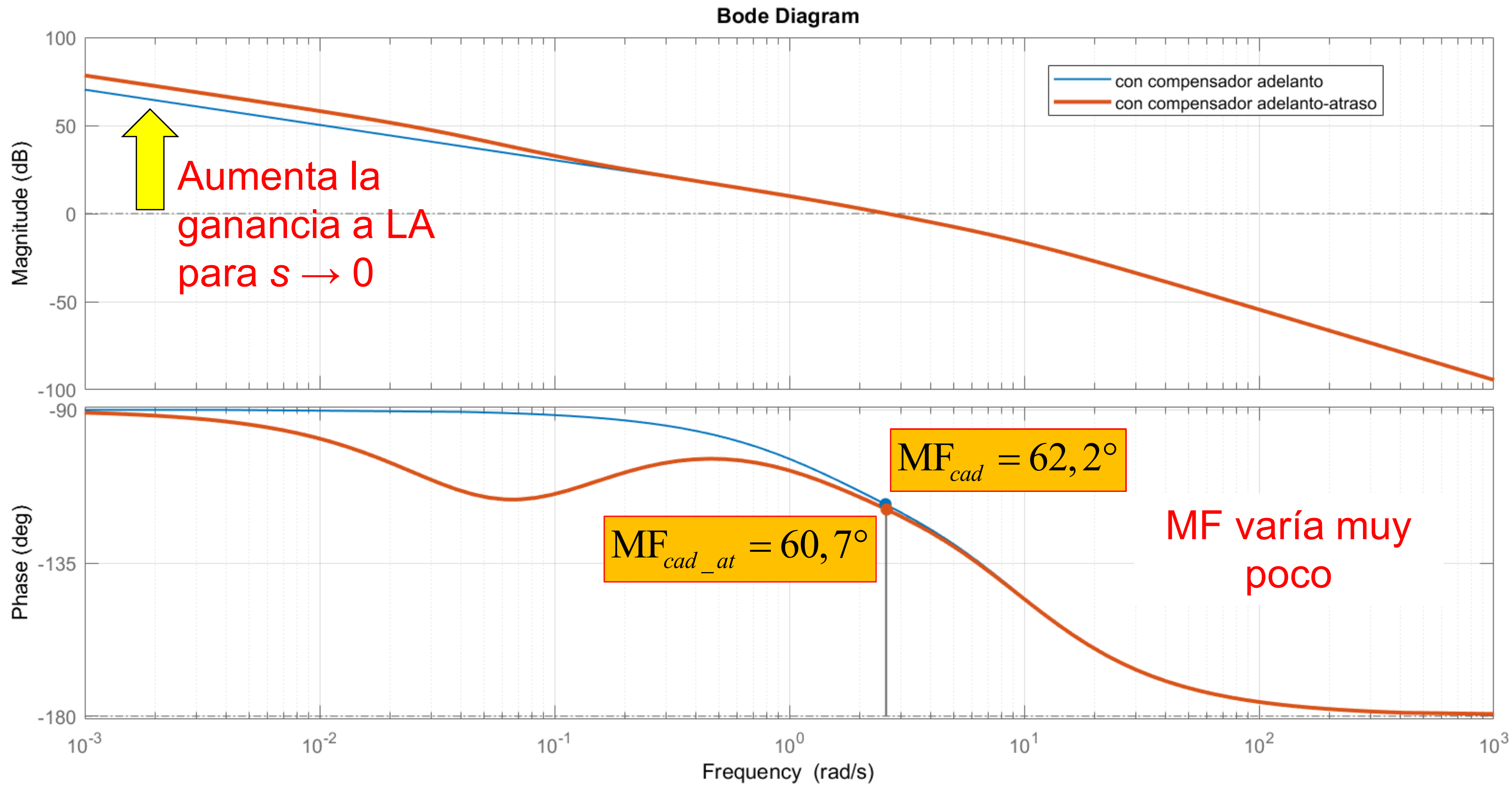
$K_v$ aumenta y se reduce el $e_{ssv}$



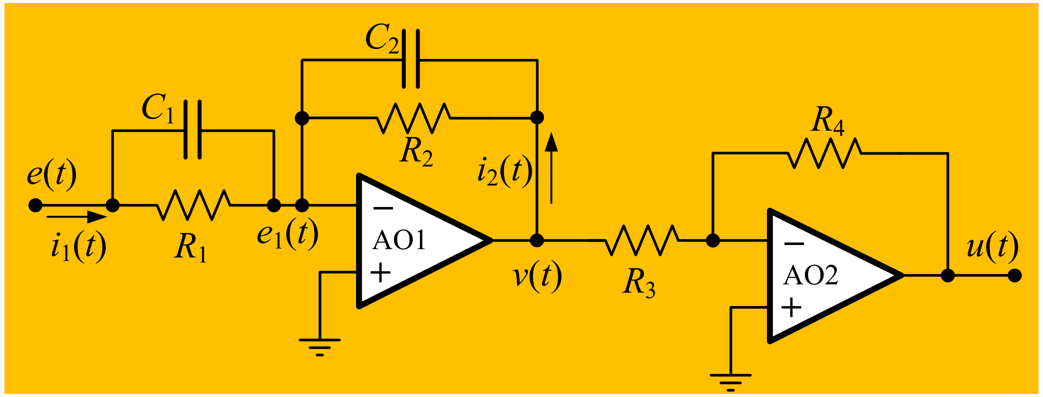
# Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

## Resultados



## Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

### Diseño y selección de los componentes del circuito electrónico: Compensador de Adelanto




$$\tau_1 = T = R_1C_1 \;\; y \;\; \tau_2 = \alpha T = R_2C_2$$

$$\alpha = 0,35;\;\; T = 0,345\,\text{s};\;\; \alpha T = 0,1207\;\text{s};$$

$C_1 = 2,2\,\mu\text{F}$ $\qquad R_1 = \dfrac{T}{C_1} = 156.820\,\Omega$

$C_2 = 1\,\mu\text{F}$ $\qquad R_2 = \dfrac{\alpha T}{C_2} = 120.700\,\Omega$

$$K_c\alpha = \frac{R_2R_4}{R_1R_3} = 1,638 \qquad R_3 = 10\,\text{k}\Omega \qquad R_4 = \frac{1,638 \times R_1 \times R_3}{R_2} = 21.282\,\Omega$$

Valores comerciales adoptados: $R_1 = 150\,\text{k}\Omega$ $\quad R_2 = 120\,\text{k}\Omega$ $\quad R_4 = 22\,\text{k}\Omega$

$$T = R_1C_1 = 0,33\,\text{s}$$

$$\alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{0,18\,\text{s}}{0,33\,\text{s}} = 0,36$$

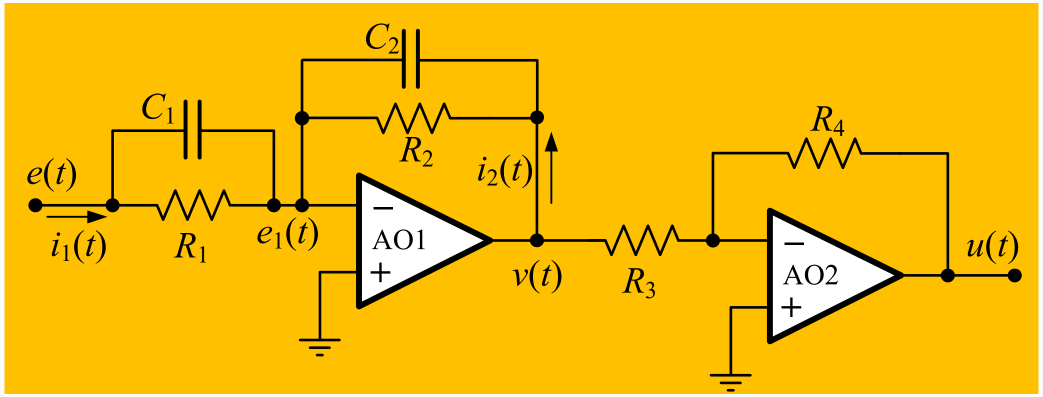
$$K_c\alpha = \frac{R_2R_4}{R_1R_3} = 1,76$$

$$\alpha T = 0,118$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 1,76 \times \frac{0,33\,s + 1}{0,118\,s + 1}$$

# Diseño de compensadores de adelanto de fase con compensador de atraso:

## Diseño y selección de los componentes del circuito electrónico: Compensador de Atraso




$$\tau_1 = T = R_1C_1 \;\; y \;\; \tau_2 = \beta T = R_2C_2$$

$$\beta = 2,5; \;\; T = 10\,\text{s}; \;\; \beta T = 25 \text{ s};$$

$$C_1 = 10\,\mu\text{F} \qquad R_1 = \frac{T}{C_1} = 1\,\text{M}\Omega$$

$$C_2 = 10\,\mu\text{F} \qquad R_2 = \frac{\beta T}{C_2} = 2,5\,\text{M}\Omega$$

Dado que $K_c \cong 1,0$ $\quad R_3 = R_4 = 10\,\text{k}\Omega$

Valores comerciales adoptados: $R_1 = 1\,\text{M}\Omega$ $\quad R_2 = 2,5\,\text{M}\Omega$ $\quad R_4 = 10\,\text{k}\Omega$

$$T = R_1C_1 = 10\,\text{s}$$

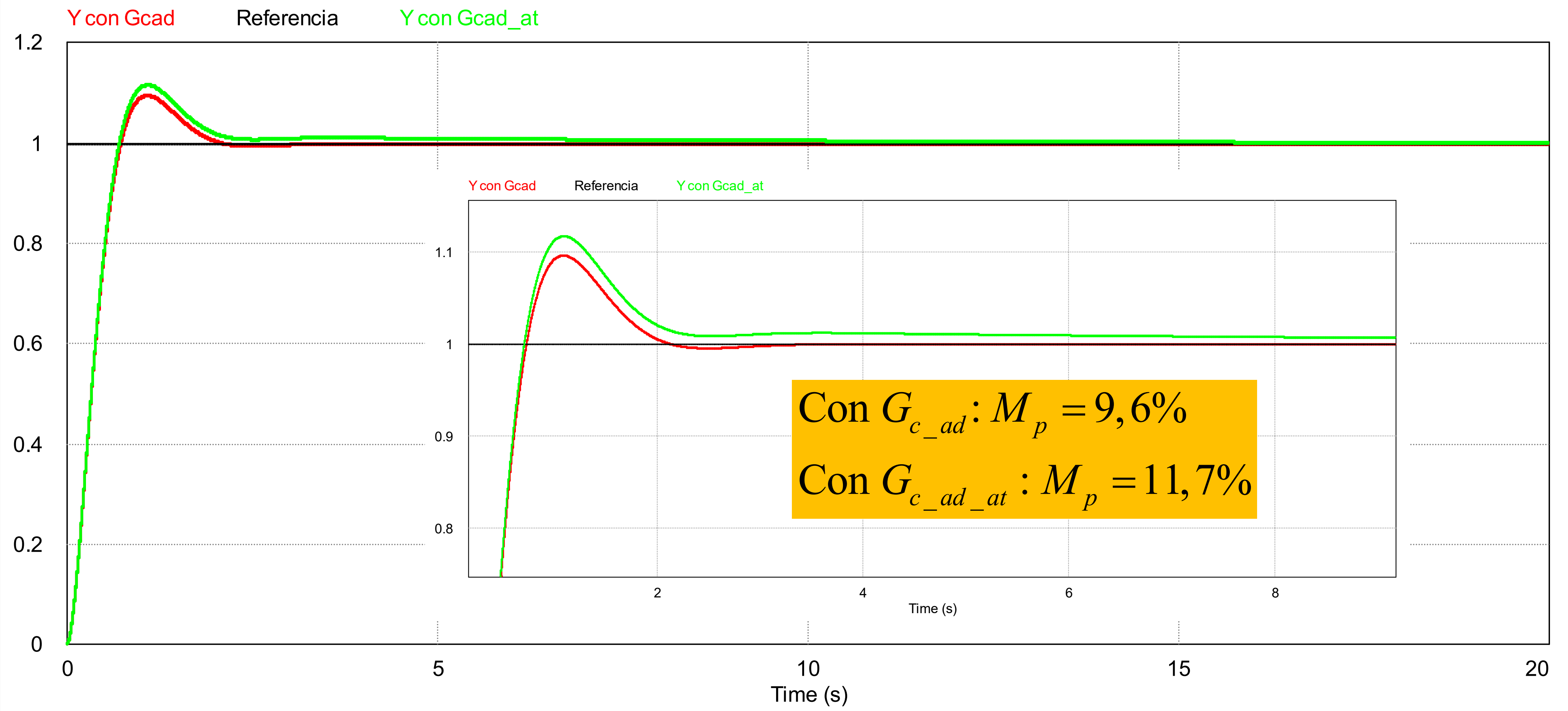
$$\beta = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} = 2,5$$

$$K_c\beta = \frac{R_2R_4}{R_1R_3} = 2,5$$

$$\beta T = 25$$

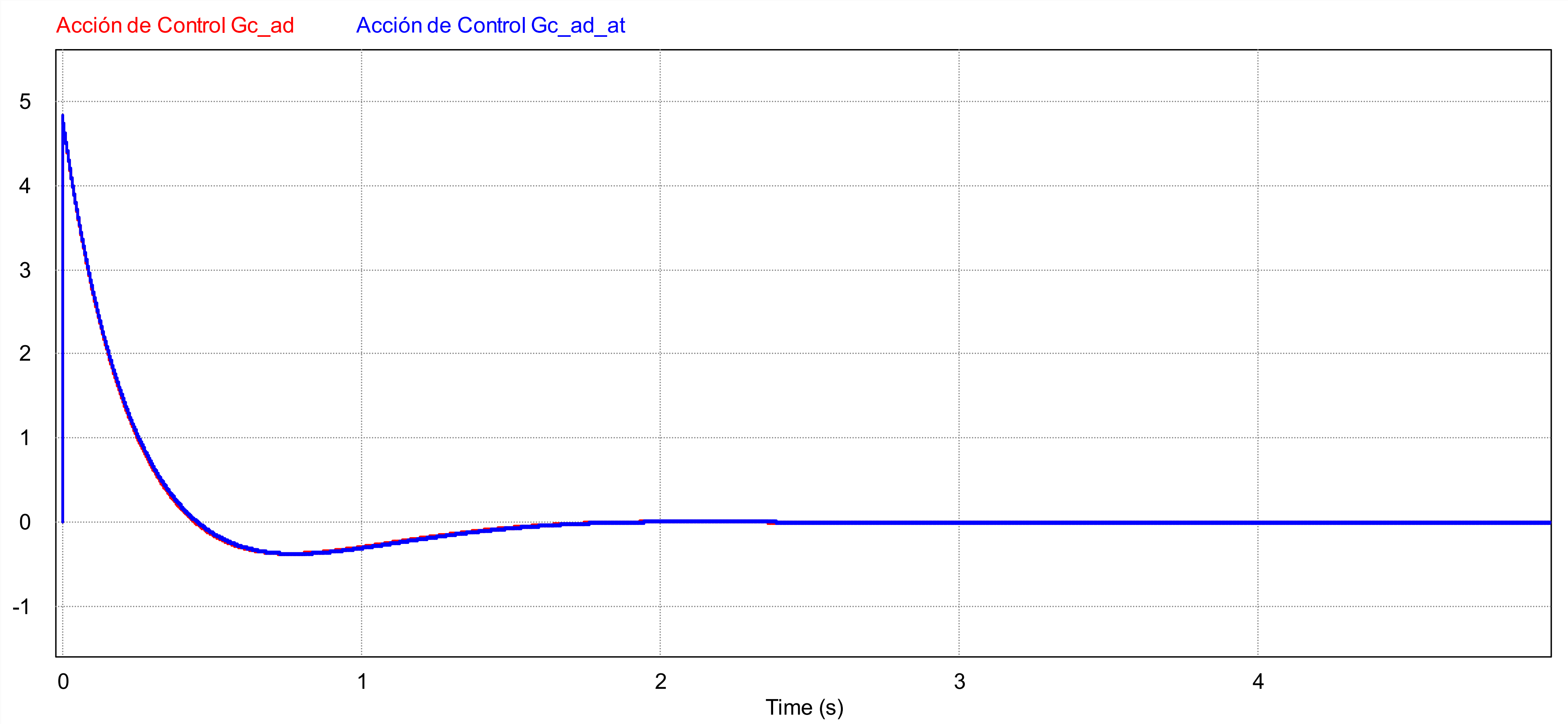
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 2,5 \times \frac{10\,s+1}{25\,s+1}$$

# Resultados con PSIM: Variable controlada




**Para esta simulación ver archivos: compensador_adelanto_atraso_clase_OPAMP.psimsch**

# Resultados con PSIM: Acciones de control



# Referencias Bibliográficas


[1] Ogata, Katsuhiko. "Ingeniería de Control Moderna".

[2] Kuo, Benjamín C. "Sistemas de Control Automático".

[3] Chi-Tsong Chen. "Analog and Digital Control System Design".

[4] Manuel Torres Portero. "Circuitos Integrados Lineales: Sus aplicaciones"