Ejemplo: Sea el sig. sistema

$\cancel{A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$ $\cancel{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ec. caracteristica será:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right| = \lambda^2 + (3+L_{21})s + (2+L_{11}+3L_{21})$$

Debemos ubicar los polos del observador en una posición 2 a 5 veces mayor q' la parte real de los polos dominantes del sistema.

P/ este caso los autovalores de A son $-2, -1$; por tanto los autovalores del observador deberían ser -4 a -10.

Elegimos $\lambda = -4$

La ec. caracteristica deseada es:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8 = 3 + L_{21} \Rightarrow L_{21} = 5 \\ 16 = 2 + L_{11} + 3L_{21} \Rightarrow L_{11} = -1 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\text{discretizar}}$$

(9)

En el dominio discreto:

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}7326 & -0{,}1722 \\ 0{,}0861 & 0{,}9909 \end{bmatrix} \qquad C = [0 \; 1]$$

Ec. característica:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left[G - \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} [0 \; 1] \right] \right| = 0$$

$$= \lambda^2 + (L_{21} - 1{,}7235)\lambda - 0{,}7326\, L_{21} + 0{,}0861\, L_{11} + 0{,}74$$

Si el observador tiene los polos en $s = -4$ siendo $T = 0{,}1$ seg

$$\lambda = e^{sT} = 0{,}67$$

La ec. característica deseada es la siguiente:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0{,}67 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \lambda^2 - 1{,}34 . \lambda + 0{,}4489$$

Igualando:

$$\begin{cases} -1{,}34 = L_{21} - 1{,}7235 \\ 0{,}449 = -0{,}7326 . L_{21} + 0{,}0861 . L_{11} + 0{,}74 \end{cases}$$

$L_{21} = 0{,}383 \qquad L_{11} = -0{,}126$

$$L = \begin{bmatrix} -0{,}126 \\ 0{,}383 \end{bmatrix}$$

Otra forma es utilizando Ackermann:

donde:

$$L = \alpha_e(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

siendo $\alpha_e(z)$ la ec. característica del observador

$$\alpha_e(z) = (z-\lambda)^n$$

$$\alpha_e(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$\alpha_e(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

p/ ntro. ejemplo:

$$\alpha_e(z) = \lambda^2 - 1{,}34\lambda + 0{,}4489$$

$$\alpha_e(A) = \begin{bmatrix} 0{,}7326 & -0{,}1722 \\ 0{,}0861 & 0{,}9909 \end{bmatrix}^2 - 1{,}34 \cdot \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} + 0{,}4489 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ob^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}0861 & 0{,}9909 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$L = \alpha_e(A) \times OB^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0{,}1267 \\ 0{,}3836 \end{bmatrix}$$

Observador de Orden Reducido

→ Justificar su uso.

Podemos definir el vector de estado de la sig. forma:

$$X(k) = \begin{bmatrix} Xa(k) \\ Xb(k) \end{bmatrix},$$

donde: $Xa(k)$ son los estados medidos
$Xb(k)$ " " " estimados

La eq. de estado de la planta resulta:

$$\begin{bmatrix} Xa(k+1) \\ Xb(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aaa & Aab \\ Aba & Abb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa(k) \\ Xb(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ba \\ Bb \end{bmatrix} u(k) \quad (1) \quad S4$$

$$Y(k) = [I \; 0] \begin{bmatrix} Xa(k) \\ Xb(k) \end{bmatrix} \quad S5 \quad \therefore \text{Sistema MIMO}$$

La ecuación p/ los estados medidos:

$$Xa(k+1) = Aaa\, Xa(k) + Aab\, Xb(k) + Ba\, u(k) \quad (2) \quad S6$$

agrupando los términos conocidos del lado izquierdo:

$$Xa(k+1) - Aaa\, Xa(k) - Ba\, u(k) = Aab\, Xb(k) \quad (3) \quad S7$$

De (1), la ecuación p/ los estados estimados:

$$Xb(k+1) = Aba\, Xa(k) + Abb\, Xb(k) + Bb\, u(k) \quad (4) \quad S8$$

de 3:

$X_a(k+1) - A_{aa}X_a(k) - B_a u(k)$: es considerado como las <u>medidas</u> <u>conocidas</u>

y de 4: $A_{ba}X_a(k) + B_b u(k)$: son las <u>entradas conocidas</u>

Ahora, vamos a comparar las ecuaciones de estado p/ el observador de orden completo (Luenberger) y para el de orden reducida:

$$X(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k)$$ 89

$$X_b(k+1) = A_{bb}X_b(k) + [A_{ba}X_a(k) + B_b u(k)]$$

y

$$Y = C\,X(k)$$ 60

$$X_a(k+1) - A_{aa}X_a(k) - B_a u(k) = A_{ab}X_b(k)$$

Podemos obtener entonces las ecuaciones del observador de orden reducido, a través de las sig. sustituciones:

$$G \rightarrow A_{bb}$$

$$X(k) \rightarrow X_b(k)$$

$$H\,u(k) \rightarrow [A_{ba}X_a(k) + B_b u(k)]$$

$$C \rightarrow A_{ab}$$

$$Y(k) \rightarrow [X_a(k+1) - A_{aa}X_a(k) - B_a u(k)]$$

La ecuación del observador de orden completo (13)
es:

$$\hat{x}(k+1) = (G - LC)\hat{x}(k) + L\,y(k) + J\,u(k) \quad \underline{61} \quad J = H$$

$$\hat{x}_b(k+1) = (A_{bb} - L A_{ab})\hat{x}_b(k) + L\,[x_a(k+1) - A_{aa}x_a(k) - B_a u(k)] +$$

$$+ A_{ba}x_a(k) + B_b u(k) \quad (5) \quad \underline{62}$$

de (1): $y(k) = x_a(k) \Rightarrow y(k+1) = x_a(k+1)$

entonces (5) resulta:

$$\hat{x}_b(k+1) = (A_{bb} - L A_{ab})\hat{x}_b(k) + L[y(k+1) - A_{aa}\,y(k) - B_a\,u(k)] +$$

$$A_{ba}\,y(k) + B_b\,u(k) \quad \underline{64}$$

$$\boxed{\hat{x}_b(k+1) = (A_{bb} - L A_{ab})\hat{x}_b(k) + L\,y(k+1) + (A_{ba} - L A_{aa})y(k) + + (B_b - L B_a)u(k) \quad (6) \quad 65}$$

La ecuación característica del observador será:

$$|zI - (A_{bb} - L A_{ab})| = 0$$

En el caso de un sistema de 2° orden con ~~[illegible]~~ 1 entrada y 1 salida, con $y(k) = x_1(k)$ podemos aplicar ackermann:

$$L = \alpha_e(A_{bb}) \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \\ \vdots \\ A_{ab}A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_e(A_{bb}) = A_{bb}^{n-1} + \alpha_1 A_{bb}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}A_{bb} + \alpha_{n-1} I$$

Ejemplo: Servomotor

$$G_p(S) = \frac{1}{S(S+1)} = \frac{\theta(S)}{U(S)}$$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,905 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0,00484 \\ 0,0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$Y(k) = [1 \quad 0]\, \mathbf{x}(k)$$

$X_1(k) = \theta \rightarrow$ medida

$X_2(k) = \omega \rightarrow$ estimada

Proyectamos realimentación de estados:

$$u = -K_1 X_1 - K_2 X_2 = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Supongamos q' las raíces deseadas sean:

$$\lambda_{1,2} = 0,888 \pm j\,0,173$$

por igualación, ó por acker ó por place

$$K = [4,52 \quad 1,12]$$

p' estas raíces, la ecuación característica deseada es:

$$\alpha_c(z) = z^2 - 1,776\, z + 0,819$$

elegimos la raíz del estimador en $z = 0,819$

y la ec característica del observador de orden reducida será de orden 1:

$$\alpha_e(z) = z - 0,819$$

de 1 se tiene:

$A_{aa} = 1 \qquad A_{ab} = 0,0952$

$A_{ba} = 0 \qquad A_{bb} = 0,905$

$B_a = 0,00484 \qquad B_b = 0,0952$

así:

$$L = \alpha_e(A_{bb})\,[A_{ab}]^{-1}\,[1] = [0{,}905 - 0{,}819]\,[0{,}0952]^{-1}\,[1]$$

$$\boxed{L = 0{,}903}$$