Aplicando la fórmula de Ackermann: (8)

$$\check{I} = \alpha_{co}(G)\begin{bmatrix} C \\ GG \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{co}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0952 \\ 0 & 0{,}905 \end{bmatrix}^2 - 1{,}638\begin{bmatrix} 1 & 0{,}0952 \\ 0 & 0{,}905 \end{bmatrix} + 0{,}671\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}033 & 0{,}0254 \\ 0 & 0{,}00763 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ GG \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}0952 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10{,}51 & 10{,}51 \end{bmatrix}$$

$$\check{I} = \begin{bmatrix} 0{,}033 & 0{,}0254 \\ 0 & 0{,}00763 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10{,}51 & 10{,}51 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}267 \\ 0{,}0802 \end{bmatrix}$$

$$F = G - \check{I}C = \begin{bmatrix} 0{,}733 & 0{,}0952 \\ -0{,}0802 & 0{,}905 \end{bmatrix}$$

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}733 & 0{,}0952 \\ -0{,}0802 & 0{,}905 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 0{,}267 \\ 0{,}0802 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0{,}00484 \\ 0{,}0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y \quad \boxed{u(k) = -K\,q(k)}$$

$$\Rightarrow q(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}711 & 0{,}0898 \\ -0{,}510 & 0{,}798 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 0{,}267 \\ 0{,}0802 \end{bmatrix} y(k)$$

Efecto de la utilización de los estados estimados en lazo cerrado (7)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad 26$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad 27$$

$$u(k) = -K\hat{x}(k) \qquad 28$$

$$x(k+1) = Ax(k) - BK\hat{x}(k) \quad + y - BKx(k) \qquad 29$$

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) + BKx(k) - BK\hat{x}(k) \qquad 30$$

$$x(k+1) = (A-BK)x(k) + BK\left[x(k) - \hat{x}(k)\right]$$

$$x(k+1) = (A-BK)x(k) + BK\tilde{e}(k)$$

$$\tilde{e}(k+1) = (A-LC)\tilde{e}(k)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{e}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} (A-BK) & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}}^{A_c} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{e}(k) \end{bmatrix}$$

La ec. característica es:

$$|zI - A_c| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A-BK) & BK \\ 0 & (A-LC) \end{bmatrix} \right| = 0$$

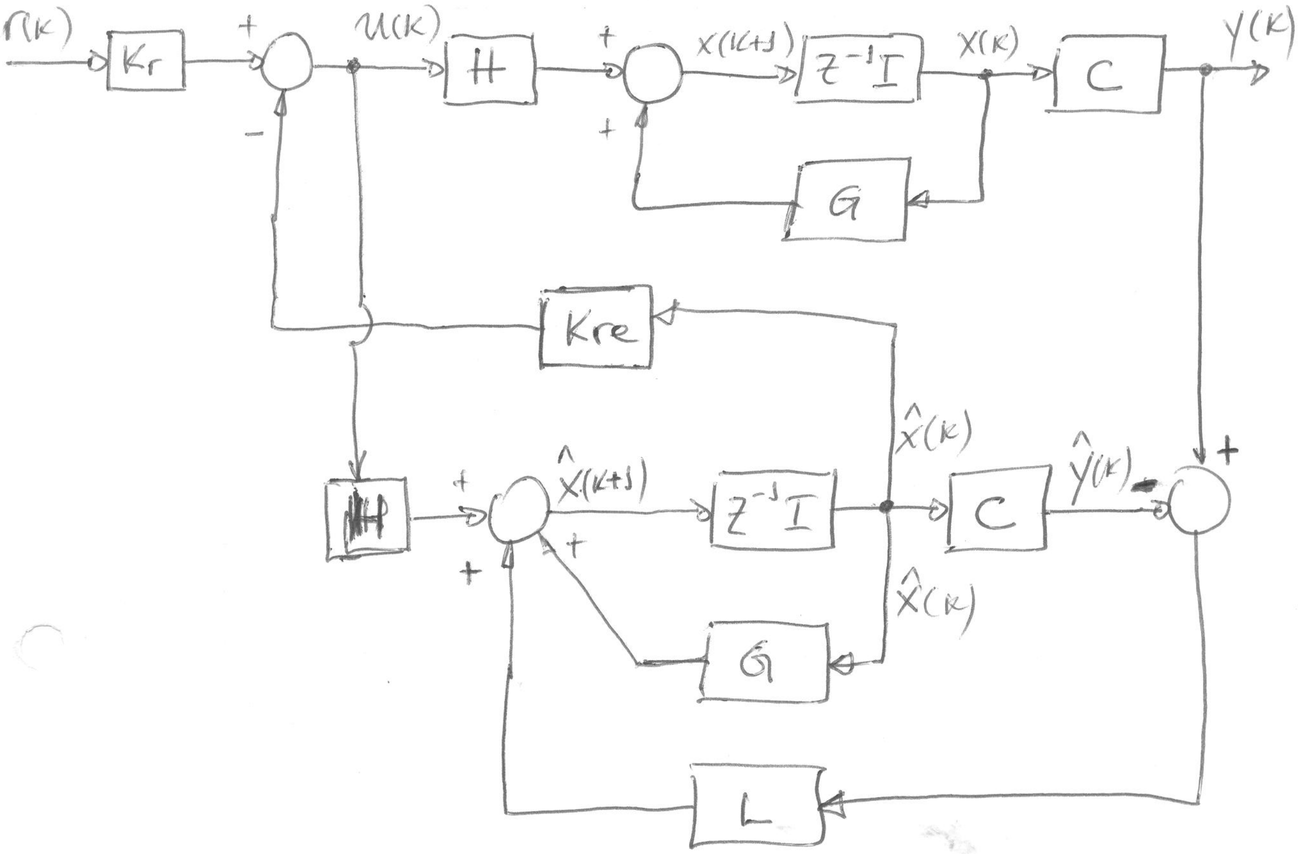
$$\begin{vmatrix} zI - A + BK & -BK \\ 0 & zI - A + LC \end{vmatrix} = 0$$

$$|zI - A + BK|\,|zI - A + LC| = 0$$

Observamos de esto lo siguiente: (10c)

- La solución del problema de realimentación de estados y la del observadores son problemas duales:
  *El mismo algoritmo numérico usado p/ hallar la matriz Kre puede ser usado p/ hallar la matriz L.
- Es atractivo q' la solución de todo el problema pueda ser dividido en 2 problemas pequeños.
- Esto también justifica q' los polos de lazo cerrado estén separados en 2 grupos: uno asociado a la realimentación de estados y otro asociado al observer.
- Es muy importante notar q' el observador contiene internamente el modelo dinámico del proceso a controlar. Este problema, es por tanto, un caso especial del Principio del Modelo Interno ya q' es un sistema dinámico q' rastrea la evolución de los estados del sistema.
- El controlador resultante puede ser también visto como una caja negra q' genera la señal de control a partir de la señal de salida.

Control de Lazo cerrado con observador



Sist. de control digital con observador de estados

Las ecuaciones del sistema son:

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \quad (1) \qquad 26$$

$$u(k) = K_r \cdot r(k) - K_{re}\,\hat{x}(k) \quad (2) \qquad 27$$

$$\Rightarrow x(k+1) = G\,x(k) + H K_r\, r(k) - H K_{re}\,\hat{x}(k) \quad (3) \qquad \cancel{28} \; 30$$

$$\hat{x}(k+1) = G\,\hat{x}(k) + H\,u(k) - L\left[\hat{y}(k) - y(k)\right] \quad (4) \qquad 29$$

$$y(k) = C\,x(k) \quad \text{e} \quad \hat{y}(k) = C\,\hat{x}(k) \quad (5) \qquad 28$$

$$\hat{x}(k+1) = G\,\hat{x}(k) + H K_r\, r(k) - H K_{re}\,\hat{x}(k) - LC\left[\hat{x}(k) - x(k)\right] \qquad 31$$

$$\hat{x}(k+1) = \left(G - H K_{re} - LC\right)\hat{x}(k) + LC\,x(k) + H K_r\, r(k) \quad (6) \qquad 32$$

Nos interesa investigar los efectos de los estados iniciales, del observador y los efectos mútuos entre ambos sistemas.

Aplicando la transformada Z a las ec. (3) y (6) y reacomodando términos se tiene:

de la ec. (3):

$$ZX(z) = GX(z) + HK_r R(z) - HK_{re}\hat{X}(z) + ZX(0)$$

$$(ZI - G)X(z) = ZX(0) + HK_r R(z) - HK_{re}\hat{X}(z) \quad (7)$$ 33

de la ec. (6):

$$ZI\hat{X}(z) - Z\hat{X}(0) = (G - HK_{re} - LC)\hat{X}(z) + LCX(z) + HK_r R(z)$$

$$(ZI - G + HK_{re} + LC)\hat{X}(z) = Z\hat{X}(0) + LCX(z) + HK_r R(z) \quad (8)$$ 34

Sustrayendo la (8) de la (7) se tiene:

$$(ZI-G)X(z) - (ZI - G + \cancel{HK_{re}} + LC)\hat{X}(z) = ZX(0) - Z\hat{X}(0) - \cancel{HK_{re}\hat{X}(z)} - LCX(z)$$

$$(ZI - G + LC)X(z) = (ZI - G + LC)\hat{X}(z) + ZX(0) - Z\hat{X}(0) \quad (9)$$ 35

Si $X(0) = \hat{X}(0)$

entonces:

$$(ZI - G + LC)X(z) = (ZI - G + LC)\hat{X}(z) \quad (10)$$ 36

consecuentemente: $X(k) = \hat{X}(k)$ (11) 37

Esto nos dice q' la dinámica del observador ③ no afecta al sistema original y por tanto no afectará al desempeño transitorio.

Si en todo caso, $X(0) \neq \hat{X}(0)$, existirá una diferencia entre ambos vectores de estado, y esta diferencia se hará nula en algunas muestras dependiendo de la dinámica con la q' fue proyectado el observador.

Si $X(K) = \hat{X}(K)$ la ec. ⑦ se torna

$$(ZI - G)\,X(Z) = Z X(0) + H K_r R(Z) - H K_{re} X(Z)$$

$$\Rightarrow (ZI - G + H K_{re})\,X(Z) = Z X(0) + H K_r R(Z) \quad (12) \quad \underline{\underline{38}}$$

En esta última ecuación se observa q' no aparece la matriz L del observador.

Si sustraemos la ⑥ de la ③ se observa:

$$X(K+1) - \hat{X}(K+1) = G X(K) - LC X(K) - (G - \cancel{H K_{re}} - LC)\hat{X}(K) - $$

$$- \cancel{H K_r r(K)} + \cancel{H K_r r(K)} - \cancel{H K_{re}} \hat{X}(K)$$

$$X(K+1) - \hat{X}(K+1) = (G - LC) X(K) - (G - LC)\hat{X}(K) \quad \underline{39}$$

$$X(K+1) - \hat{X}(K+1) = (G - LC)\left[X(K) - \hat{X}(K)\right] \quad \underline{39}$$

donde: $X(K) - \hat{X}(K) = \tilde{e}(K) \rightarrow$ error de estimación

$$\tilde{e}(K+1) = (G - LC)\,\tilde{e}(K) \quad (13) \quad \underline{40}$$

Esta ec. (13) nos dice q' siendo conocidas las matrices G y C, el desempeño transitorio del observador depende del proyecto de la matriz L. (4)

O sea, ubicando de forma adecuada los ~~polos~~ autovalores de la matriz $(G-LC)$ se puede controlar la tasa con q' el error $\tilde{e}(k)$ va a cero.

Entonces, si se usan los estados estimados p/ efectuar la realimentación los autovalores del observador deben poseer una dinámica mucho más rápida q' los autovalores del sistema en lazo cerrado controlado. O sea, parte real más (−).

Diseño del Observador de estados de orden completo

El diseño del observador consiste en determinar la ubicación de los autovalores de la matriz de dinámicas del observador dada por $(G-LC)$.

Dado q' los autovalores de $(G-LC)$ y $(G-LC)^T = (G^T - \mathbf{C}^T\mathbf{L}^T)$ son los mismos, el requisito p/ ubicar de manera arbitraria estos autovalores es q' el par $\{\mathbf{G}^T, \mathbf{C}^T\}$ sea completamente controlable.

Dado q' la controlabilidad de $\{G^T, C^T\}$ equivale a la observabilidad completa de. $\{G, C\}$; el

cumplimiento de este requisito garantiza (5)
además de la solución de la ubicación arbitraria de polos, la existencia del observador de estados.

Ejemplo:

Un sistema de 2° orden está descrito por la sig. representación de estado:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad \underline{\underline{41}}$$

Con $X(0) = [1 \ 1]^T$

La ecuación de salida es:

$$y(k) = [2 \ 0] \, x(k) \quad \underline{\underline{42}}$$

Diseñar un observador p/ q' estime los estados x_1 y x_2 a partir de la información de la salida $y(k)$.

La ecuación característica del observador está dada por:

$$|\lambda I - G + LC| = 0 \quad \underline{\underline{43}}$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.l_{11} & 0 \\ 2.l_{22} & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2l_{11} & 1 \\ -1+2l_{22} & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda + 2l_{11} & -1 \\ 1+2l_{22} & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad 4.4$$

$$(\lambda + 2.l_{11})(\lambda - 1) - \overbrace{\left[-1 \times (1+2l_{22})\right]}^{-1+2l_{22}} = 0$$

$$(\lambda + 2.l_{11})(\lambda - 1) + 1 + 2l_{22} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 2l_{11}\lambda + 2l_{11} + 2l_{22} + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(-1 + 2l_{11}) + 2l_{11} + 2l_{22} + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + (2l_{11} - 1)\lambda + 2l_{11} + 2l_{22} + 1 = 0 \qquad 4.5$$

si se desea una respuesta de tiempo mínimo, la ec. característica deseada será:

$$\lambda^2 = 0 \qquad 4.6$$

así se tiene que:

$$\cancel{-2l_{11} + 2l_{21} = -1}$$

$$\cancel{-2l_{11} = -1 + 2l_{21}} = 0$$

Si $l_{21} = 0$

$$\cancel{2l_{11} = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{11} = 0{,}5}$$

La matriz del observador será:

$$G - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$