* Observadores de Estado

Los observadores son:

Estimadores de Estado p/ Sistemas Determinísticos

Sistemas Determinísticos { → Sin ruidos de proceso
→ Sin ruidos de medida } Significativos

Observadores: { Reconstruyen el vector de estado (o parte de este) a partir de las salidas disponibles y de las entradas.—

* Observador Predictivo ~~o~~ Observador de Luenberger

Consideremos SISO LIT:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \qquad (1)$$

$y(k)$ es la señal q/ "debe ser medida".

de (1) nosotros tenemos información de: { G, H, C
• $y(k)$ y $u(k)$ Lo nosotros la generamos

→ Si deseamos realizar realimentación de todos los estados y no queremos (O NO PODEMOS) medirlos, debemos estimarlos.

Llamamos a los estados del observador (Estados Estimados) : $\hat{X}(K)$

Basicamente :

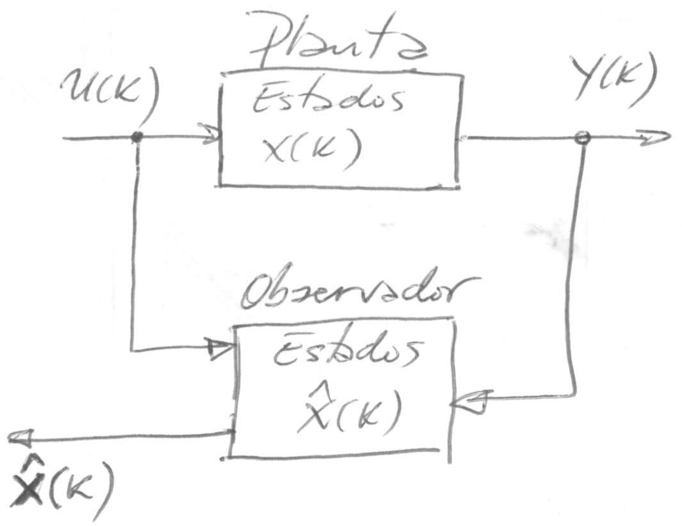


Figura (1)

→ Por tanto el OBSERVADOR TEndrá una DINAMICA y resultará en una ECUACIÓN DIFERENCIA que debe ser solucionada en el µP.-

Proyecto: El criterio q' se adopta p' la obtención del modelo de este observador es q' la F.T entre U(K) y los estados estimados $\hat{X}_i(K)$ sea igual a la F.T entre U(K) y $X_i(K)$

$$\frac{\hat{X}_i(Z)}{U(Z)} = \frac{X_i(Z)}{U(Z)}$$

Tomando la transformada z de 1:

$$zX(z) = GX(z) + HU(z) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow (zI - G)X(z) = HU(z)$$

$$X(z) = (zI - G)^{-1} H U(z) \qquad (3)$$

De la Figura 1 podemos escribir la ecuación del observador de la sig. forma:

$$\hat{X}(k+1) = F\hat{X}(k) + L\,y(k) + Ju(k) \qquad (4)$$

donde: F, L y J son desconocidas.

Tomamos ahora la transformada z de 4

$$z\hat{X}(z) - F\hat{X}(z) = LY(z) + JU(z) \qquad (5)$$

$$(zI - F)\hat{X}(z) = LY(z) + JU(z)$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z) = (zI - F)^{-1}[LY(z) + JU(z)] \qquad (6)$$

de 1 tenemos que:

$$Y(z) = CX(z) \qquad (7)$$

sustituyendo 7 en 6:

$$\hat{X}(z) = (zI - F)^{-1}[LCX(z) + JU(z)] \qquad (8)$$

y ahora 3 en 8:

$$\hat{X}(z) = (zI - F)^{-1}[LC(zI - G)^{-1}HU(z) + JU(z)]$$

$$\hat{X}(z) = (zI - F)^{-1}\left[LC(zI-G)^{-1}H + J\right]U(z) \quad (9)$$

Recordando el criterio de partida:

$$\frac{\hat{X}(z)}{U(z)} = \frac{X(z)}{U(z)}$$

de (3) y (9) tenemos:

$$(zI-G)^{-1}H = (zI-F)^{-1}\left[LC(zI-G)^{-1}H + J\right] \quad (10)$$

$$(zI-G)^{-1}H = (zI-F)^{-1}LC(zI-G)^{-1}H + (zI-F)^{-1}J \quad (11)$$

o también:

$$\underbrace{\left[I - (zI-F)^{-1}LC\right]}_{\text{saco Factor común } (zI-F)^{-1}}(zI-G)^{-1}H = (zI-F)^{-1}J$$

$$(zI-F)^{-1}\left[I(zI-F) - LC\right](zI-G)^{-1}H = (zI-F)^{-1}J$$

$$(zI-F)^{-1}\left[zI - (F+LC)\right](zI-G)^{-1}H = (zI-F)^{-1}J \quad (12)$$

$$\Rightarrow (zI-G)^{-1}H = \left[zI - (F+LC)\right]^{-1}J \quad (13)$$

Esta ecuación se satisface si se elige:

$$J = H \quad \text{y} \quad G = F + LC$$

$\Rightarrow F = (G - LC)$ y la ec. del observador resulta:

$$\boxed{\hat{X}(K+1) = (G - LC)\,\hat{X}(K) + L\,y(K) + J\,u(K)} \qquad (14)$$

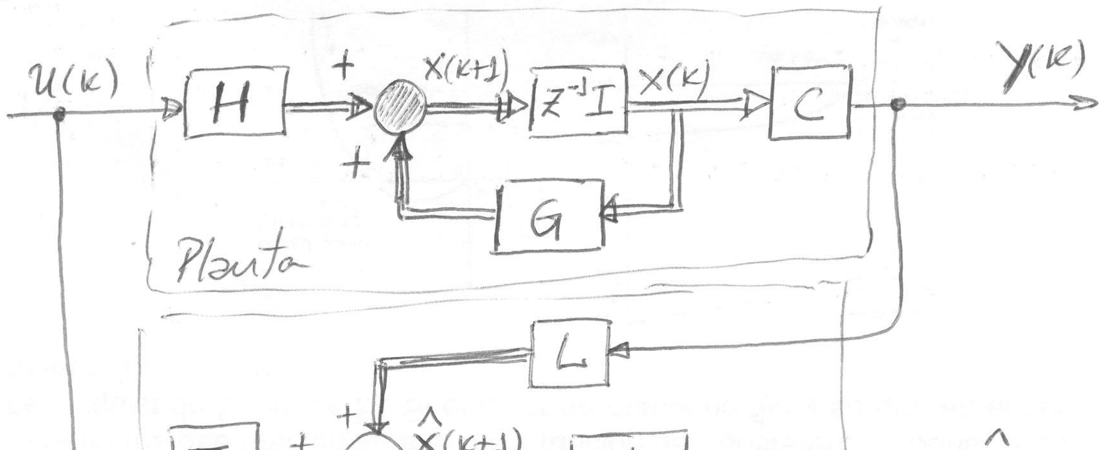
Importante: L no está especificada.

Podemos decir si el observador descrito por (14) es un sistema dinámico cuyos autovalores son dados por la sig. ecuación característica:

$$\left| zI - (G - LC) \right| = 0 \qquad (15)$$

y este observador se denomina predictivo porque la estimativa en KT se realiza con la medida en (K-1)T

El diagrama de bloques del sistema con observador resultará:



→ Veamos a continuación cual será el error en la estimación: (6)

$$\tilde{e}(K) = X(K) - \hat{X}(K) \qquad (16)$$

escribiendo p/ $(K+1)$:

$$\tilde{e}(K+1) = X(K+1) - \hat{X}(K+1)$$

usando la (1) y la (14)

$$\tilde{e}(K+1) = G\,X(K) + \cancel{H\,u(K)} - (G - LC)\,\hat{X}(K) + L\,y(K) + \cancel{J\,u(K)}$$

como $J = H$ e $y(K) = C\,X(K)$

$$\tilde{e}(K+1) = G\,X(K) - \{G\,\hat{X}(K) + LC\,\hat{X}(K) - LC\,X(K)$$

$$= (G - LC)\,X(K) - (G - LC)\,\hat{X}(K)$$

$$\Rightarrow \tilde{e}(K+1) = (G - LC)\,[X(K) - \hat{X}(K)] \quad \text{de (16)}$$

y $$\boxed{\tilde{e}(K+1) = (G - LC)\,\tilde{e}(K)} \qquad (17)$$

Es una ecuación diferencia homogenea cuyos autovalores se encuentran por la ec. característica

$$|zI - (G - LC)| = 0 \qquad (18)$$

q/ es igual a la (15). Si los autoval. de (18) se encuentran dentro del <u>circulo unitario</u> el sist. resulta <u>estable</u> y $\hat{X}(K) \to X(K)$ p/ $K \to \infty$.-

O sea el problema de proyecto de este observador se resume a determinar la matriz "L" convenientemente para que $\tilde{e}(K)$ tienda a cero p/ cualquier condición inicial $\tilde{e}(0)$:

$$\boxed{\tilde{e}(K) \to 0 \quad \forall\ \tilde{e}(0)}$$

<u>Obtención de la matriz L del observador</u>

La matriz L tendrá dimensión $(n \times 1)$ donde "n" orden del sistema

La matriz de dinamicas F del observador es dada por:

$$G - LC$$

y su ecuación característica está dada por:

$$|\lambda I - (G - LC)| = 0 \qquad (19) \quad 41$$

Supongamos que queremos q' el observador tenga autovalores iguales a $z = p$. Esto da la sig. ecuación característica

$$|\lambda I - \mathrm{diag}(p)| = 0 \qquad (20) \quad 42$$

Igualando coeficientes de (19) y (20) podemos obtener los elementos de L.

Fuentes de error: ⑤

1º) G ≠ de la considerada p/ el modelo exacto del sist. físico.

Se asumió q/ la G de la planta es idéntica a la utilizada en el observador.

2º) Elección de las condiciones iniciales p/ el observ.

Dado q/ las condiciones iniciales de la planta no son conocidas $e(0)$ no será cero.

Por lo tanto, considerando q/ el proyecto del observador está realizado de manera tal q/ resulte estable, $e(k) \to 0$ p/ $k \to \infty$.

3º) Disturbios en la planta y errores de medición y de los sensores.

La ec. completa de la planta:

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) + H_1 w(k) \qquad (17)$$

$$y(k) = C\,x(k) + v(k)$$

La ec. del error de estimación resulta:

$$e(k+1) = [G - \check{I}C]\,e(k) + \underline{H_1 w(k)} - \underline{v(k)} \qquad (18)$$

los términos del disturbio y error de sensores harán q/ el error de estimación no sean exactamente igual a cero.

Proyecto: (6)

$$q(k+1) = (G - \check{I}C)\,q(k) + \check{I}\,y(k) + Hu(k)$$

Se observa q' todas las matrices de esta ec. son determinadas de la ec. de la planta, excepto $\check{I}$. Por entanto, el criterio de diseño se satisface independientemente de la elección de $\check{I}$.

De la ec. característica se observa q'

$$\alpha_{co}(z) = |zI - (G - \check{I}C)| = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (19)$$

Si el sistema es SISO

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}$$

Es posible proyectar el observador eligiendo una ec. característica deseada e igualar coeficientes de igual potencia de (19)

Un criterio usado sugiere q' las dinámicas (autovalores) del observador sean de 2 a 4 veces más rápidas q' las dinámicas del sistema de lazo cerrado, o sea:

$$|zI - (G + HK)| = 0 \quad (20)$$

$\Rightarrow$ Las cttes. de tiempo del observador son obtenidas a un valor igual a $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ de las ctte. de tiempo más rápida de (20).

La matriz $\check{I}$ puede ser obtenida utilizando (7)

la ec. de Ackermann:

$$\check{I} = \alpha_e(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sea la sig. planta:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0952 \\ 0 & 0{,}905 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0{,}00484 \\ 0{,}0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$K = \begin{bmatrix} 4{,}52 & 1{,}12 \end{bmatrix}$$

La ec. caract. de lazo cerrado es dada por:

$$\alpha_c(z) = z^2 - 1{,}776z + 0{,}819 = 0$$

La cte de tiempo de las raíces de esta ec. es de 1 seg. Elegimos la cte de tiempo del observador en 0,5 seg.

Si elegimos q. la rta. sea críticamente amortiguada

$$z = e^{-T/\tau} \qquad \text{con } T = 0{,}1 \text{ seg}$$

$$z = 0{,}819$$

La ec. caract. del observador será:

$$\alpha_{ce}(z) = (z - 0{,}819)^2 = z^2 - 1{,}638z + 0{,}671 = 0$$