



SISTEMAS DE CONTROL y AUTOMATIZACIÓN

Profesor: Fernando Botterón
Ingeniería en Computación
Facultad de Ingeniería - U.Na.M

Temas de la Unidad 3

- ✓ **Acciones de Control Básicas.**
 - ✓ **Controlador ON-OFF.**
 - ✓ **Controladores P, PI, PD y PID.**
- ✓ **Efectos de la acciones básicas en el desempeño.**
- ✓ **Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas.**
- ✓ **Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica.**
- ✓ **Estructuras cero-polo y polo-cero. Asociaciones.**
- ✓ **Sintonía de Controladores PID por Ziegler-Nichols.**

Acciones de Control Básicas

Control ON-OFF o de dos posiciones

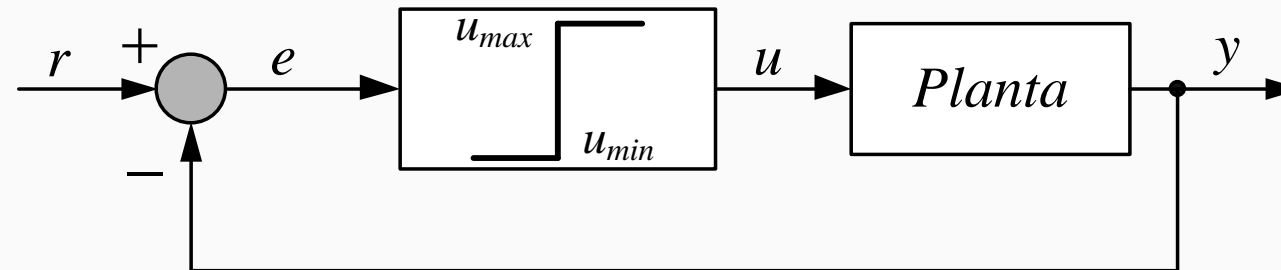
- ✓ Es la forma mas simple y económica de controlar un sistema;
- ✓ Es muy utilizado en una diversidad de procesos;
- ✓ Forma simple de implementar un control con Ganancia Elevada.

Controladores de dos posiciones:

- Dispositivos eléctricos (relés y válvulas electromagnéticas);
- Controladores neumáticos o hidráulicos.
- Semiconductores de potencia BJT; MOSFET; IGBT; TIRISTORES.

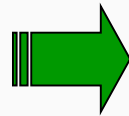
Acciones de Control Básicas

Control ON-OFF o de dos posiciones



$$u = u_{max} \quad \text{si } e > 0$$

$$u = u_{min} \quad \text{si } e < 0$$



El controlador utiliza la acción correctiva máxima, por lo que puede corregir rápidamente el efecto de las perturbaciones.

$u_{min} = 0$ o un mínimo negativo: Depende del actuador y del proceso a controlar.

La variable de salida resulta **oscilatoria** ya que la acción $u(t)$ no está definida cuando $e(t) = 0$.

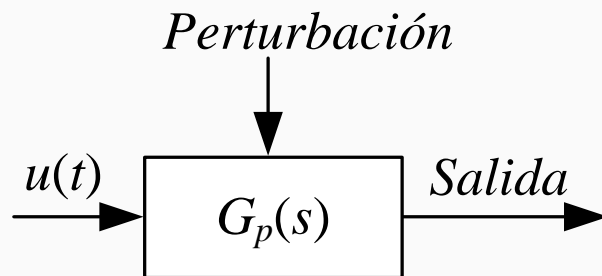
Acciones de Control Básicas

Control ON-OFF o de dos posiciones

Ejemplo: Calefacción de una habitación

Acción de control $u(t)$: **cantidad de calor** que entrega la calefacción;

Salida de la planta $y(t)$: **temperatura de la habitación**

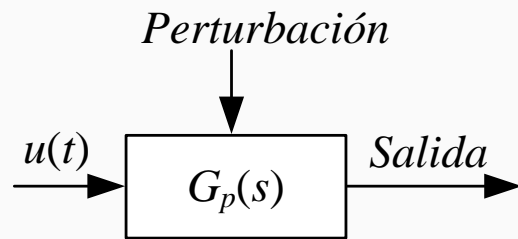


Perturbación: es la pérdida de calor de la habitación

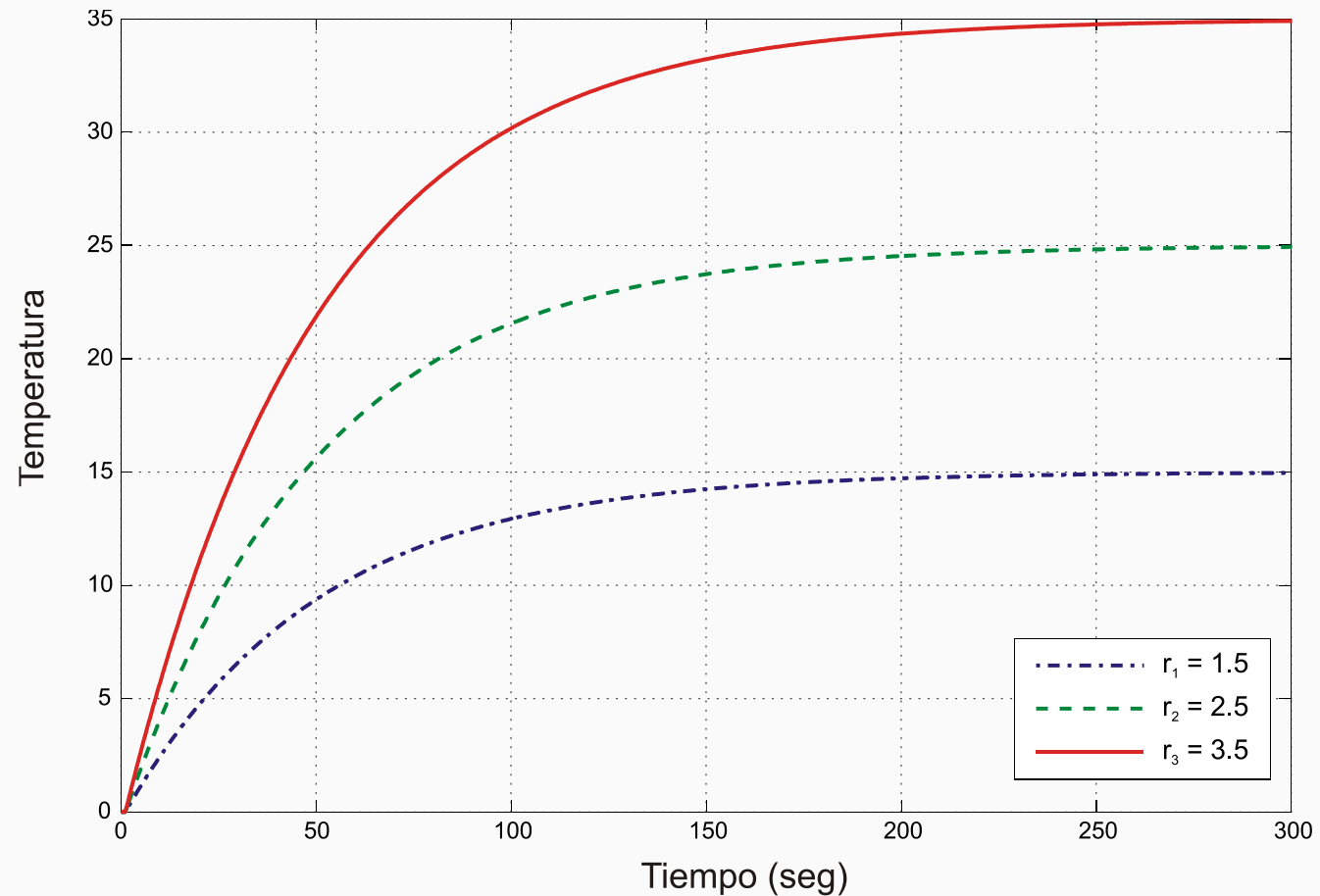
Acciones de Control Básicas

Control ON-OFF o de dos posiciones

En lazo abierto puede verificarse el valor de temperatura en régimen permanente para diferentes entradas $u(t)$



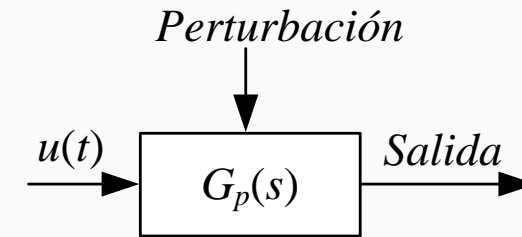
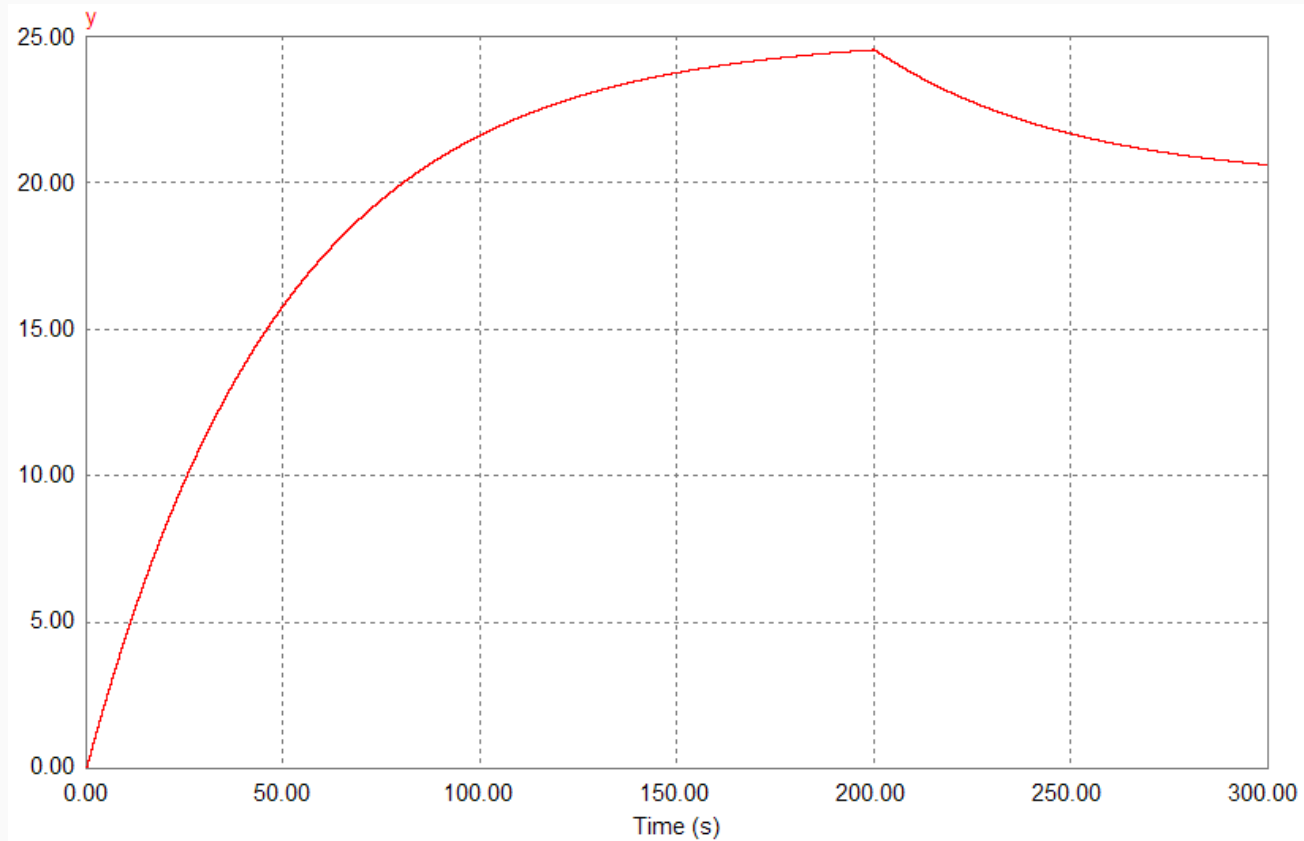
$$G_p(s) = \frac{10}{5s^2 + 50s + 1}$$



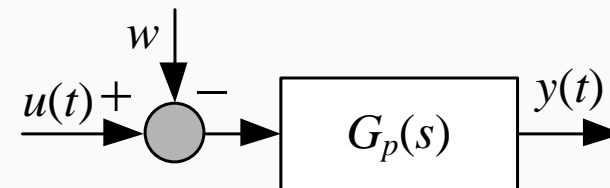
Acciones de Control Básicas

Control ON-OFF o de dos posiciones

Efecto de la perturbación en el sistema a lazo abierto

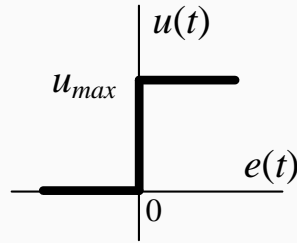
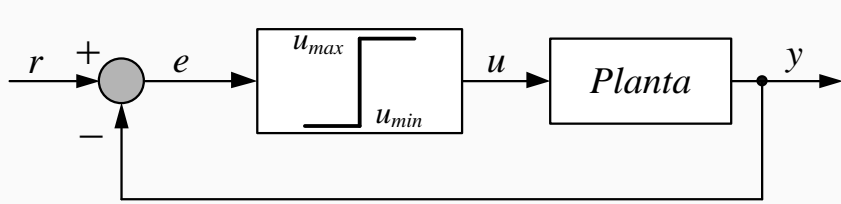


El sistema a lazo abierto acusa sensiblemente el efecto de la **PERTURBACIÓN**

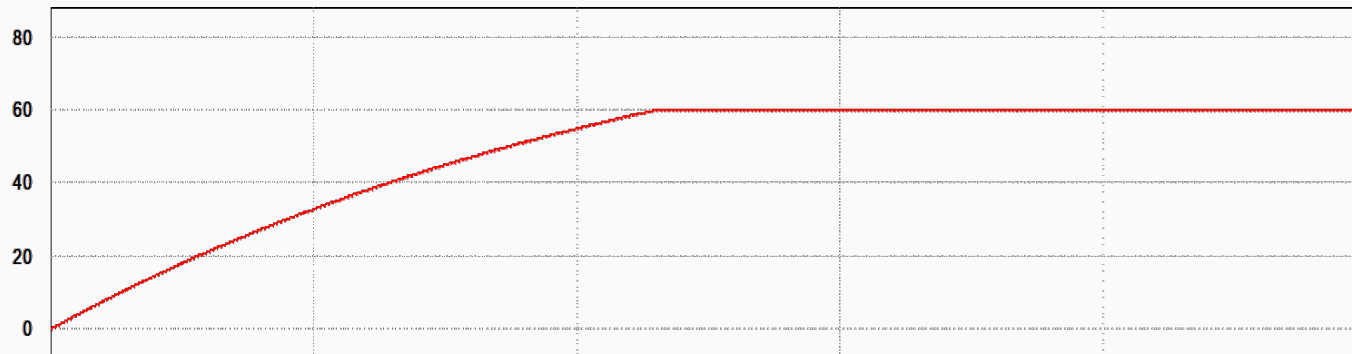


Acciones de Control Básicas

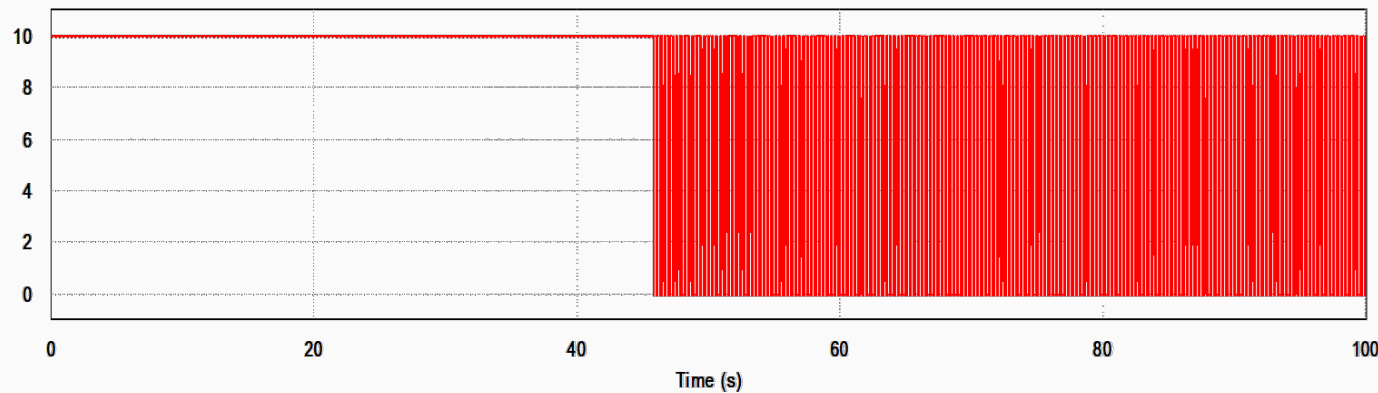
Control ON-OFF o de dos posiciones ideal



Temp

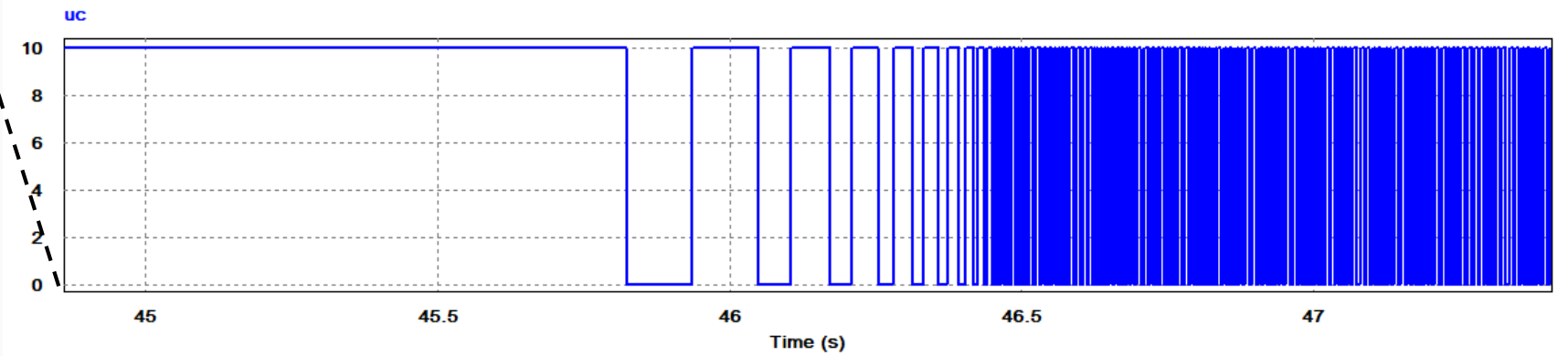
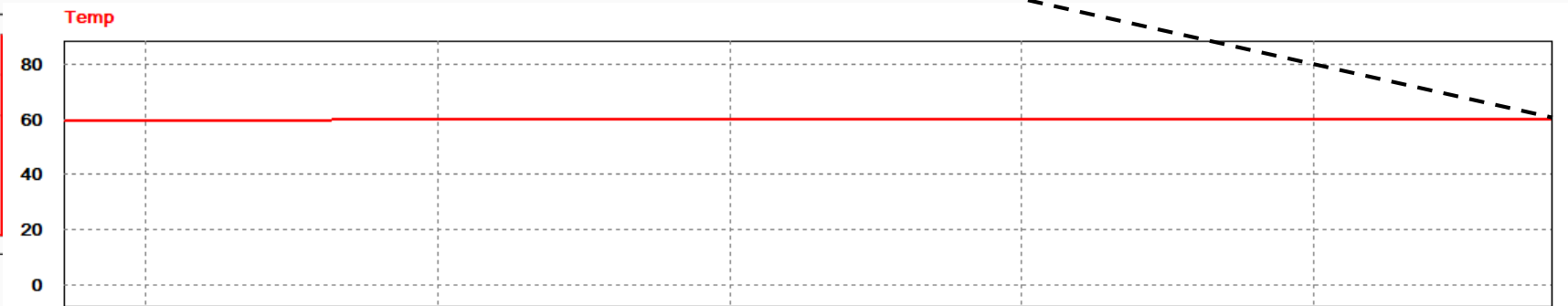
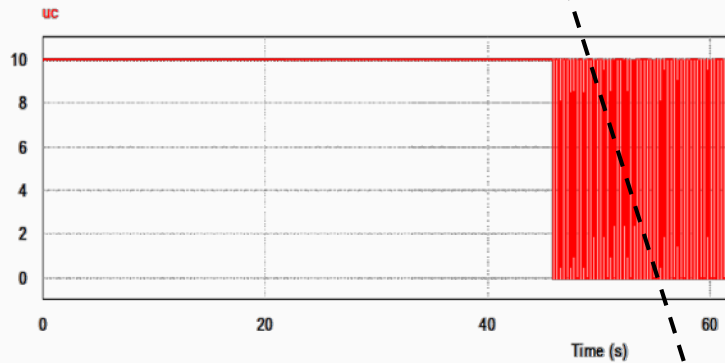
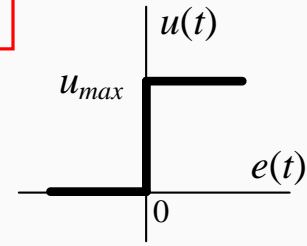
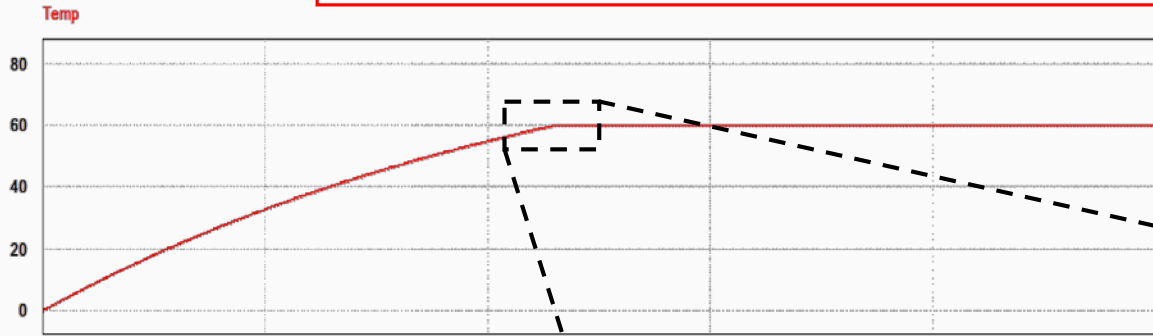


uc



- ☺ El sistema a lazo cerrado corrige rápidamente el efecto de la PERTURBACIÓN;
- ☺ La salida (T°) llega rápidamente al valor de consigna;
- ☺ La T° se mantiene en el valor deseado y entre los valores encendido y apagado;
- ☹ Mucho esfuerzo de la ley de control y variaciones muy rápidas

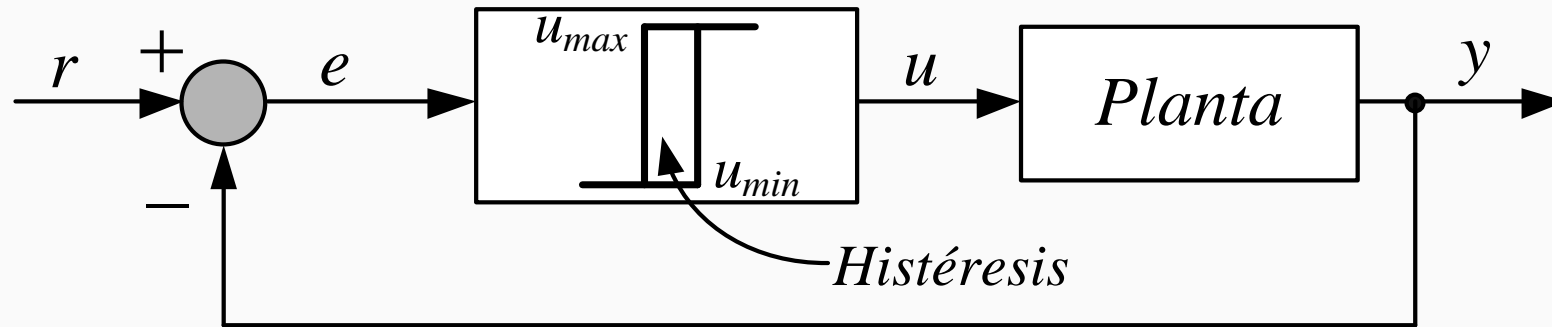
Control ON-OFF o de dos posiciones ideal



Fenómeno de *Chattering*: Alta frecuencia de la acción de control

Control ON-OFF o de dos posiciones: real

Se incorpora una banda de histéresis para limitar la frecuencia de actuación.

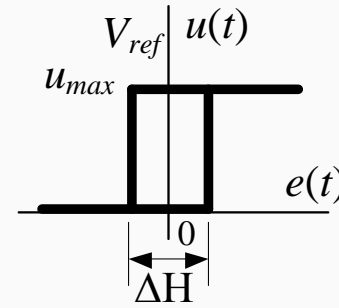
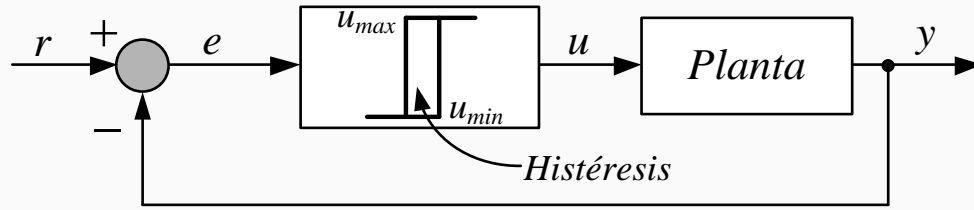


La salida y , varía entre el valor de referencia $r \pm \Delta H/2$ siendo ΔH la banda muerta de histéresis.

$$\text{Si } e > +\Delta H/2 \Rightarrow u = u_{min}$$

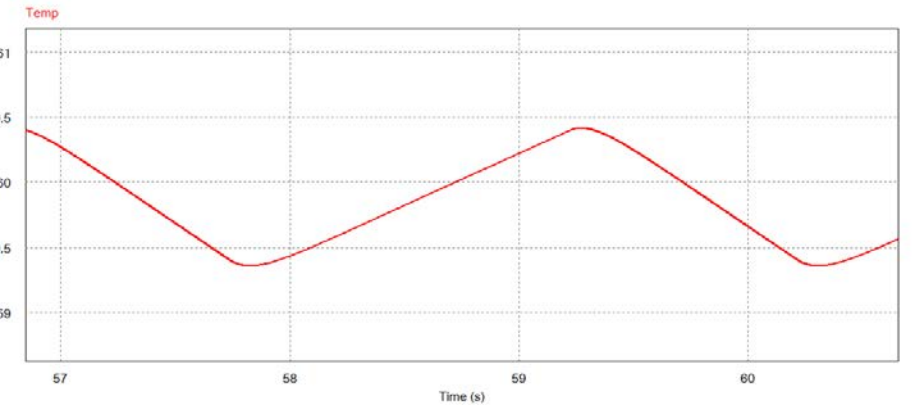
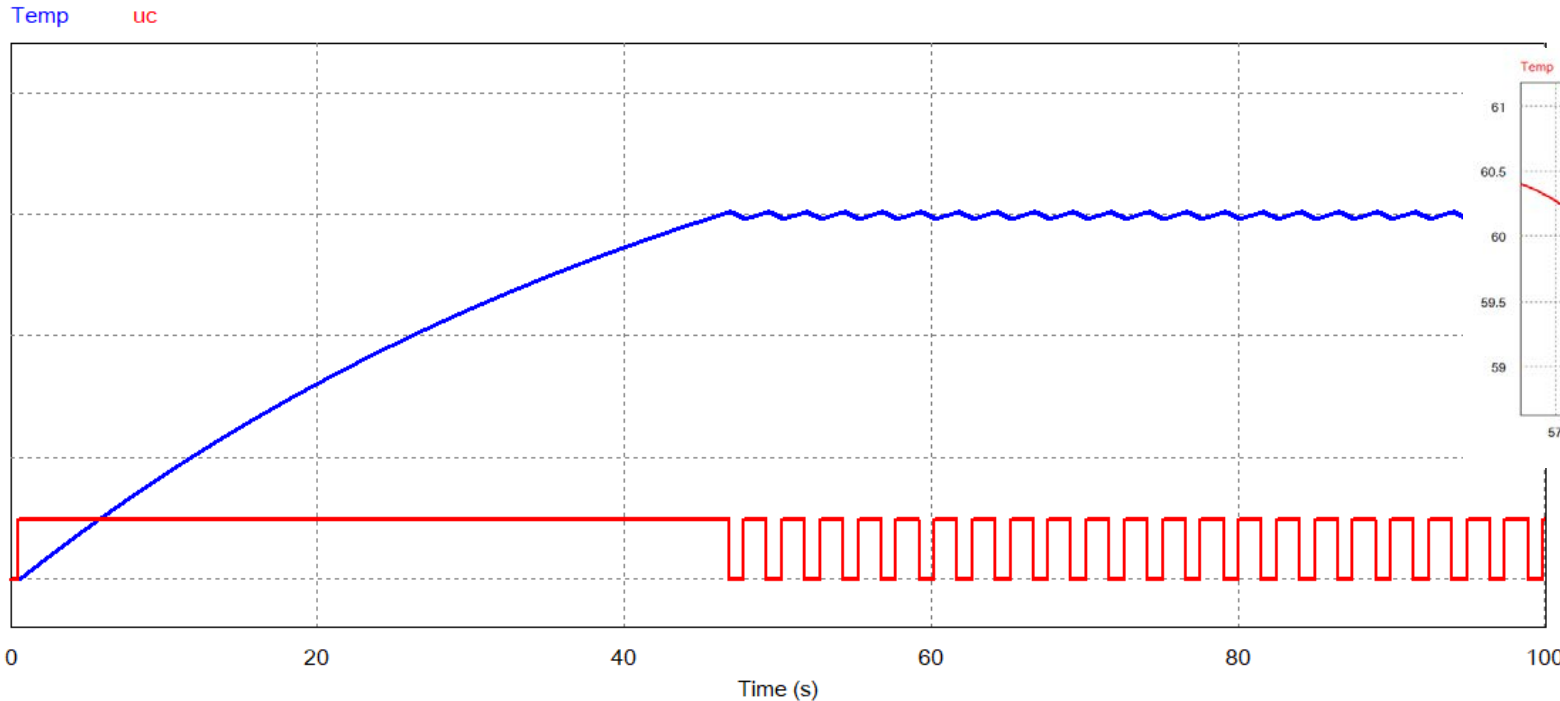
$$\text{Si } e < -\Delta H/2 \Rightarrow u = u_{max}$$

Control ON-OFF con Histéresis



$$\Delta H = 0,5$$

$$u_{max} = 10$$

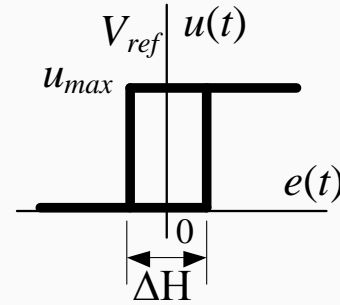
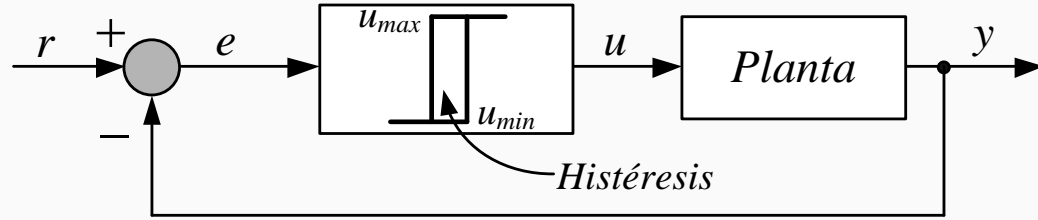


$$\text{ondulación} = 1,06^\circ$$

Frecuencia de conmutación
aproximadamente constante

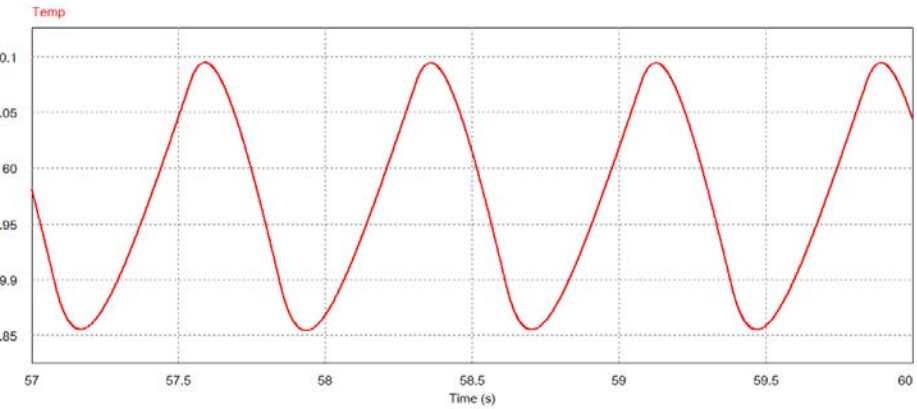
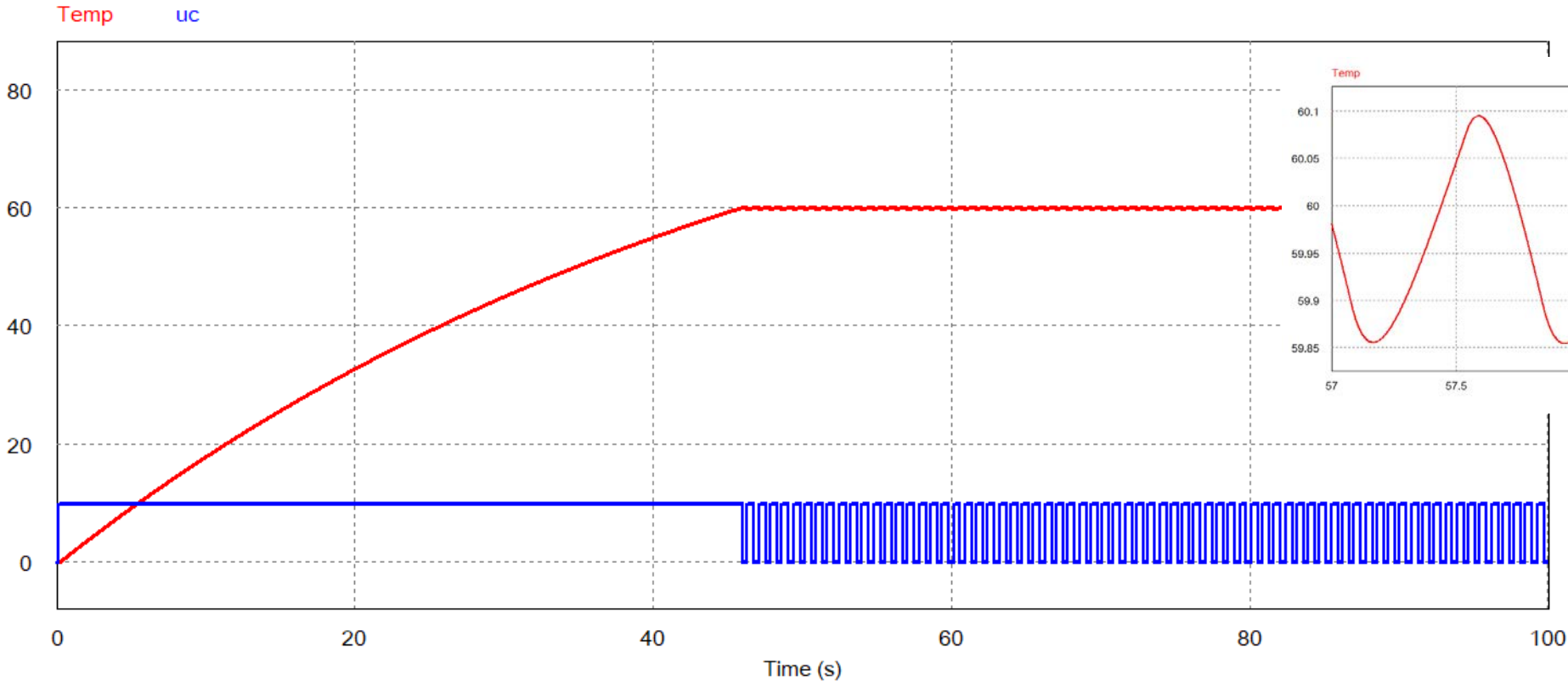
La oscilación no solo depende de la banda de
histéresis, sino también, de la dinámica del proceso.

Control ON-OFF con Histéresis



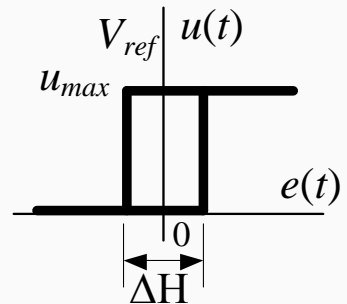
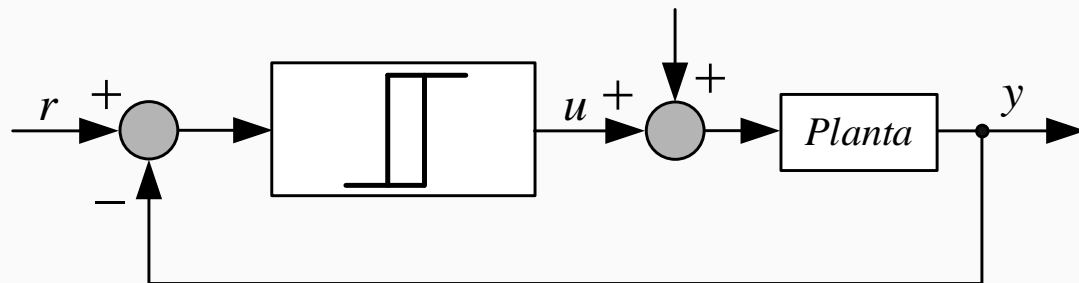
$$\Delta H = 0,1$$

$$u_{max} = 10$$



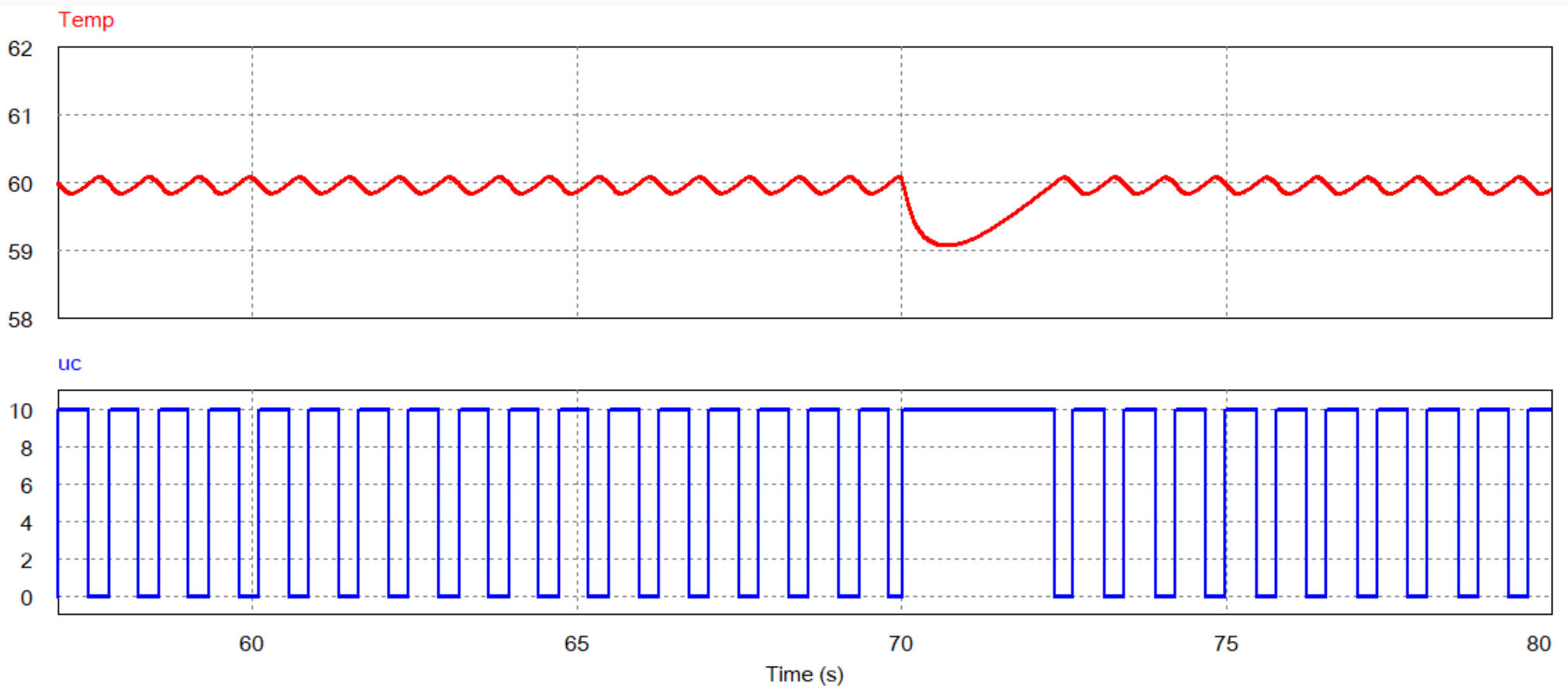
$$\text{ondulación} = 0,24^\circ$$

Control ON-OFF con Histéresis: Rechazo a Perturbaciones

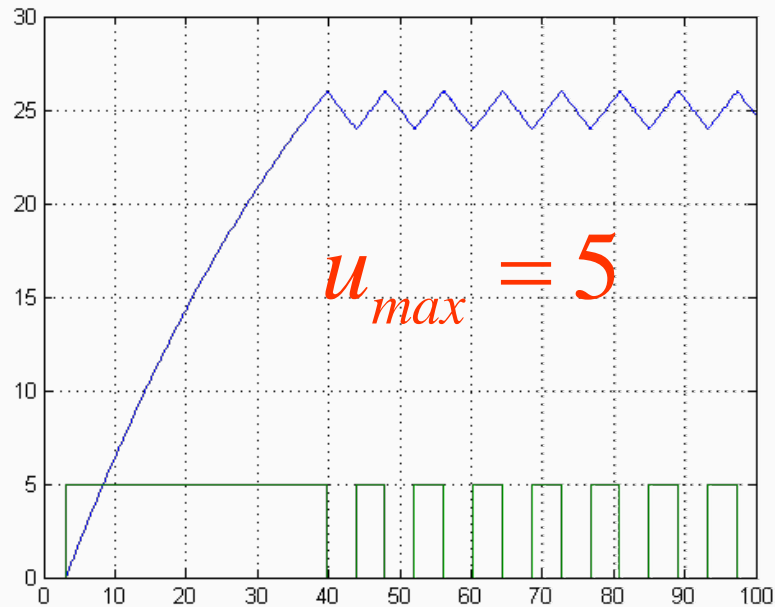


$$\Delta H = 0,1$$

$$u_{max} = 10$$

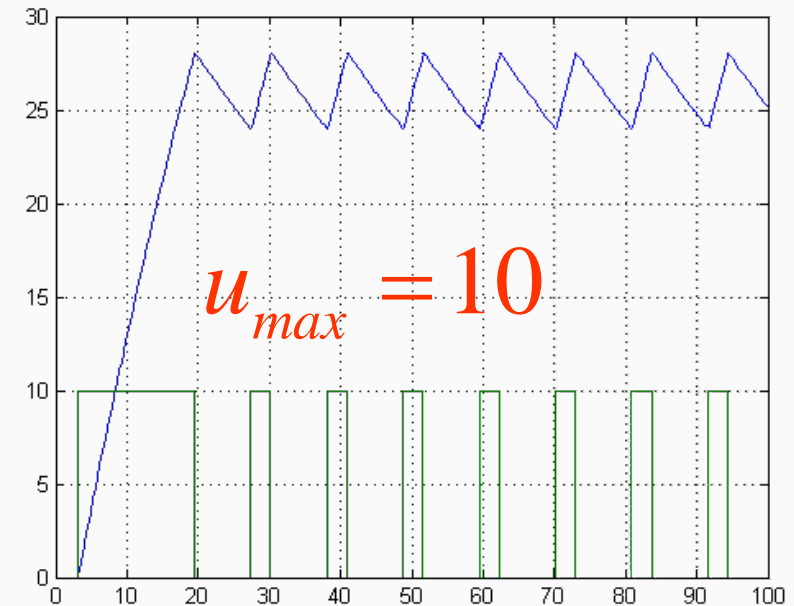


Control ON-OFF con Histéresis: Planta con Atraso de Transporte

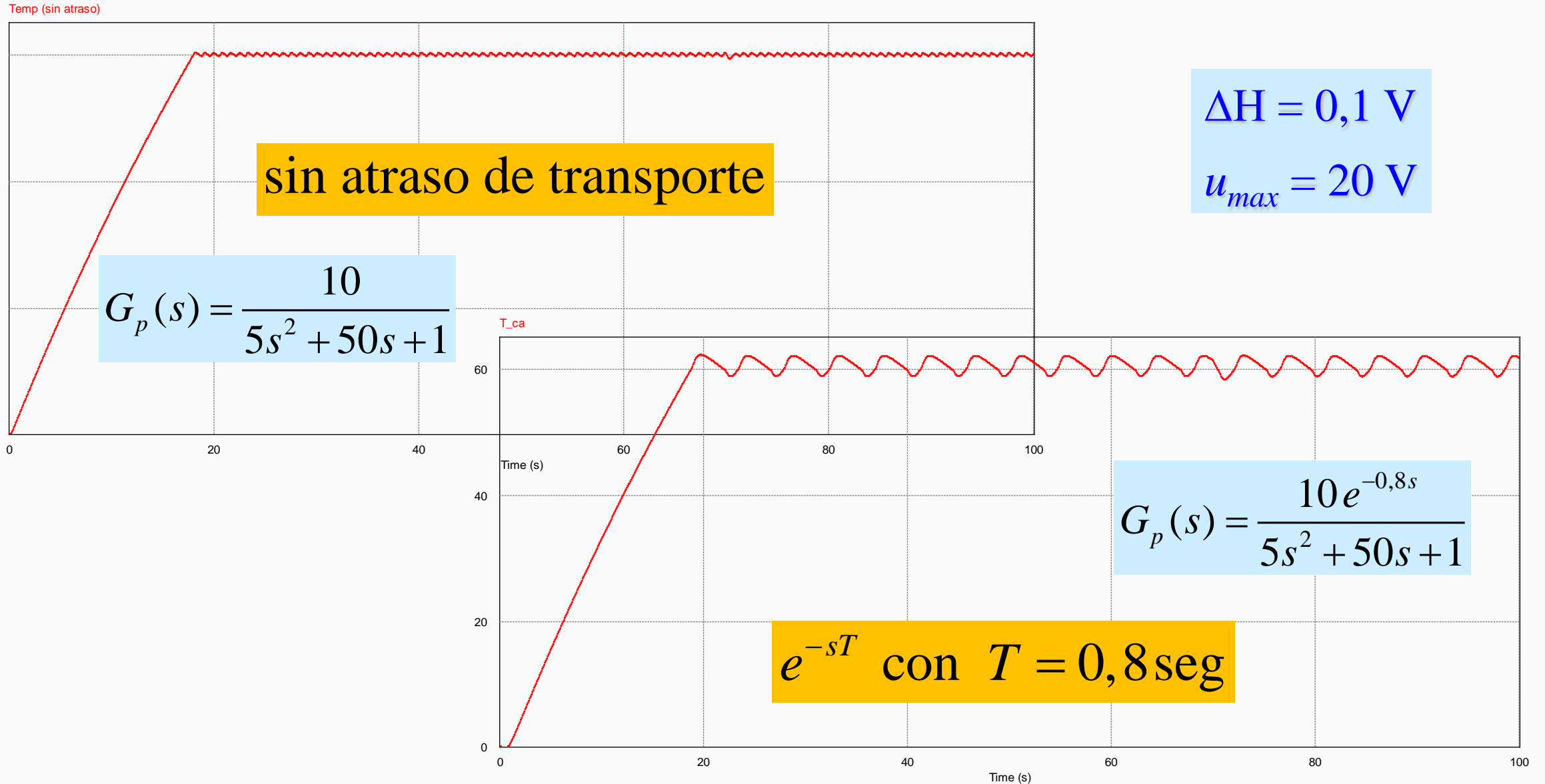


$$e^{-sT}, \text{ con } T = 2$$

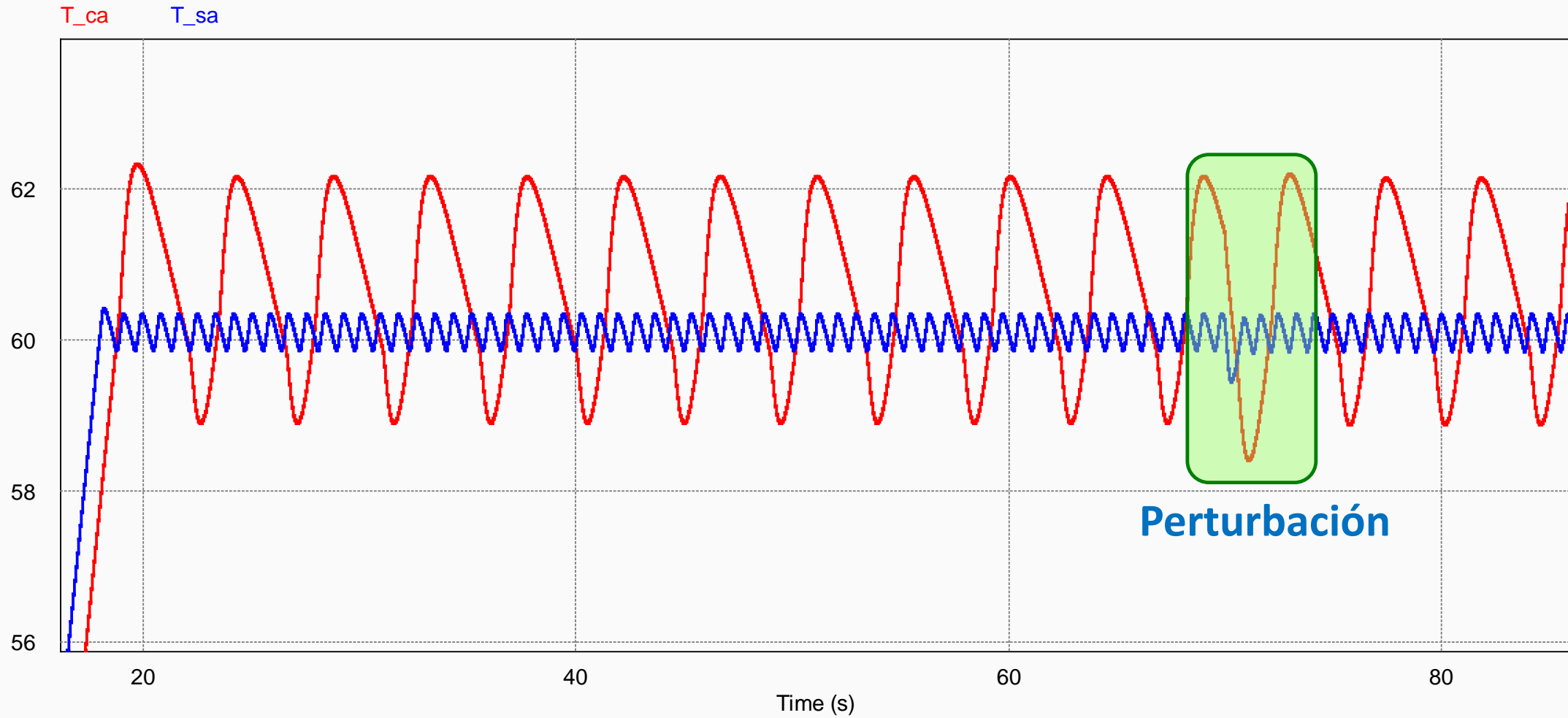
- Retardo puro aumenta las oscilaciones
- Se degrada la respuesta en la medida que aumenta el valor máximo de entrada



Control ON-OFF con Histéresis: Planta con Atraso de Transporte



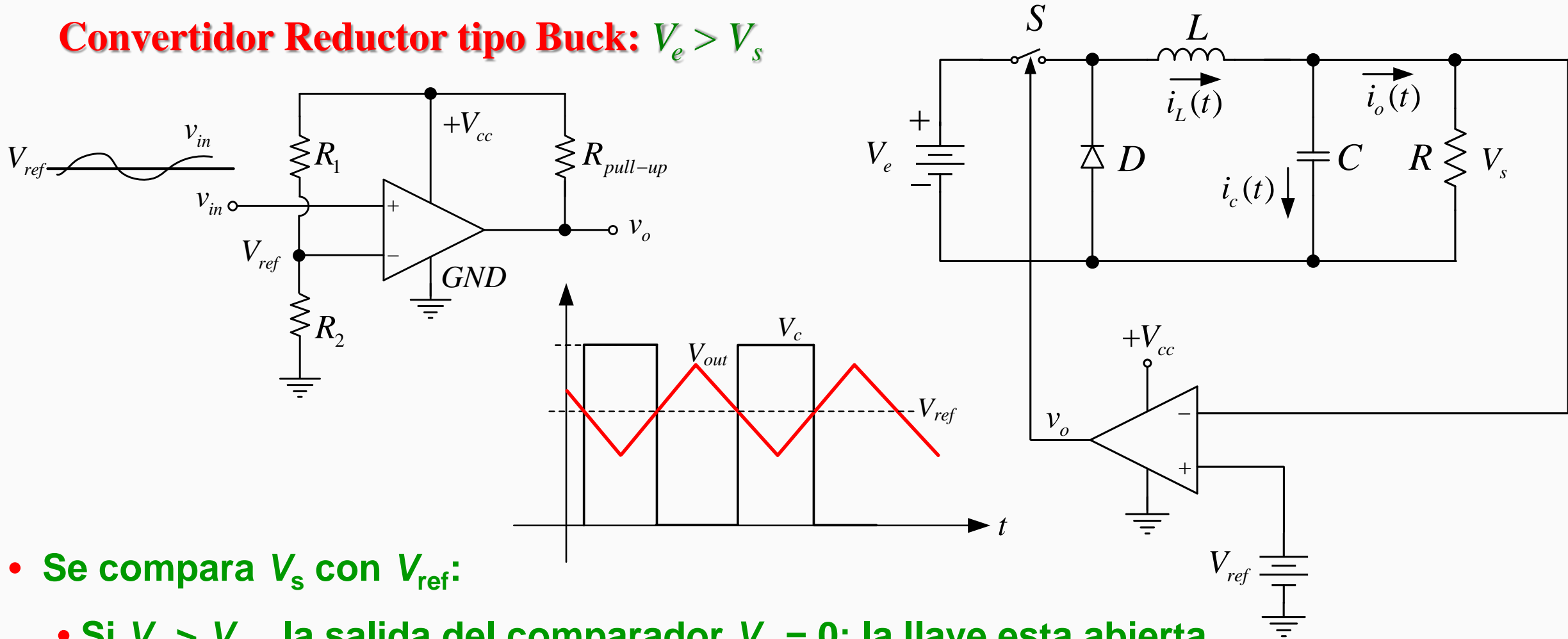
Control ON-OFF con Histéresis: Planta con Atraso de Transporte



$$\Delta H = 0,1 \text{ V y } u_{max} = 20 \text{ V}$$

Control ON-OFF básico ideal: Fuente de alimentación conmutada

Convertidor Reductor tipo Buck: $V_e > V_s$

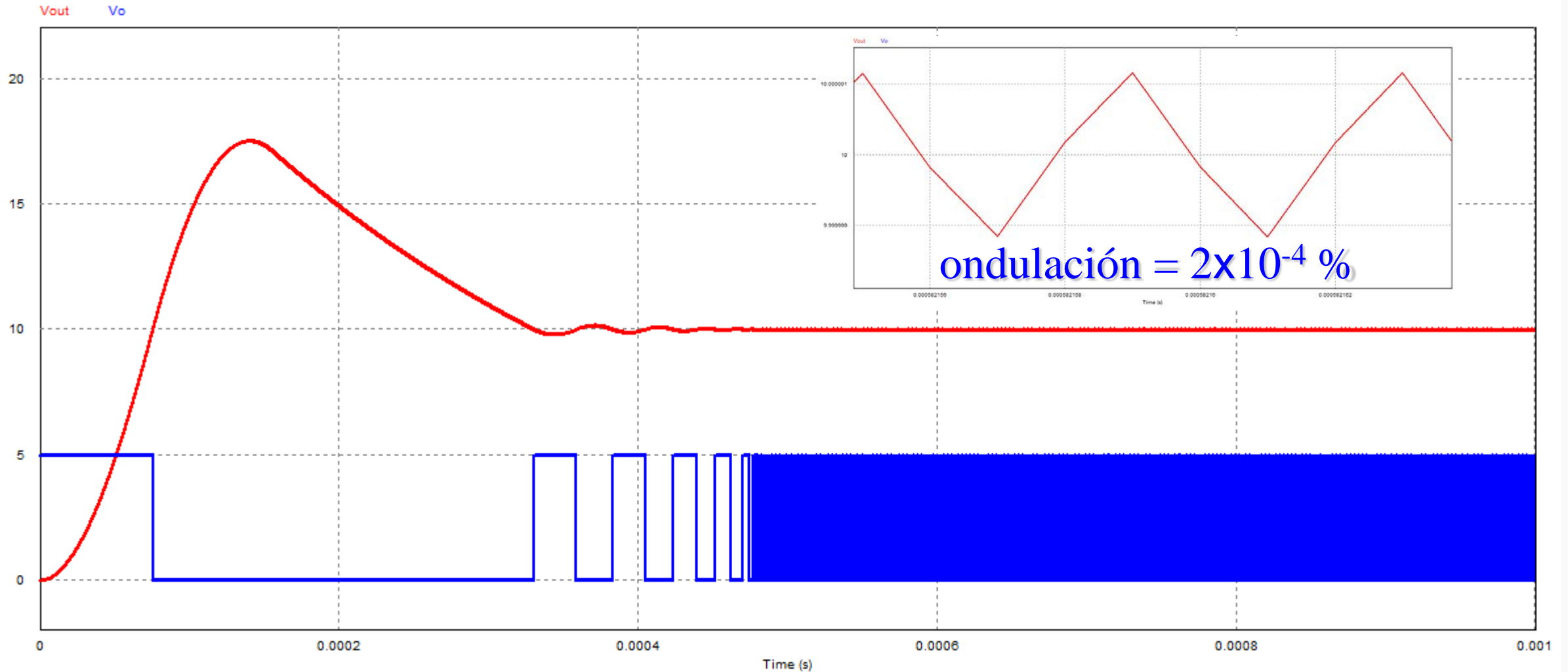


- Se compara V_s con V_{ref} :
 - Si $V_s > V_{ref}$ la salida del comparador $V_o = 0$; la llave esta abierta
 - Si $V_s < V_{ref}$ la salida del comparador $V_o = 1$; la llave esta cerrada.
- V_s se mantiene próxima a V_{ref} .

Control ON-OFF ideal: Problema de *Chattering*

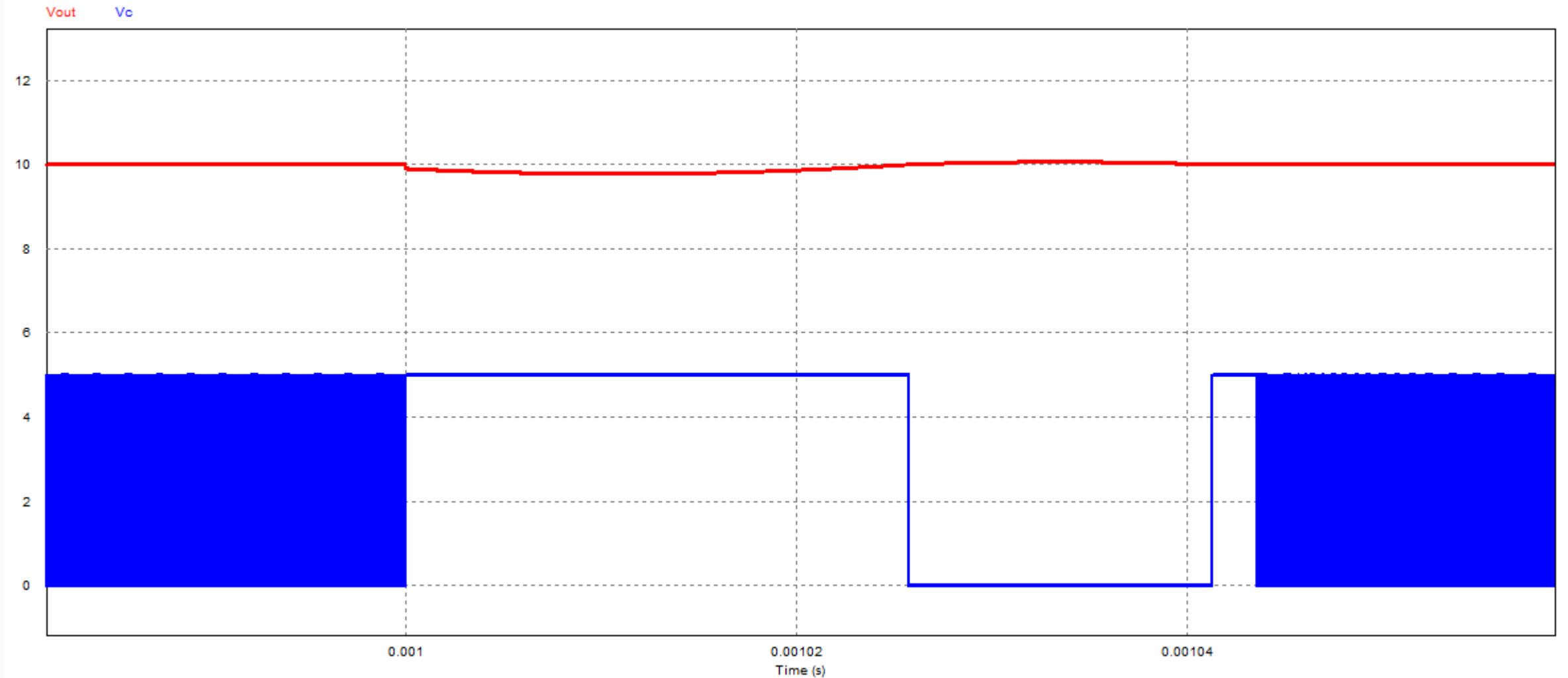
Elevada frecuencia de la acción de control

Ondulación de tensión despreciable



Control ON-OFF básico: Perturbación de Carga

Buena Respuesta ante Perturbaciones de Carga



Control ON-OFF con Histéresis: Realimentación positiva

Figura 1

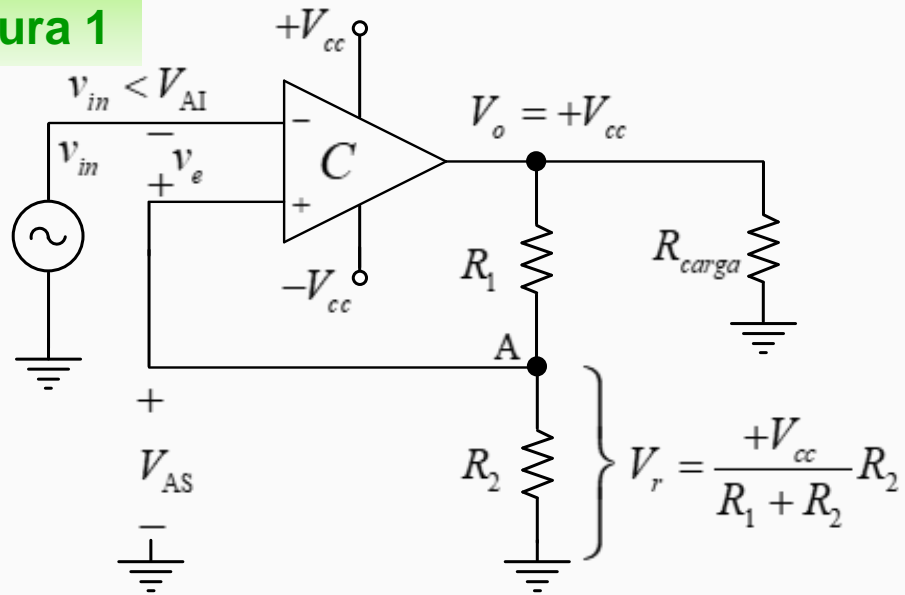
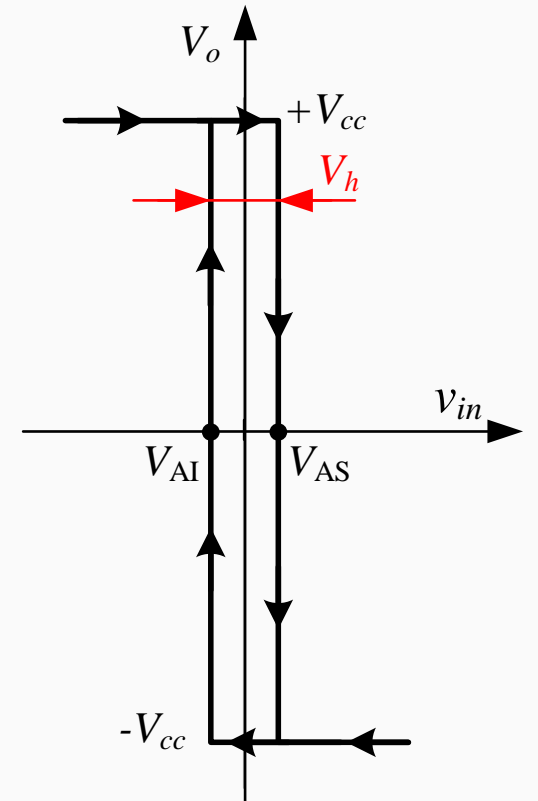
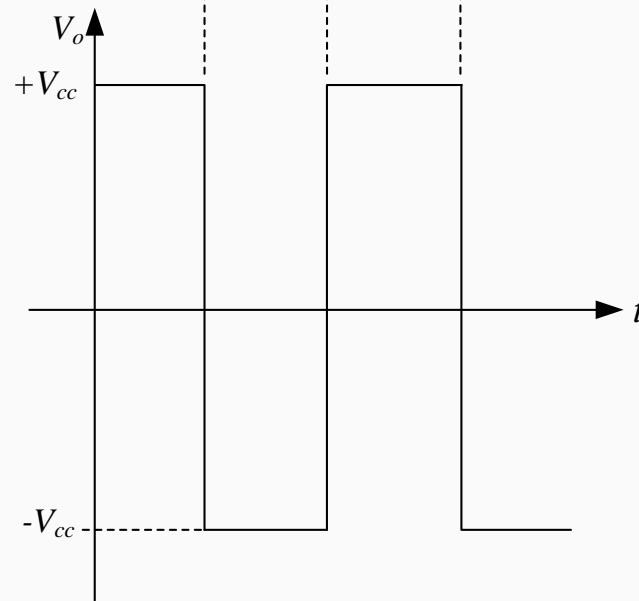
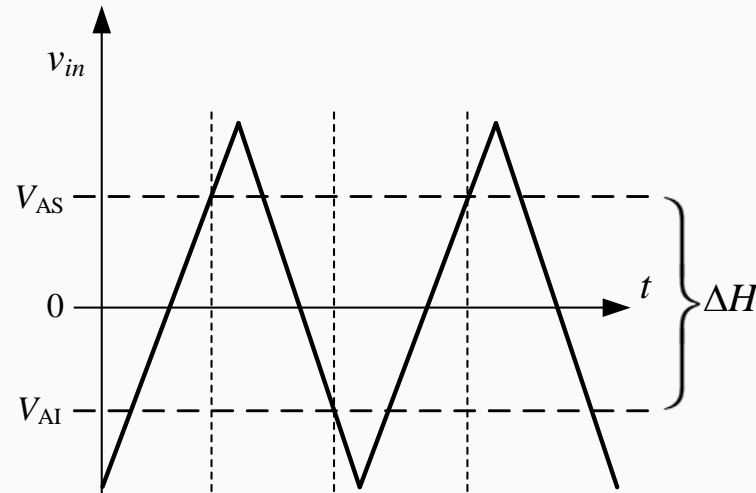
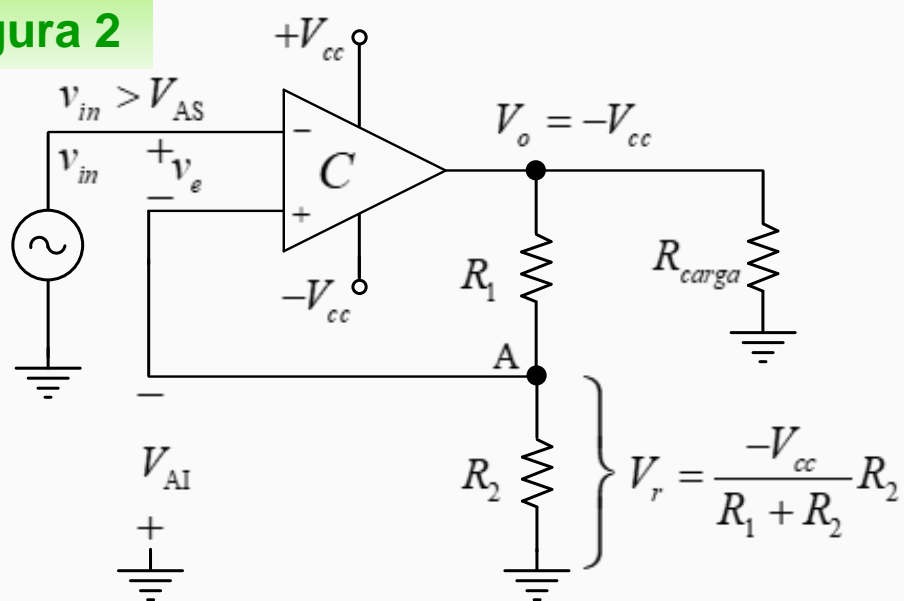
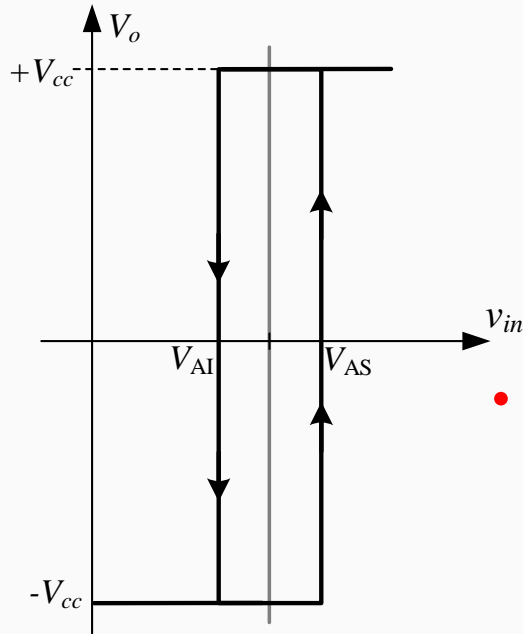
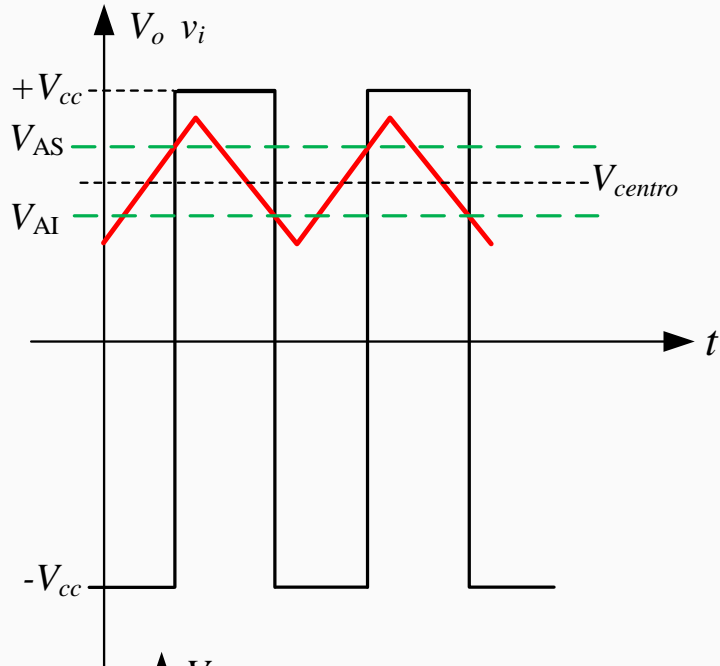


Figura 2



Ciclo de Histéresis o Característica Entrada-Salida

Control ON-OFF con Histéresis: Realimentación positiva



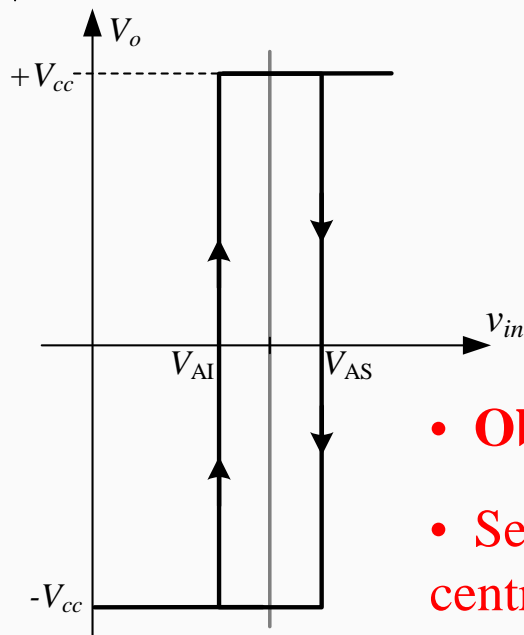
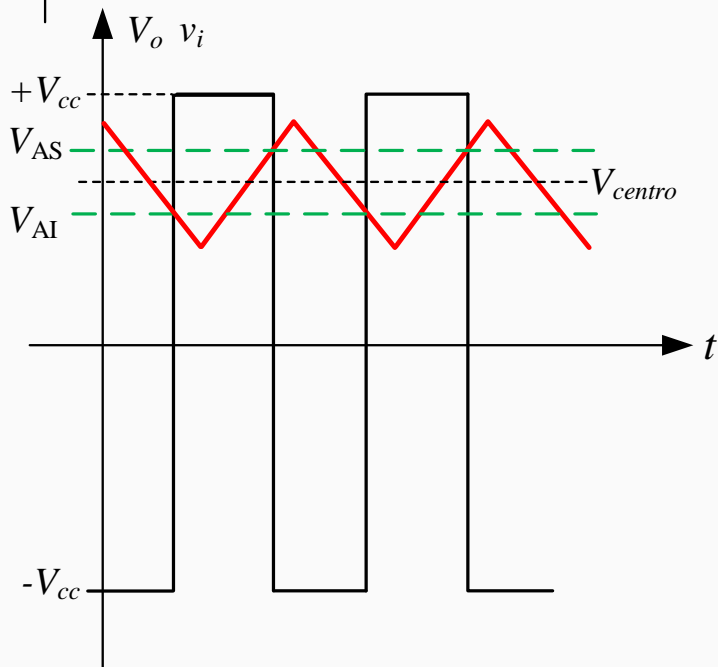
Valor de Referencia $\neq 0V$

Ciclo de Histéresis o Característica Entrada-Salida de un detector de nivel de tensión No-Inversor

- Obsérvese que cuando $v_i > V_{AS}$, V_o va hacia $+V_{cc}$.

Si $V_{ref} = 12V$ y $V_h = 2V$;

$$V_{AS} = 12V + 2V = 14V \quad \text{y} \quad V_{AI} = 12V - 2V = 10V$$

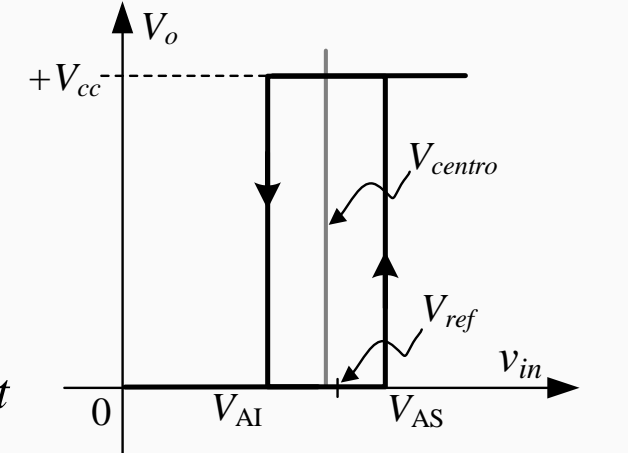
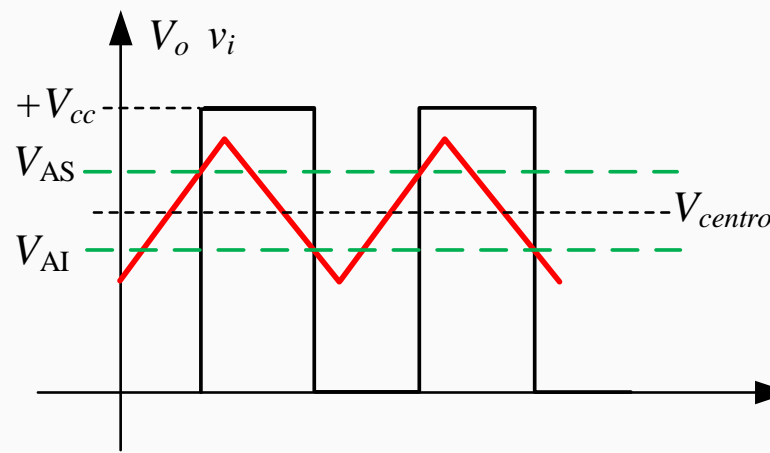
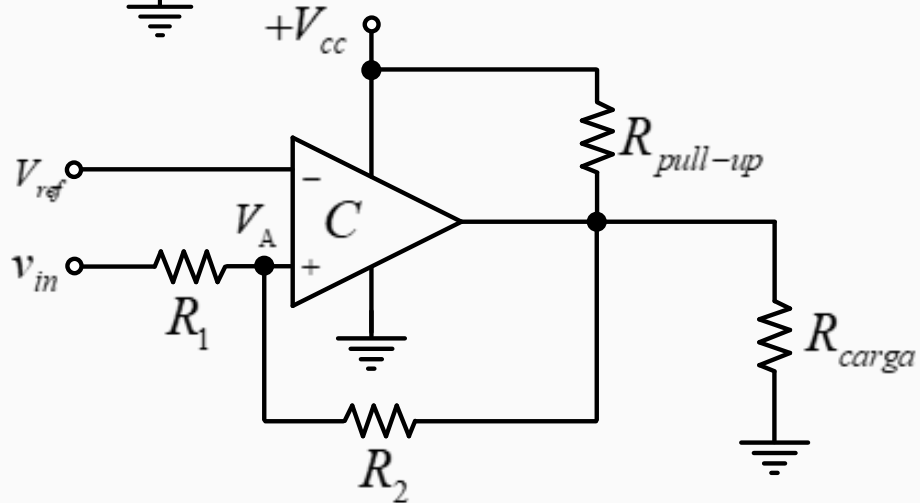
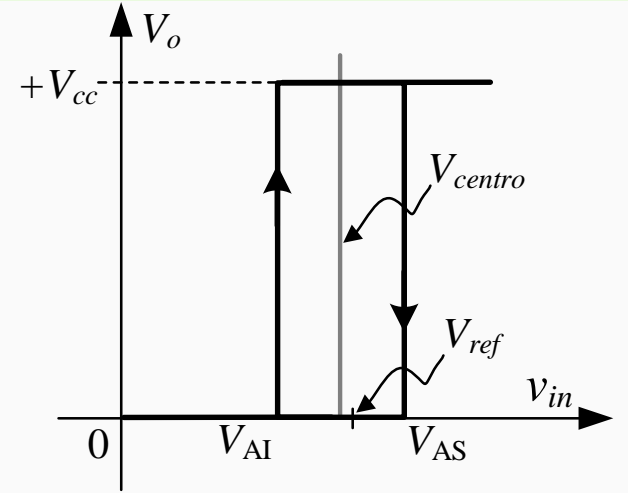
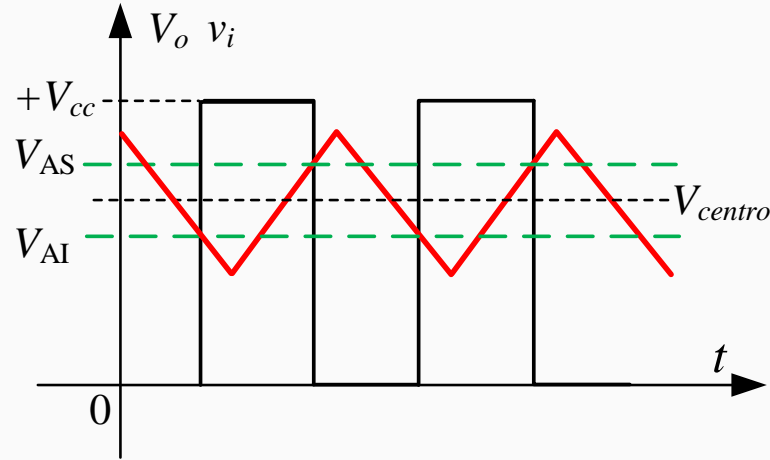
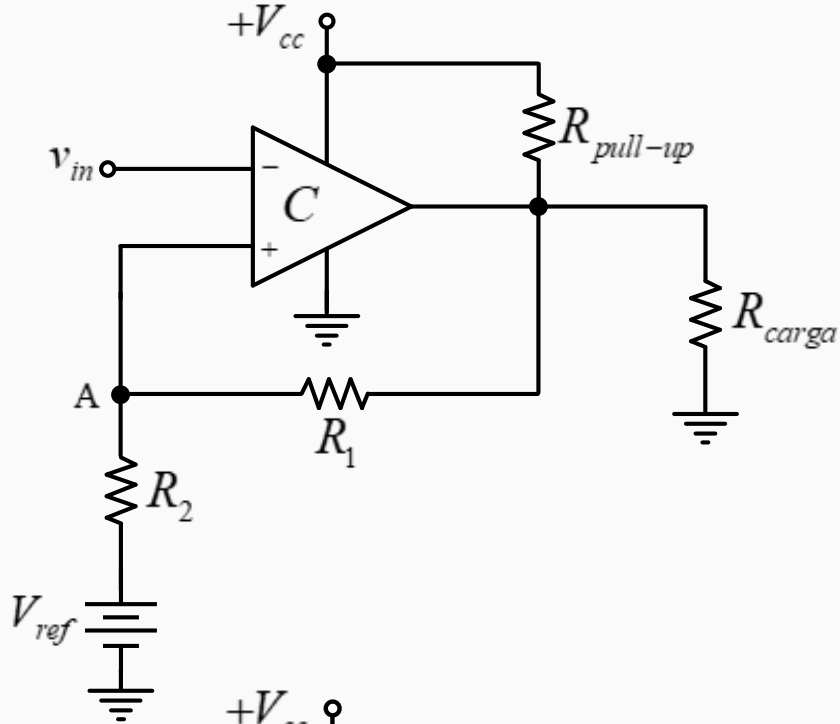


Ciclo de Histéresis o Característica Entrada-Salida de un detector de nivel de tensión Inversor

- Obsérvese que cuando $v_i > V_{AS}$, V_o va hacia $-V_{cc}$.
- Se define una V_{centro} que es la tensión en la cual se centra la ventana de histéresis.

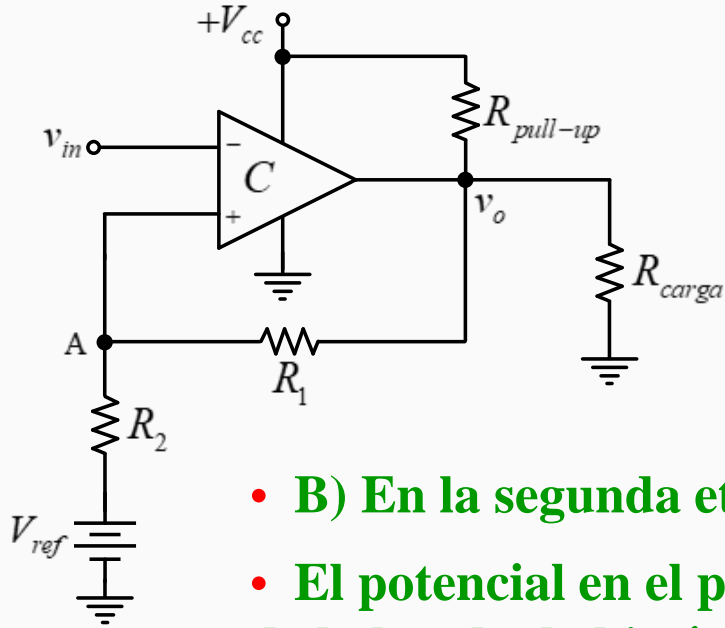
Control ON-OFF con Histéresis

Detector de nivel de tensión Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



Detector de nivel de tensión No Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica

Controlador ON-OFF Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



• **A) Cuando se inicia, $v_{in} < V_A$ $v_o \approx V_{cc}$**

• **El potencial en el punto A en el límite superior de la banda de histéresis es:**

$$V_{AS} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{cc} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_{ref}$$

• **B) En la segunda etapa, $v_{in} > V_A$ $v_o \approx 0 V$**

• **El potencial en el punto A en el límite inferior de la banda de histéresis es:**

$$V_{AI} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_{ref}$$

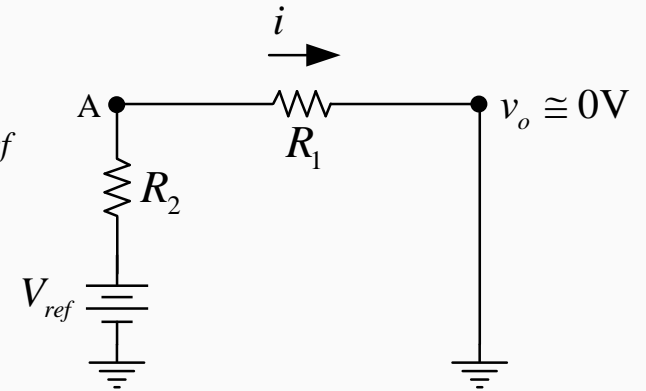
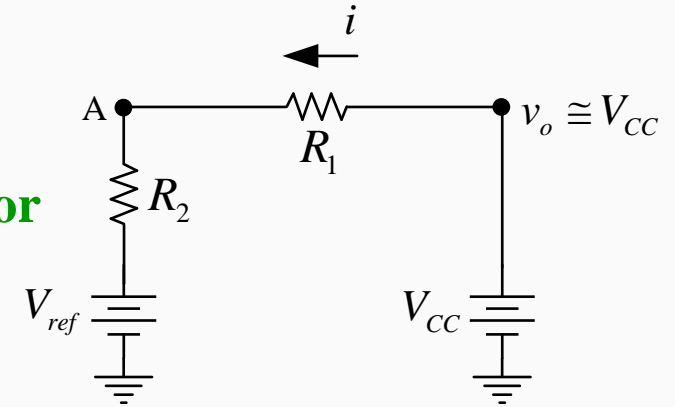
• **La ventana de histéresis finalmente está dada por:**

$$V_h = \Delta V_A = V_{AS} - V_{AI} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{cc}$$

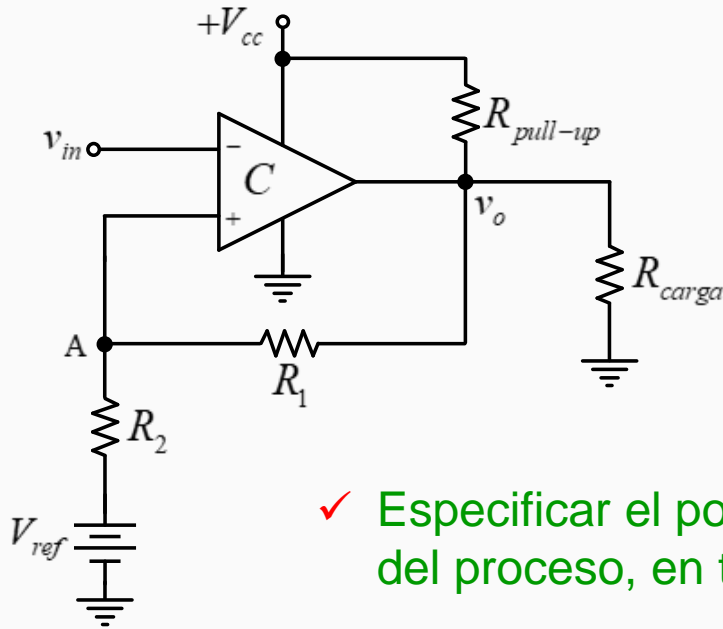
• **El potencial del punto “A” oscilará aproximadamente, entre:**

$$V_{ref} + V_{AS} \text{ cuando } v_{in} < V_A$$

$$V_{ref} - V_{AI} \text{ cuando } v_{in} > V_A$$



Controlador ON-OFF Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



- **Especificaciones para el diseño:**

- ✓ Para garantizar una acción de compensación efectiva, se requiere que

$$R_{pull-up} < R_{carga} \text{ y } R_1 > R_{pull-up}$$

- ✓ Esto garantiza que el comparador llevará la salida v_o al valor de $+V_{cc}$ y no a un valor menor.

- ✓ Especificar el porcentaje de histéresis respecto de la ondulación deseada de la variable controlada del proceso, en torno al valor de referencia.

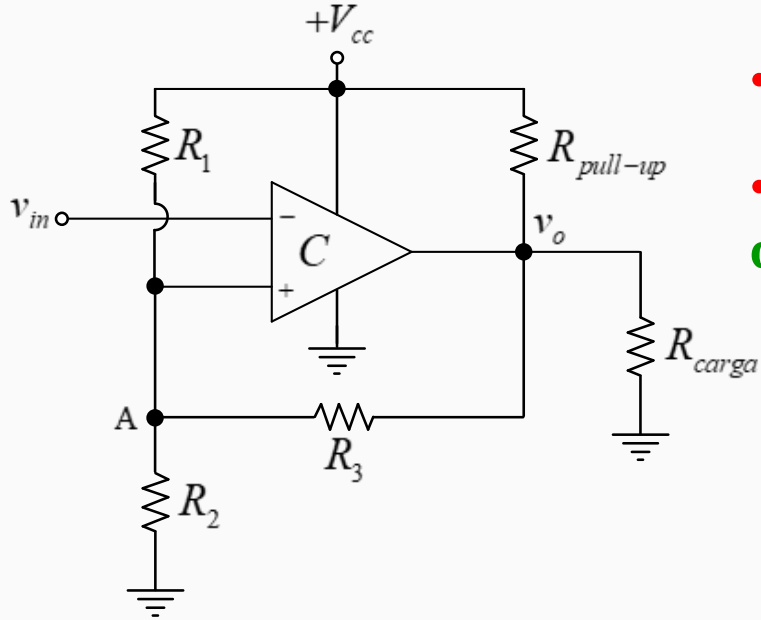
- ✓ Especificar la tensión de alimentación V_{cc} que determinará el estado alto de la salida del comparador.

- ✓ R_1 se selecciona de la relación: $R_1 > R_{pull-up}$

- ✓ Una relación práctica muy útil para determinar R_2 , es la siguiente: $R_1 \cong 100 \text{ a } 200 \times R_2$

- ✓ Especificar la tensión de referencia V_{ref} deseada.

Controlador ON-OFF Inversor con referencia a partir de V_{cc} y alimentación asimétrica



- A) Cuando se inicia, $v_{in} < V_A$ $v_o = V_{cc}$
- El potencial en el punto A en el límite superior de la banda de histéresis es:

$$V_{AS} = \frac{V_{cc} R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

- B) En la segunda etapa, $v_{in} > V_A$ $v_o = 0$ V

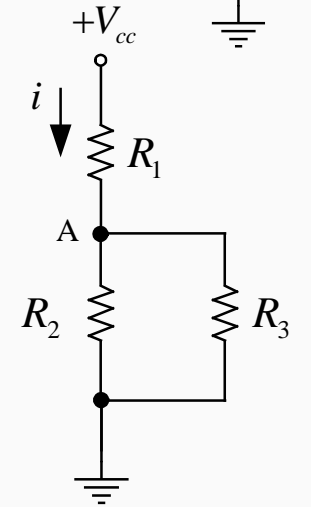
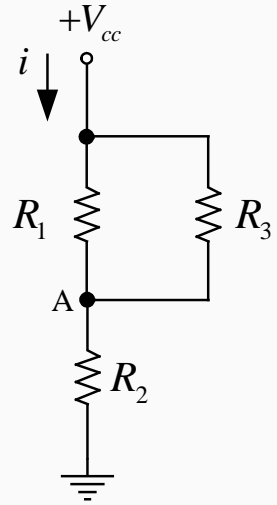
- El potencial en el punto A en el límite inferior de la banda de histéresis es:

$$V_{AI} = \frac{V_{cc} R_2 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

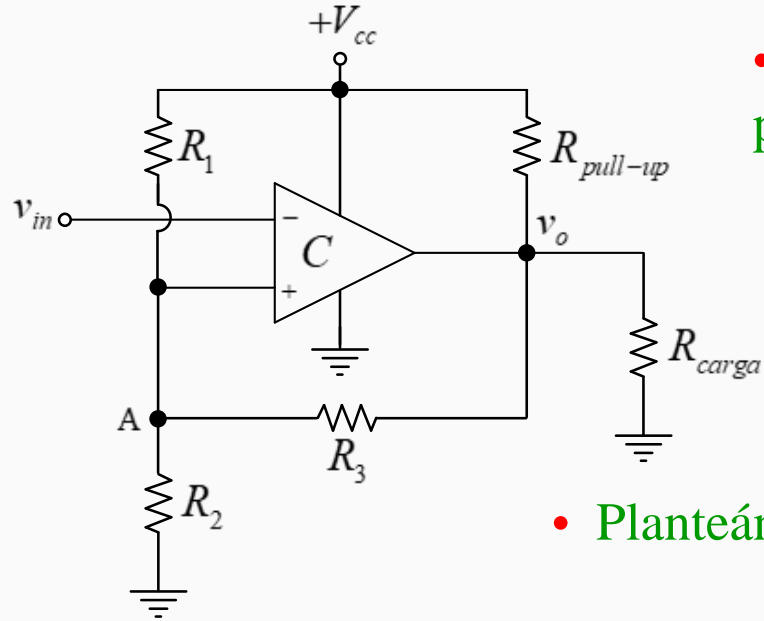
- La ventana de histéresis finalmente está dada por:

$$V_h = \Delta V_A = V_{AS} - V_{AI} = \frac{V_{cc} R_2 R_1}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

- ✓ Para garantizar una acción de compensación efectiva, se requiere que $R_{pull-up} < R_{carga}$ y $R_3 > R_{pull-up}$



Controlador ON-OFF Inversor con referencia a partir de V_{cc} y alimentación asimétrica



- Para encontrar los valores de resistencia necesarios para un conjunto dado de puntos de disparo, primero dividimos la ecuación de V_h por la ecuación de V_{AI} :

$$\frac{V_h}{V_{AI}} = \frac{V_{cc} R_2 R_1}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} \div \frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{V_{cc} R_2 R_3} = \frac{R_1}{R_3}$$

- Planteándose la siguiente relación entre los resistores R_1 y R_3 : $R_1 = nR_3 \Rightarrow \frac{V_h}{V_{AI}} = n$

- Resta obtener R_2 , la cual puede salir de la ecuación de V_{AS} : $V_{AS} = \frac{V_{cc} R_2}{R_2 + (R_1 // R_3)} \Rightarrow R_2 = \frac{(R_1 // R_3)}{\left(\frac{V_{cc}}{V_{AS}} - 1\right)}$

- Ejemplo:

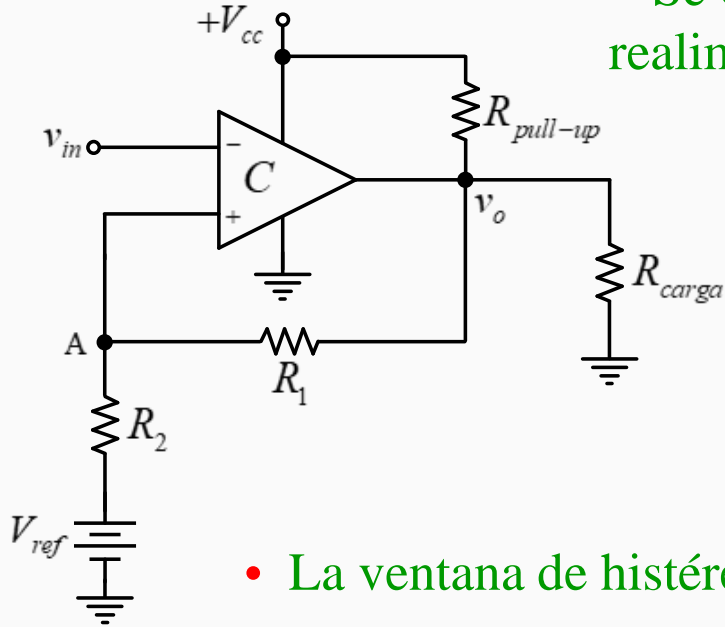
$$V_{cc} = 15V; V_{ref} = 5V; R_{carga} = 100k\Omega; V_{AS} = 5,5V; V_{AI} = 4,5V; R_{pull-up} = 4,7k\Omega; R_3 > R_{carga} \rightarrow R_3 = 470k\Omega$$

$$V_h = V_{AS} - V_{AI} = 1V \Rightarrow n = \frac{V_h}{V_{AI}} = \frac{1}{4,5} = 0,2222 \quad R_1 = 0,2222 \times 470k\Omega = 104,44k\Omega$$

Adopto $R_1 = 100k\Omega \Rightarrow V_h$ menor al calculado

$R_2 = 47,7k\Omega \rightarrow 47k\Omega$

Controlador ON-OFF Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



• Se observa que en este caso existe una relación entre los resistores de la realimentación dada por: $R_1 = n \times R_2$ Si $R_2 = R \Rightarrow R_1 = nR$

• Los potenciales en el punto A en los límites superior e inferior de la banda de histéresis resultan:

$$V_{AS} = \frac{1}{n+1} V_{cc} + \frac{n}{n+1} V_{ref} \quad V_{AI} = \left(\frac{n}{n+1} \right) V_{ref}$$

• La ventana de histéresis finalmente está dada por:

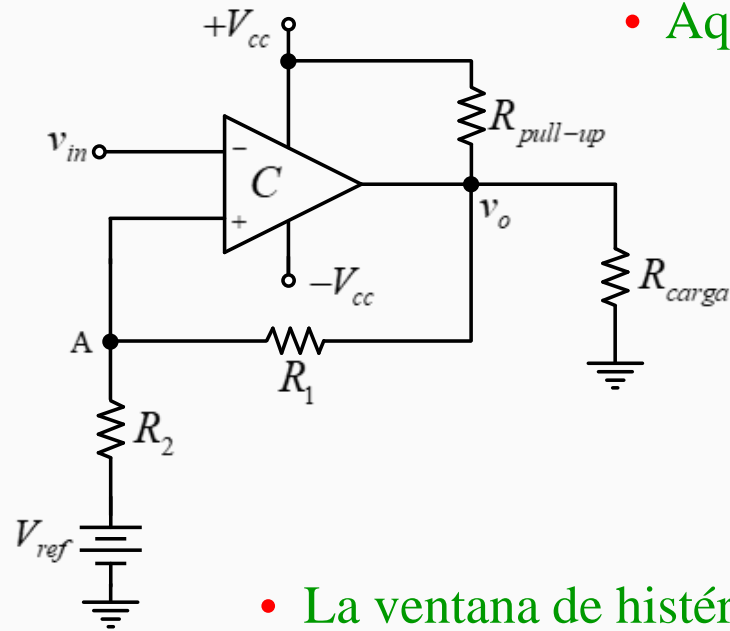
$$V_h = \Delta V_A = V_{AS} - V_{AI} = \frac{1}{n+1} V_{cc}$$

• La tensión en la cual se centra la ventana de histéresis está dada por: $V_{centro} = \frac{V_{AS} + V_{AI}}{2} = \frac{1}{2(n+1)} V_{cc} + \frac{n}{n+1} V_{ref}$

• **Ejemplo:** $V_{cc} = 15V$; $V_{AS} = 12V$; $V_{AI} = 8V$

$$\left. \begin{aligned} V_{centro} &= \frac{12V + 8V}{2} = 10V & n &= \frac{V_{cc}}{V_h} - 1 = 2,75 & V_{ref} &= \frac{n+1}{n} V_{AI} = 10,9V \\ V_h &= 12V - 8V = 4V & \text{Si } R_2 &= 10\text{ k}\Omega \Rightarrow R_1 &= 2,75 \times 10\text{ k}\Omega = 27,5\text{ k}\Omega \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Si } R_1 = 27\text{ k}\Omega \\ &V_{ref} = 10,96V \text{ y } V_h = 4,054V \end{aligned}$$

Controlador ON-OFF Inversor con tensión de referencia externa y alimentación simétrica



- Aquí analizamos el caso con alimentación simétrica $\pm V_{cc}$

Recordando que $R_2 = R \Rightarrow R_1 = nR$

- Los potenciales en el punto A en los límites superior e inferior de la banda de histéresis resultan:

$$V_{AS} = \frac{1}{n+1} (+V_{cc}) + \frac{n}{n+1} V_{ref} \qquad V_{AI} = \frac{1}{n+1} (-V_{cc}) + \frac{n}{n+1} V_{ref}$$

- La ventana de histéresis está dada por: $V_h = \Delta V_A = V_{AS} - V_{AI} = \frac{+V_{cc} - (-V_{cc})}{n+1}$

- La tensión en la cual se centra la ventana de histéresis está dada por: $V_{centro} = \frac{V_{AS} + V_{AI}}{2} = \frac{n}{n+1} V_{ref}$

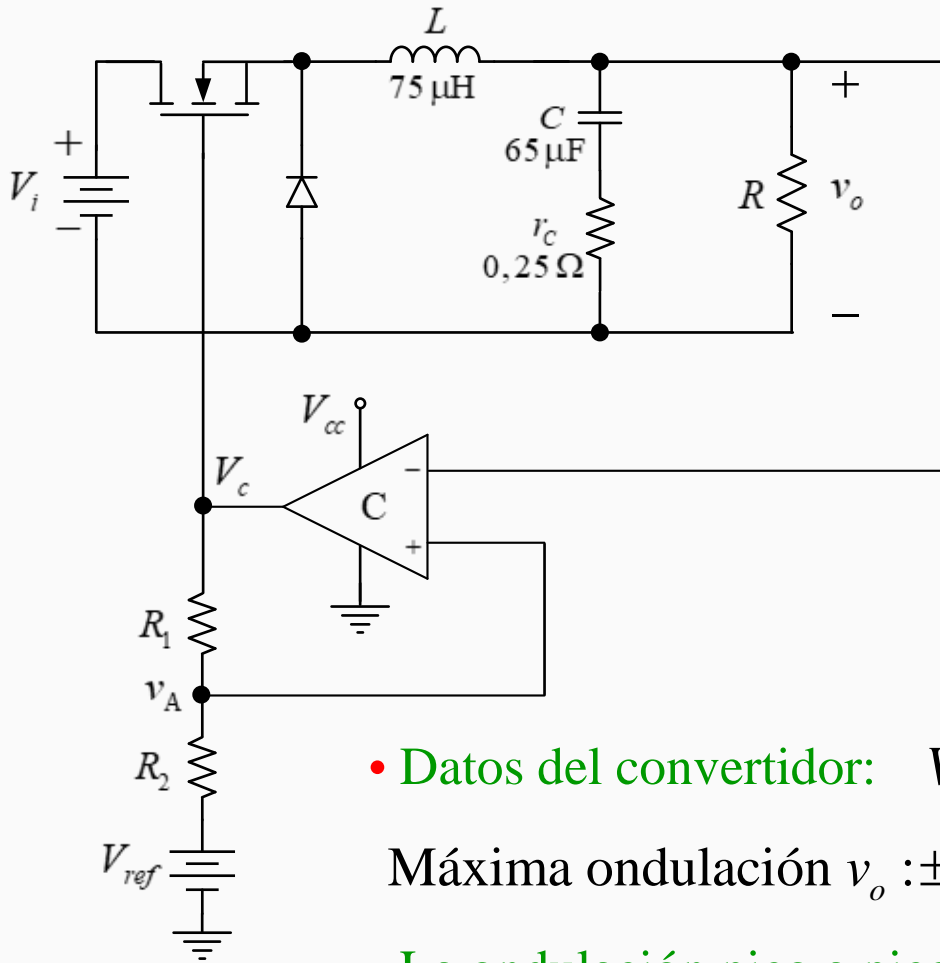
- **Ejemplo:** $V_{cc} = 15V$; $V_{AS} = 12V$; $V_{AI} = 8V$

$$V_{centro} = \frac{12V + 8V}{2} = 10V \qquad n = \frac{V_{cc} - (-V_{cc})}{V_h} - 1 = 6,5 \qquad V_{ref} = \frac{n+1}{n} V_{centro} = 11,53V$$

$$V_h = 12V - 8V = 4V$$

$$\text{Si } R_2 = 10 \text{ k}\Omega \Rightarrow R_1 = 65 \text{ k}\Omega$$

Control ON-OFF con Histéresis: Ejemplo Convertidor Reductor (Buck)



- En $t = 0$, $V_o = 0$ y la salida del comparador está en su valor máximo, dado que $V_A > V_o$, o sea, $V_c = +V_{cc}$: llave en ON (aplica la acción correctiva máxima)

- Cuando $V_o > V_{AS}$; $V_c = \text{GND}$, entonces la llave sale de conducción.

- Cuando $V_o < V_{AI}$, la llave entra en conducción, aplicando u_{max} .

- Así, V_o se mantiene próxima a V_{ref} con una ondulación dada por ΔH :

ondulación aproximada entre: $V_{ref} + \Delta H / 2$ y $V_{ref} - \Delta H / 2$

- **Datos del convertidor:** $V_o = 5 \text{ V}$; $V_i = 20 \text{ V}$ (puede variar entre 16 y 24 V); $R = 1$ a 5Ω

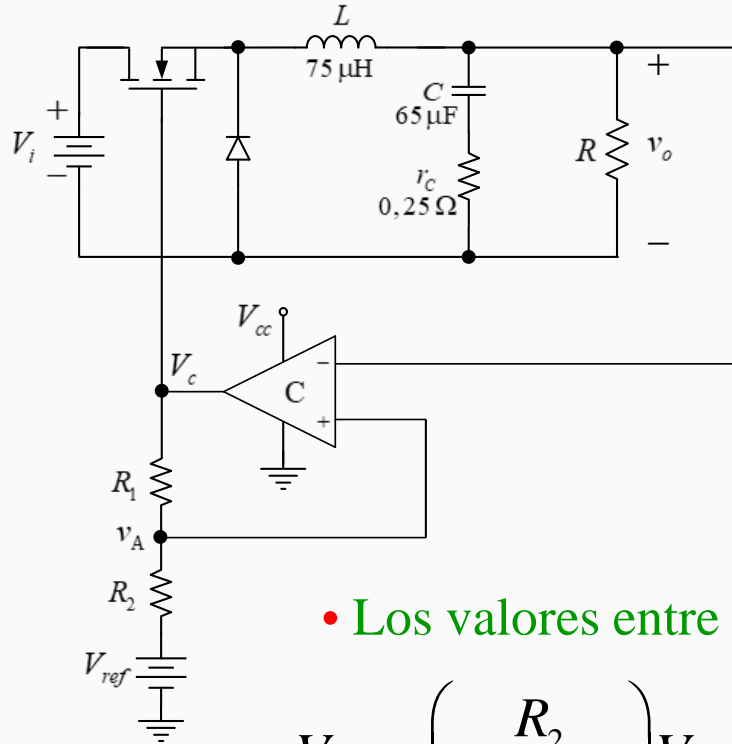
Máxima ondulación v_o : $\pm 1\%$

- La ondulación pico a pico de v_o está dada por: $\frac{\Delta v_o}{V_o} = 2\% \Rightarrow \Delta v_o = 0,02 \times 5 \text{ V} = 0,1 \text{ V}$

- Elegimos una banda de histéresis del 50% de Δv_o :

$$V_h = 0,5 \times 0,1 \text{ V} = 0,05 \text{ V}$$

Control ON-OFF con Histéresis: Ejemplo Convertidor Reductor (Buck)



• Cálculo de los resistores $R_{pull-up} < R_{carga}$ y $R_1 > R_{pull-up}$ $R_{pull-up} = 4,7 \text{ k}\Omega$

$$V_{cc} = +10 \text{ V} \quad R_2 = 100 \Omega$$

$$V_h = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{cc} \Rightarrow R_1 = R_2 \times \left(\frac{V_{cc}}{V_h} - 1 \right)$$

$$R_1 = 100 \Omega \times \left(\frac{10 \text{ V}}{0,05 \text{ V}} - 1 \right) = 19,9 \text{ k}\Omega \text{ elijo } 20 \text{ k}\Omega$$

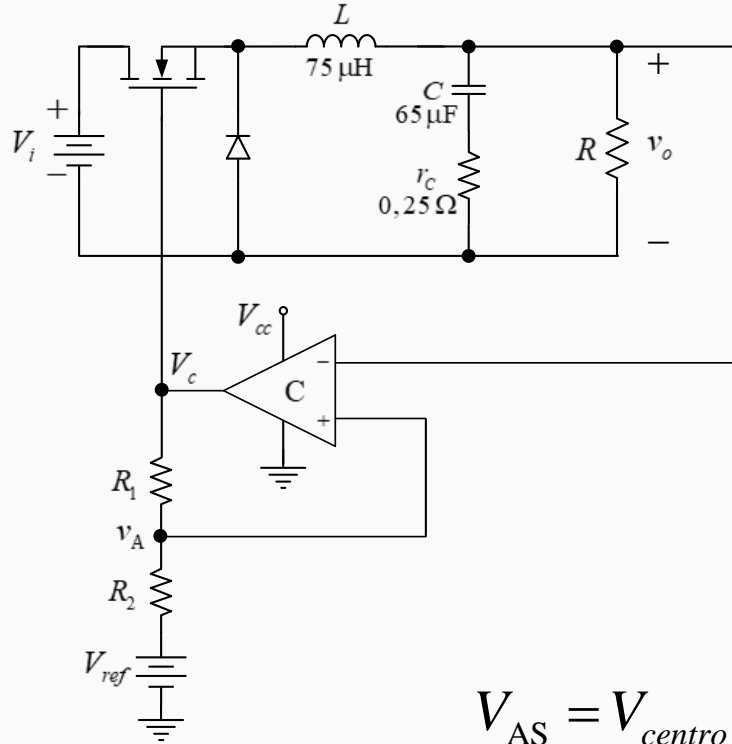
• Los valores entre los cuales bascula el punto A:

$$V_{AS} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{cc} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_{ref} = 0,04975 \text{ V} + 4,975 \text{ V} = 5,0247 \text{ V}$$

$$V_{AI} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_{ref} = 4,975 \text{ V}$$

$$n = \frac{V_{cc}}{V_h} - 1 = \frac{10 \text{ V}}{0,05 \text{ V}} - 1 = 199$$

Control ON-OFF con Histéresis: Ejemplo Convertidor Reductor (Buck)



• Cálculo de los resistores $R_{pull-up} < R_{carga}$ y $R_1 > R_{pull-up}$ $R_{pull-up} = 4,7 \text{ k}\Omega$

$$V_{cc} = +15 \text{ V} \quad R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega \quad V_{centro} = 5 \text{ V}$$

$$V_h = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{cc} \Rightarrow R_1 = R_2 \times \left(\frac{V_{cc}}{V_h} - 1 \right)$$

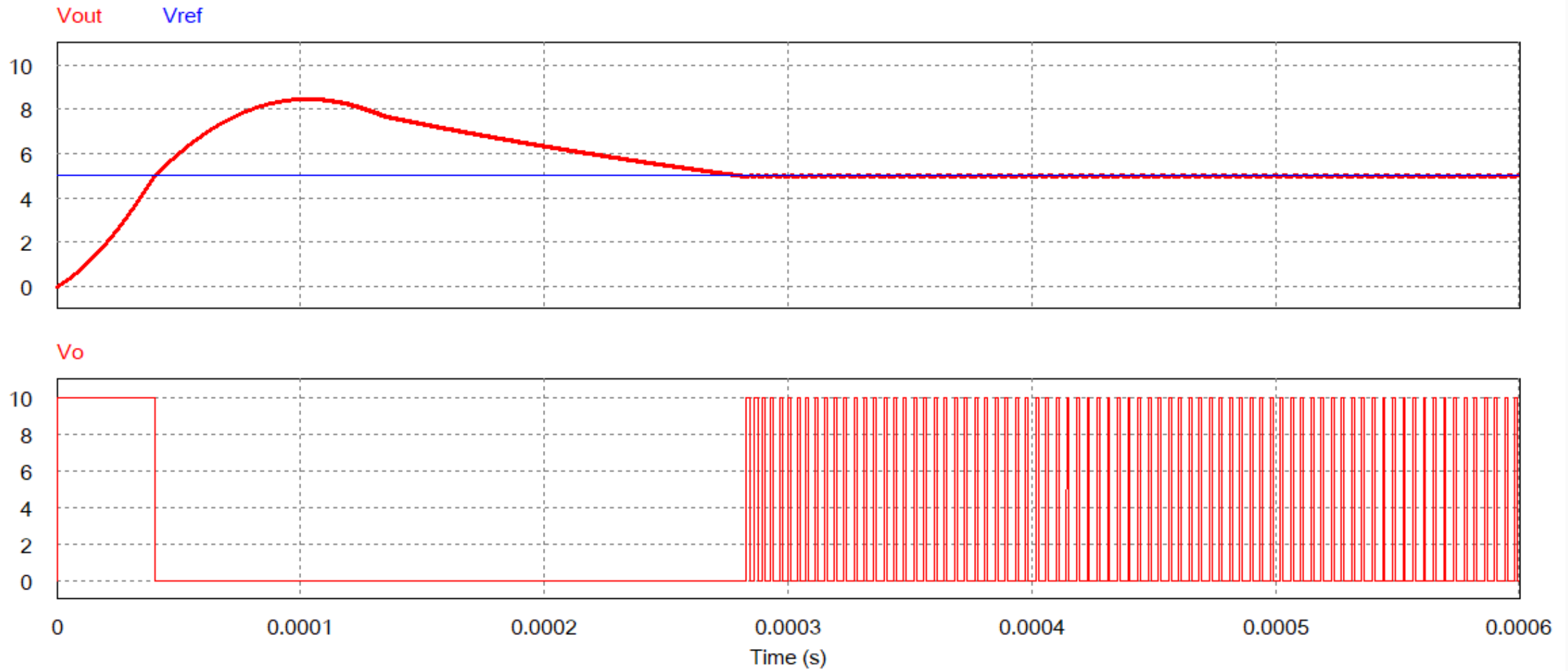
$$R_1 = 1500 \Omega \times \left(\frac{15 \text{ V}}{0,05 \text{ V}} - 1 \right) = 448,5 \text{ k}\Omega \text{ elijo } 470 \text{ k}\Omega$$

$$V_{AS} = V_{centro} + \frac{V_h}{2} = 5,025 \text{ V} \quad V_{AI} = V_{centro} - \frac{V_h}{2} = 4,975 \text{ V}$$

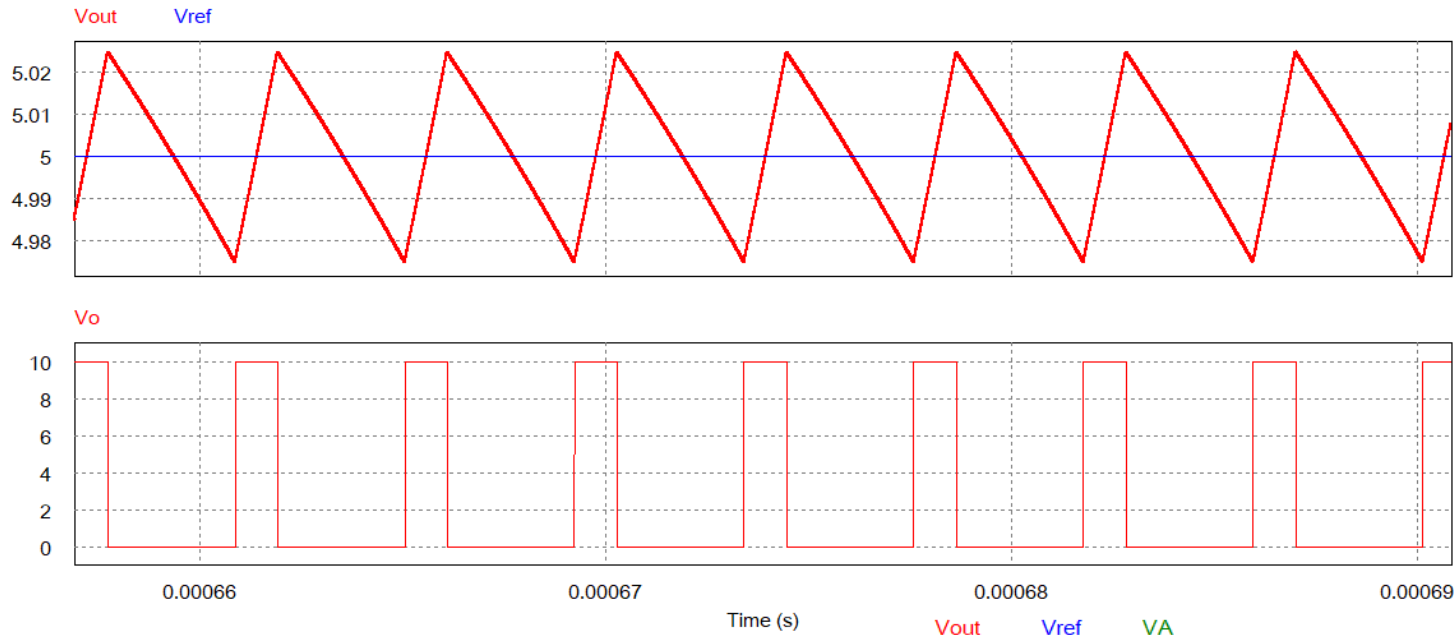
• Usando las relaciones en función de n :

$$n = \frac{V_{cc}}{V_h} - 1 = \frac{15 \text{ V}}{0,05 \text{ V}} - 1 = 299 \quad V_{centro} = \frac{1}{2(n+1)} V_{cc} + \frac{n}{n+1} V_{ref} \Rightarrow V_{ref} = 5,016 - 0,025 = 4,991 \text{ V}$$

Resultados del Convertidor Buck con Control ON-OFF

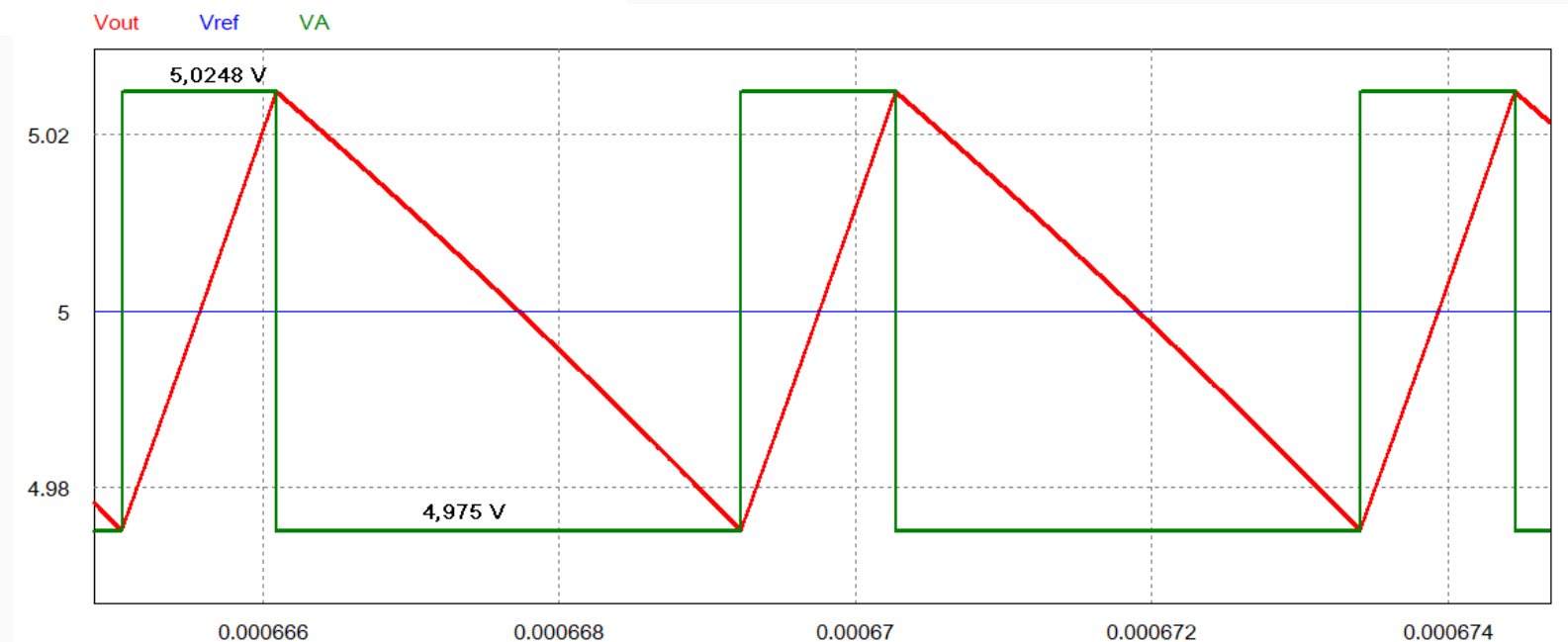


Resultados del Convertidor Buck con Control ON-OFF

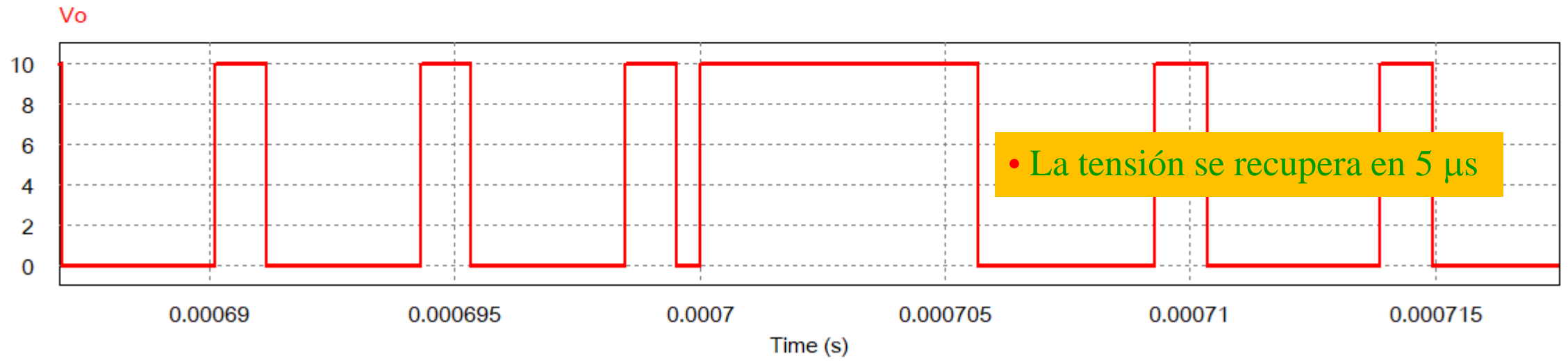
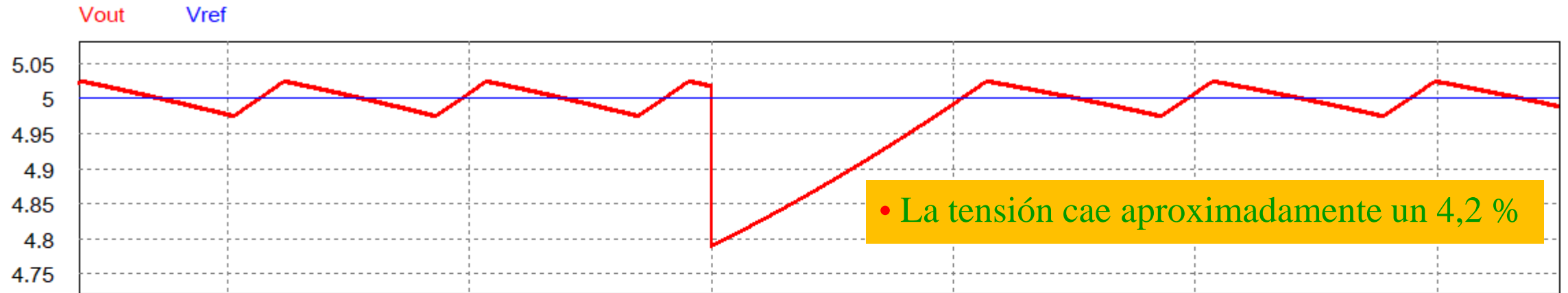


- La frecuencia de conmutación es de aproximadamente, 240 kHz

$$V_h = 5,0248 \text{ V} - 4,975 \text{ V} = 0,0498 \text{ V}$$

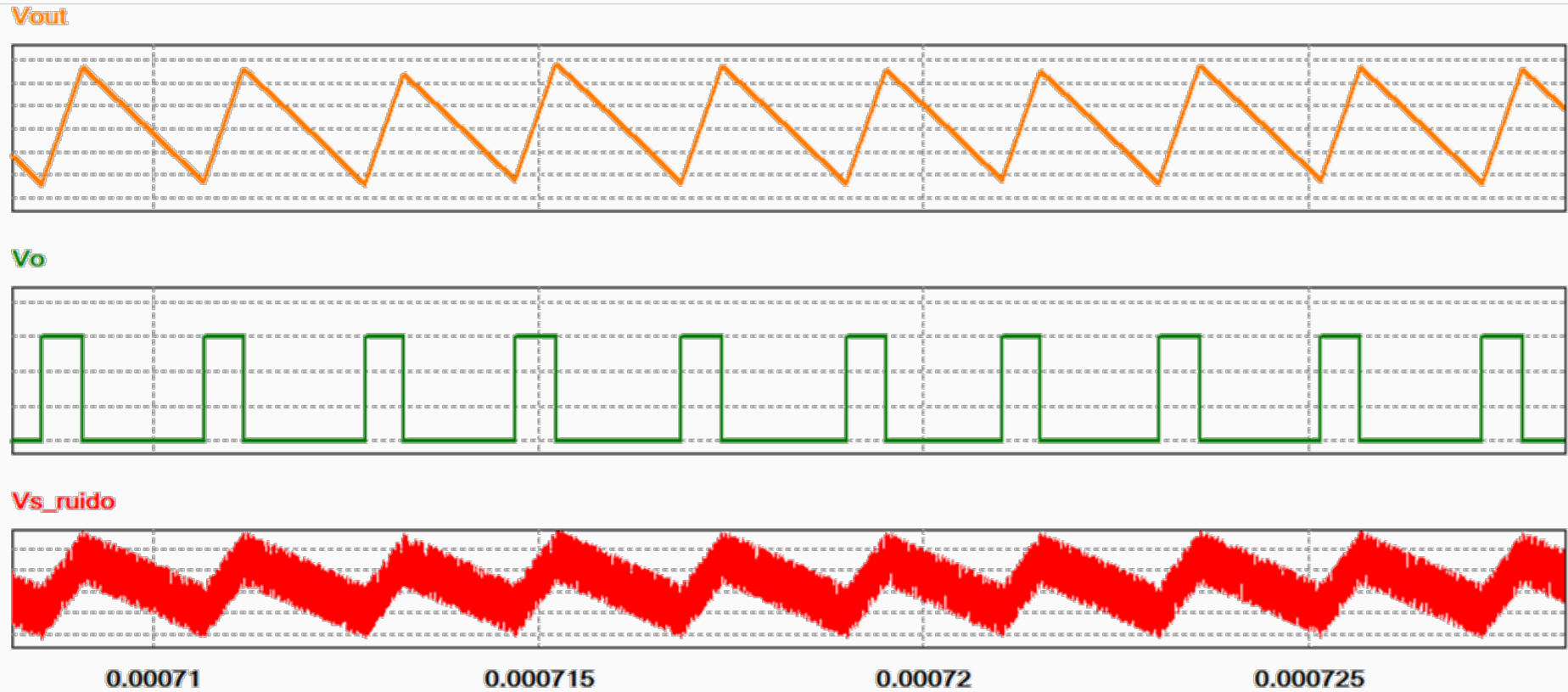
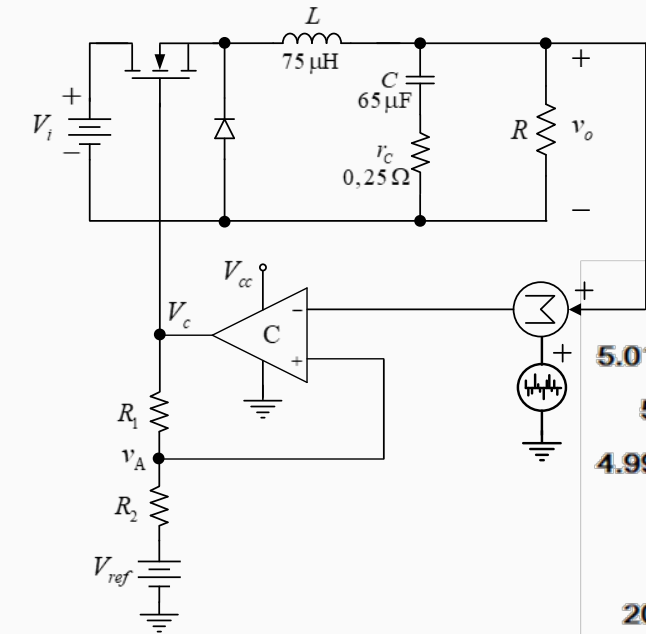


Resultados del Convertidor Buck con Control ON-OFF: Rechazo de perturbación de carga



Resultados del Convertidor Buck con Control ON-OFF: Rechazo de ruido en la señal de realimentación

- Gracias a la realimentación positiva y la banda de histéresis es posible que la salida no presente cambios falsos debido al ruido.



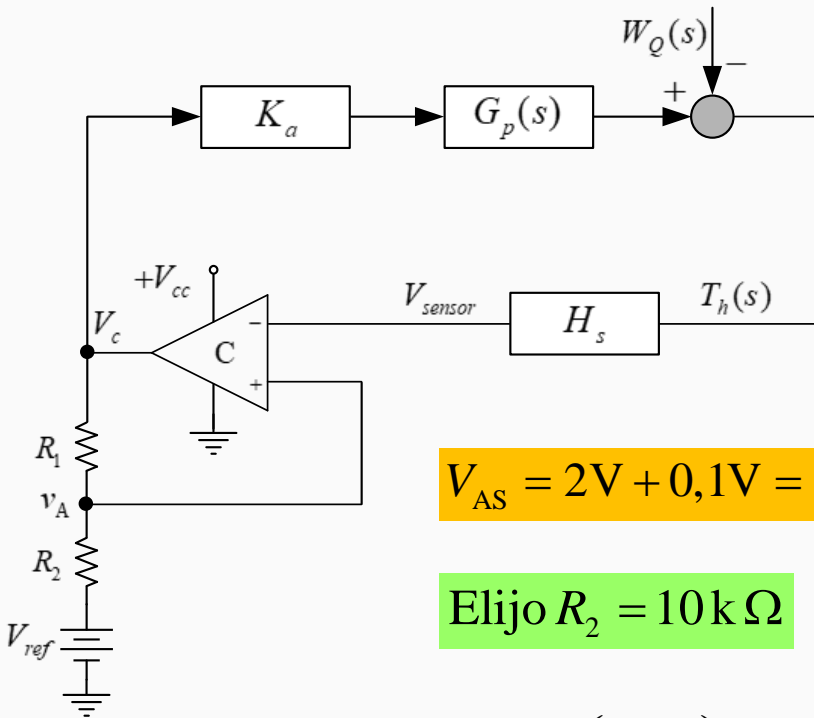
- La tensión de ruido es de un 0,5% del valor de referencia

Control ON-OFF con Histéresis: Ejemplo Control de Temperatura Invernadero

• La función de transferencia del proceso está dada por $G_p(s) = \frac{1}{5s^2 + 50s + 1}$

• Datos del problema: $T_{ref} = T_{centro} = 40^\circ\text{C}$; $\Delta H = 10\%$ de T_{ref} ; $K_a = 10 \text{ Kcal/s}$

• Usamos un controlador ON-OFF Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica:



$$\Delta H = \frac{10}{100} \times 40^\circ\text{C} = 4^\circ\text{C}$$

$$T_{sup} = 40^\circ\text{C} + \frac{\Delta H}{2} = 42^\circ\text{C} \text{ y } T_{inf} = 40^\circ\text{C} - \frac{\Delta H}{2} = 38^\circ\text{C}$$

$$H_s = \frac{5 \text{ V}}{100^\circ\text{C}} = 0,05 \text{ V}/^\circ\text{C}$$

$$\text{cuando } T_h = 40^\circ\text{C} \Rightarrow V_{sensor} = 40^\circ\text{C} \times 0,05 \text{ V}/^\circ\text{C} = 2 \text{ V}$$

$$V_h = 4^\circ\text{C} \times 0,05 \text{ V}/^\circ\text{C} = 0,2 \text{ V}$$

$$V_{AS} = 2 \text{ V} + 0,1 \text{ V} = 2,1 \text{ V}$$

$$V_{AI} = 2 \text{ V} - 0,1 \text{ V} = 1,9 \text{ V}$$

$$+V_{cc} = 12 \text{ V}$$

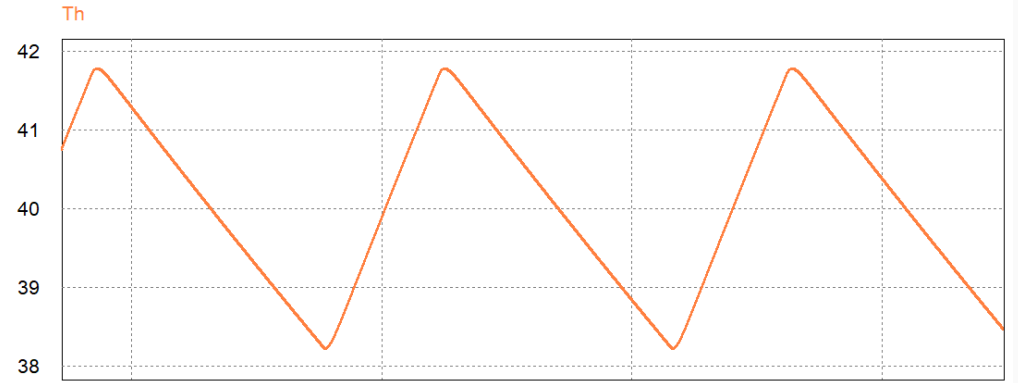
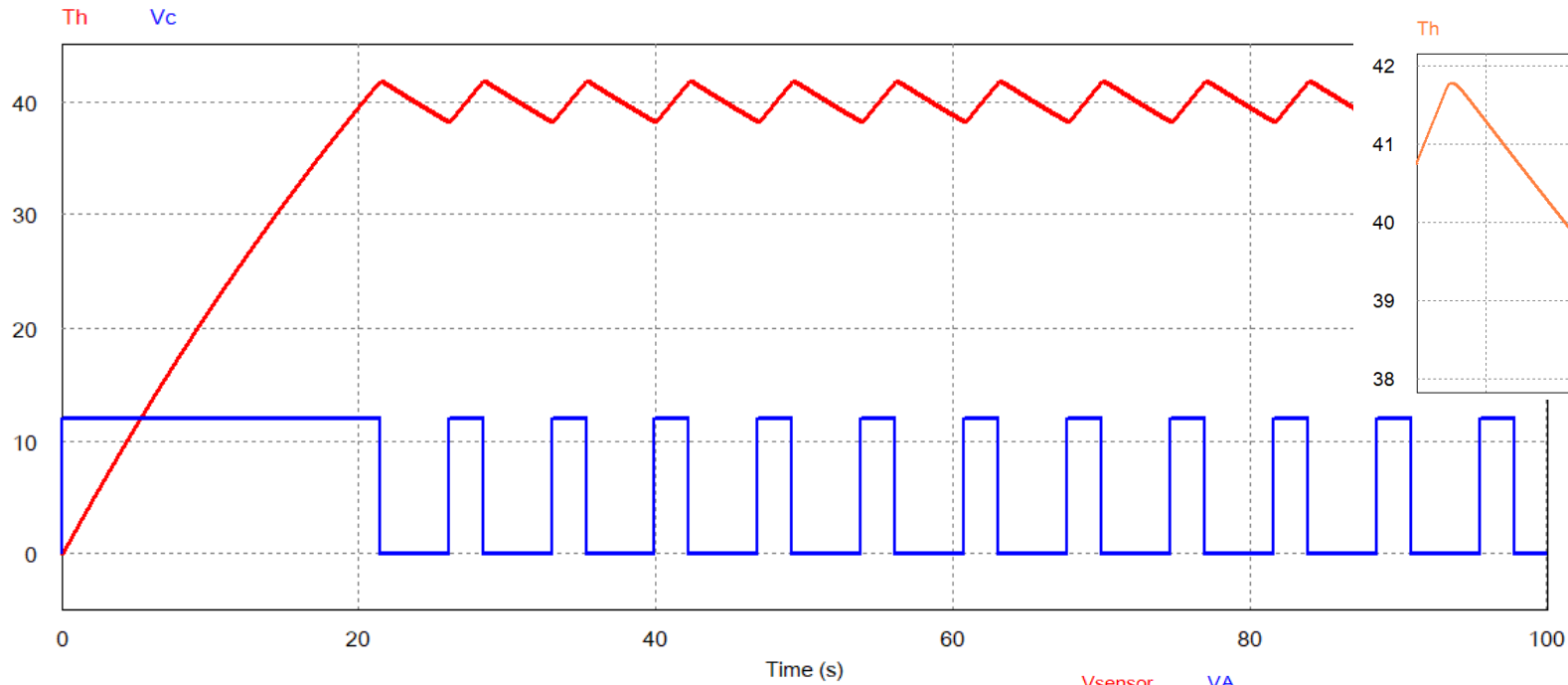
$$n = \frac{V_{cc}}{V_h} - 1 = \frac{12 \text{ V}}{0,2 \text{ V}} - 1 = 59$$

$$\text{Elijo } R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

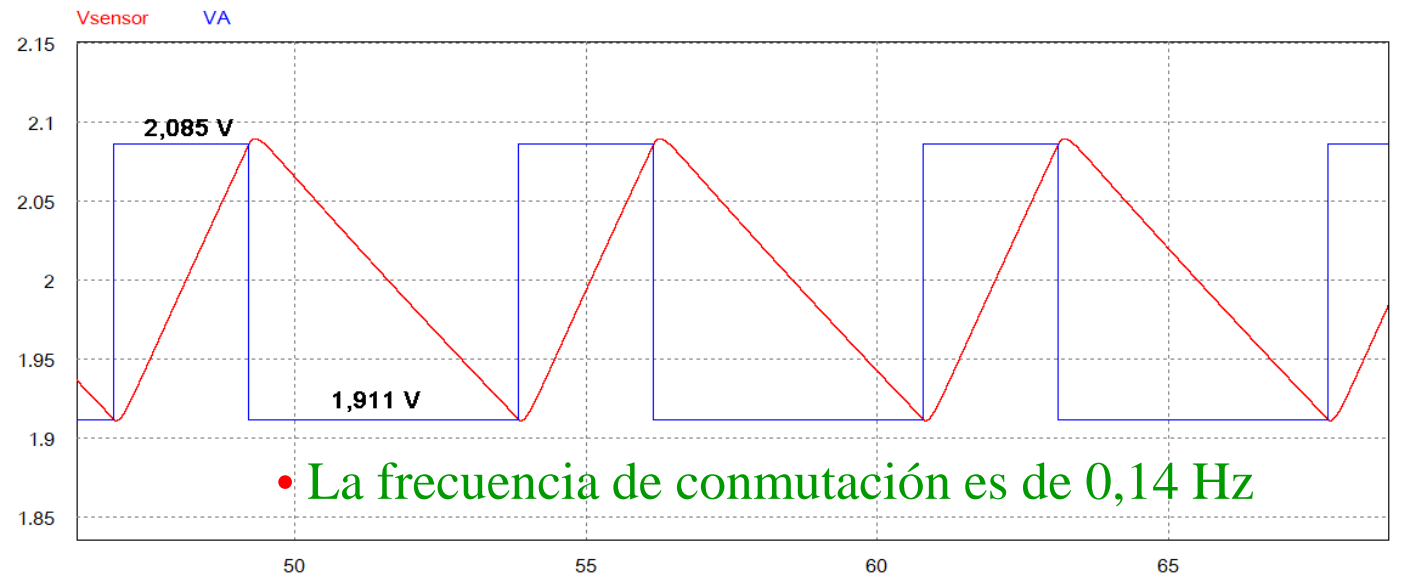
$$R_1 = n \times 10 \text{ k}\Omega = 590 \text{ k}\Omega \text{ selecciono } 680 \text{ k}\Omega$$

$$V_{ref} = \left(\frac{n+1}{n} \right) V_{centro} - \frac{1}{2n} V_{cc} \cong 1,94 \text{ V}$$

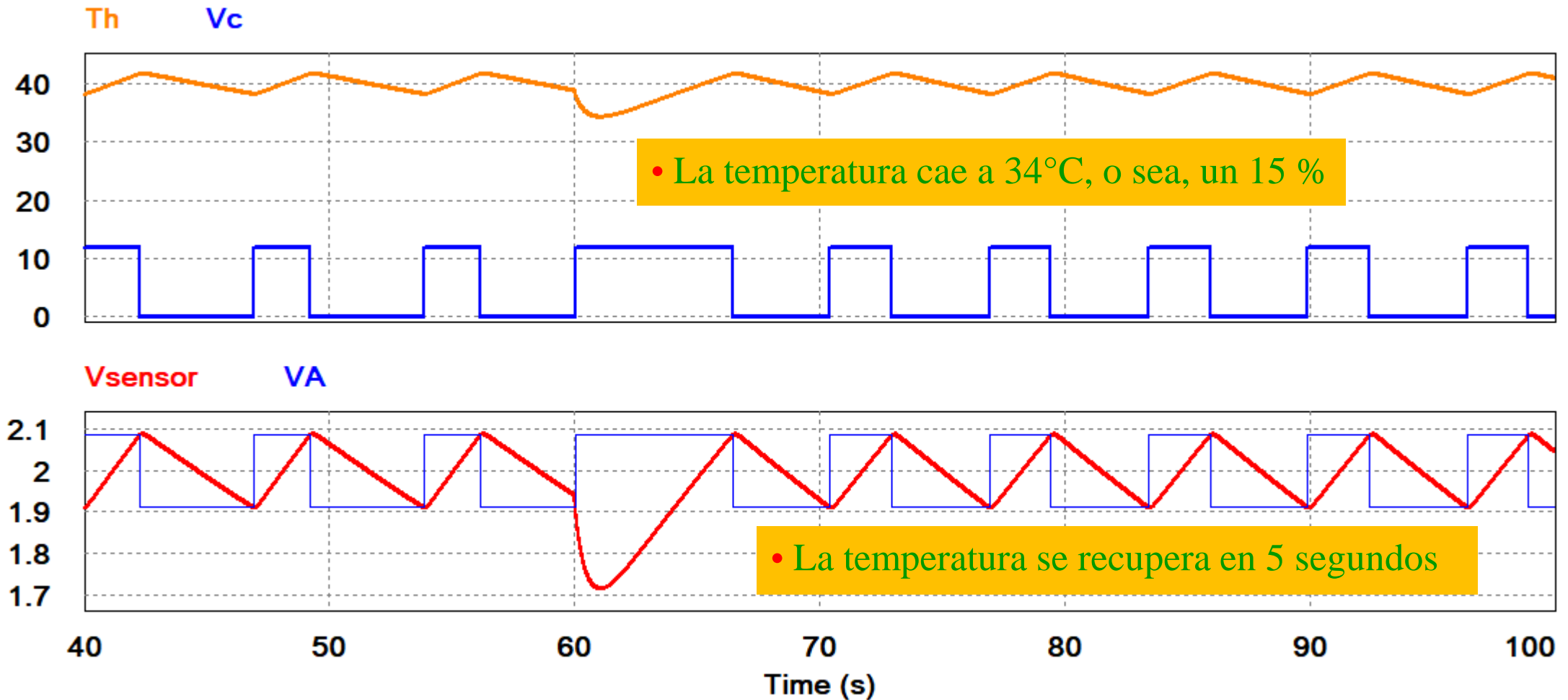
Resultados del Control de Temperatura con Control ON-OFF:



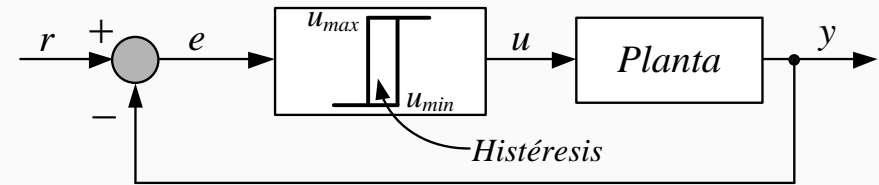
$$V_h = 2,085 \text{ V} - 1,911 \text{ V} = 0,174 \text{ V}$$



Resultados del Control de Temperatura con Control ON-OFF: Rechazo a perturbación



Control ON-OFF con Histéresis. Conclusiones.



- ✍ La señal de control ya no cambia tan rápidamente y presenta frecuencia prácticamente constante.
- ✍ La salida presenta un muy buen desempeño transitorio con elevado rechazo de perturbaciones.
- ✍ Por otro lado, aparecen oscilaciones en torno a la señal de salida que dependen de ΔH .
- ✍ A medida que aumenta la ventana (ΔH) de histéresis, disminuye la frecuencia de la señal de control,
- ✍ Pero, se incrementan las amplitudes de las oscilaciones en la señal de salida.

Existe un COMPROMISO DE DISEÑO: Frecuencia de la Acción de Control, oscilación de la variable controlada, Estabilidad y rechazo a perturbaciones.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control PID

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

- En la (1), $u(t)$ es la señal de control y $e(t)$ es el error de control, $e(t) = r(t) - y(t)$. Esta señal de control es una suma de 3 términos:

Acción de Control Proporcional, P

$$u(t) = K_p e(t) \quad (2)$$

Acción de Control Integral, I

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3)$$

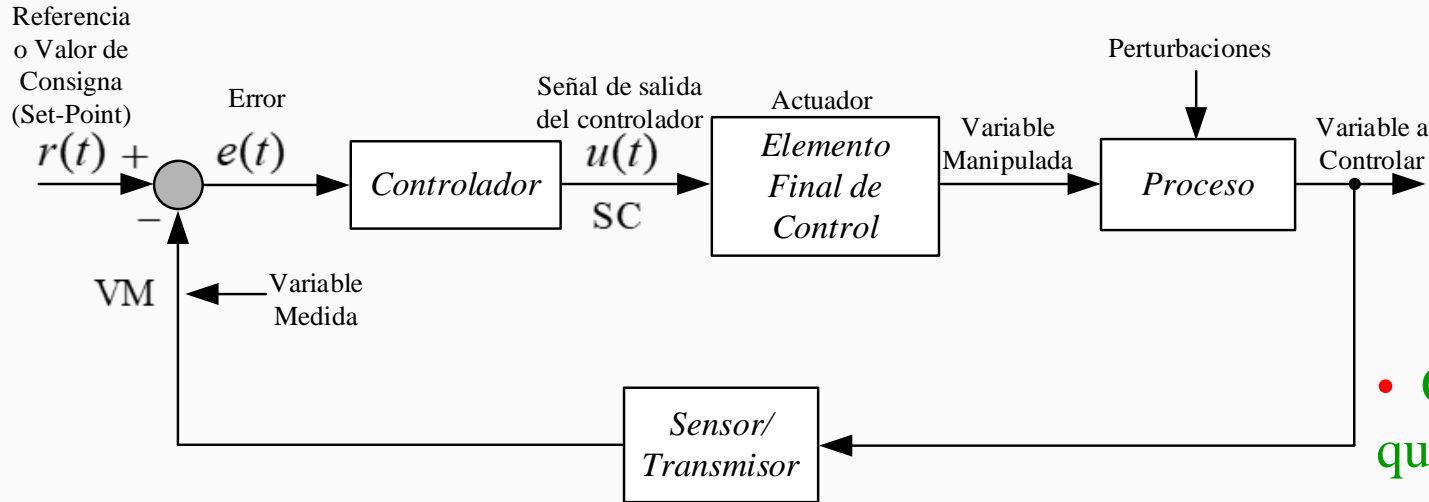
Acción de Control Derivativa, D

$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4)$$

- En estas ecuaciones, los parámetros a ser diseñados son la ganancia proporcional K_p , la constante de tiempo de integración T_i y la constante de tiempo de derivación, T_d .

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional: Análisis del proceso de control



- En caso de utilizarse solamente una acción proporcional, la (1) se transforma en la siguiente ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) + u(\text{offset}) \quad (5)$$

- Objetivo del controlador es hacer que siempre que sea posible, $e(t) = 0$, o también, que $VM = r(t)$

- Supóngase un control de velocidad del eje de un motor: Si $VM = 1500$ rpm y la Referencia = 1500 rpm esto significa que $e(t) = 0$.

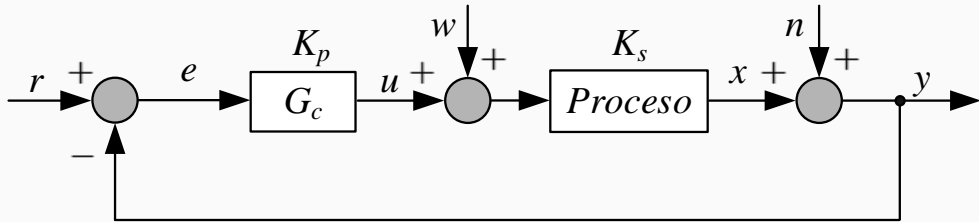
$$u(t) = K_p \times (0) + u(\text{offset}) = u(\text{offset}) \quad (6)$$

- Si $u(\text{offset}) = 0$, cuando $e(t) = 0$ implica que $SC = 0$, haciendo que el motor se detenga. Esta hipótesis no tiene sentido dado que el eje está girando a 1500 rpm.
- Existe por lo tanto siempre, un valor mínimo de señal de control para hacer que la velocidad se mantenga en el valor alcanzado.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional: Análisis del proceso de control

- Supóngase que el proceso está dado apenas por una ganancia K_s y se utiliza un control proporcional. El proceso se modela entonces por la siguiente ecuación:



$$x = K_s(u + w) \quad (7) \quad y = x + n \quad (8) \quad u = K_p(r - y) + u(\text{offset}) \quad (9)$$

- x : variable del proceso; w : perturbación; n : ruido de medida

- La relación entre x y las entradas r , w y n resulta como sigue:

$$x = \frac{K_s K_p}{1 + K_s K_p}(r - n) + \frac{K_s}{1 + K_s K_p}[u(\text{offset}) + w] \quad (10)$$

- Si $u(\text{offset}) = n = 0$, $x = \frac{K_s K_p}{1 + K_s K_p} r + \frac{K_s}{1 + K_s K_p} w$

- Si la ganancia de lazo o del camino directo $K_s K_p$ es lo suficientemente elevada

$$x \cong \frac{K_s K_p}{K_s K_p} r + \frac{1}{K_p} w \quad \text{y, si } K_p \text{ es elevado} \Rightarrow x \cong r$$

- Si ahora $w = n = 0$ y está presente una señal de offset de la acción de control, y además la ganancia del camino directo es elevada

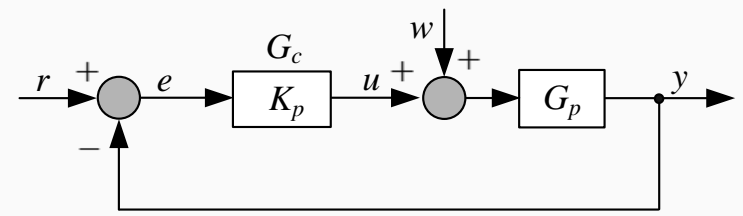
$$x \cong r + \frac{1}{K_p} u(\text{offset})$$

La señal de offset de $u(t)$ afecta de la misma forma que una perturbación al sistema de control.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional:

Sistema de Primer Orden Tipo 0



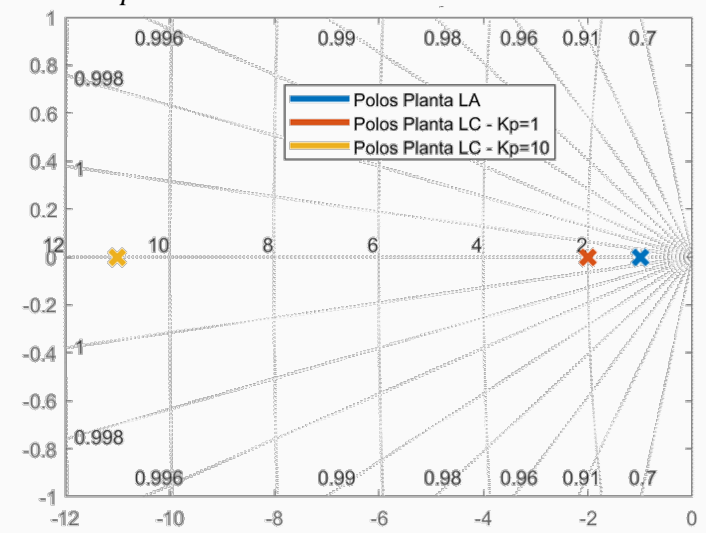
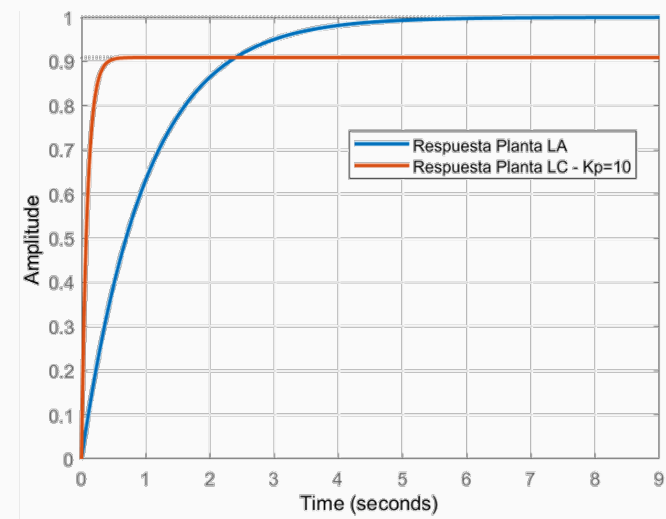
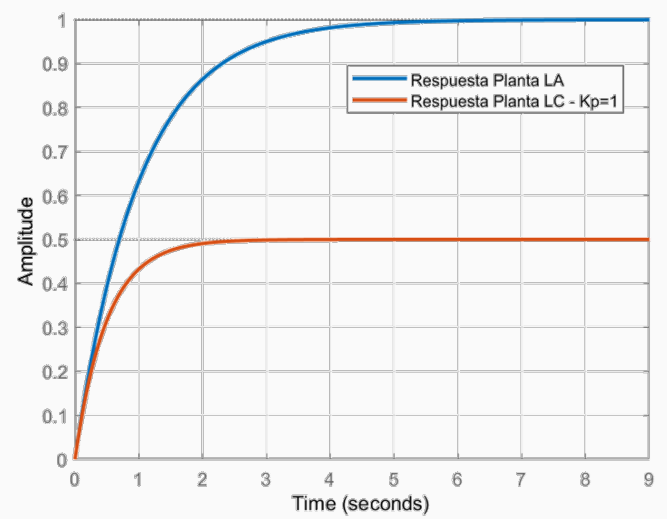
• Análisis del efecto del control proporcional sobre los polos de LC: $G_p(s) = \frac{a}{sT + 1}$ y $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$

$$G_{LC}(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} = \frac{aK_p}{sT + (1 + aK_p)}$$

• En función de la constante de tiempo: $G_{LC}(s) = \frac{aK_p / (1 + aK_p)}{s \frac{T}{(1 + aK_p)} + 1}$

- La ganancia estática pasa de “a” en LA a $aK_p / (1 + aK_p)$ en LC < 1
- La constante de tiempo pasa de “T” en LA a $T / (1 + aK_p)$, se reduce
- Si: $a = 1$ y $T = 1$ y consideramos $K_p = 1$ y después, $K_p = 5$

para $K_p = 1 \rightarrow K_{es} = 0,5 \quad \tau_1 = 0,5$
 para $K_p = 10 \rightarrow K_{es} = 0,909 \quad \tau_1 = 0,0909$

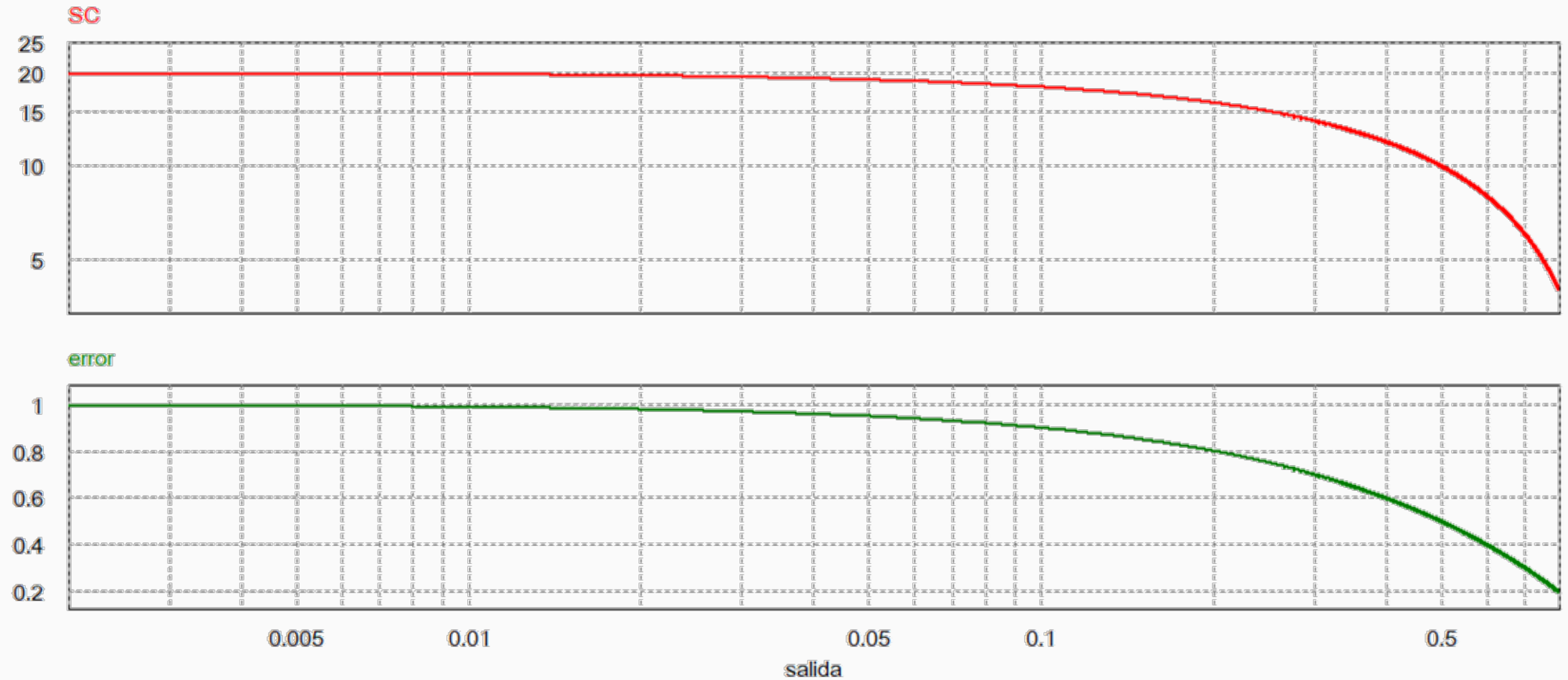


El error e_{ssp} siempre es $\neq 0$

Necesidad de un integrador en la F.T.L.A para hacer que $e_{ssp} = 0$

Acción de Control Proporcional: Análisis del proceso de control

- Siempre que K_p sea positiva, cuando SC aumenta, la VM también aumenta. En modo automático, si VM aumenta mucho, la SC disminuye para corregir el error.



Acción de Control Proporcional: Análisis del Rechazo a Perturbaciones

- El rechazo a perturbaciones se puede medir por un índice dado por la siguiente relación:

$$S_w(s) = \frac{G_w(s)}{G_p(s)}$$

- Mide el cambio porcentual de la FT del proceso ante una perturbación en LC respecto a la dinámica del propio proceso

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \Rightarrow S_w(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

- Haciéndose S_w pequeño en un amplio rango de frecuencias, puede mejorarse el rechazo a perturbaciones del sistema a LC.

- Analicemos el caso del motor CC alimentado por el circuito de armadura con flujo de campo constante. Se considera para el análisis que la $\tau_e \ll \tau_m$ y por lo tanto, $L_a \approx 0$.

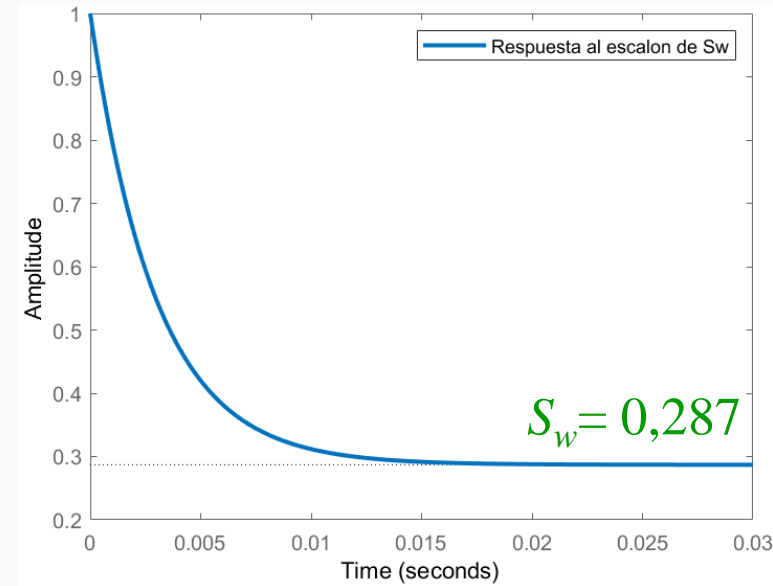
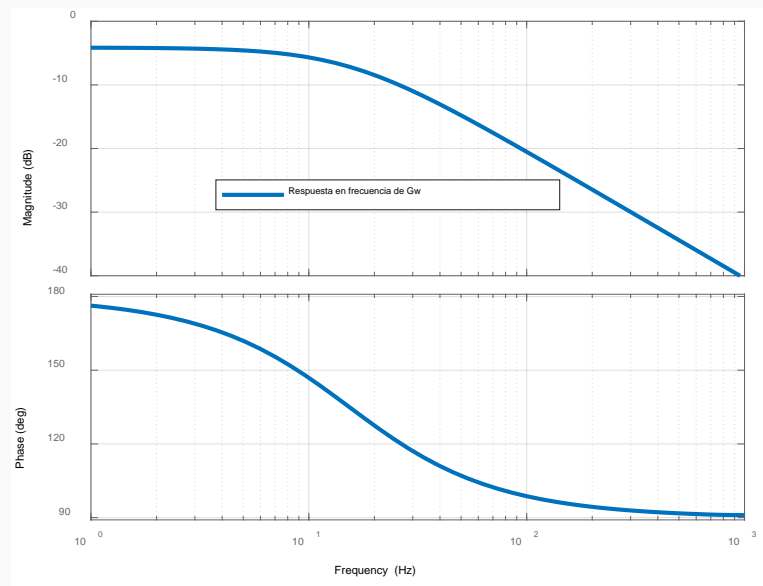
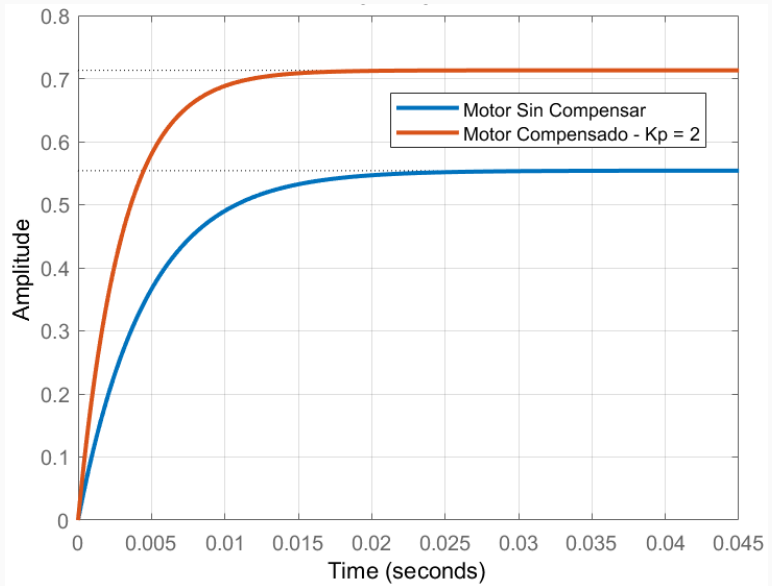
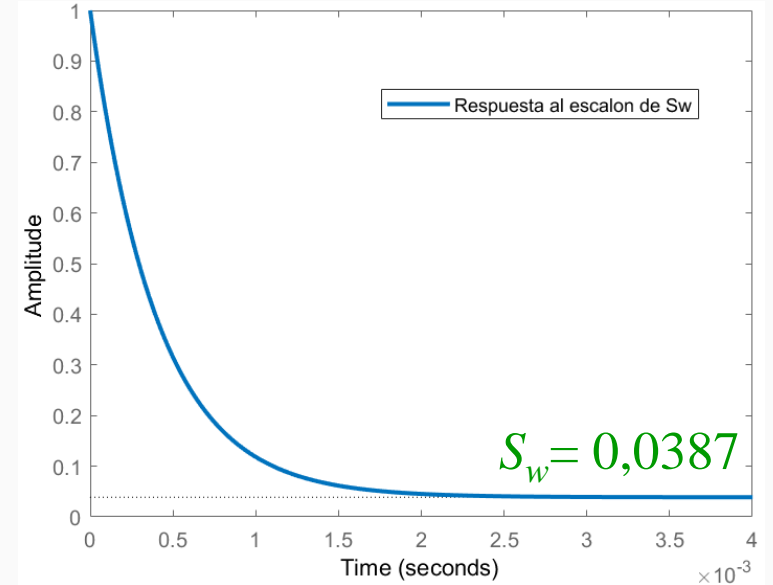
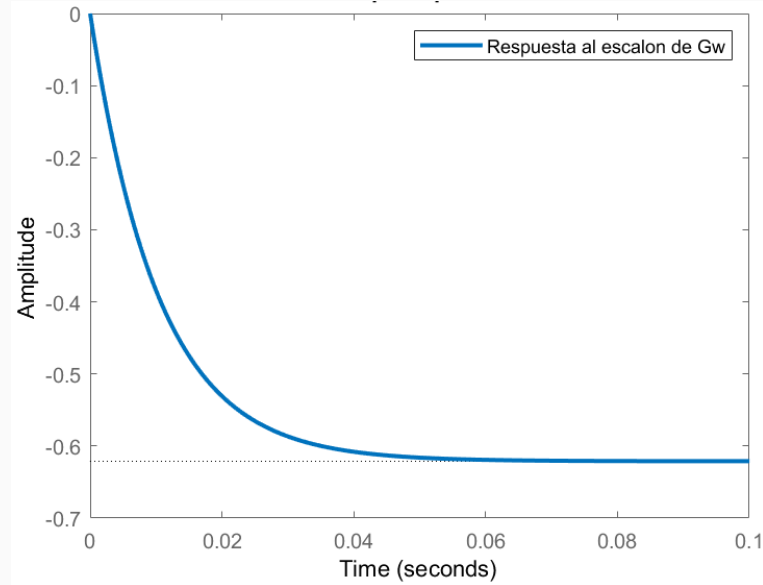
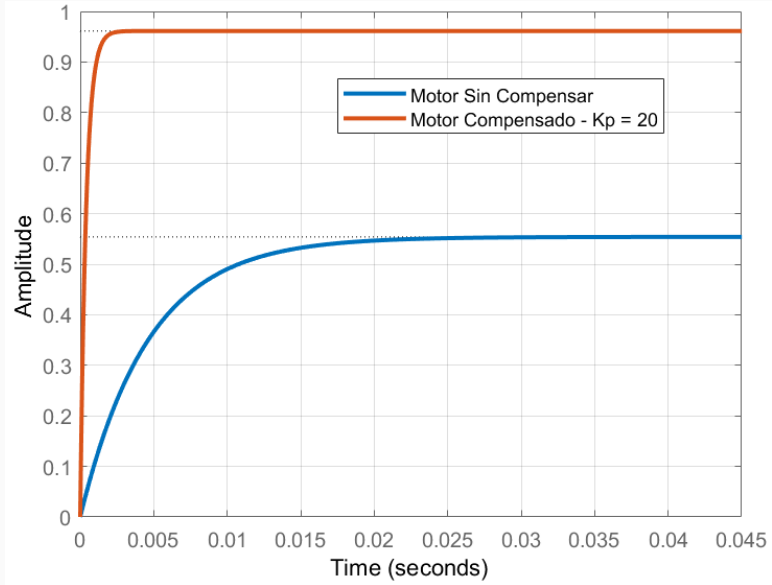
$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{sJR_a + bR_a + K^2} \quad \text{y} \quad G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{-R_a}{sJR_a + bR_a + K^2} \quad S_w(s) = \frac{sJR_a + bR_a + K^2}{sJR_a + bR_a + K^2 + K_p K}$$

- Para las bajas frecuencias, y aún considerándose b despreciable, se tiene que: $S_w(0) = \frac{K^2}{K^2 + K_p K}$

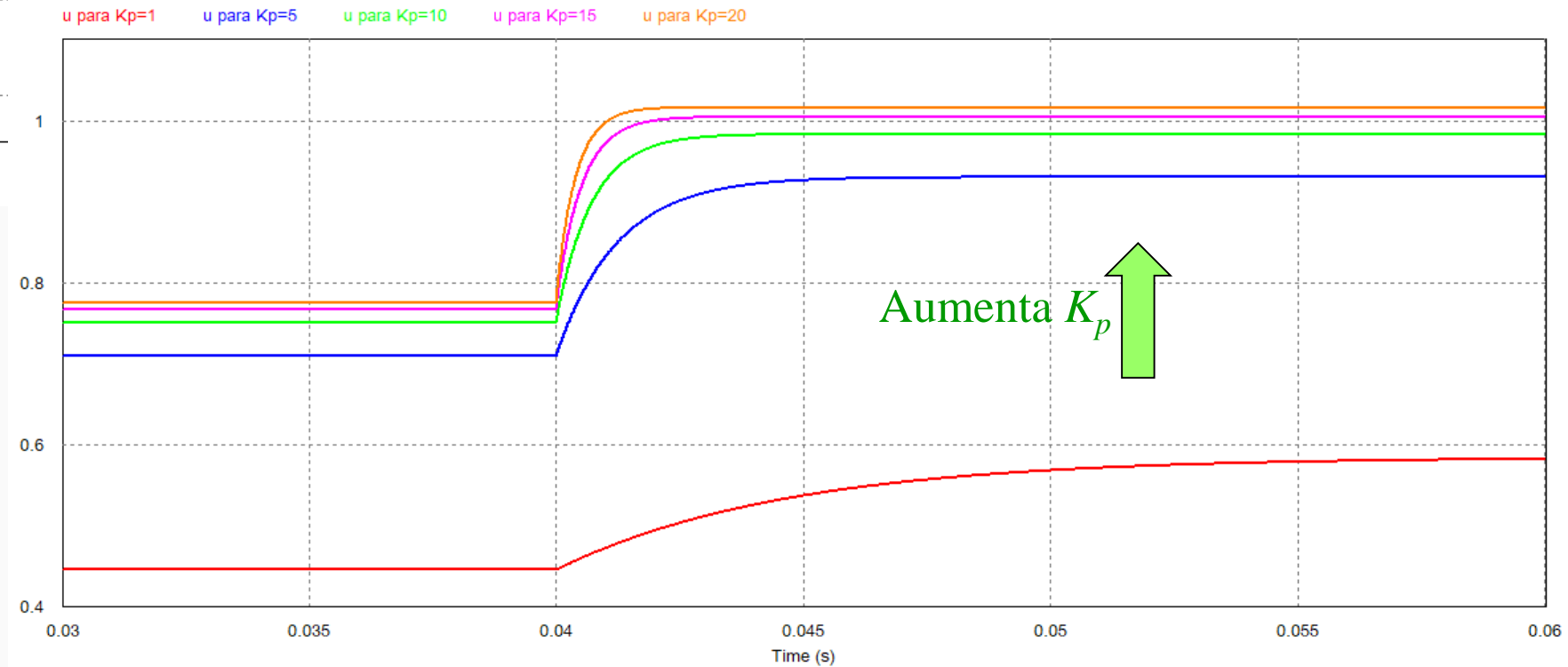
$$\text{Si, } K_p K \gg K^2 \Rightarrow S_w(0) \approx \frac{K}{K_p}$$

O sea que: Aumentando K_p se disminuye S_w mejorándose el rechazo a las perturbaciones

Acción de Control Proporcional: Análisis del Rechazo a Perturbaciones



Acción de Control Proporcional: Análisis del Rechazo a Perturbaciones



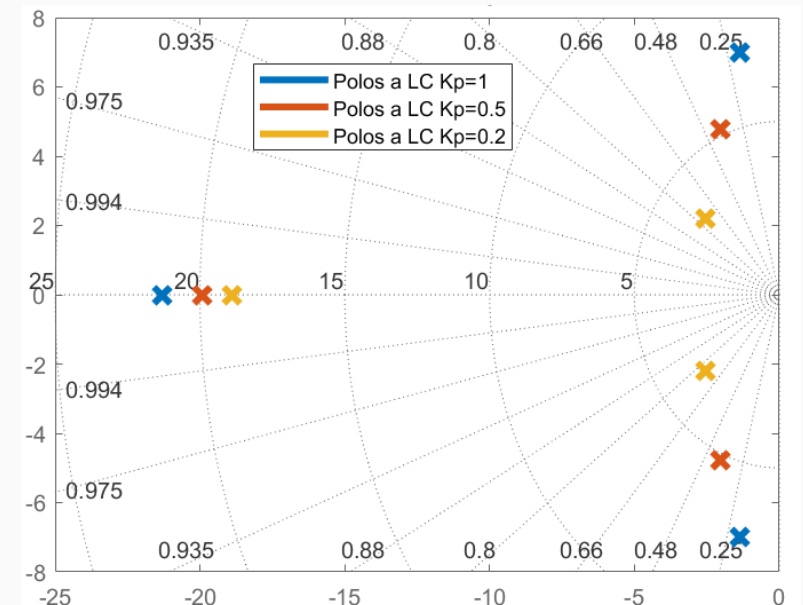
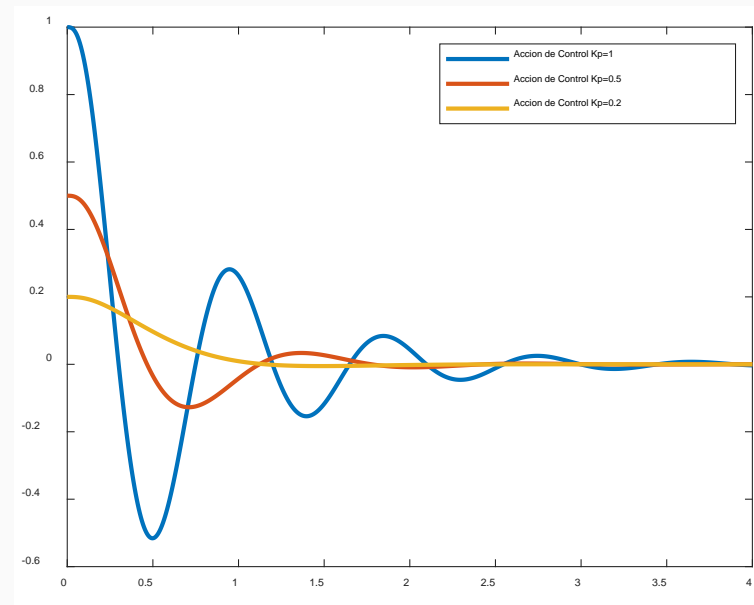
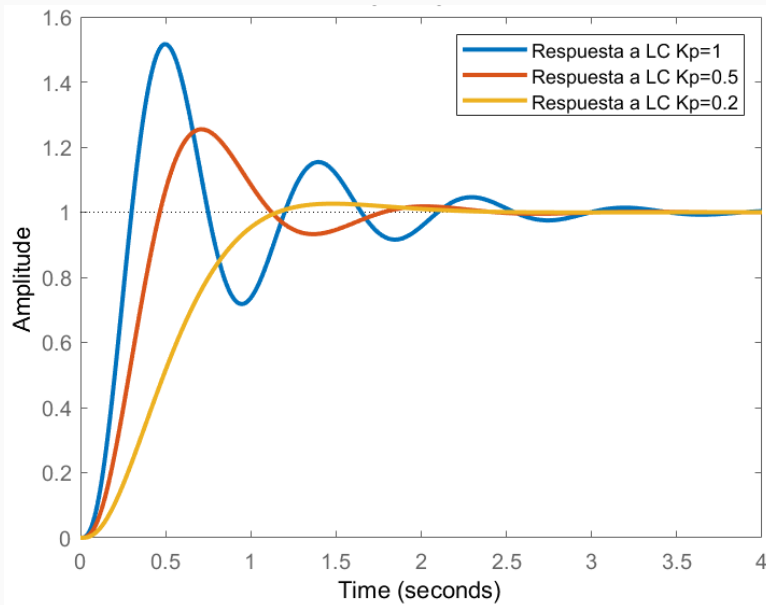
Ver archivo de PSIM:
motor_cc_control_ar
madura_analisis_P_I.
psimsch

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional:

Sistema de Tercer Orden Tipo 1

$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$



Se observa que:

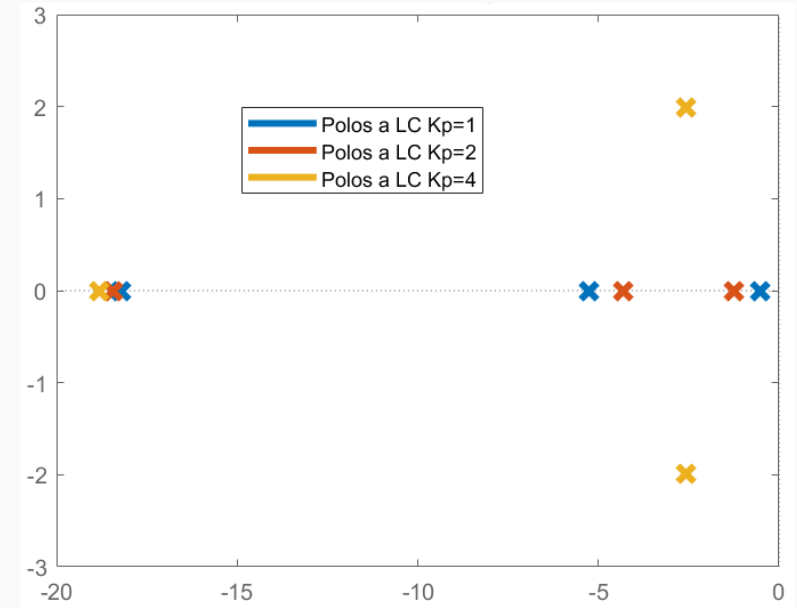
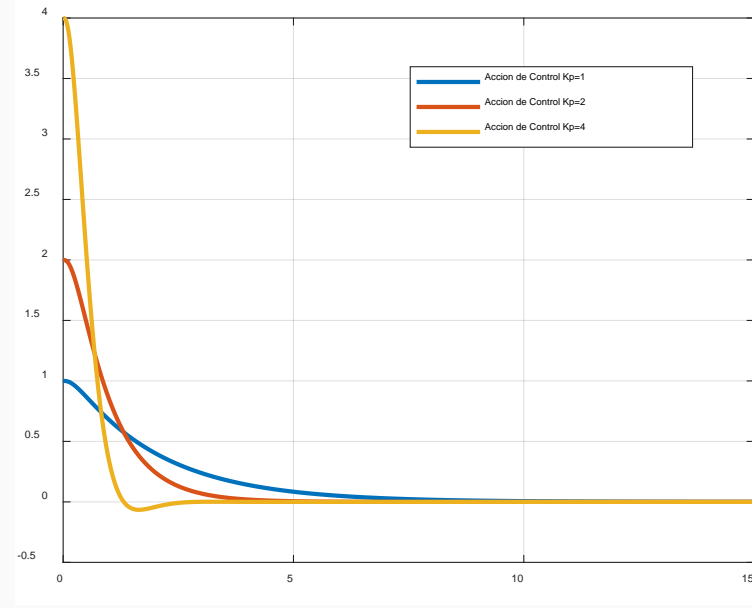
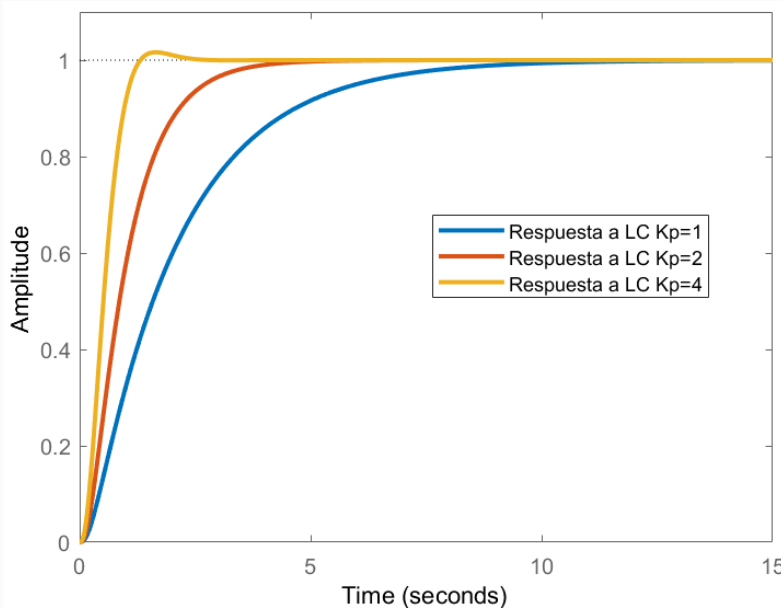
- ✓ Disminuyéndose K_p se disminuye M_p y t_s , mejorándose la respuesta transitoria.
- ✓ Al disminuirse el sobrepaso, por el aumento de ξ , aumenta también el tiempo de subida t_r .
- ✓ La acción de control se anula cuando $t \rightarrow \infty$ debido a que el proceso posee un integrador natural en su FT.
- ✓ La forma de la respuesta está definida únicamente por los polos de la FT de lazo cerrado.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional:

Sistema de Tercer Orden Tipo 1

$$G_p(s) = \frac{50}{s(s+6)(s+18)}$$



Se observa que:

- ✓ Aumentándose K_p se disminuye t_s y t_r y comienzan a aparecer sobrepasos M_p de la respuesta transitoria.
- ✓ Esto implica que el sistema a LC pasa de comportarse como un sistema sobreamortiguado a uno subamortiguado, disminuyendo ξ .
- ✓ La acción de control se anula cuando $t \rightarrow \infty$ debido a que el proceso posee un integrador natural en su FT.
- ✓ La forma de la respuesta está definida únicamente por los polos de la FT de lazo cerrado.

Acción de Control Proporcional: OBSERVACIONES

- Es un controlador sin dinámica.
- Tiene la ventaja de poseer solo un parámetros de ajuste.
- Aumento de la ganancia del compensador permite reducir el error en régimen estacionario.
- Es necesario que $e(t) \neq 0$ para tener una $u(t) \neq 0$. Esto introduce una tensión de offset.
- A mayor ganancia mayor señal de control actuante.
- Un control proporcional, por si mismo, no elimina el error en régimen permanente.
- El control proporcional considera el **valor actual** de $e(t)$ para calcular el **valor actual** de $u(t)$.
- A mayores valores de la ganancia del controlador, mejora el rechazo a la perturbación.
- Para sistemas de tipo 1, resulta ser un control muy simple para ajustar las características de la respuesta transitoria.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Integral:

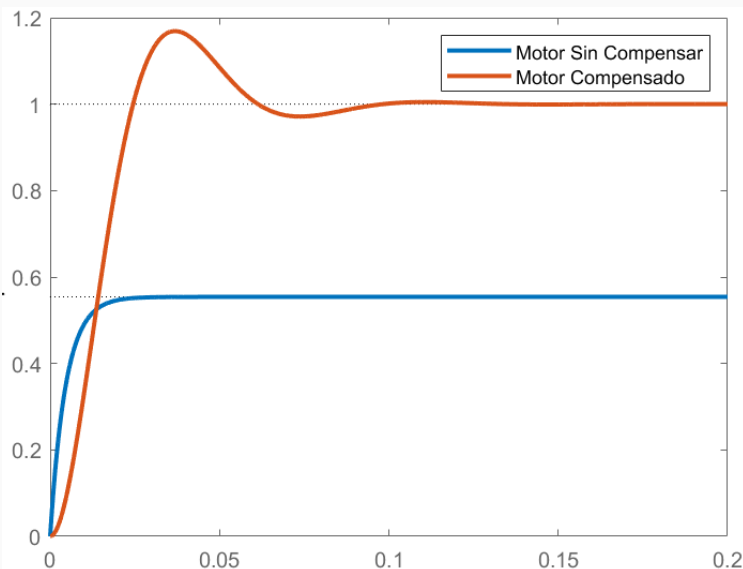
- En caso de utilizarse solamente una acción integral, la (1) se transforma en la siguiente ecuación:

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

• Aplicándose la TL, la FT del controlador integral resulta:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{sT_i} = \frac{K_i}{s}$$

- La función principal de la acción integral es garantizar que la salida del proceso sea igual en estado estacionario a la referencia o valor de consigna.
- Con el control integral, se aprecia que un **error de control positivo, dará una señal de control creciente**, y, ante un **error negativo, la señal de control será decreciente**.

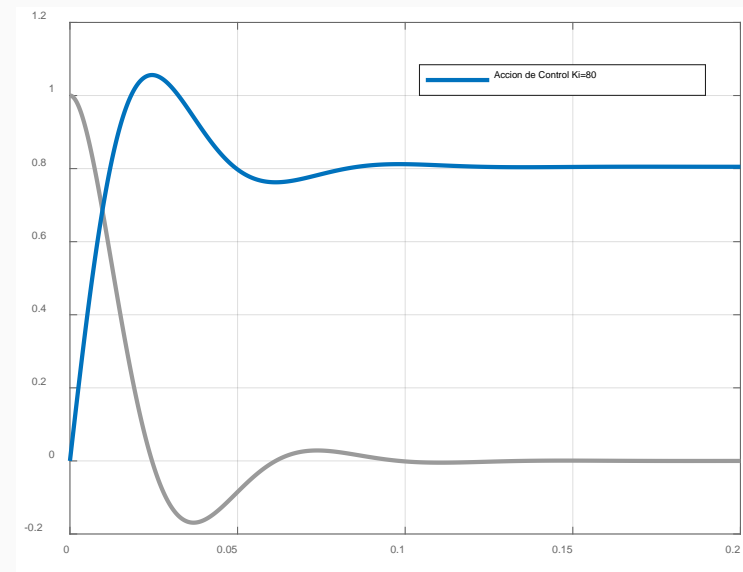


$$G_p(s) = \frac{119,76}{s + 96,41}$$

$$G_c(s) = \frac{80}{s}$$

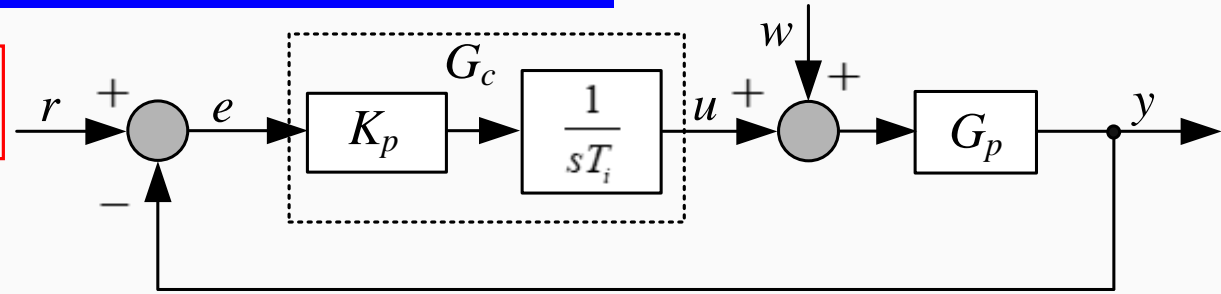
$$K_p = 0,8 \text{ y } T_i = 0,01s$$

$$G_{LC}(s) = \frac{9581}{s^2 + 96,41s + 9581}$$



Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Integral: Sistemas de Tipo 0

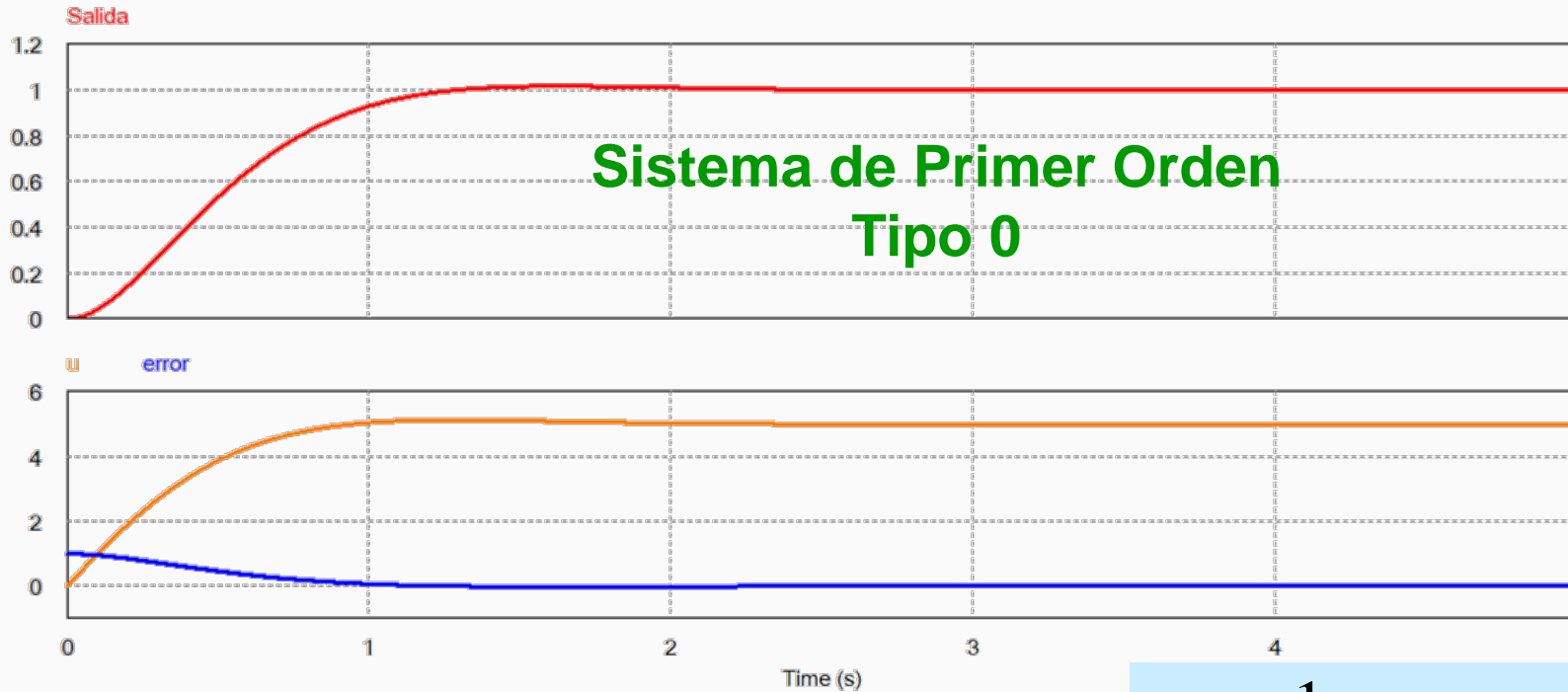


$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$G_p(s) = \frac{a}{(sT + 1)}$$

$$a = 1/5 \text{ y } T = 0,2$$



**Sistema de Primer Orden
Tipo 0**

Se consigue que con $e(t) = 0, u(t) = ctte$

El Control Integral permite que $e_{ssp} = 0$ para $ref = constante$.

$$K_p = 1 \quad T_i = 0,1 \text{ seg} \quad \Rightarrow$$

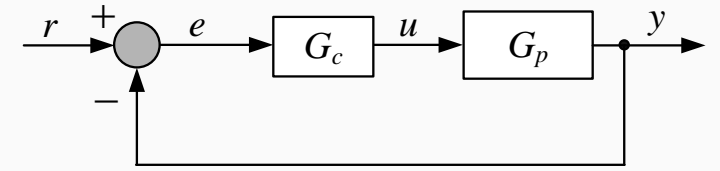
$$K_i = \frac{1}{T_i} = 10 \text{ seg}^{-1}$$

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Integral

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$



$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

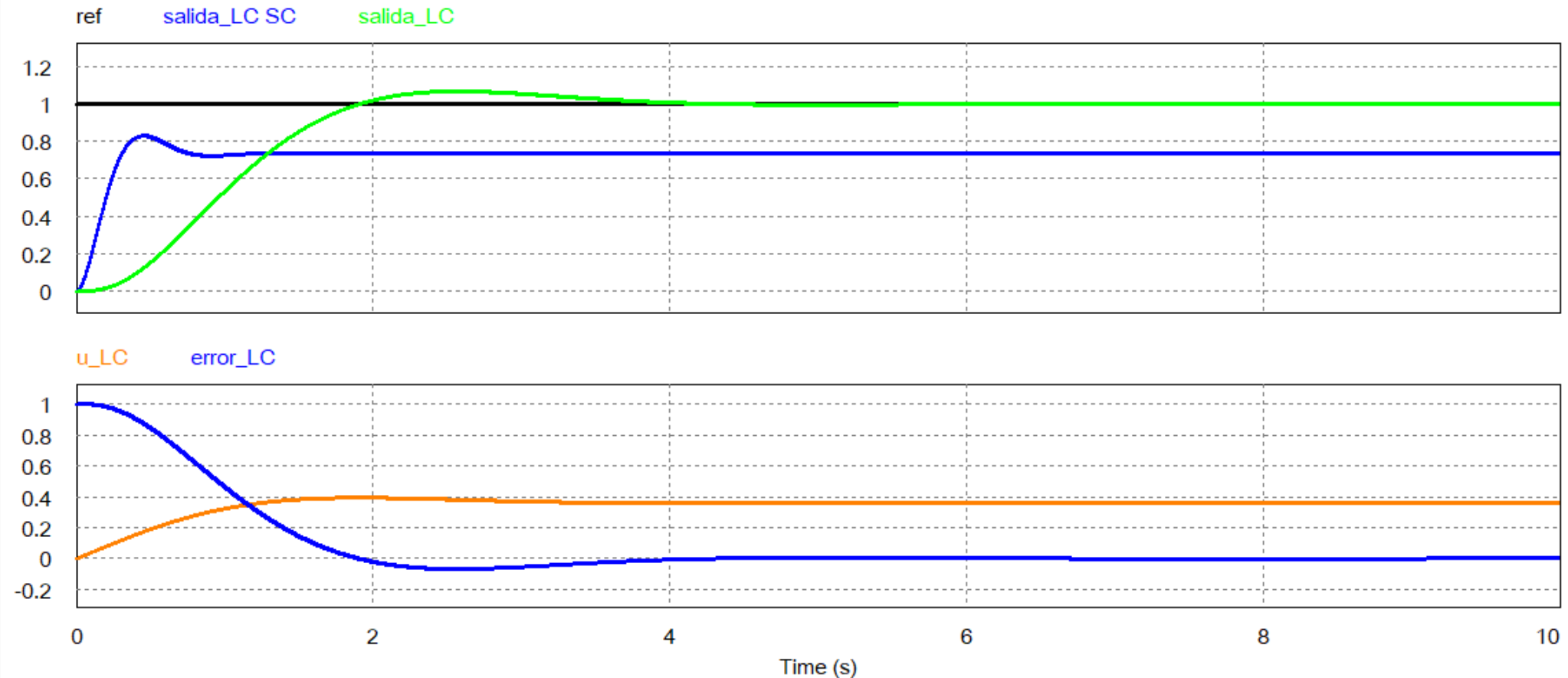
$$G_p(s) = \frac{50}{s^2 + 9s + 18}$$

Sistema de Segundo Orden Tipo 0

$$K_p = 0,1$$

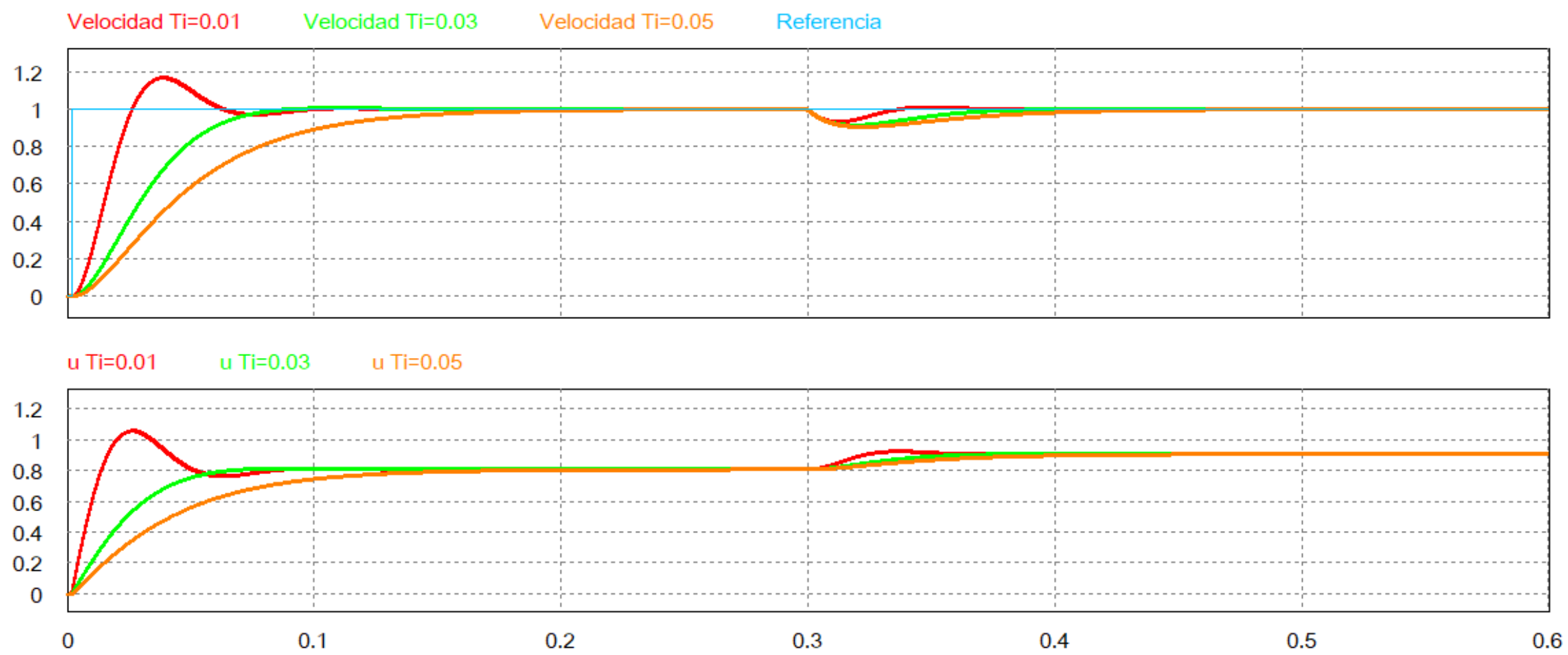
$$T_i = 0,25 \text{ seg}$$

$$K_i = 0,4$$



Acción de Control Integral: Análisis del Rechazo a Perturbaciones

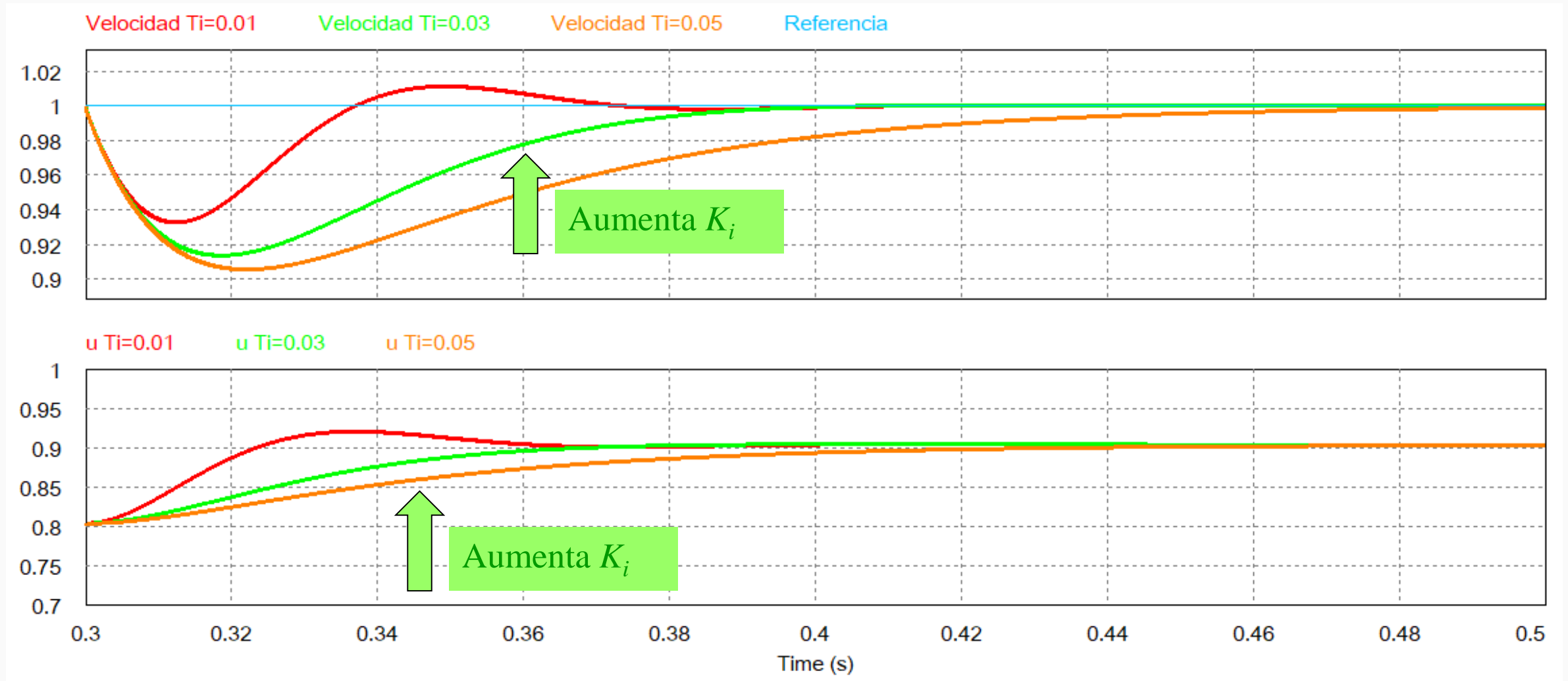
Control de velocidad Motor CC



Ver archivo de PSIM: motor_cc_control_armadura_analisis_P_I.psim sch

Acción de Control Integral: Análisis del Rechazo a Perturbaciones

Control de velocidad Motor CC



Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Integral: Observaciones

- El controlador impone un polo al origen permitiendo error de régimen estacionario nulo para entrada constante.
- Tiene en forma directa, un solo parámetro de ajuste K_i para mejorar la característica transitoria de la respuesta. En forma indirecta, es una combinación de la constante de tiempo de integración T_i y de la ganancia proporcional K_p .
- Este control básicamente actúa sobre el régimen estacionario.
- Es posible conseguir $e(t) = 0$ con una $u(t) = \text{constante}$.
- A mayor ganancia K_i mayor señal de control actuante. Esto permite mejorar el rechazo a las perturbaciones, no obstante, depende de los polos de la FT de LC.
- El control integral considera la historia del error $e(t)$ para calcular el **valor actual** de $u(t)$.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional + Integral:

- En caso de utilizarse la suma de la acción proporcional más una acción integral, la (1) se transforma en:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

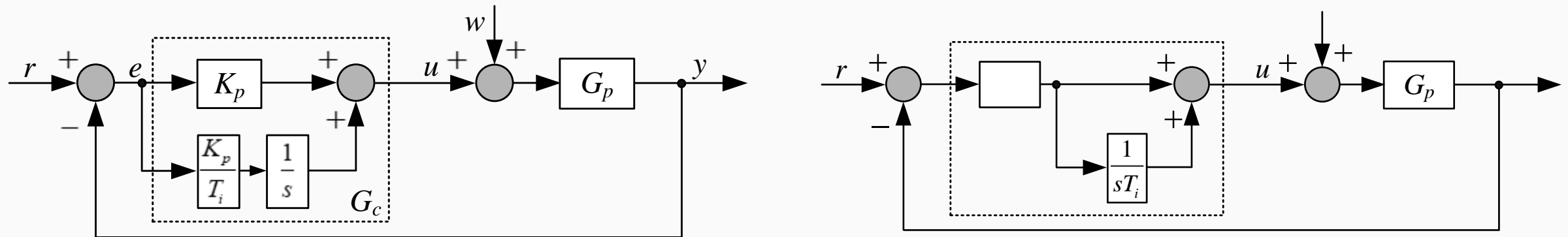
- Aplicándose la TL, la FT del controlador integral resulta:

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right]$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \frac{s + K_i / K_p}{s}$$

Agregar un cero en $-K_i/K_p$ o $-1/T_i$ y un polo en $s = 0$

- Con la incorporación del cero en la FT del compensador, agrego un grado de libertad adicional para el ajuste de la respuesta transitoria. Su implementación resulta en el siguiente diagrama de bloques:

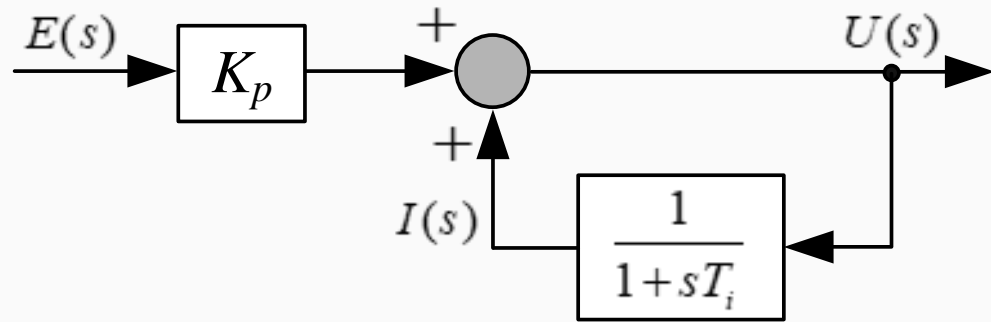


Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right]$$

Acción de Control Proporcional + Integral:

• La acción integral puede concebirse como un dispositivo que resetea de forma automática el offset que produce la acción proporcional, o sea, $u(offset)$. El diagrama de bloques de este reset automático se muestra a continuación



• El ajuste se hace realimentando una señal, al punto de suma del controlador, que es un valor filtrado de la salida del mismo. Esta fue una de las primeras invenciones de la acción integral, o reset automático, tal como se lo llamó.

$$U(s) = E(s)K_p + \frac{1}{1+sT_i}U(s) \Rightarrow U(s)\frac{sT_i}{1+sT_i} = E(s)K_p \rightarrow U(s) = E(s)K_p \left(\frac{1+sT_i}{sT_i} \right)$$

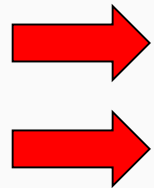
$$U(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{sT_i} E(s)$$

• Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right]$$

Que es el PI presentado inicialmente

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right]$$



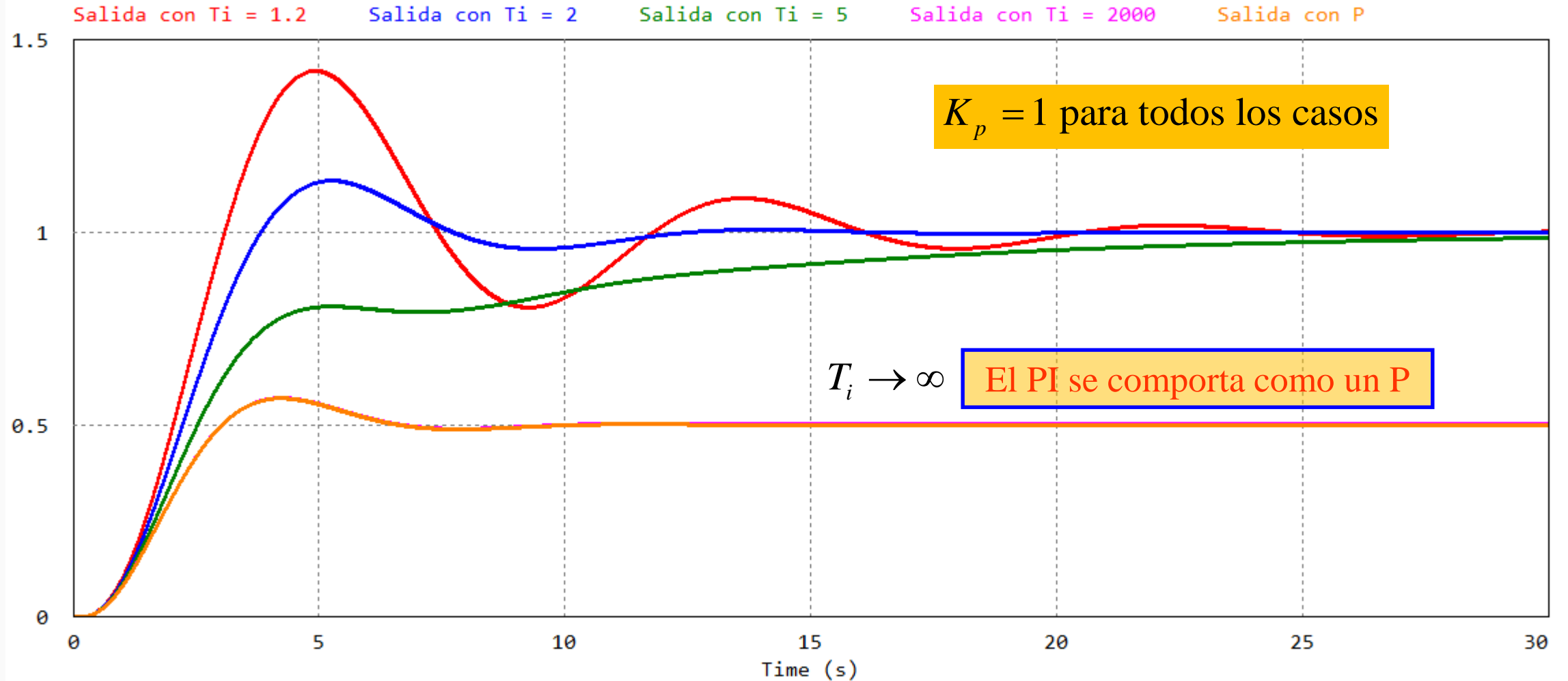
Para T_i elevados, el PI pasa a ser un controlador Proporcional

Para T_i pequeños, el PI pasa a ser un controlador Integral puro

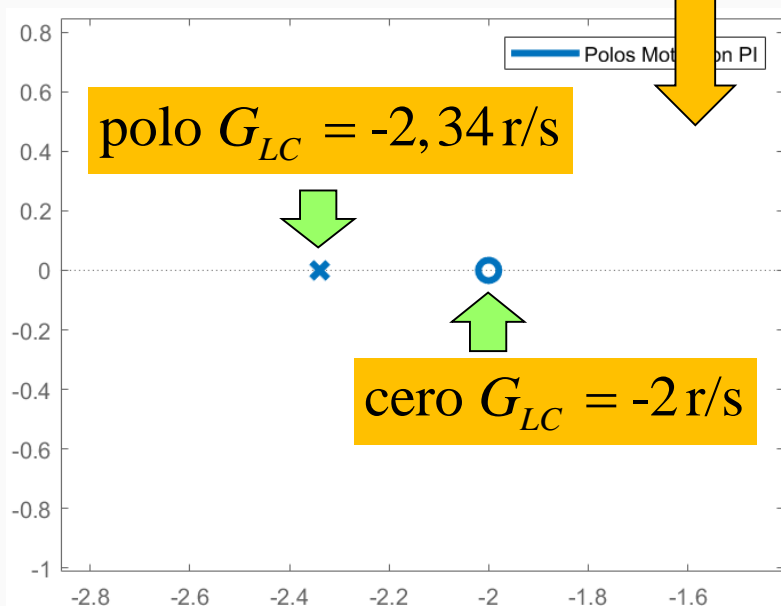
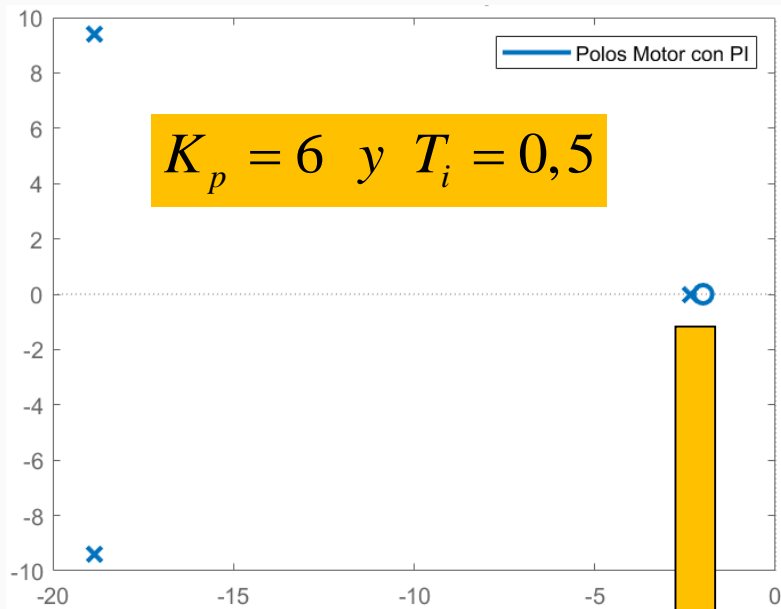
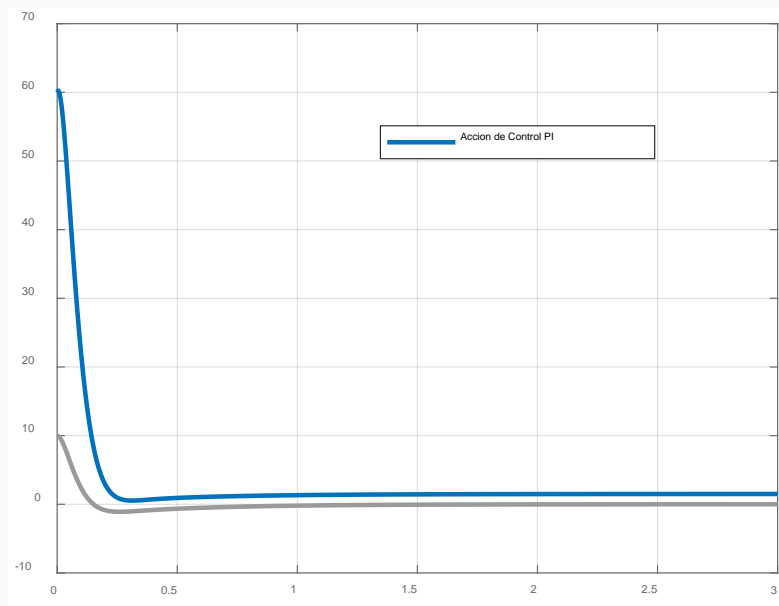
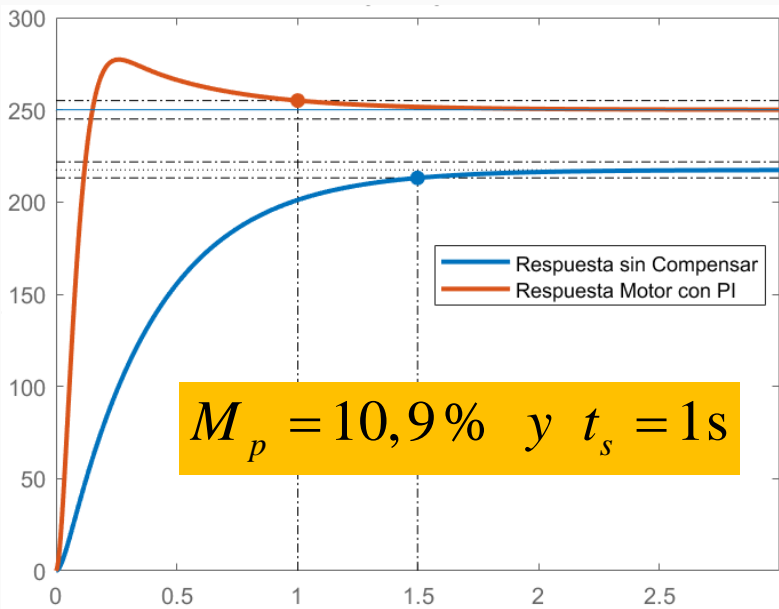
Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Acción de Control Proporcional + Integral: Análisis de T_i



Acción de Control PI: Diseño y Análisis



Control de velocidad motor CC

$$G_v(s) = \frac{10,81}{s^2 + 40,05s + 12,97}$$

$$G_c(s) = 6 \frac{(s + 2)}{s}$$

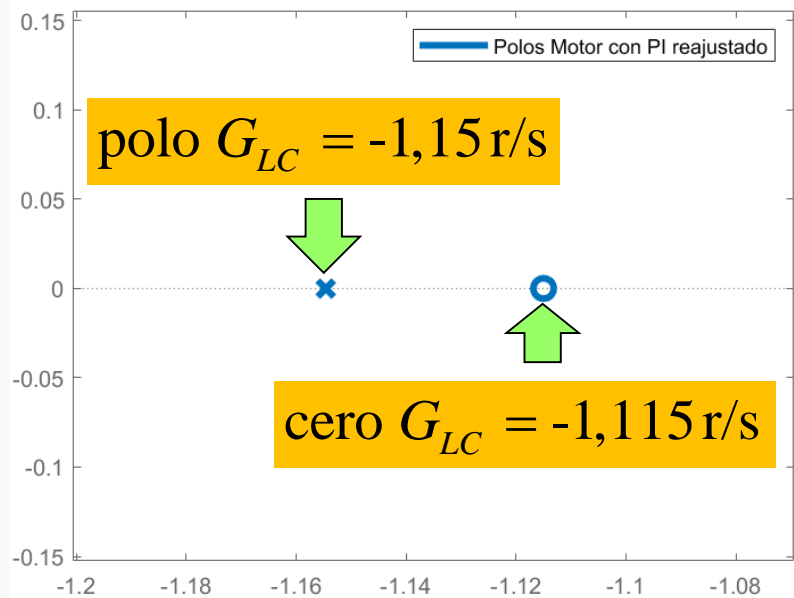
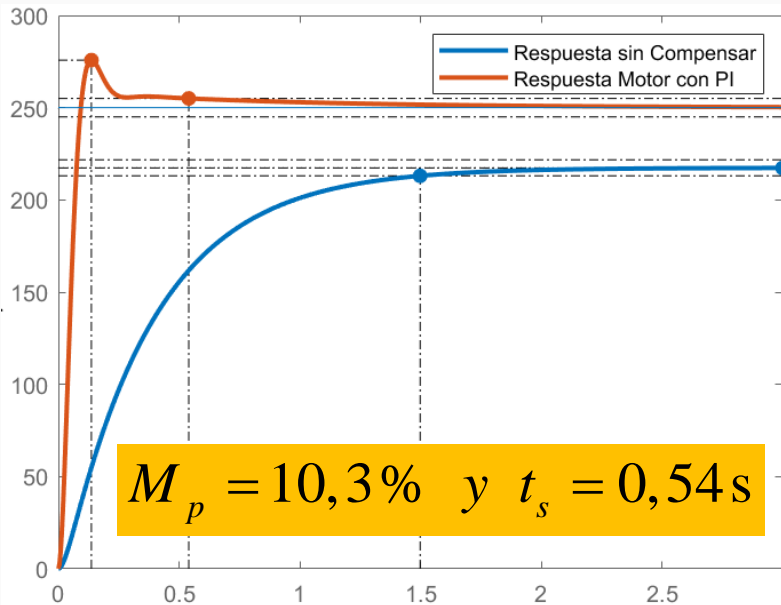
$$\text{cero PI} = \frac{K_i}{K_p} = -2 \text{ r/s}$$

Criterio de Diseño

Situar el cero del PI próximo del polo dominante de la planta a Lazo Cerrado

Ver script:
comp_proporcional_motorCC_conPI.m

Acción de Control PI: Diseño y Análisis



Puede hacerse un reajuste

$K_p = 10,76$ y $T_i = 0,897$

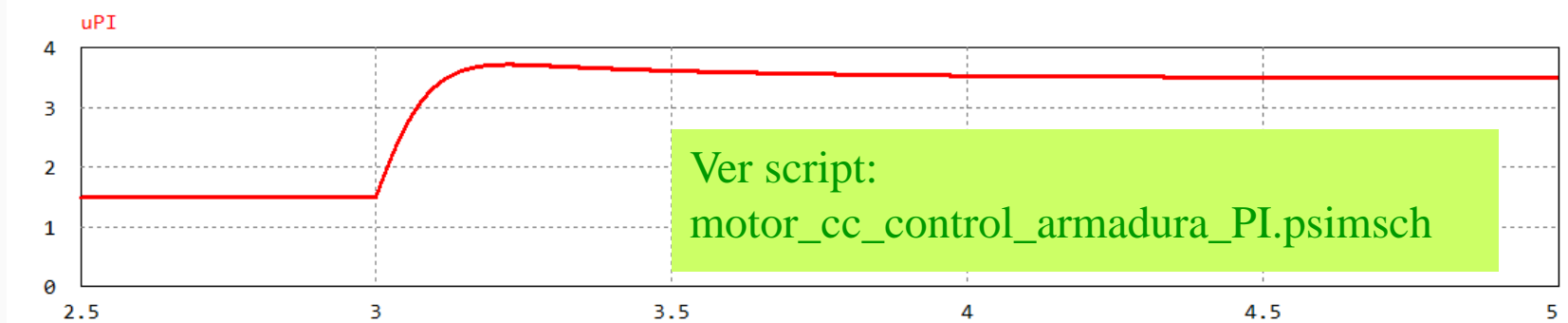
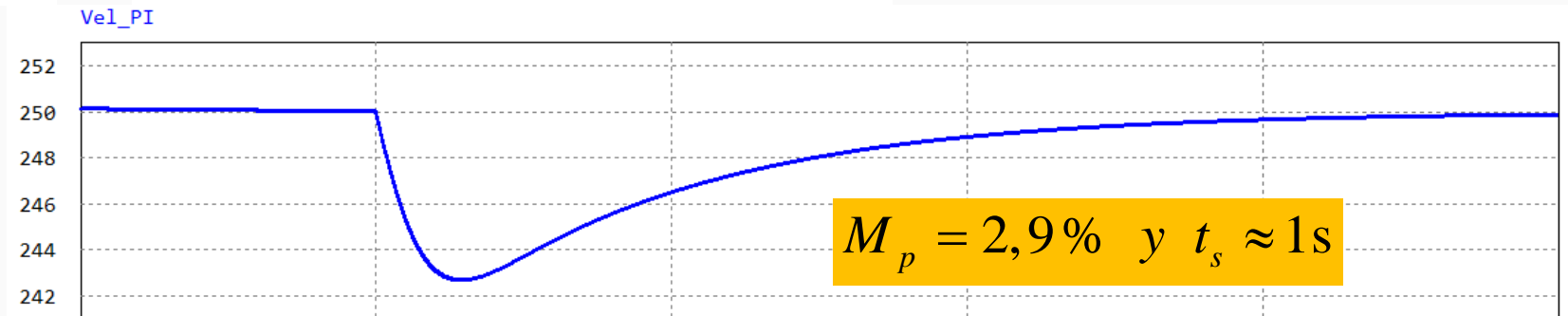
$$G_c(s) = 10,76 \frac{(s + 1,11)}{s}$$

cero PI = $\frac{K_i}{K_p} = -1,115 \text{ r/s}$

Análisis de la perturbación de torque de carga

La acción de control pasa de 1,5 a 3,5 para mantener el error de control = 0.

$$G_c(s) = 6 \frac{(s + 2)}{s}$$



Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional-Integral: Observaciones

- ✓ Es un controlador que introduce una dinámica: **un polo al origen y un cero**.
- ✓ La parte **Integral** elimina el error en régimen permanente.
- ✓ La parte **Proporcional reduce el riesgo de inestabilidad** de la introducción del polo al origen y además **mejora el desempeño transitorio**.
- ✓ La acción integral **elimina el offset** de la acción proporcional.
- ✓ Permite obtener una señal de control $u(t) \neq 0$ aunque $e(t) = 0$.
- ✓ Es un controlador útil para sistemas de primer o de segundo orden de **tipo 0**.
- ✓ Ubicándose el cero del PI próximo al polo dominante de LC, puede ajustarse la etapa transitoria de la respuesta al escalón y así mejorar el rechazo a perturbaciones.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Derivativa:

- La acción de control derivativa resulta de la ecuación (1)

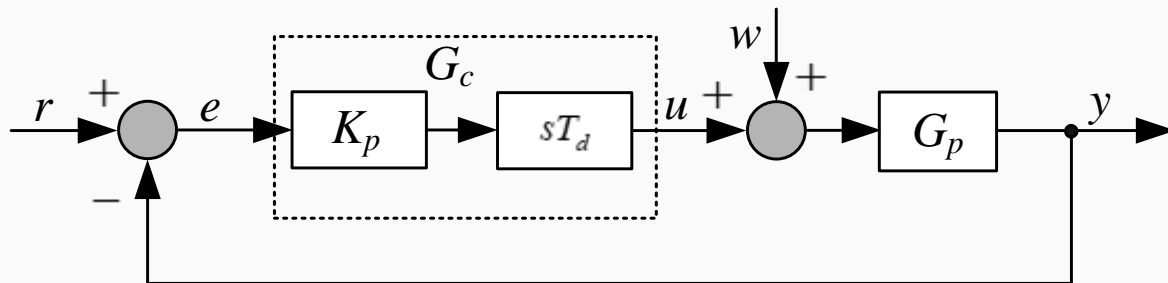
$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Aplicándose la TL, la FT del controlador derivativo resulta:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p T_d s$$

- Con una acción derivativa pura, puedo realizar el ajuste de la respuesta transitoria, ya que esta acción únicamente tiene efecto durante las variaciones de la señal de error.

$$e(t) = \text{ctte.} \Rightarrow u(t) = 0$$



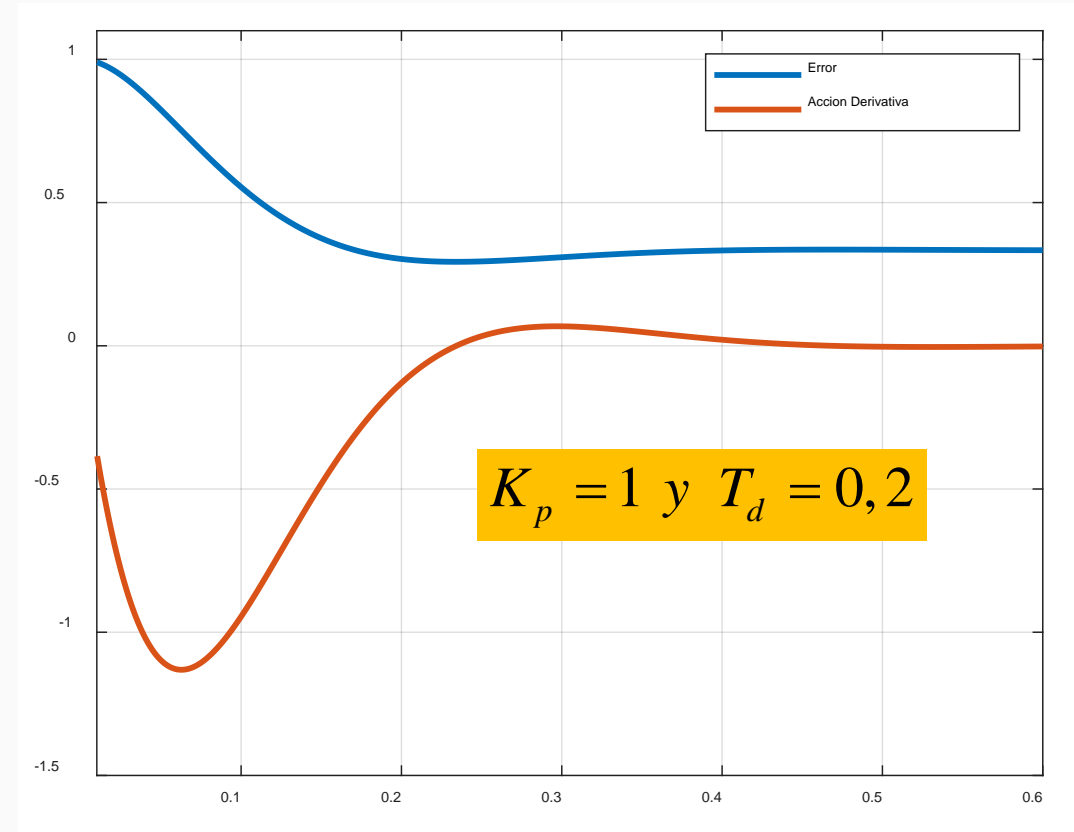
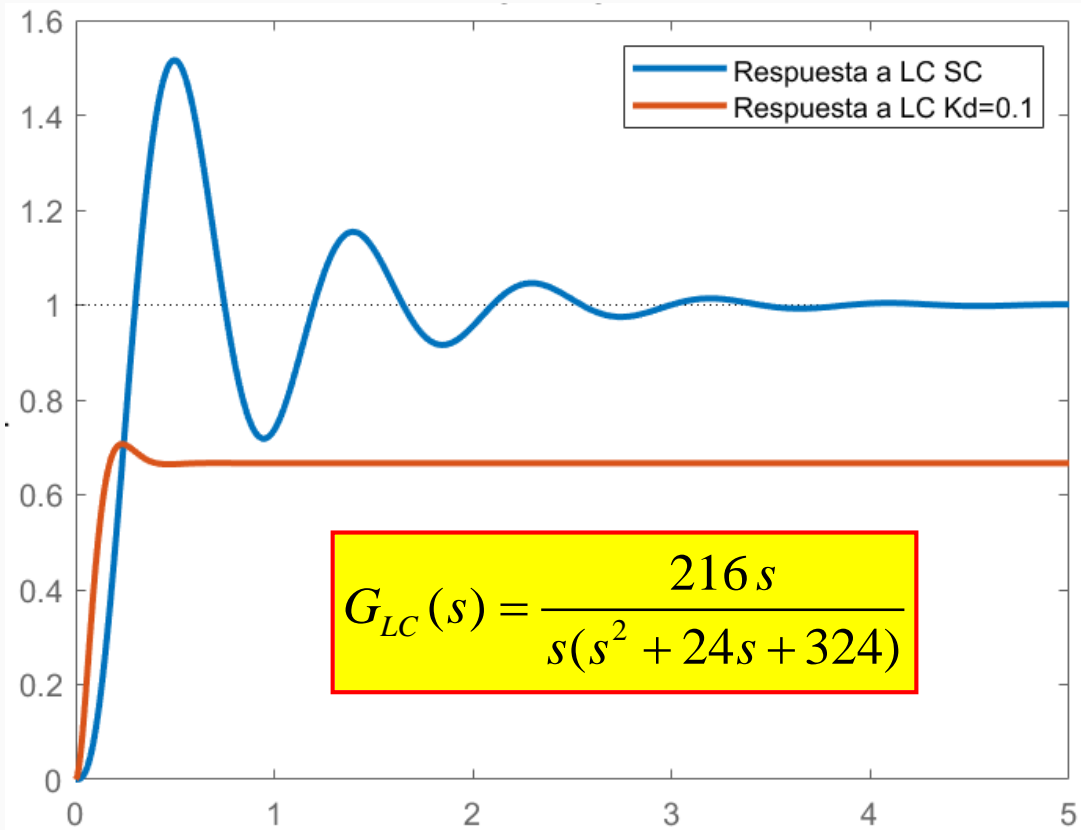
- Analizamos el caso de la siguiente planta de tipo 1:

$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

$$K_p = 1 \text{ y } T_d = 0,2$$

$$G_c(s) = 0,2s$$

Acción de Control Derivativa:



- ✓ El controlador introduce una **un cero al origen** provocando error de régimen estacionario.
- ✓ Produce una acción anticipativa corrigiendo rápidamente las variaciones del error y evitando así que este resulte excesivo.
- ✓ Posibilita amortiguar sistemas poco amortiguados incrementándose así la Estabilidad Relativa.
- ✓ Insensibiliza al sistema de lazo cerrado ante perturbaciones.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

Acción de Control Proporcional-Derivativa

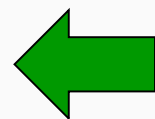
- Dado que una acción derivativa por si sola no tiene mucha utilidad, se la combina con la acción proporcional, la cual resulta de (1) en:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

- Aplicándose la TL, la FT del controlador proporcional-derivativo puede escribirse:

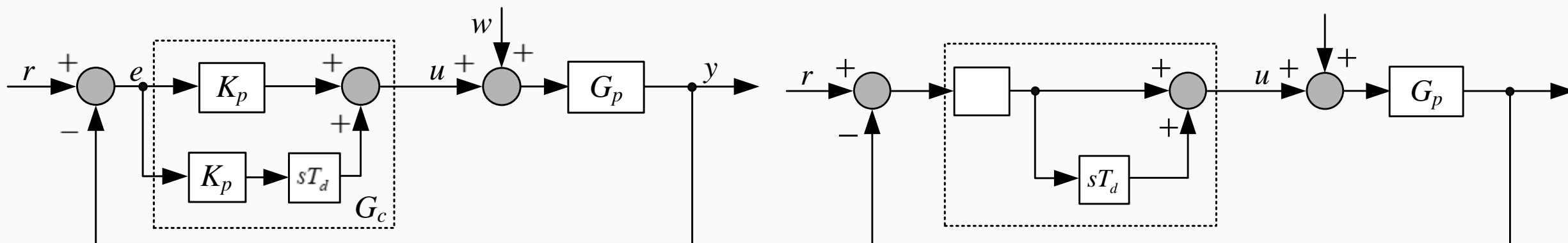
$$G_c(s) = K_p (1 + sT_d)$$

$$G_c(s) = K_p + sK_d = K_d \left(s + \frac{K_p}{K_d} \right)$$



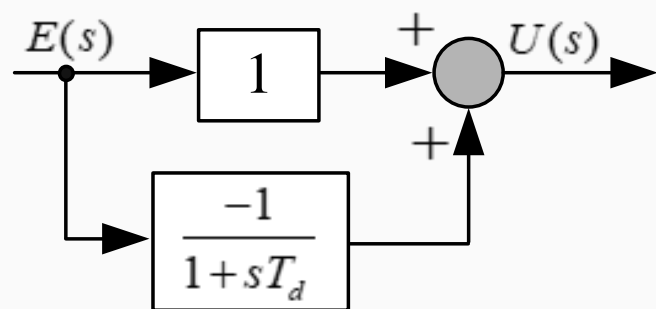
Agregar un cero en $-K_p/K_d$ o $-1/T_d$

- Con la incorporación del cero del compensador PD puedo ajustar la respuesta transitoria de procesos con poca estabilidad relativa. Su implementación resulta en el siguiente diagrama de bloques:



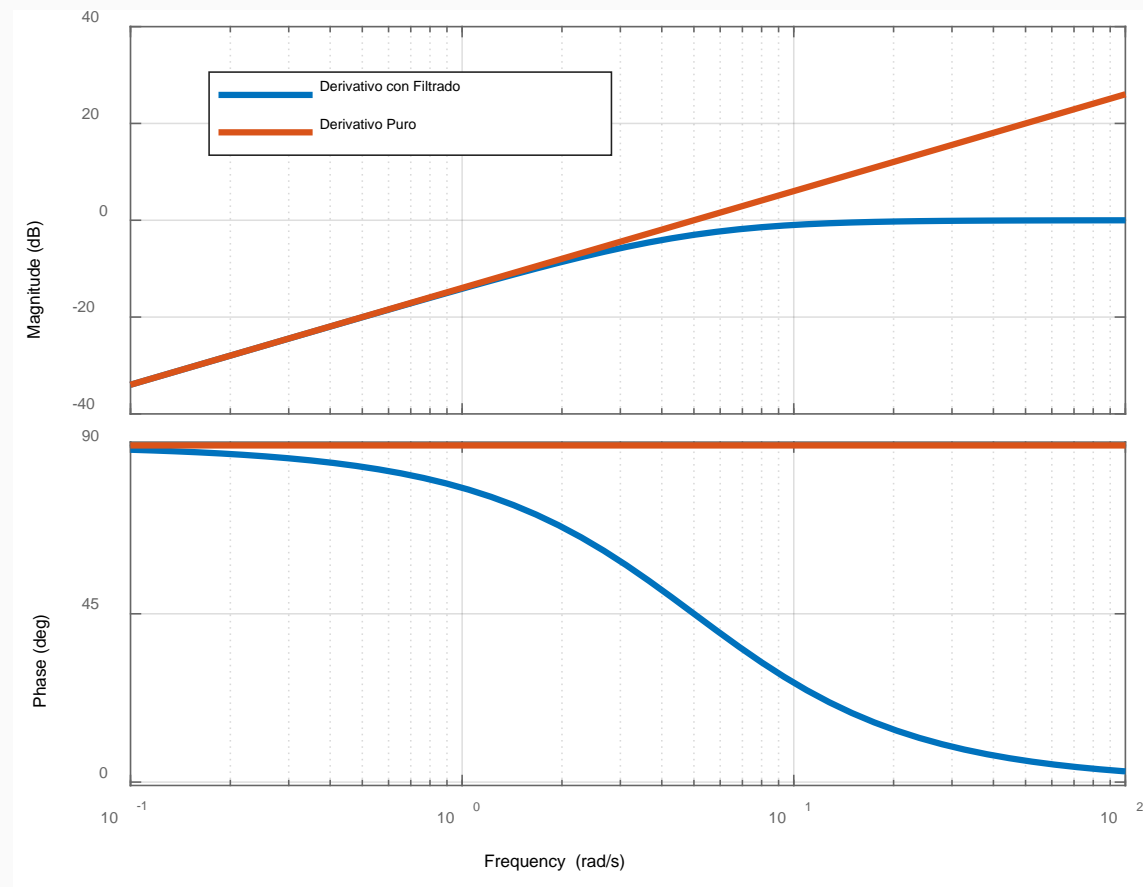
Acción de Control Proporcional-Derivativa: Análisis

- La acción derivativa fue implementada inicialmente, al igual que la acción integral, en torno a un sistema de primer orden, como se muestra en la figura que sigue:



$$U(s) = E(s) - \frac{1}{1 + sT_d} E(s) = \frac{sT_d}{1 + sT_d} E(s)$$

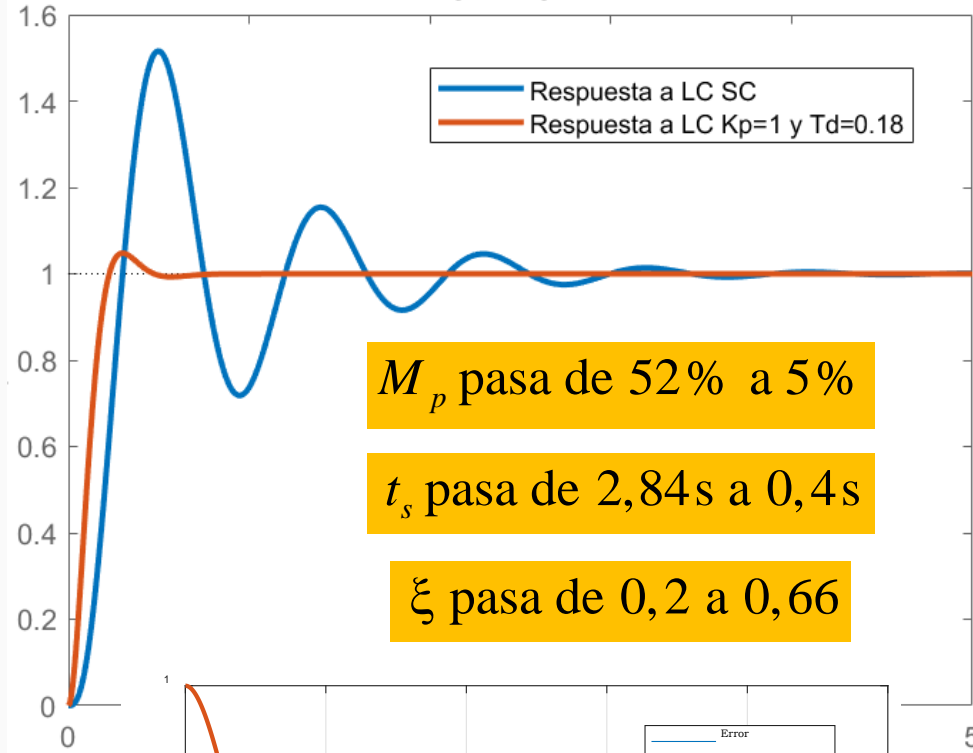
Es importante observar, que en esta implementación aparece una acción de filtrado adicional con un polo real en $-1/T_d$. Este filtro pasa bajas limita en banda a la acción derivativa.



Acción de Control Proporcional-Derivativa

$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

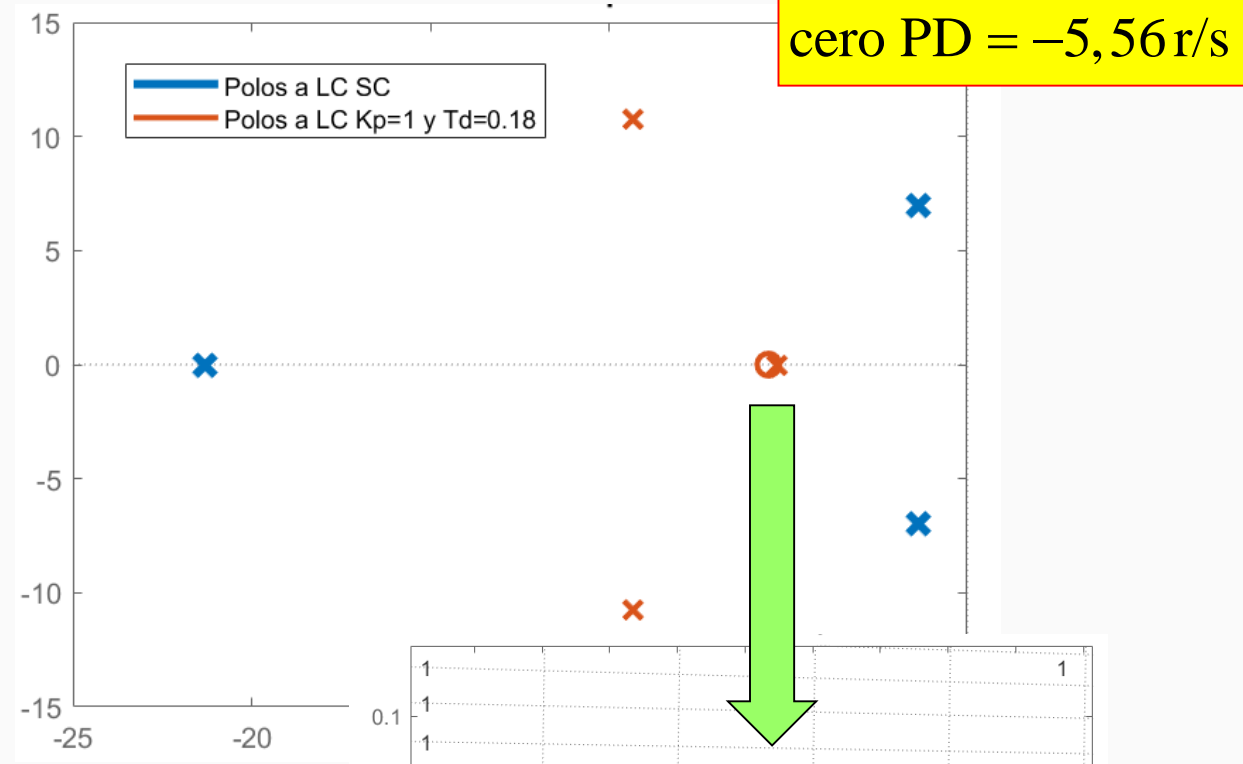
$$K_p = 1 \text{ y } T_d = 0,18$$



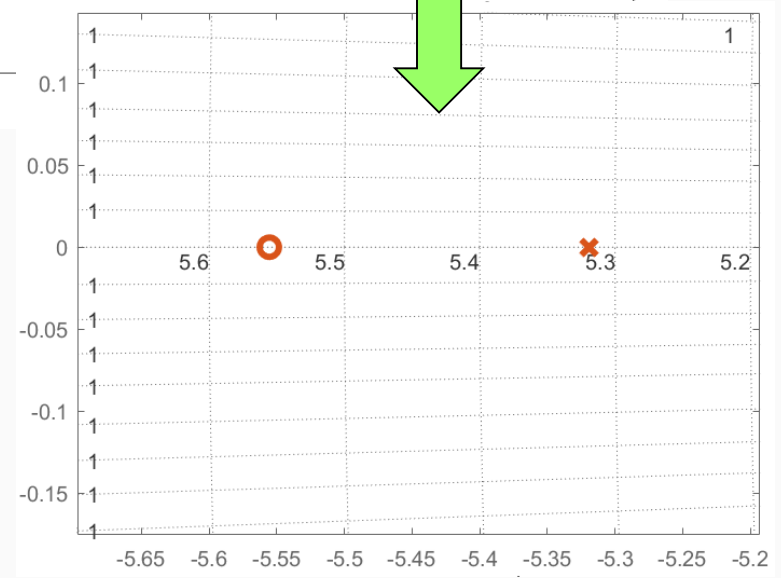
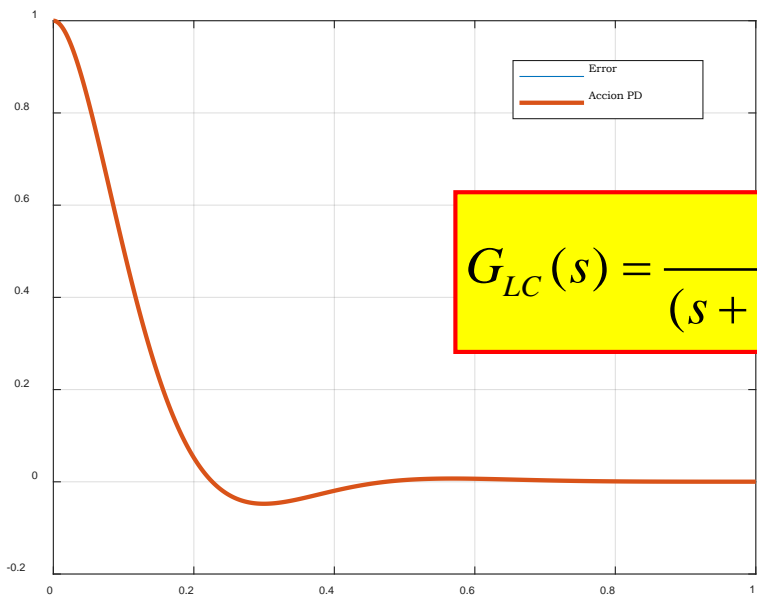
M_p pasa de 52% a 5%

t_s pasa de 2,84s a 0,4s

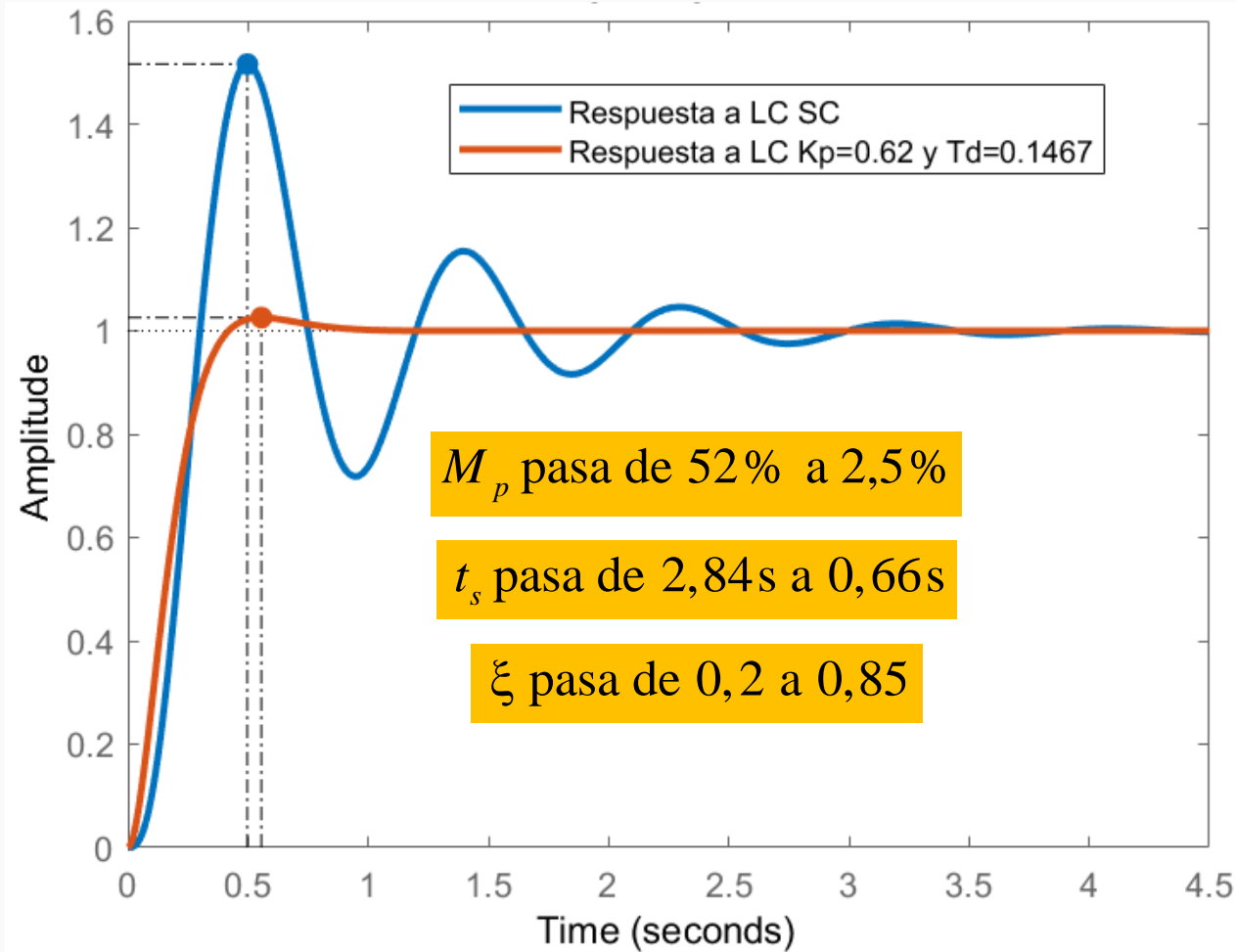
ξ pasa de 0,2 a 0,66



$$G_{LC}(s) = \frac{194,4(s+5,56)}{(s+5,32)(s^2+18,68s+203)}$$



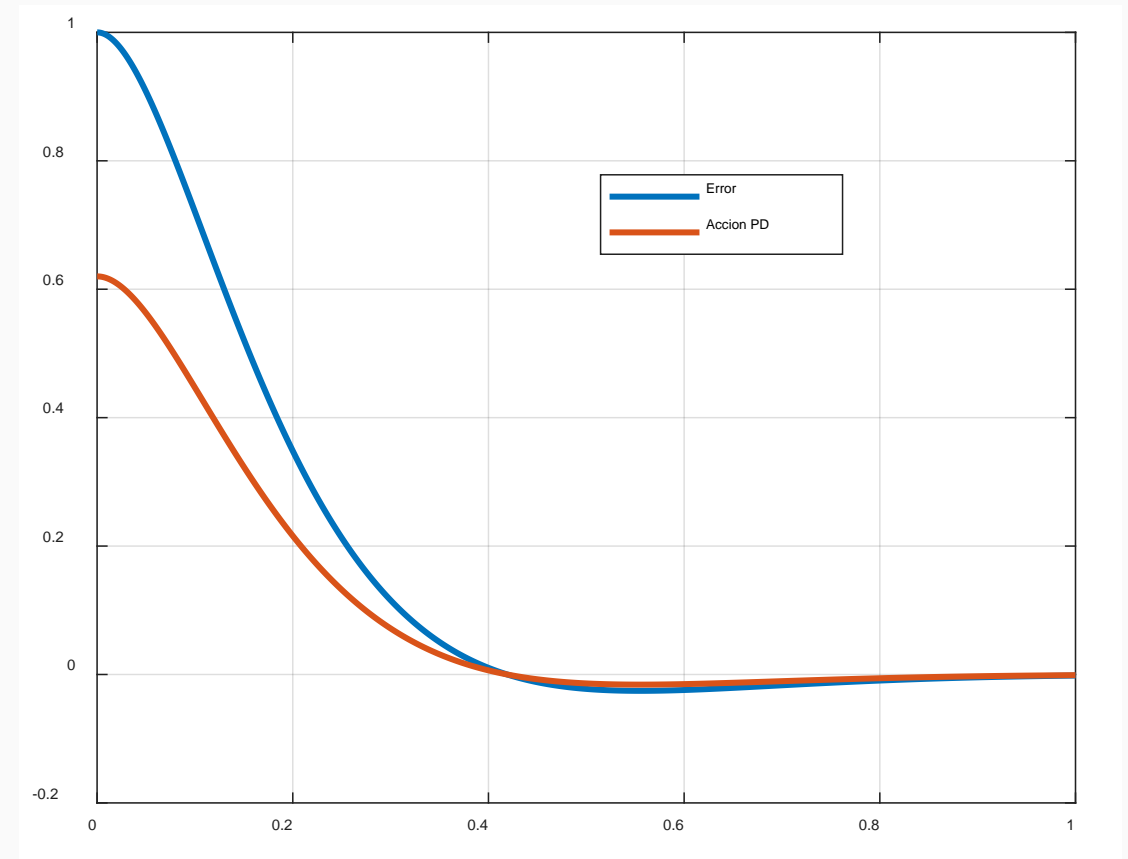
Acción de Control Proporcional-Derivativa



$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

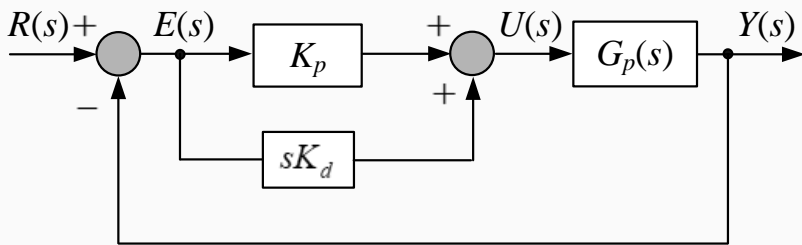
$$K_p = 0,62 \text{ y } K_d = 0,091$$

$$\text{cero PD} = -6,8 \text{ r/s}$$

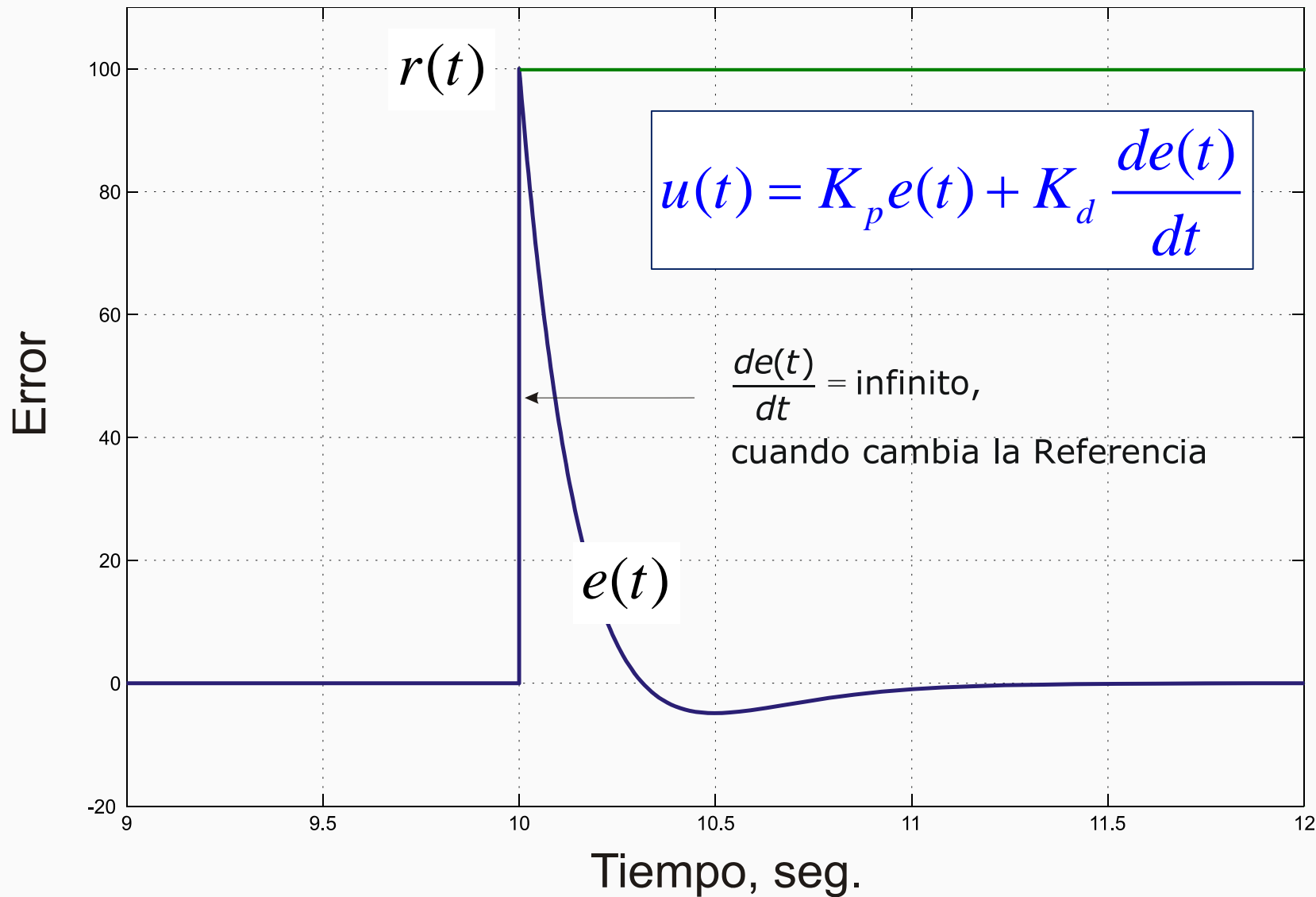


Proporcional-Derivativo Modificado: Referencia Constante

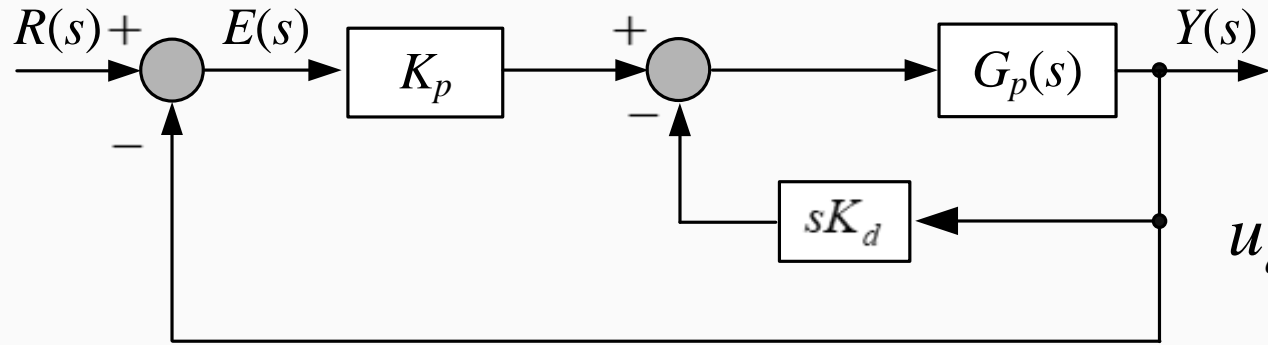
Implementación convencional



$$U(s) = K_p E(s) + sK_d E(s)$$



Proporcional-Derivativo Modificado o P-D: Solamente para Referencia Constante



$$r(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$u_d(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad \frac{de(t)}{dt} = \frac{d[r(t) - y(t)]}{dt}$$

siendo $r(t) = cte \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \frac{dr(t)}{dt} = 0$

Por lo tanto: $\frac{de(t)}{dt} = -\frac{dy(t)}{dt}$

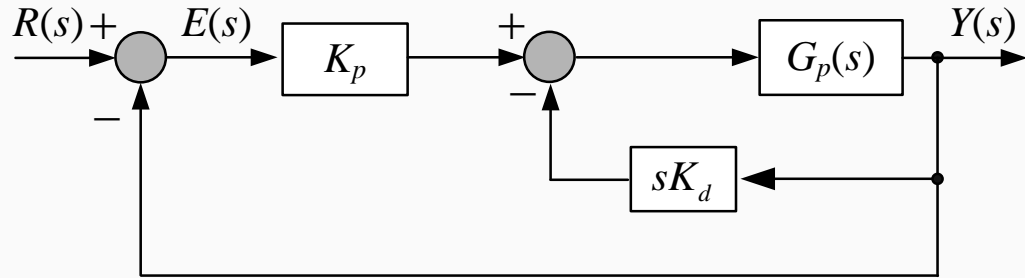
O también: $sE(s) = -sY(s)$

$$U(s) = K_p E(s) - sK_d Y(s)$$

$$u(t) = K_p e(t) - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

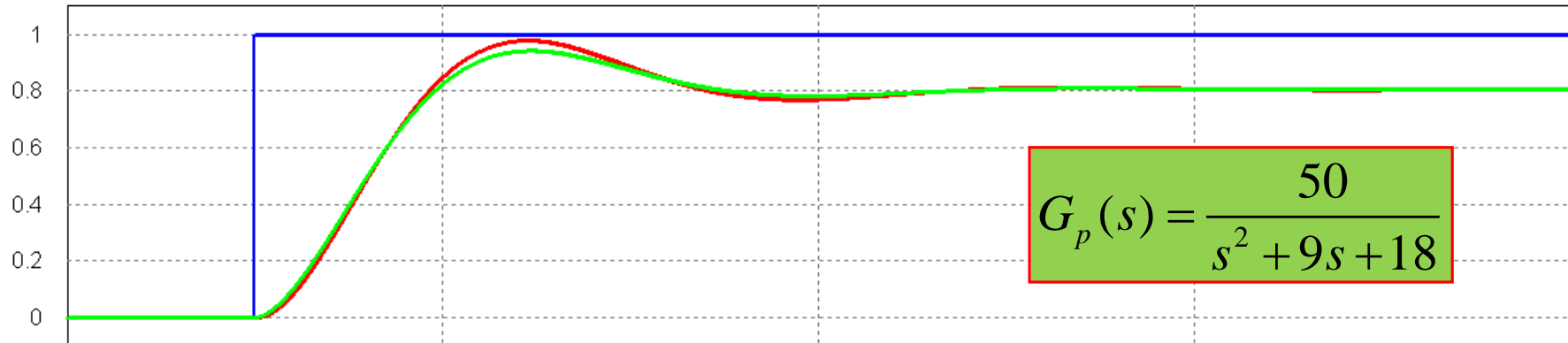
- El hecho de utilizar la derivada de la salida posibilita atenuar significativamente la magnitud de la acción derivativa, dado que la pendiente de variación inicial de la salida es mucho más suave.
- Esta modificación reduce también la acción de control necesaria cuando se aplica una perturbación al proceso, el cual generalmente, también ingresa en forma de escalón.

Proporcional-Derivativo Modificado: Referencia Constante

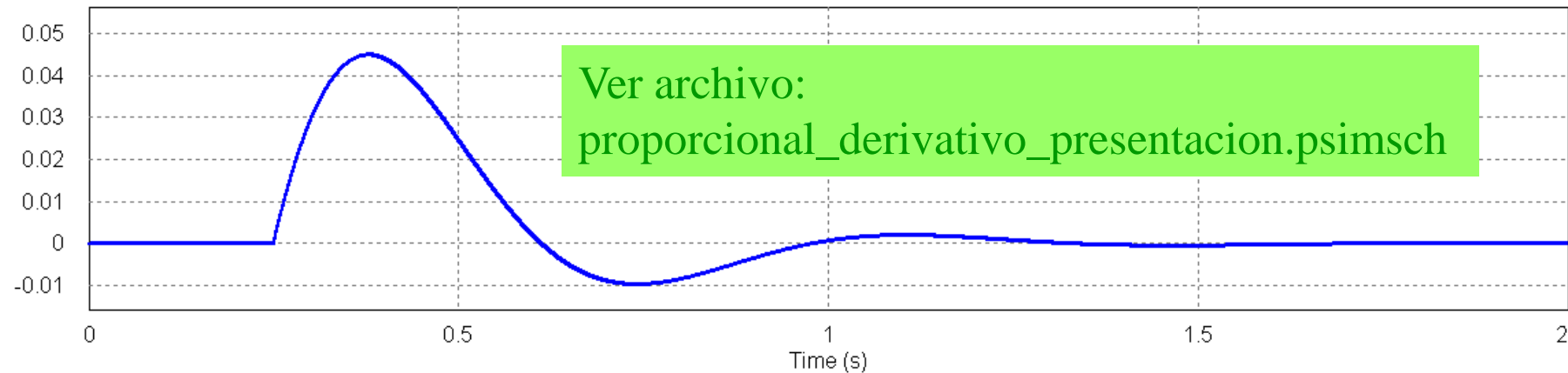


$$u(t) = K_p e(t) - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

Salida PD Ref Salida PD1



ud



Acción de Control Proporcional-Derivativa: OBSERVACIONES

- 😊 Mejora el AMORTIGUAMIENTO aumentando la ESTABILIDAD RELATIVA
- 😊 Reduce el **SOBREPASO** de la respuesta transitoria.
- 😊 Reduce el **TIEMPO DE SUBIDA** y el **TIEMPO DE ASENTAMIENTO**.
- 😊 Mejora significativamente el **RECHAZO A LAS PERTURBACIONES**.
- 😊 Apto para **SISTEMAS ESTABLES** que poseen **UN INTEGRADOR EN LA FTLA**.
- 😞 Puede **AMPLIFICAR EL RUIDO EN LAS ALTAS FRECUENCIAS**.
- 😞 Por si solo no puede reducir el error de régimen estacionario.
- 😞 Actúa solamente sobre la etapa transitoria de la respuesta del proceso.

Acción de Control Proporcional-Integral-Derivativa: PID

- Retomando la ecuación (1) se tiene:
$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right] \quad (1)$$

Representaciones Alternativas del PID

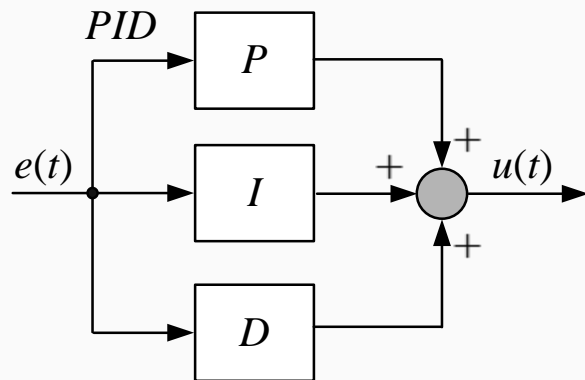
- Aplicándose la TL a la (1), resulta la siguiente FT de un compensador PID

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (11)$$

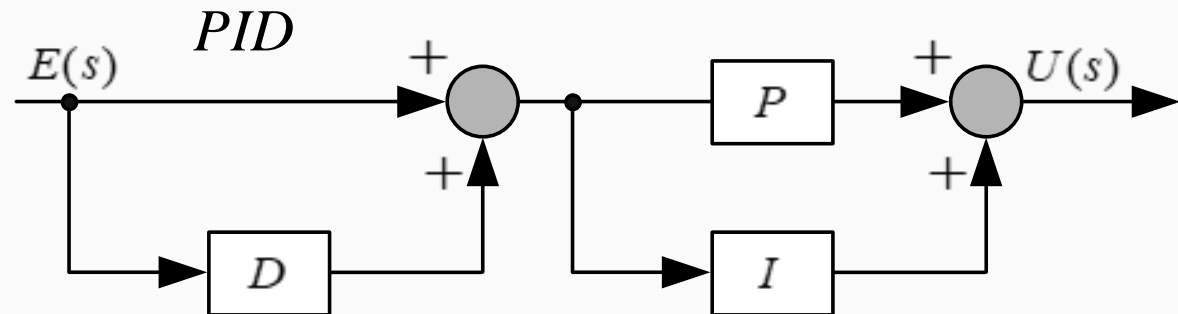
- Versión muy común en controladores comerciales:

$$G'_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K' \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) (1 + sT_d) \quad (12)$$

PID No Interactuante



PID Interactuante



Acción de Control Proporcional-Integral-Derivativa: PID

Representaciones Alternativas del PID

- La expresión (11) del PID es NO INTERACTUANTE porque la constante de tiempo integral T_i no influye en la parte derivativa y T_d no influye sobre la parte integral.
- En la versión del PID INTERACTUANTE, la constante de tiempo derivativa tiene influencia sobre la parte integral y viceversa.

• Distribuyendo términos de la (12): $G'_c(s) = K' + sK'T'_d + \frac{K'}{sT'_i} + \frac{K'T'_d}{T'_i}$

$$G'_c(s) = K' \left(\frac{T'_i + T'_d}{T'_i} \right) + sK'T'_d + \frac{K'}{sT'_i} = K' \left(\frac{T'_i + T'_d}{T'_i} \right) \left[1 + \frac{1}{s(T'_i + T'_d)} + s \frac{T'_d T'_i}{(T'_i + T'_d)} \right] \quad (13)$$

- Si se observa, tiene la forma de la (11), donde:

$$K_p = K' \left(\frac{T'_i + T'_d}{T'_i} \right); \quad T_i = T'_i + T'_d; \quad T_d = \frac{T'_d T'_i}{(T'_i + T'_d)} \quad (14)$$

Acción de Control Proporcional-Integral-Derivativa: PID

Representaciones Alternativas del PID

- La versión (12) del PID INTERACTUANTE, puede convertirse en una NO INTERACTUANTE si se da la condición indicada a continuación:

Solo Si $T_i \geq 4T_d$

$$\text{entonces } \begin{cases} K' = \frac{K_p}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4T_d / T_i}\right) \\ T_i' = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4T_d / T_i}\right) \\ T_d' = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4T_d / T_i}\right) \end{cases} \quad (15)$$

- Las formas INTERACTUANTES y NO INTERACTUANTES son diferentes solo cuando se usan conjuntamente las acciones integral y derivativa. Si solamente se usan un P o un PI o un PD, ambas formas son equivalentes.

Analizando las expresiones (14)

$$\text{Para } T_i' \text{ elevado } \begin{cases} K' \cong K_p \\ T_d' \cong T_d \end{cases} \Rightarrow \text{PD}$$

$$\text{Para } T_d' \approx 0 \begin{cases} K' \cong K_p \\ T_i' \cong T_i \end{cases} \Rightarrow \text{PI}$$

Acción de Control Proporcional-Integral-Derivativa: PID

Representaciones Alternativas del PID

- Una tercera forma de representar el controlador PID es a partir de la (11) $G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \quad (16)$$

donde: $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ y $K_d = K_p T_d$

**EQUIVALENTE A LA
NO INTERACTUANTE**

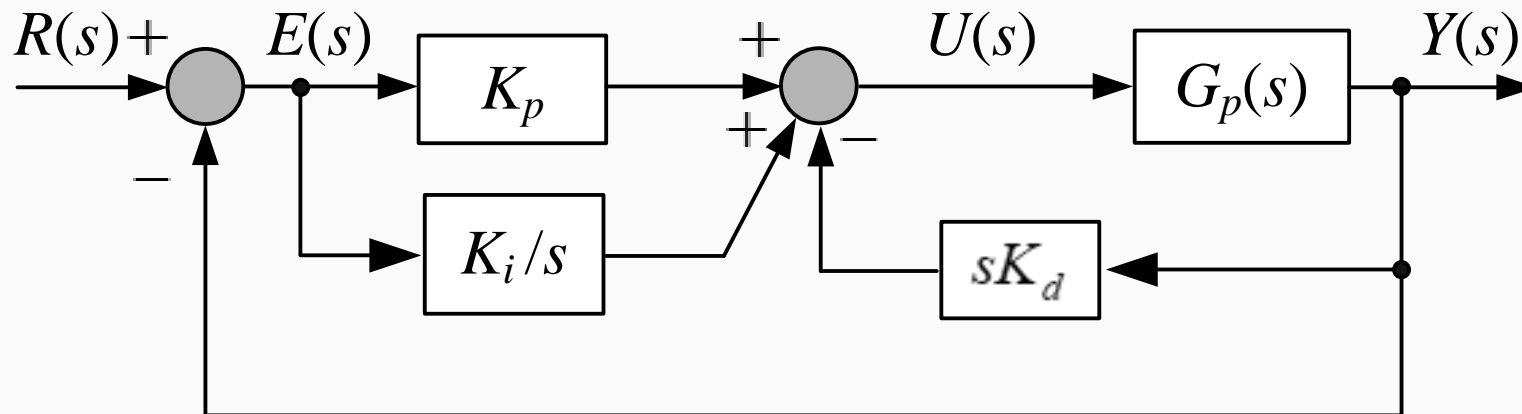
- Inconvenientes que pueden surgir en el manejo de esta expresión:
 - ✓ Frecuente confusión del parámetro $\frac{1}{K_i}$ con el tiempo integral
 - ✓ Y a K_d con el tiempo derivativo.
- Las ventajas en el manejo de esta expresión en los cálculos analíticos:
 - ✓ Los parámetros aparecen linealmente y es posible obtener una acción proporcional, integral o derivativa pura mediante valores finitos de los parámetros.
 - ✓ Tanto la forma (11) como la (16) admiten ceros complejos conjugados, lo que resulta útil cuando se necesitan controlar sistemas oscilatorios.

Acciones de Control Básicas: Controladores P, PI, PD y PID

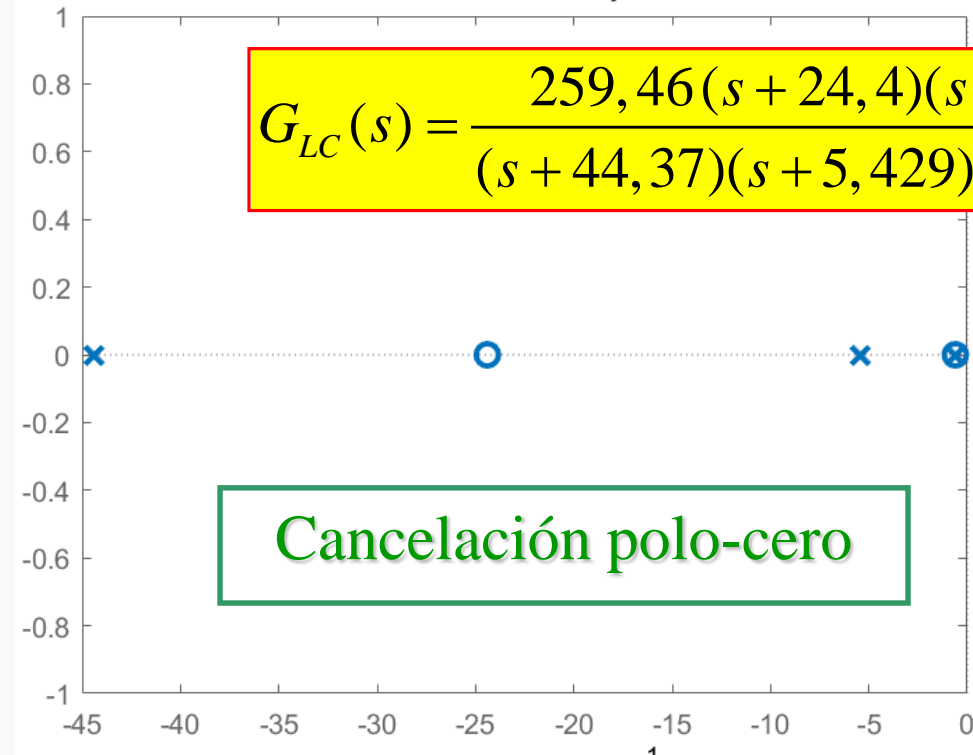
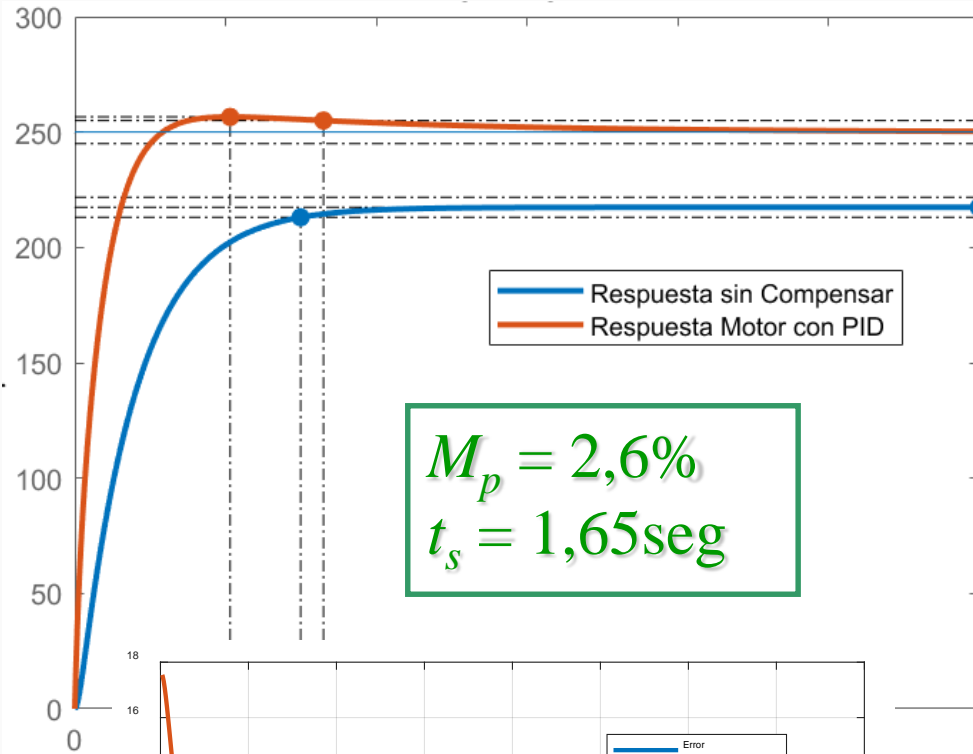
Acción de Control PI-D: Modificada con Referencia Ctte.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt - K_d \frac{dy(t)}{dt} \quad u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right]$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - sK_p T_d Y(s)$$



Acción de Control PID: Ejemplo Control Velocidad Motor CC



$$G_c(s) = \frac{0,12(s + 24,4)(s + 0,603)}{s}$$

$$z_{PD} = -24,4 \text{ r/s}$$

$$z_{PI} = -0,603 \text{ r/s}$$

Ver archivo: [comp_proporcional_motorCC_conPID.m](#)

Acción de Control PID: Observaciones

- ☺ Logra una **muy buena ESTABILIDAD RELATIVA**
- ☺ Respuesta transitoria con **SOBREPASOS MUY REDUCIDOS**
- ☺ Permite **ELIMINAR el ERROR** en Estado Estacionario.
- ☺ Posee dos grados de libertad para el ajuste de la etapa transitoria por la presencia de los dos ceros de su FT.
- ☺ Presenta un muy buen rechazo a las perturbaciones.

Criterio de Diseño: Es una de las formas de realizarlo

Diseñar **primero el PI** para que elimine el error en estado estacionario,

Luego se **añade el PD** para cumplir con las especificaciones de régimen transitorio.

También por cancelación polo-cero.

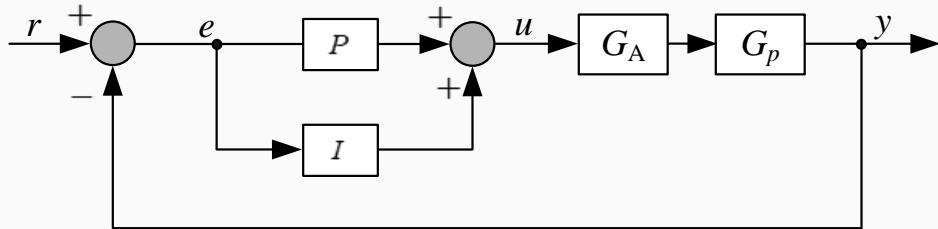
Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

- A pesar de que estamos estudiando sistemas lineales, es importante analizar el efecto de las no linealidades que pueden aparecer en un sistema de control en lazo cerrado.
- Las no linealidades surgen de los límites físicos de los actuadores, los cuales manipulan la variable física de entrada al proceso:
 - Una válvula puede estar totalmente abierta o totalmente cerrada;
 - Un motor tiene una velocidad límite;
 - El circuito magnético de una máquina eléctrica puede saturarse;
 - Los convertidores electrónicos de potencia tienen límites de operación máximos de tensión y/o corriente;
 - Los mismos amplificadores operacionales que producen la acción de control, tienen límites impuestos por sus tensiones de alimentación.
- Aunque el sistema de control posea un amplio rango de operación en condiciones lineales, puede darse alguna situación anormal en la cual la acción de control impuesta, alcance los límites físicos del actuador.
- Cuando esto sucede, el lazo de realimentación queda sin efecto y el sistema pasa a operar como si estuviera a lazo abierto.

Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

✓ El problema mayor surge cuando existe una acción integral como parte de la acción de control:

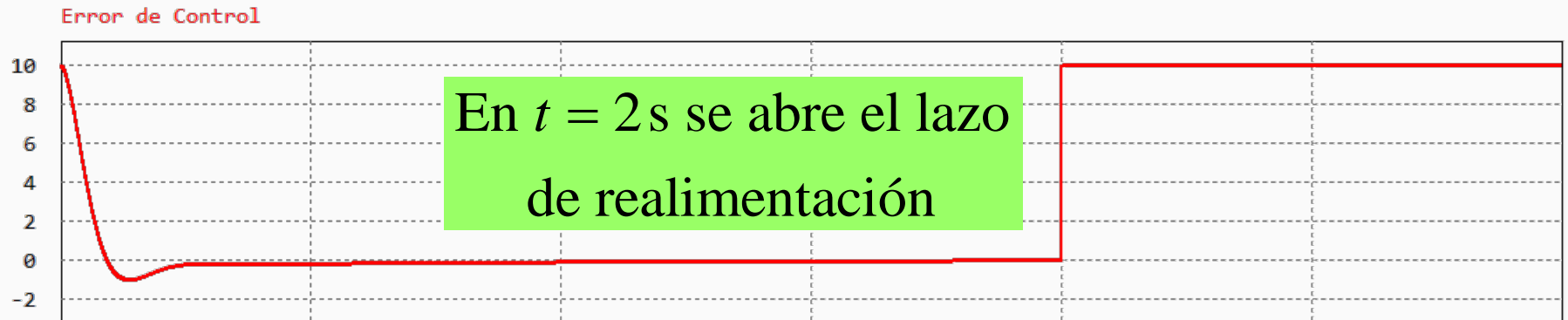
1. El error continúa siendo integrado provocando un aumento de toda la acción de control



2. El término integral se hace muy grande, provocando una sobreelevación, lo que comúnmente se denomina en inglés *windup*.

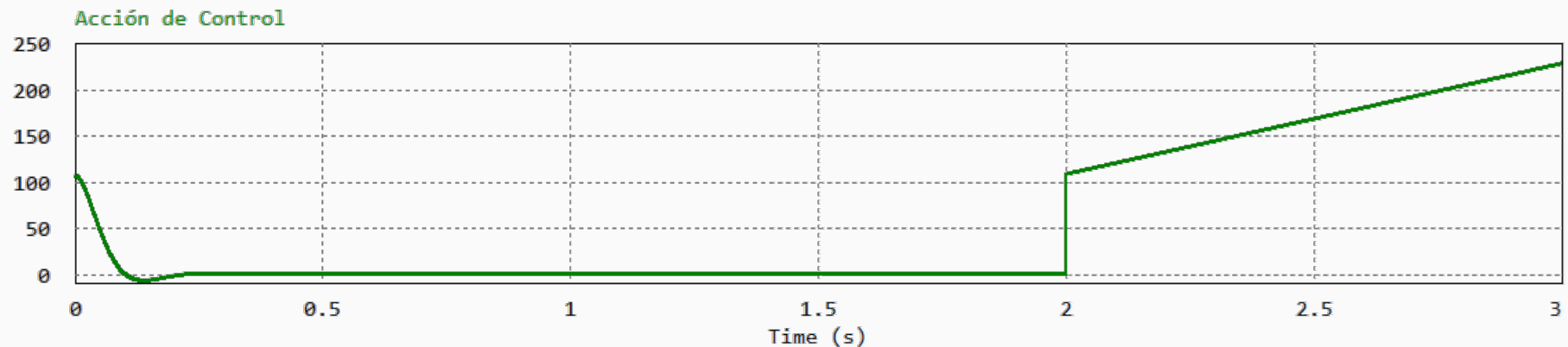
Con lazo de control

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$



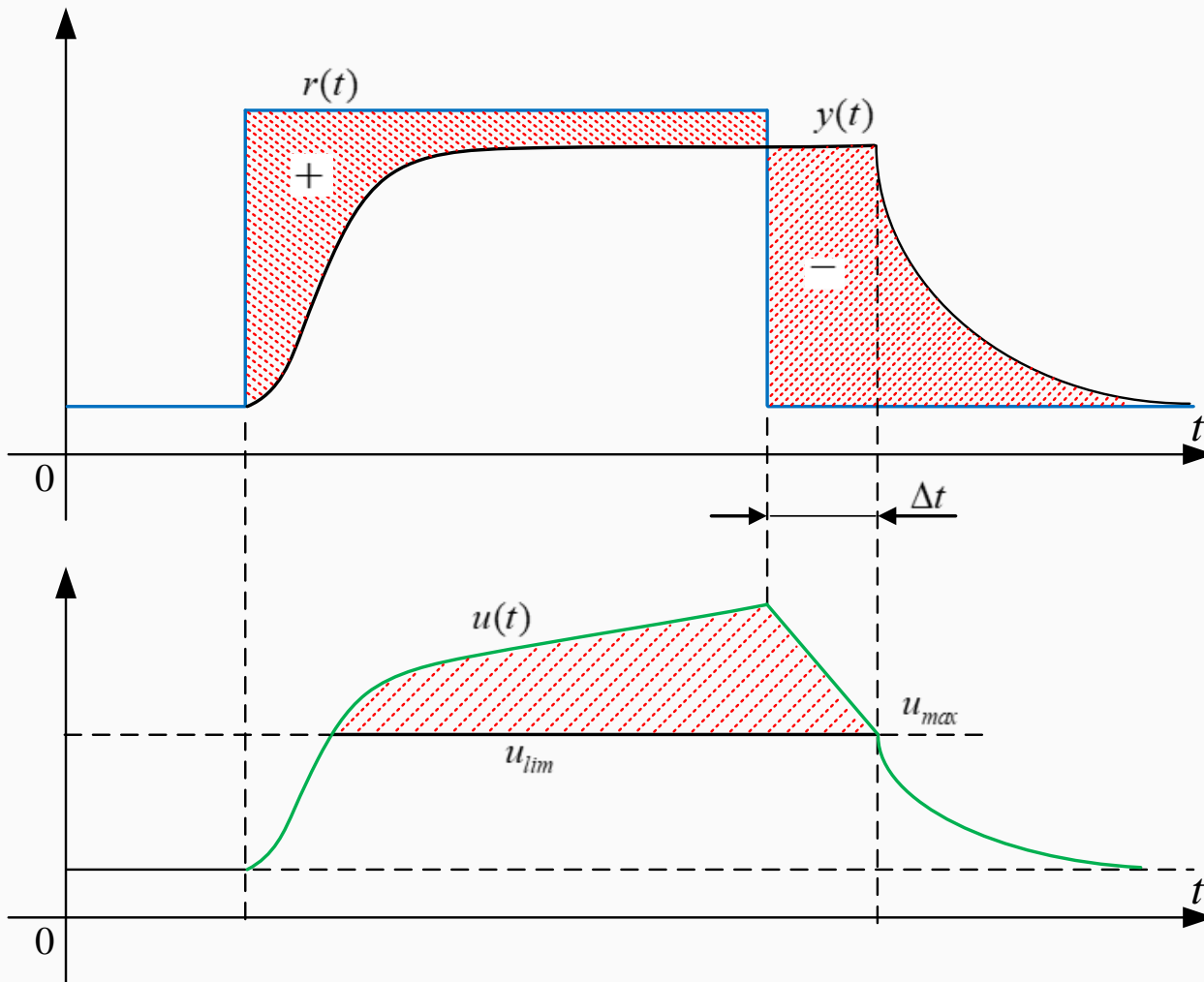
Sin lazo de control

$$u_{NL}(t) = K_p \left[E + \frac{E}{T_i} t \right]$$



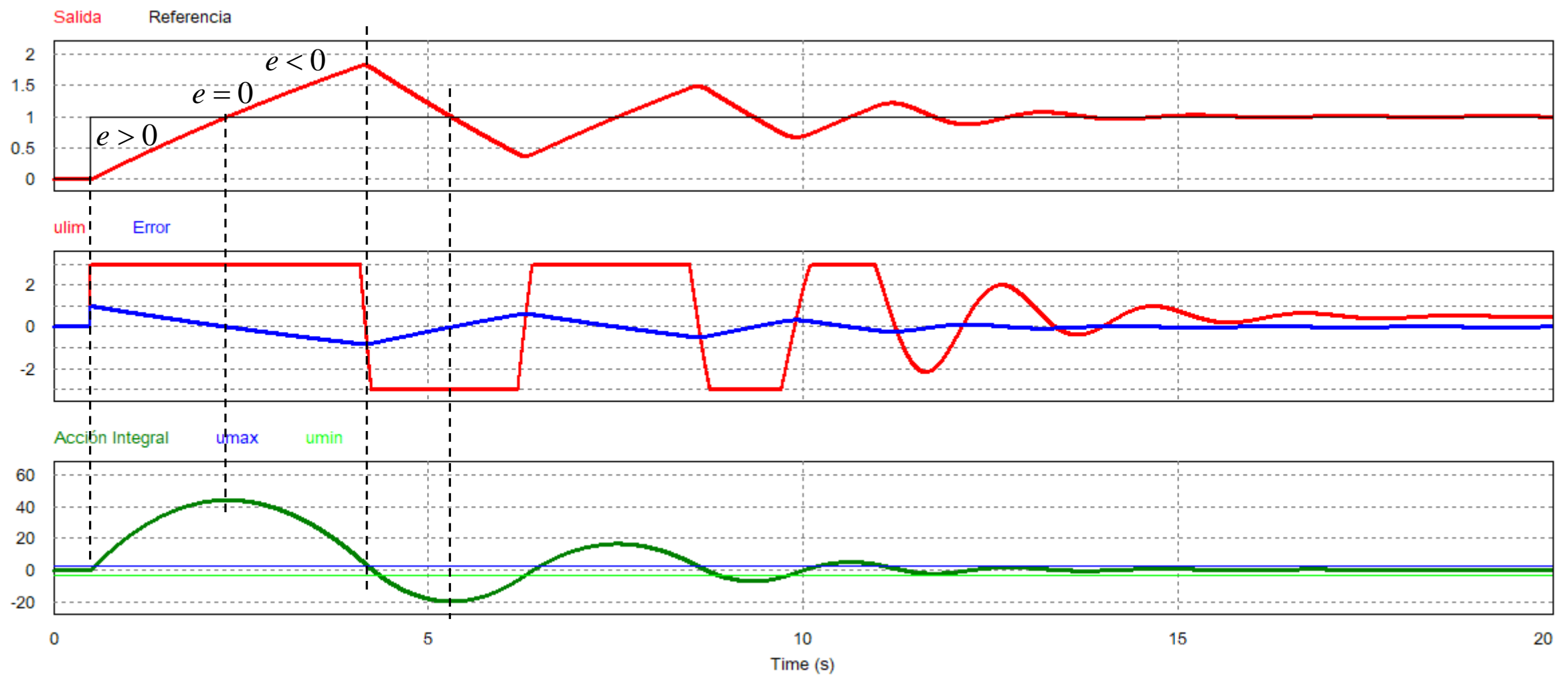
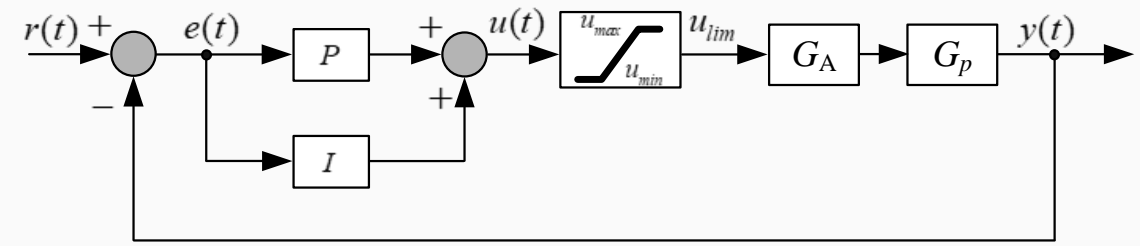
Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

Análisis de la saturación de la acción de control



1. Después del cambio de referencia, la acción de control aumenta hasta un valor límite, u_{max} .
2. Al limitarse la acción de control, la misma no es suficiente para reducir el error de control.
3. Esto hace que la acción integral continúe aumentando para conseguir reducir aún más el error. Este aumento por encima del límite genera un error entre la acción de control que se desea imponer y la verdadera aplicada, u_{lim} .
4. Cuando $r(t) < y(t)$, el error es negativo y con esto, la acción de control empieza a disminuir, pero como aún está por encima del valor máximo, el valor límite u_{lim} , se continua aplicando por un lapso de tiempo, provocando un retardo de la respuesta en un valor Δt .

Análisis de la saturación de la acción de control con un PI



Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

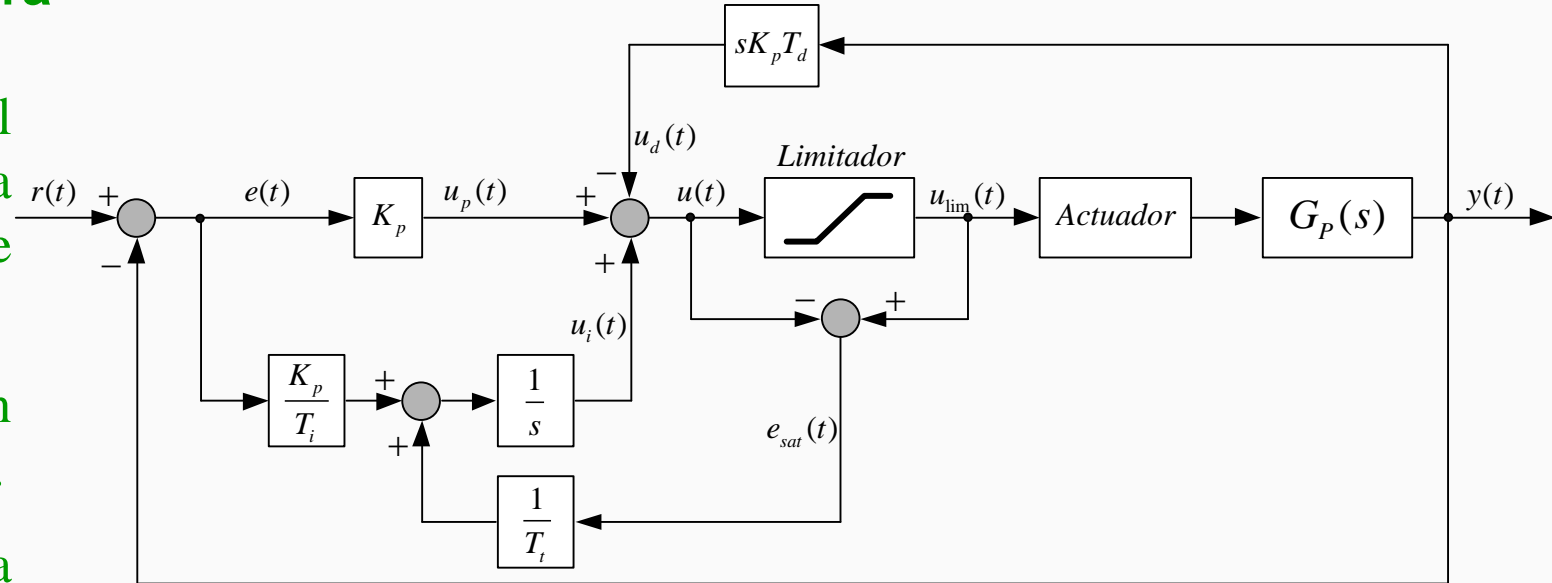
Alivio de la sobrecarga de la acción integral: Anti-Windup

Recálculo y Seguimiento: Cómo opera

Cuando la salida se satura, se recalcula el término integral, reseteando de forma dinámica el integrador con una constante de tiempo T_i .

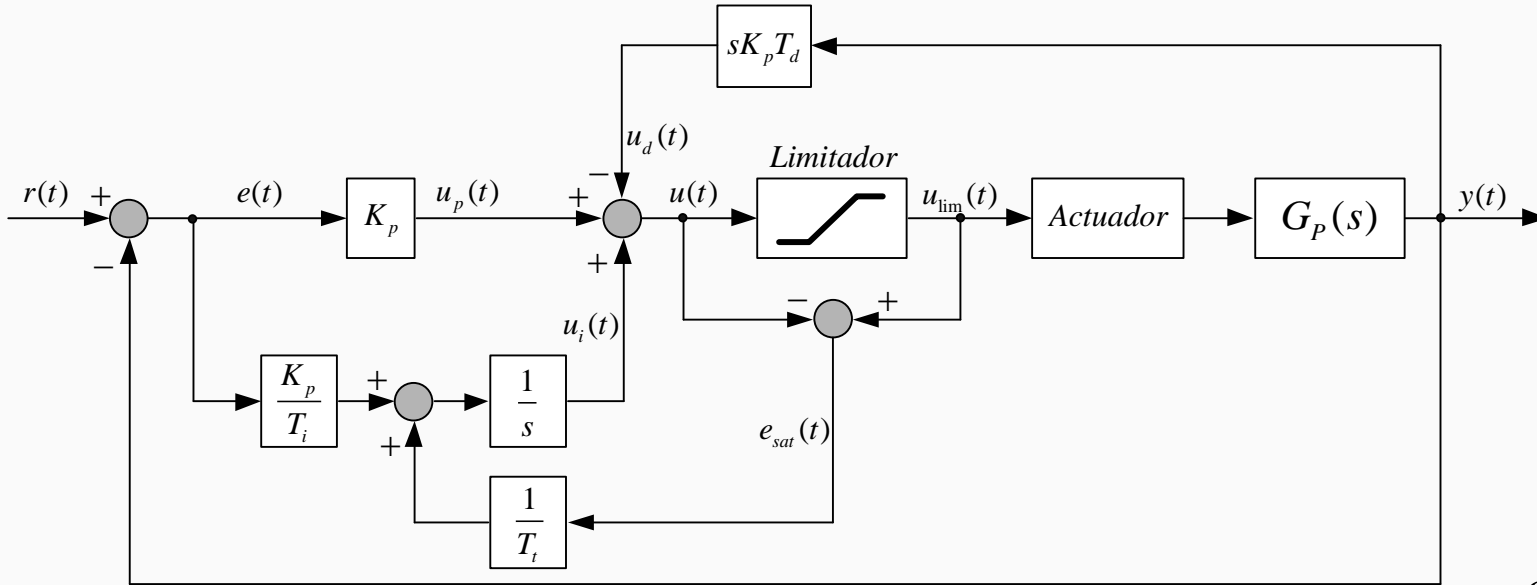
Aparece un camino extra de realimentación formado a partir del error de saturación e_{sat} .

Este error de saturación, se aplica a la entrada del integrador mediante una ganancia $1/T_i$.



Al producirse la saturación, como ya se dijo, se rompe el camino de realimentación normal. Entonces, por el nuevo camino de realimentación en torno al integrador, la salida de este se mueve a un valor tal, que la entrada del bloque I se hace cero, reseteándose su efecto.

Alivio de la sobrecarga de la acción integral: Recálculo y Seguimiento



La entrada del I es:

$$\frac{K_p}{T_i} e(t) + \frac{1}{T_i} e_{sat}(t) = 0$$

$$e_{sat}(t) = -\frac{K_p}{T_i} T_i e(t)$$

Dado que el error de saturación es:

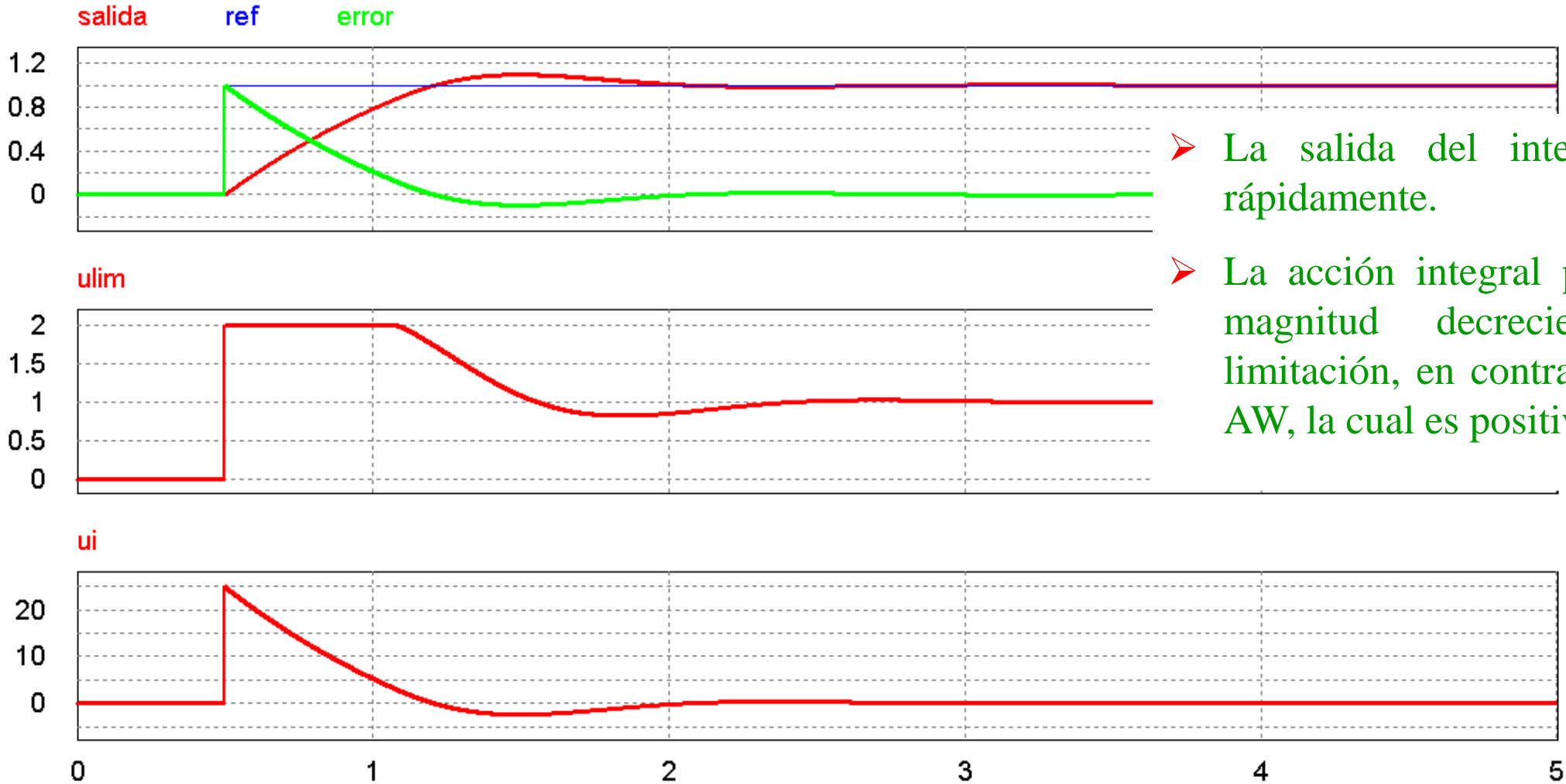
$$e_{sat}(t) = u_{lim} - u(t) \Rightarrow u(t) = u_{lim} - e_{sat}(t)$$

Finalmente, la acción de control resulta: $u(t) = u_{lim} + \frac{K_p}{T_i} T_i e(t)$

- Como las señales $e(t)$ y u_{lim} tienen el mismo signo, $u(t)$ es siempre mayor que u_{lim} en magnitud, lo que previene al integrador de sobrecargarse o que se produzca lo que se llama el *windup* de la acción integral.
- La velocidad con la que se resetea la acción integral, está dada por la ganancia $1/T_i$; siendo T_i la constante de tiempo de reseteo.
- A T_i se le llama constante de tiempo de seguimiento.

Alivio de la sobrecarga de la acción integral: Anti-Windup

Recálculo y Seguimiento: Cómo opera

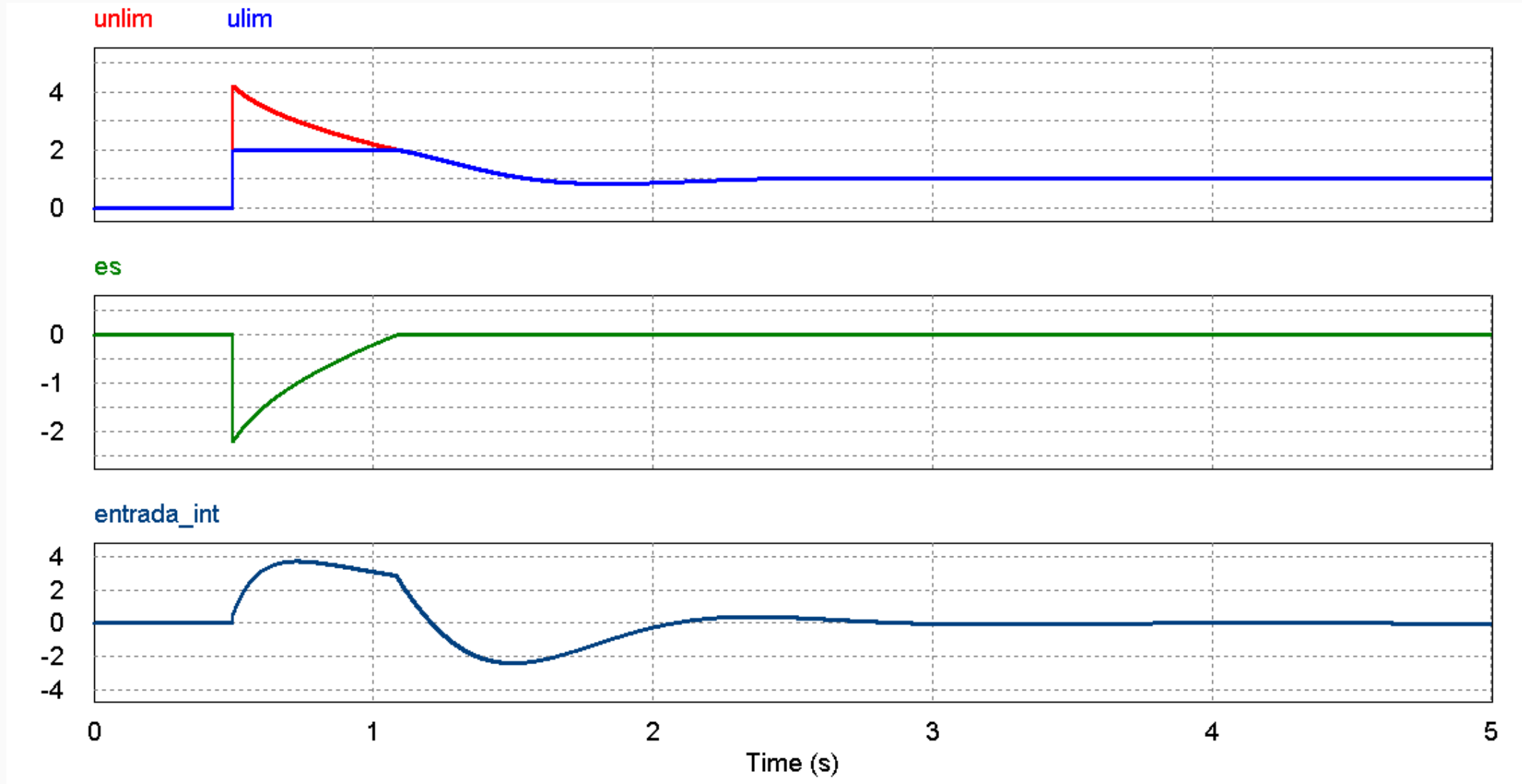


➤ La salida del integrador se resetea rápidamente.

➤ La acción integral presenta ahora una magnitud decreciente durante la limitación, en contraste con el caso sin AW, la cual es positiva.

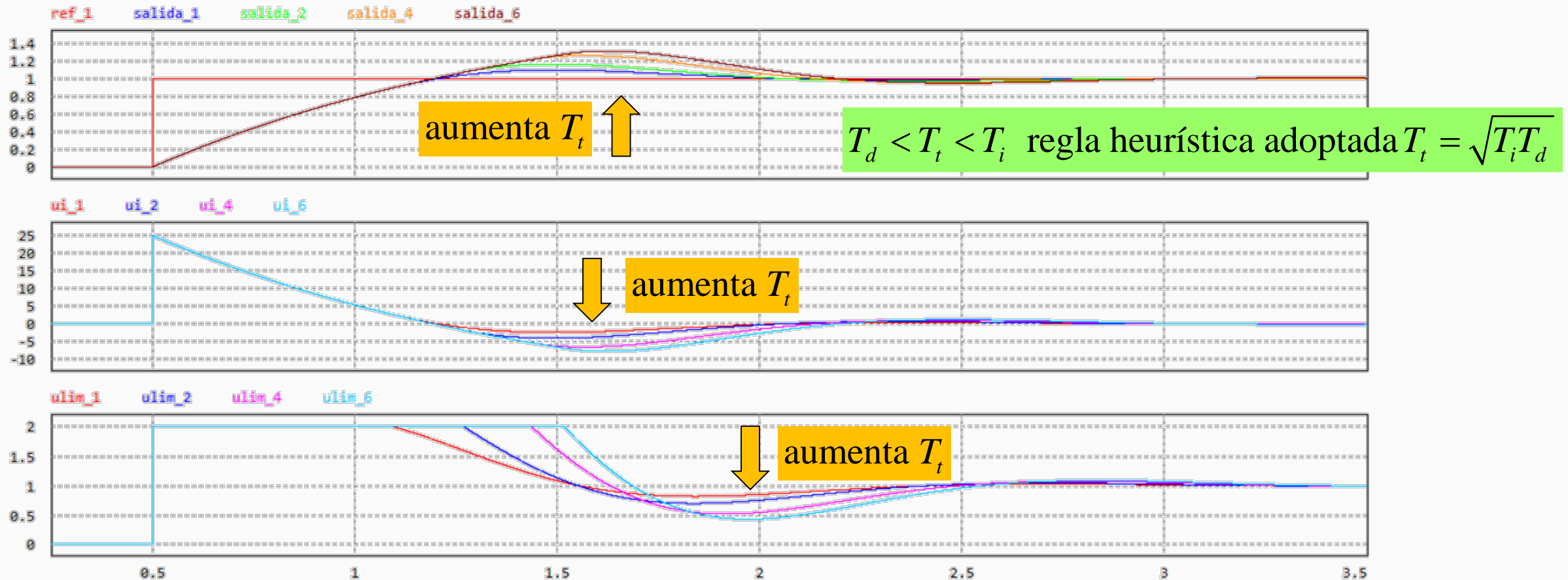
Alivio de la sobrecarga de la acción integral: Anti-Windup

Recálculo y Seguimiento: Cómo opera



Alivio de la sobrecarga de la acción integral: Anti-Windup

1. Respecto a la constante de tiempo de seguimiento T_t , intuitivamente parece que debe ser pequeña, para resetear lo más rápido posible el efecto desmedido del bloque I.
2. Pero, deben tomarse recaudos cuando se introduce una acción *antiwindup* cuando el sistema de control posee una acción derivativa. Si T_t es muy pequeña, errores espurios pueden causar fácilmente la saturación de la acción de control y provoca reseteos accidentales de la acción I.



Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

Filtrado de la acción derivativa

- La desventaja práctica que presenta la acción derivativa ideal, como ya se vio, es que presenta una ganancia alta para las señales de frecuencias elevadas.
- Este inconveniente implica que si la señal medida presenta un ruido de alta frecuencia, según sea la amplitud del mismo, puede provocar variaciones importantes de la señal de control.

Sea la señal medida dada por: $y(t) = \text{sen}(t) + a_n \text{sen}(\omega_n t)$ Señal útil: $S = \text{sen}(t)$ Ruido: $R = a_n \text{sen}(\omega_n t)$

La relación señal/ruido $S/R = \frac{1}{a_n}$

La derivada primera de la señal medida resulta: $\frac{dy(t)}{dt} = \cos(t) + a_n \omega_n \cos(\omega_n t)$

La acción derivativa ideal resulta: $u_d(t) = K_p T_d \frac{dy(t)}{dt} = K_p T_d [\cos(t) + a_n \omega_n \cos(\omega_n t)]$

La amplitud de la acción útil es: $K_p T_d$ Y la amplitud del ruido acoplado a la acción de control es: $K_p T_d a_n \omega_n$

La relación señal/ruido $S/R = \frac{1}{a_n \omega_n}$ La relación ruido/señal será $a_n \omega_n$

Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

Filtrado de la acción derivativa

- El efecto del ruido de medida puede reducirse, como se vio en la implementación clásica, mediante un efecto de filtrado:

$$U_d(s) = -\frac{sK_p T_d}{1 + s\frac{T_d}{N}} Y(s)$$

Para $N = 1$ y $K_p = 1$, la expresión se convierte en la expresión clásica, con la diferencia de que la señal de entrada es la señal de error.

$$U_d(s) = \frac{sT_d}{1 + sT_d} E(s)$$

- ✓ Esta expresión es una acción derivativa ideal que se filtra con un sistema de primer orden con constante de tiempo T_d/N .
- ✓ Para bajas frecuencias, $U_d(s) \approx -sK_p T_d$. Para frecuencias elevadas, $U_d(s) \approx K_p N$.
- ✓ En resumen: esta aproximación se comporta como una derivada para las señales de baja frecuencia y la ganancia de alta frecuencia queda limitada a $K_p N$.
- ✓ Valores típicos de N , de 2 a 20.

$$G_c(s) = \frac{U_{PID}(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}} \right) \Rightarrow \text{Para } s \text{ elevados, } |G_c| \approx K_p (1 + N)$$

Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

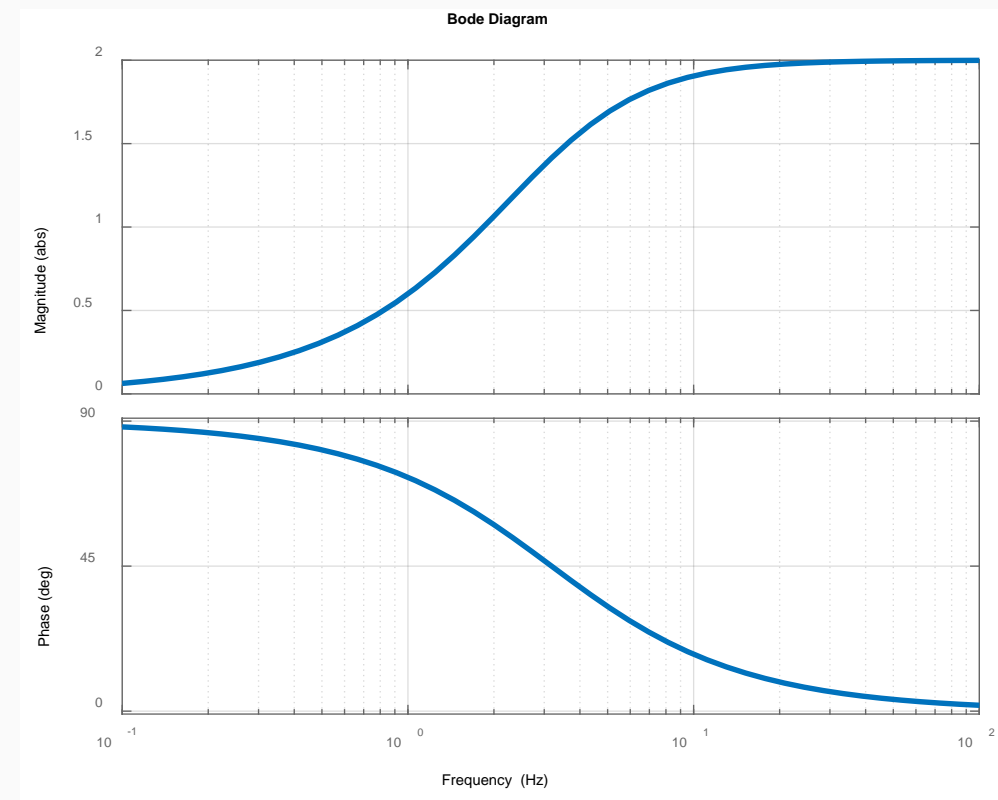
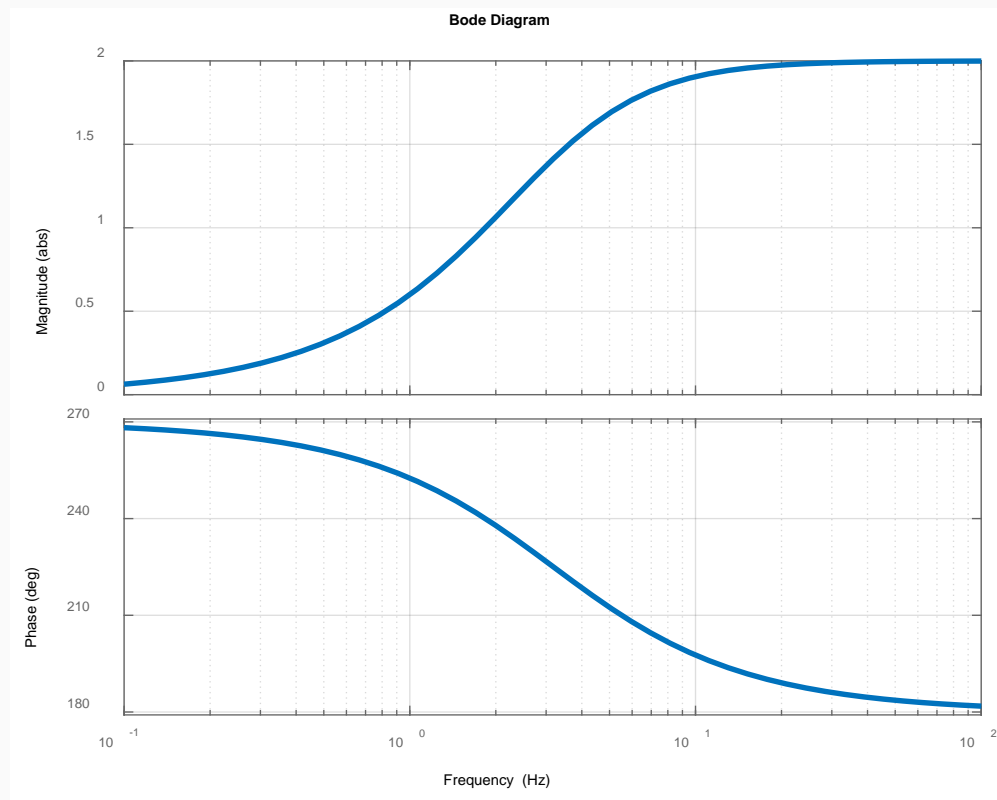
Filtrado de la acción derivativa

Respuestas en frecuencia para acción derivativa con filtrado

$$G_d(s) \Big|_{Y(s)} = - \frac{sK_p T_d}{1 + s \frac{T_d}{N}}$$

$$K_p = 1; T_d = 0,1; N = 2$$

$$G_d(s) \Big|_{E(s)} = \frac{sT_d}{1 + s \frac{T_d}{N}}$$



Aspectos prácticos a tener en cuenta en las acciones integrales y derivativas

- En vez de filtrarse la acción derivativa, puede filtrarse primero la señal medida, aplicándose la señal filtrada al controlador PID no interactuante ideal:

$$G_{ceq}(s) = G_f(s)G_c(s) = \frac{1}{\frac{(sT_f)^2}{2} + sT_f + 1} \left(K_p + \frac{K_p}{sT_i} + sK_pT_d \right)$$

Se utiliza un filtro de segunda orden con factor de amortiguamiento relativo 0,707 y la constante de filtrado se elige típicamente como

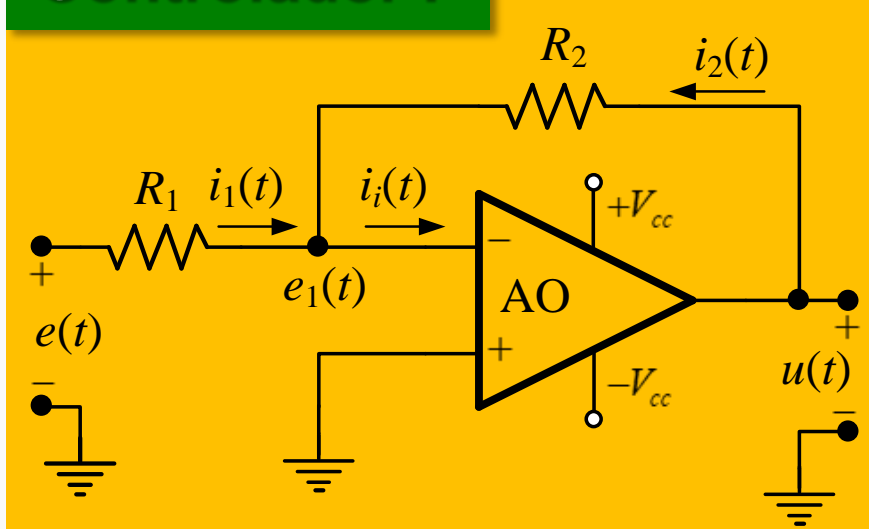
$$T_f = \frac{T_i}{N} \text{ si el control es un PI}$$

$$T_f = \frac{T_d}{N} \text{ si el control es un PID, con } N \text{ de } 2 \text{ a } 20$$

- En la expresión anterior, la ganancia del controlador tiende a cero para las altas frecuencias, lo que garantiza que el ruido de medida con componentes de alta frecuencia no genere señales de control elevadas.
- Esta atenuación de la ganancia de alta frecuencia, aumenta la robustez del sistema en lazo cerrado.

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador P



Amplificador Inversor

Las corrientes a través de las resistencias están dadas por:

$$i_1 = \frac{e(t) - e_1(t)}{R_1} ; i_2 = \frac{u(t) - e_1(t)}{R_2}$$

Debido a la alta impedancia de entrada del AO, $i_i \cong 0 \Rightarrow i_1 = -i_2$:

$$\frac{e(t) - e_1(t)}{R_1} = -\frac{u(t) - e_1(t)}{R_2}$$

Considerando la “tierra virtual”, para este circuito $e_1(t) \cong 0$, entonces:

$$\frac{e(t)}{R_1} = -\frac{u(t)}{R_2}$$

Aplicando TL (con CI = 0), la relación entrada-salida resulta:

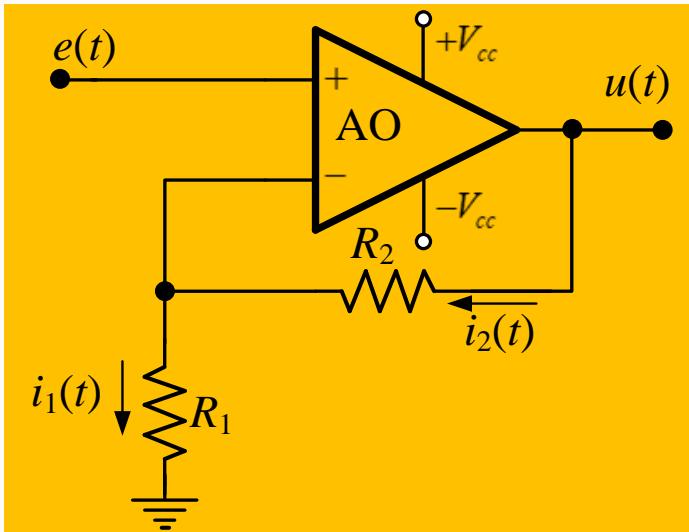
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = -K_p$$

Generalizando queda:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Controlador P

Amplificador No Inversor



La señal de salida $u(t)$ está en fase con la señal de entrada $e(t)$, y genera una corriente i_2 a través de R_2 como se indica.

Por el cortocircuito virtual en la entrada del AO, la señal de entrada $e(t)$ se refleja en la entrada inversora, por lo tanto:

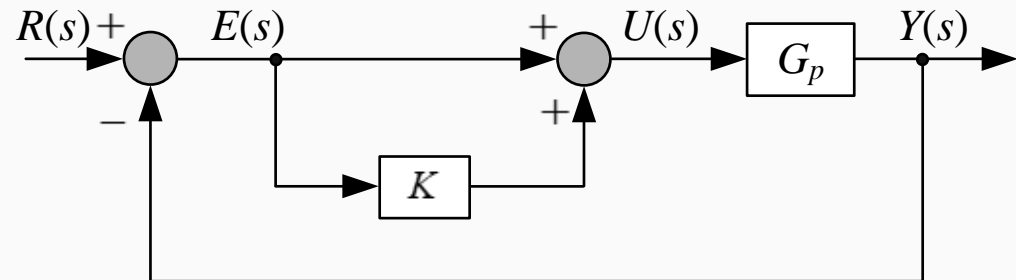
$$i_1(t) = \frac{e(t)}{R_1} \quad \text{Como la corriente en el terminal (-) es igual a 0} \quad i_1(t) = i_2(t)$$

$$\text{Por lo tanto, } u(t) = (R_1 + R_2)i_1(t) \Rightarrow u(t) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e(t)$$

Aplicándose TL:

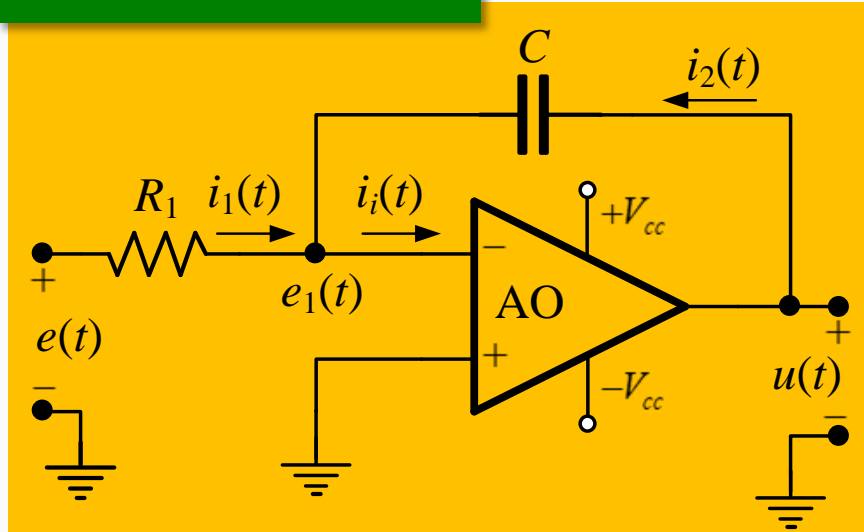
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$U(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) E(s) = (1 + K) E(s)$$



Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador I



Obteniéndose las expresiones de las impedancias de entrada y de realimentación en cada caso, podemos obtener las FT de los siguientes controladores:

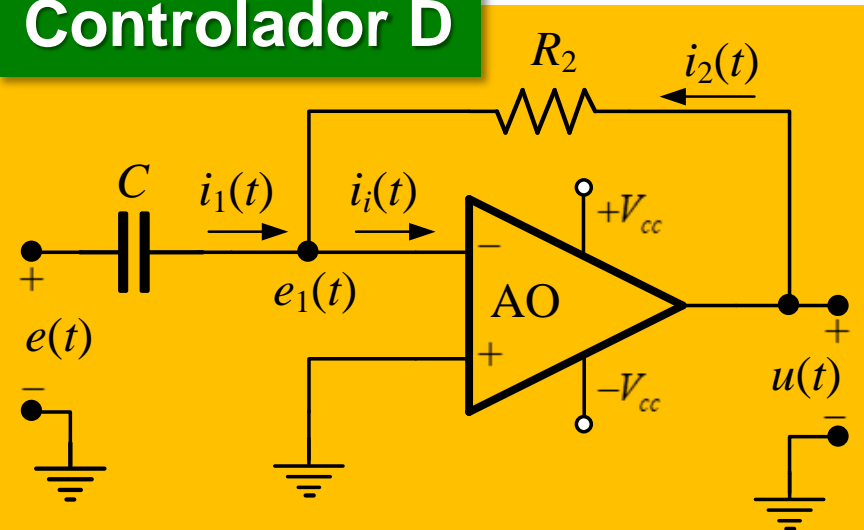
$$Z_1(s) = R_1 ; Z_2(s) = \frac{1}{sC}$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{sR_1C}$$

La constante de tiempo integral es

$$T_i = R_1C$$

Controlador D



$$Z_1(s) = \frac{1}{sC} ; Z_2(s) = R_2$$

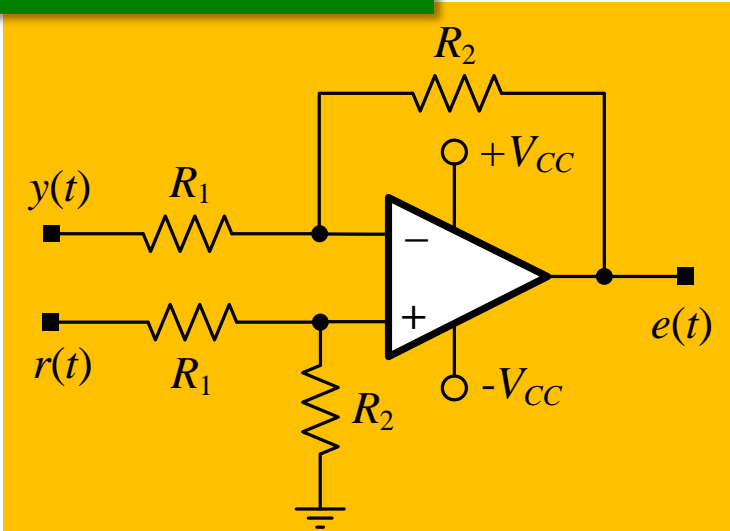
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -sR_2C$$

La constante de tiempo derivativa es

$$T_d = R_2C$$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Restador



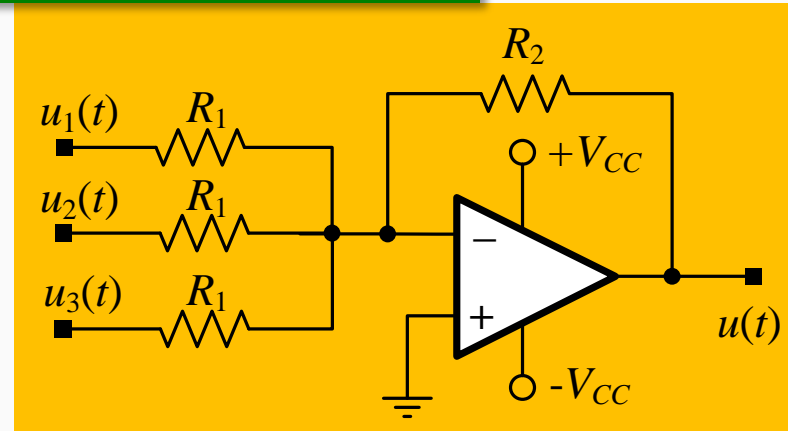
Amplificador Diferencial

Permite restar la salida de la referencia y obtener la señal de error.

$$e(t) = \frac{R_2}{R_1} [r(t) - y(t)]$$

Si $R_1 = R_2 \Rightarrow e(t) = [r(t) - y(t)]$

Sumador



Amplificador Sumador

Permite sumar las acciones de control individuales

$$u(t) = -\frac{R_2}{R_1} [u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)]$$

Si $R_1 = R_2 \Rightarrow u(t) = -[u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)]$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador PID No Interactuante

La TL de cada acción de control es:

$$U_p(s) = -\frac{R_4}{R_3} E(s) = -K_p E(s)$$

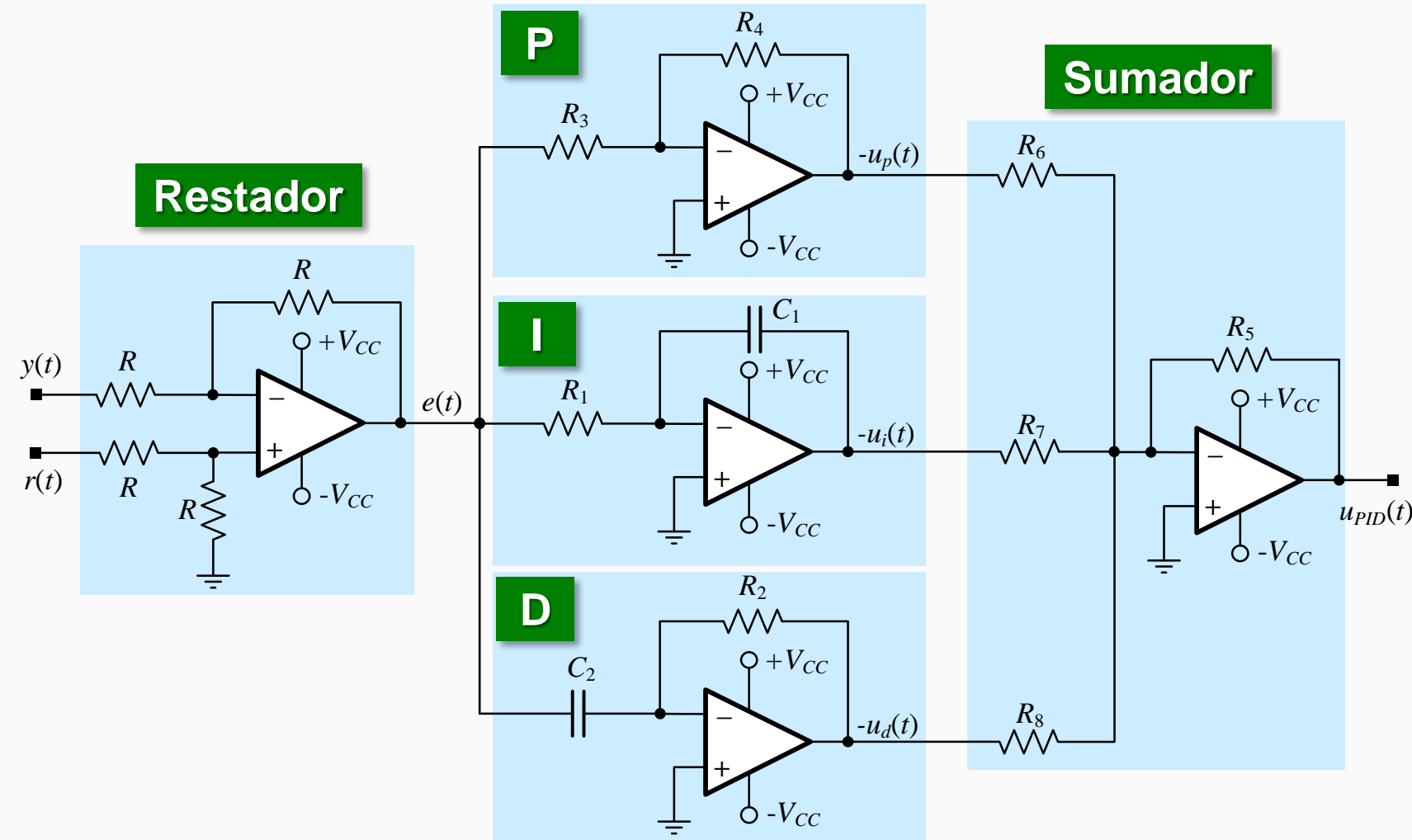
$$U_i(s) = -\frac{1}{sR_1C_1} E(s) = -\frac{1}{sT_i} E(s)$$

$$U_d(s) = -sR_2C_2 E(s) = -sT_d E(s)$$

$$K_p = \frac{R_4}{R_3}$$

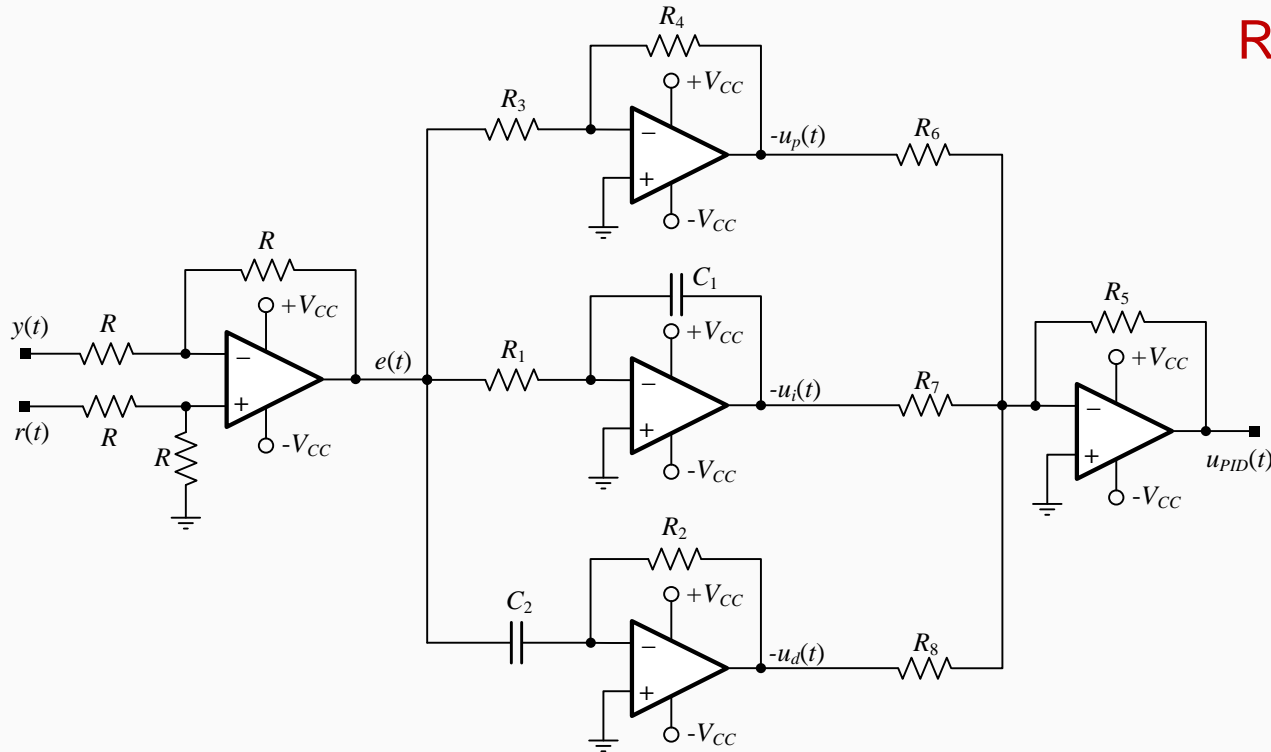
$$T_i = R_1C_1$$

$$T_d = R_2C_2$$



Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador PID No Interactuante



Recordando la expresión del PID no interactuante:

$$U_{PID}(s) = K_p \left[E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + sT_d E(s) \right]$$

Para tener en cuenta la ganancia proporcional que multiplica a cada término dentro del corchete, esta ganancia puede aplicarse a través del sumador, que a la vez invierte la fase de la acción de control para ser aplicada a la planta.

$$K_p = \frac{R_4}{R_3}$$

$$T_i = R_1 C_1$$

$$T_d = R_2 C_2$$

$$U_{PID}(s) = \left[\left(-\frac{R_4}{R_3} \right) \left(-\frac{R_5}{R_6} \right) + \left(-\frac{1}{sR_1 C_1} \right) \left(-\frac{R_5}{R_7} \right) + \left(-sR_2 C_2 \right) \left(-\frac{R_5}{R_8} \right) \right] E(s)$$

$$R_5 = R_6$$

$$R_7 = \frac{R_5}{K_p}$$

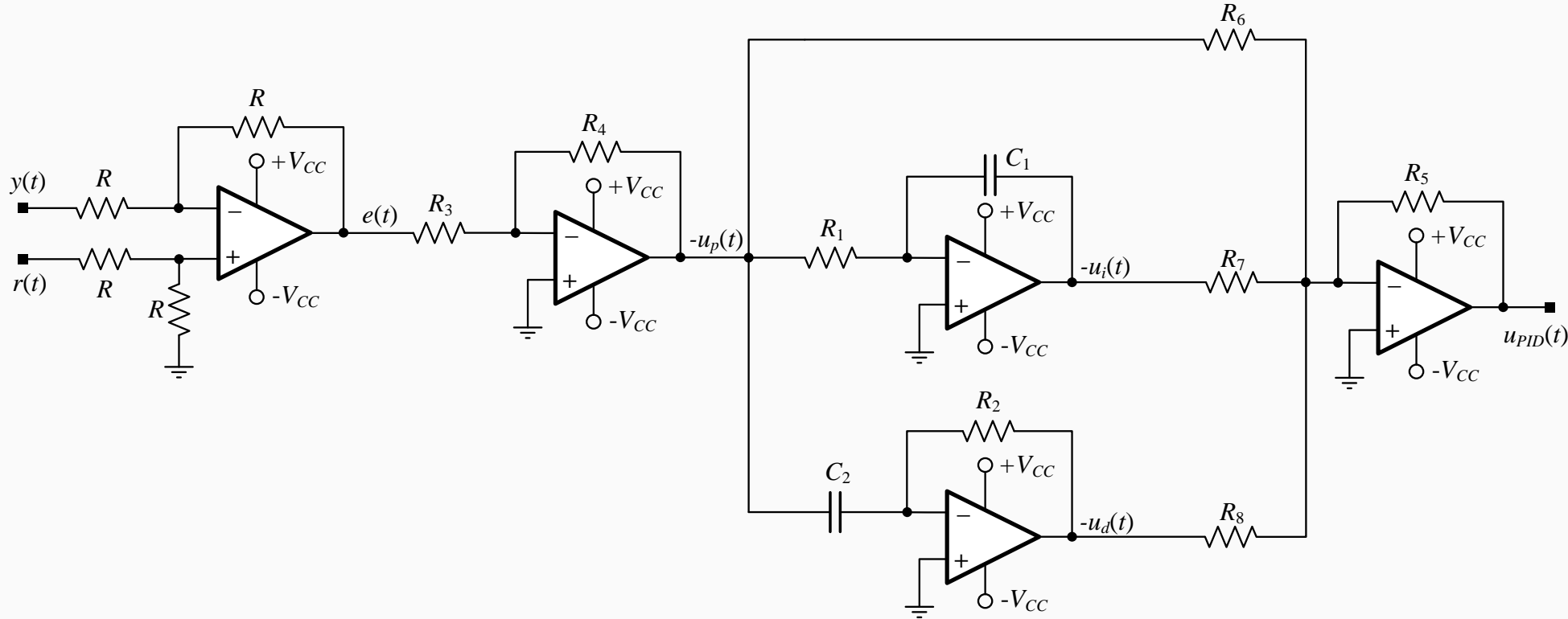
$$R_8 = \frac{R_5}{K_p}$$

$$U_{PID}(s) = \frac{R_4}{R_3} E(s) + \frac{1}{sR_1 C_1} \frac{R_5}{R_7} E(s) + sR_2 C_2 \frac{R_5}{R_8} E(s)$$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador PID No Interactuante

$$U_{PID}(s) = K_p \left[E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + sT_d E(s) \right]$$



$$K_p = \frac{R_4}{R_3} \quad T_i = R_1 C_1$$

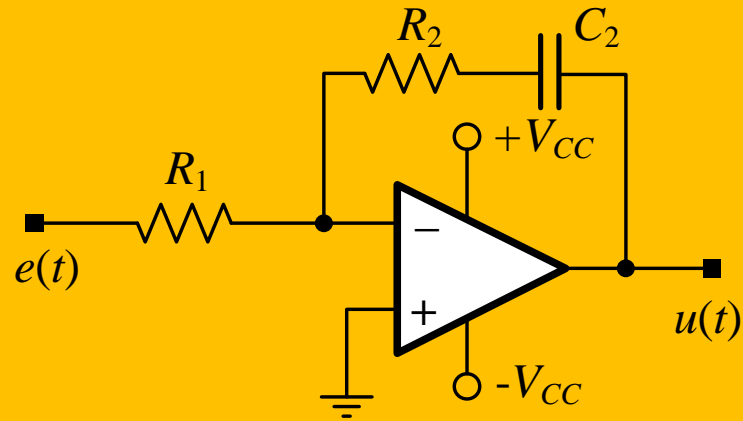
$$T_d = R_2 C_2$$

$$R_5 = R_6 = R_7 = R_8$$

$$U_{PID}(s) = \frac{R_4}{R_3} E(s) + \frac{1}{s R_1 C_1} \frac{R_4}{R_3} E(s) + s R_2 C_2 \frac{R_4}{R_3} E(s)$$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

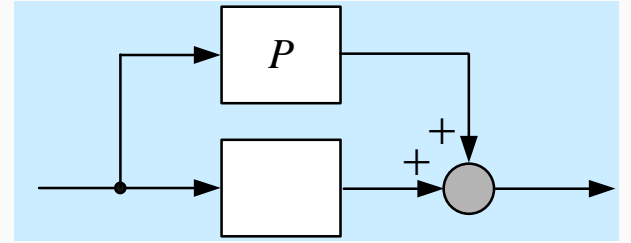
Controlador PI



$$Z_1(s) = R_1 ; Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{sR_2C_2 + 1}{sR_1C_2}$$

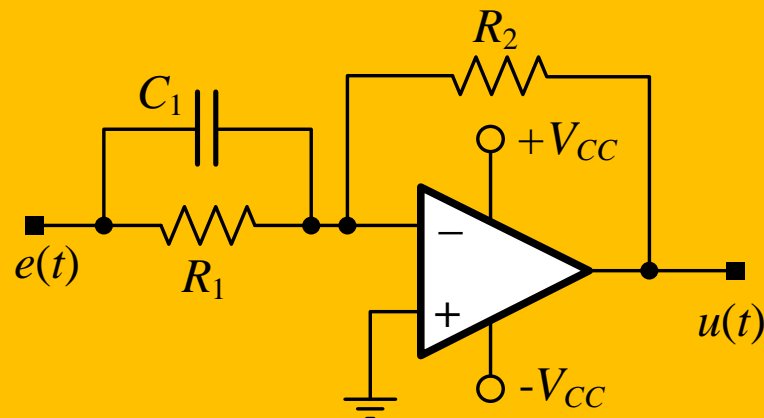
$$G_c(s) = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{1}{sR_2C_2} \right) = -K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$



$$K_p = R_2/R_1$$

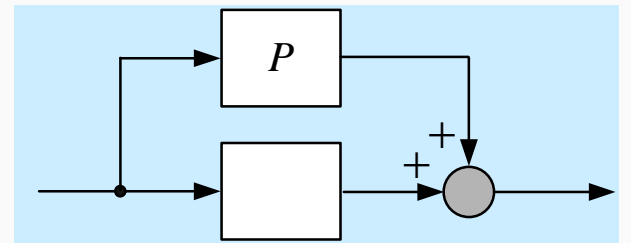
$$T_i = R_2C_2$$

Controlador PD



$$Z_1(s) = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} ; Z_2(s) = R_2$$

$$G_c(s) = -\frac{R_2}{R_1} (1 + sR_1C_1) \equiv -K_p (1 + sT_d)$$



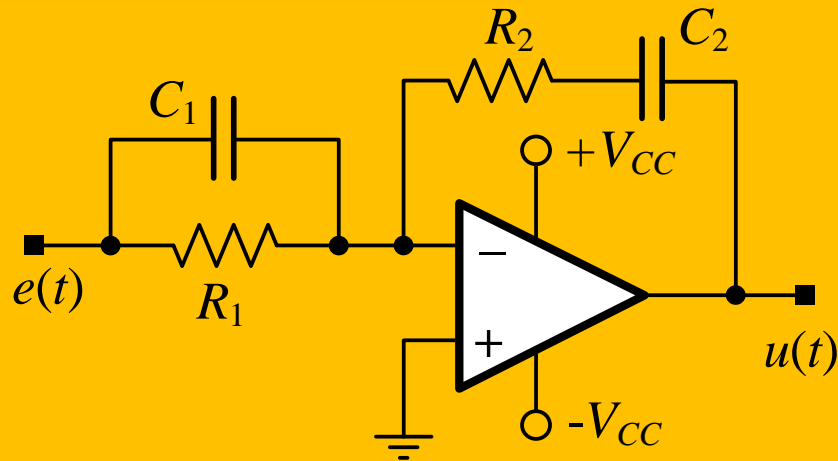
$$K_p = R_2/R_1$$

$$T_d = R_1C_1$$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador PID

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} ; Z_2(s) = \frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2} \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1)}{sR_1C_2} \quad (1)$$



Sacando factor común las constantes de tiempo, tenemos la forma de ganancia, ceros y polo del controlador:

$$G_c(s) = -\frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_2} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}{s} = -K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2)$$

Distribuyendo términos en el numerador de (1):

$$G_c(s) = -\frac{s^2(R_1C_1R_2C_2) + s(R_1C_1 + R_2C_2) + 1}{sR_1C_2}$$

Factorizando el término $s(R_1C_1 + R_2C_2)$

$$G_c(s) = -\left(\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_2}\right) \left[\frac{s(R_1C_1R_2C_2)}{(R_1C_1 + R_2C_2)} + \frac{1}{s(R_1C_1 + R_2C_2)} + 1 \right] \quad (3)$$

La FT del PID clásico $G_c(s) = \frac{U_{PID}(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$

$$K_p = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_2}; T_i = R_1C_1 + R_2C_2; T_d = \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

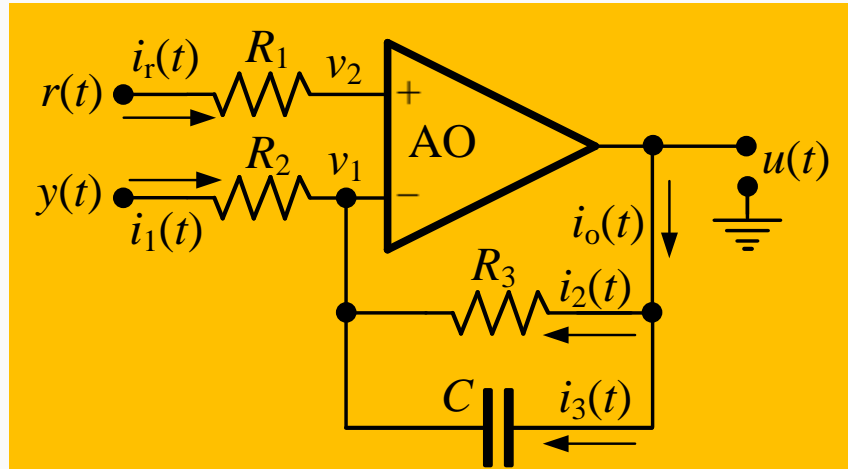
Introduciendo K_p en (3)

$$G_c(s) = -\left[\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_2} + \frac{1}{sR_1C_2} + sR_2C_1 \right]$$

$$K_p = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_2}; K_i = \frac{1}{R_1C_2}; K_d = R_2C_1$$

Controladores P, I, PI, PD, PID – Implementación Electrónica

Controlador I con Detector de Error



Debido a la alta impedancia de entrada del AO, $i_r \cong 0$ e $i(-) \cong 0 \Rightarrow i_1 = -i_o$

$$i_1 = \frac{y(t) - v_1(t)}{R_2} \quad i_o = i_2 + i_3 = \frac{u - v_1}{R_3} + C \frac{d(u - v_1)}{dt}$$

Por el cortocircuito virtual en la entrada del AO, $v_2 \cong v_1$ y como además, $i_r \cong 0$, $v_1 \cong r$. Con esto, la corriente i_1 resulta:

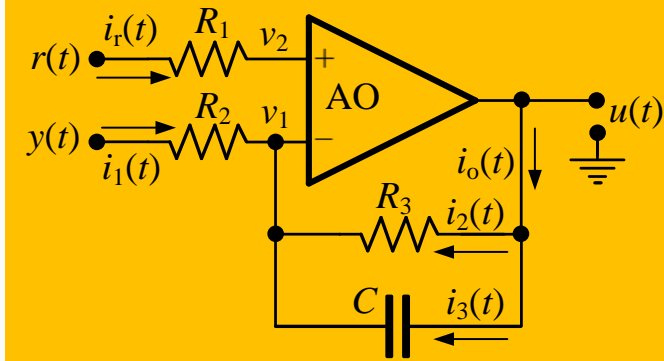
$$i_1 = \frac{y(t) - r(t)}{R_2} = -\frac{e(t)}{R_2}$$

siendo $i_1 = -i_o$ $-\frac{e(t)}{R_2} = -\left[\frac{u - v_1}{R_3} + C \frac{d(u - v_1)}{dt}\right] \Rightarrow e(t) = R_2 \left[\frac{u - r}{R_3} + C \frac{d(u - r)}{dt}\right]$ siendo $r = ctte.$ $\frac{dr}{dt} = 0$

Además, en este circuito, R_3 es elevado y \gg que R_2 , por lo que: $\frac{r}{R_3} \rightarrow 0$

$$e(t) = \frac{R_2}{R_3} u + R_2 C \frac{du}{dt} \quad \text{Aplicando TL: } E(s) = \left(\frac{R_2}{R_3} + sR_2 C\right) U(s) \Rightarrow G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_3} + sR_2 C}$$

Controlador I con Detector de Error



Como R_3 es elevado y \gg que R_2 , se tiene que:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \cong \frac{1}{sR_2C}$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \cong \frac{1}{sT_i}$$

Ventaja: Implemento el cálculo del error y el compensador en un solo AO.

$$C = 0,1 \text{ nF}$$

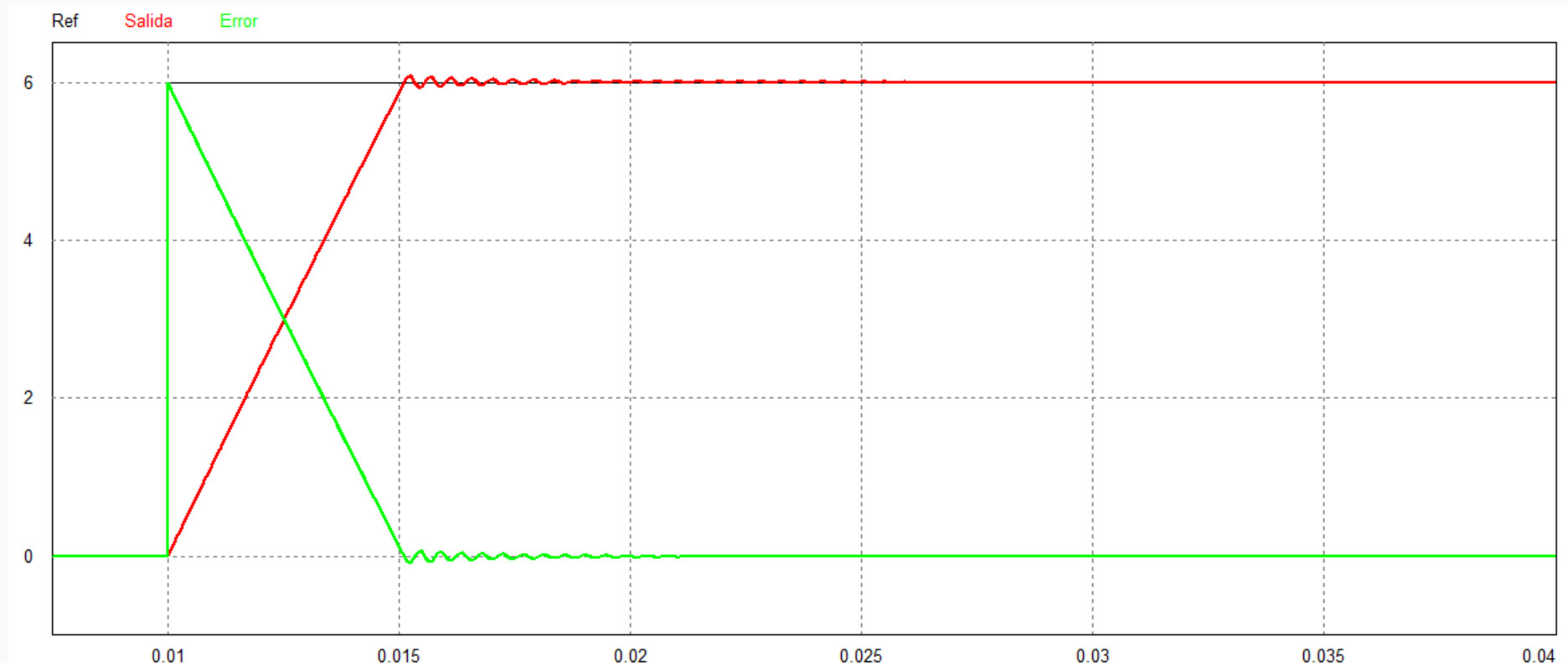
$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 5 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5,5 \text{ M}\Omega$$

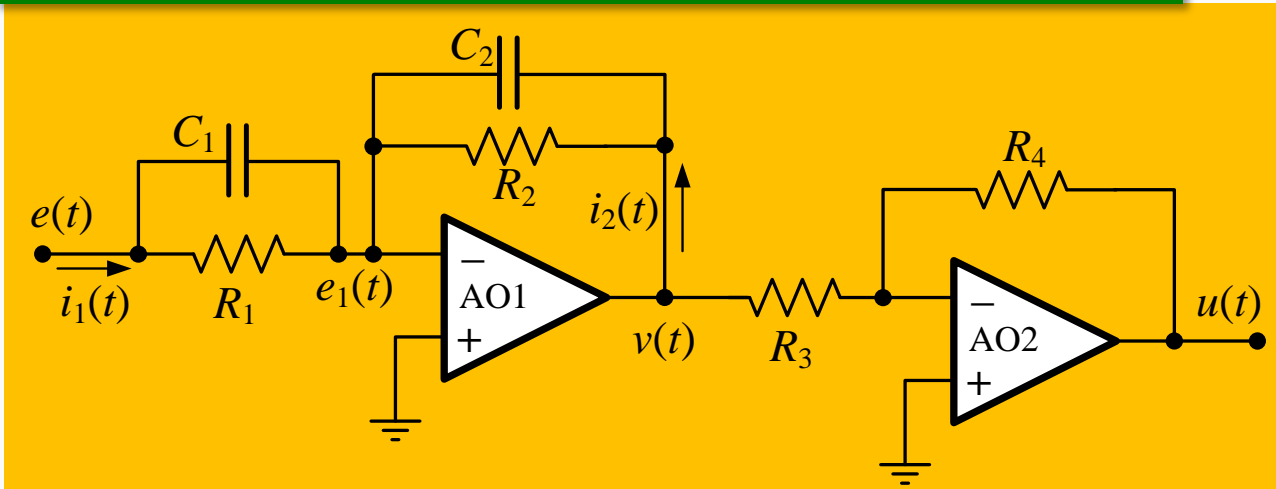
$$T_i = 0,5 \mu\text{s}$$

$$G_p(s) = \frac{100}{s + 10}$$



Estructuras cero-polo y polo-cero. Asociaciones. Implementación Electrónica

Redes de Atraso o Adelanto de Fase



1) Etapa AO1: siendo $e_1 = 0$

$$i_1 = C_1 \frac{de}{dt} + \frac{e}{R_1} \quad i_2 = C_2 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_2}$$

siendo $i_1 = -i_2$

$$C_1 \frac{de}{dt} + \frac{e}{R_1} = - \left(C_2 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_2} \right)$$

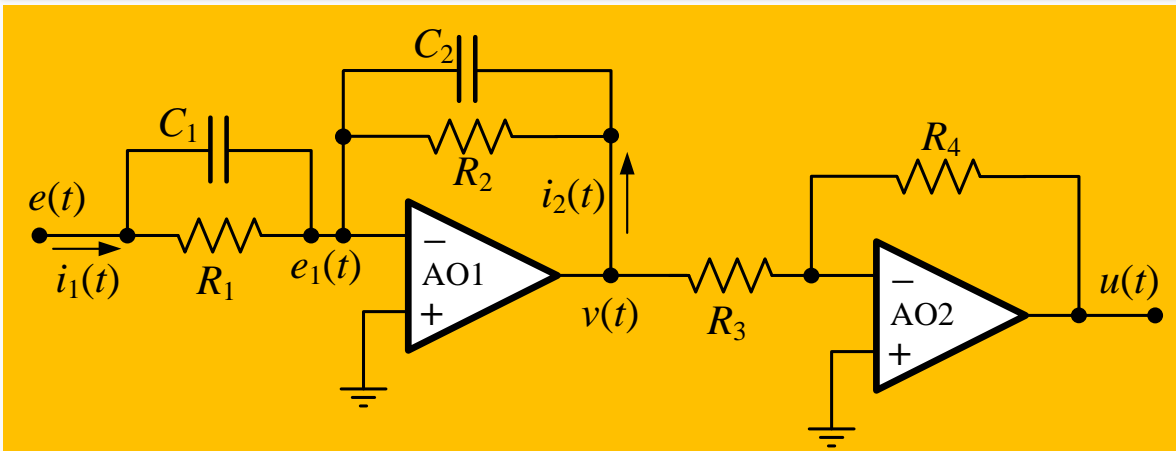
Aplicando TL: $sC_1 E(s) + \frac{E(s)}{R_1} = - \left(sC_2 V(s) + \frac{V(s)}{R_2} \right) \Rightarrow V(s) = - \frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1 C_1 + 1}{sR_2 C_2 + 1} E(s)$

2) Etapa AO2: $U(s) = - \frac{R_4}{R_3} V(s)$

$U(s) = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1 C_1 + 1}{sR_2 C_2 + 1} E(s)$ Finalmente, la FT del compensador es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1 C_1 + 1}{sR_2 C_2 + 1}$

Estructuras cero-polo y polo-cero. Asociaciones. Implementación Electrónica

Redes de Atraso o Adelanto de Fase



$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \times \frac{sR_1C_1 + 1}{sR_2C_2 + 1}$$

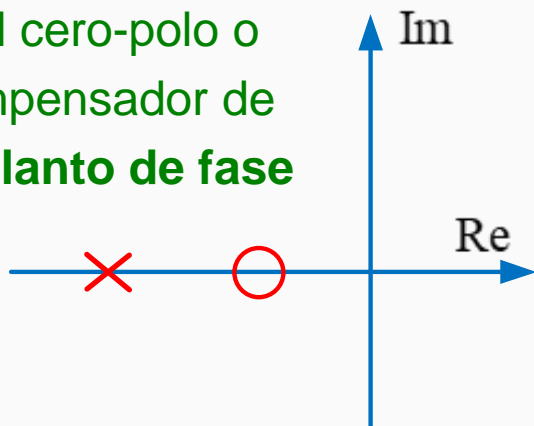
Reescribiendo en función del polo y del cero

$$G_c(s) = \frac{R_4C_1}{R_3C_2} \times \frac{s + 1/\tau_1}{s + 1/\tau_2} \quad \text{o} \quad G_c(s) = K_c \times \frac{s + z}{s + p}$$

donde: $\tau_1 = R_1C_1$; $\tau_2 = R_2C_2$ y $K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$

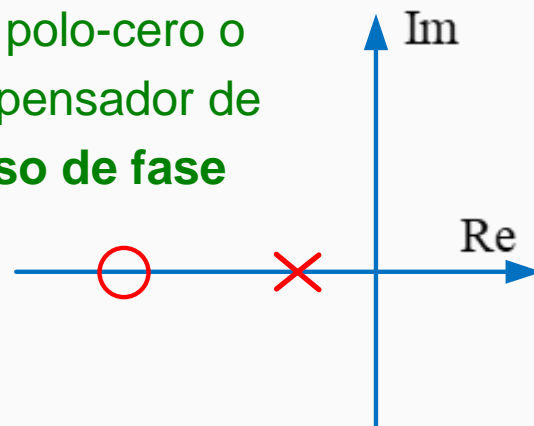
Si $z < p \Rightarrow \tau_1 > \tau_2$

Red cero-polo o compensador de adelanto de fase



Si $z > p \Rightarrow \tau_1 < \tau_2$

Red polo-cero o compensador de atraso de fase



Puede escribirse también como sigue:

$$G_c(s) = K_c \alpha \times \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}$$

donde: $T = R_1C_1$; $\alpha T = R_2C_2$

donde: $\alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}$

Separación entre el cero y el polo

Estructuras cero-polo y polo-cero. Asociaciones. Implementación Electrónica

Redes de Atraso-Adelanto de Fase

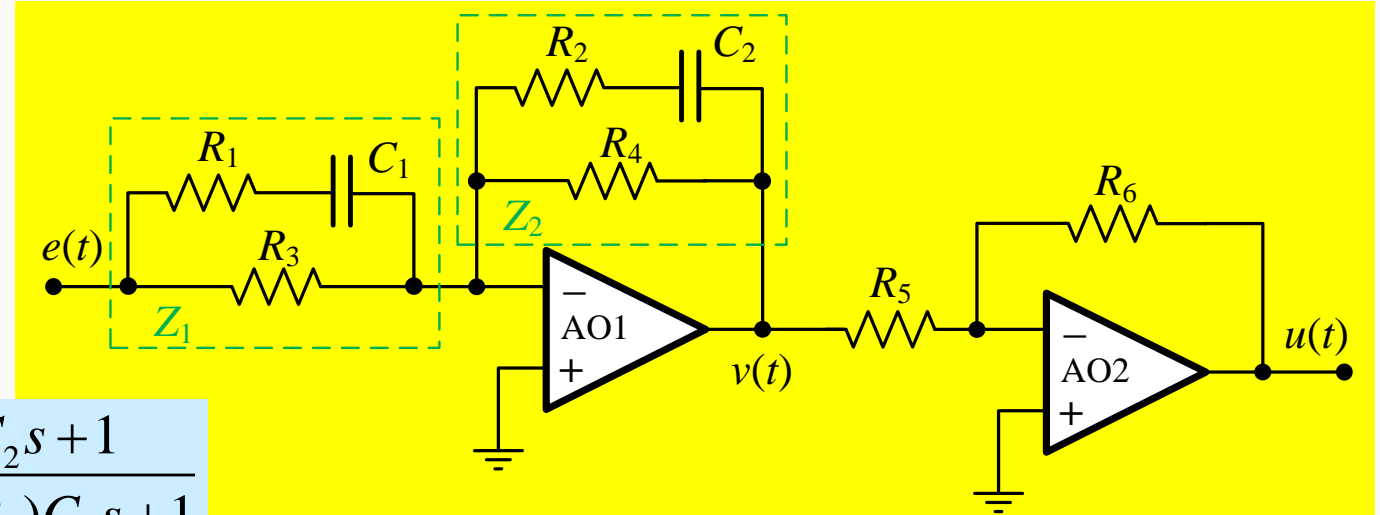
1) Etapa AO1:

$$\frac{V(s)}{E(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_4}{R_3} \times \frac{(R_1 + R_3)C_1s + 1}{R_1C_1s + 1} \times \frac{R_2C_2s + 1}{(R_2 + R_4)C_2s + 1}$$

2) Etapa AO2: $U(s) = -\frac{R_6}{R_5}V(s) \Rightarrow U(s) = \frac{R_6}{R_5} \frac{R_4}{R_3} \frac{(R_1 + R_3)C_1s + 1}{R_1C_1s + 1} \frac{R_2C_2s + 1}{(R_2 + R_4)C_2s + 1}$

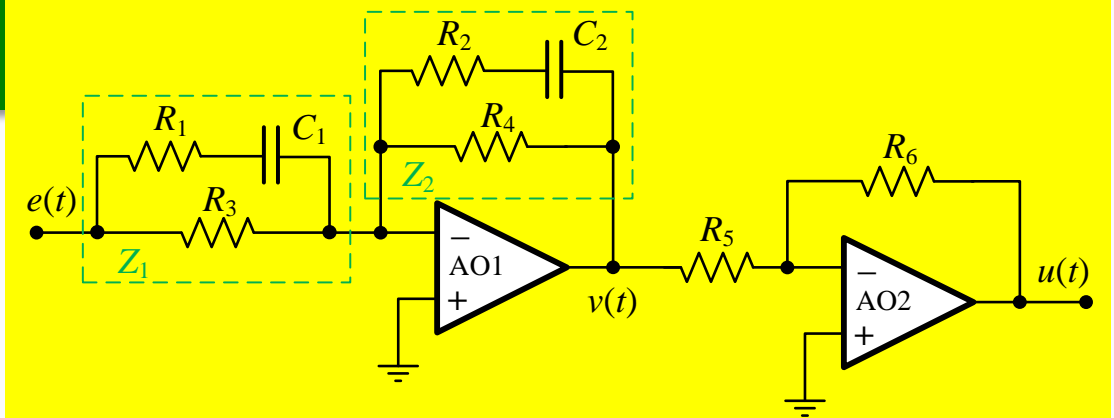
Finalmente, la FT del compensador es:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4R_6}{R_3R_5} \left[\frac{(R_1 + R_3)C_1s + 1}{R_1C_1s + 1} \right] \left[\frac{R_2C_2s + 1}{(R_2 + R_4)C_2s + 1} \right]$$



Redes de Atraso-Adelanto de Fase

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} \left[\frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \right] \left[\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4) C_2 s + 1} \right]$$



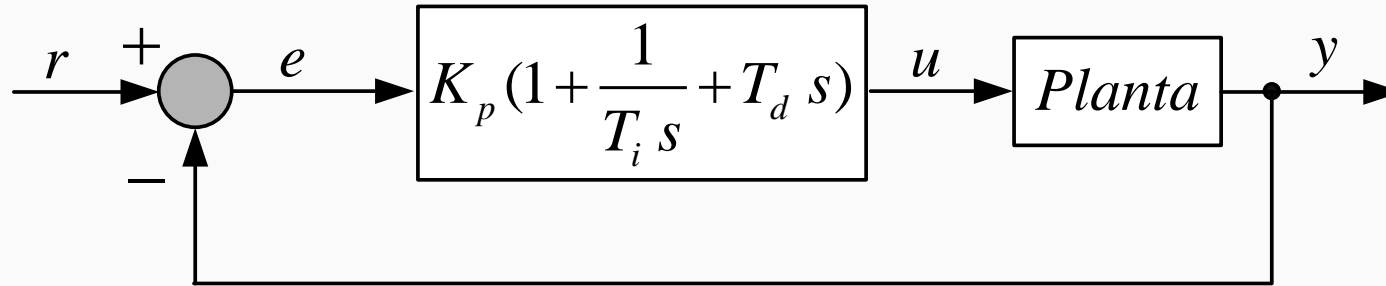
Si se definen las siguientes constantes: $T_1 = (R_1 + R_3)C_1$; $\frac{T_1}{\gamma} = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$ y $\beta T_2 = (R_2 + R_4)C_2$

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \times \frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1}$$

$$G_c(s) = K_c \times \frac{s + 1/T_1}{s + \gamma/T_1} \times \frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2}$$

$$\gamma = \frac{R_1 + R_3}{R_1} > 1 \quad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1 \quad y \quad K_c = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5} \times \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}$$

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols



Métodos de Ziegler Nichols Aplicable a:

- Plantas Complejas
- Modelos matemáticos difíciles de obtener
- Plantas Desconocidas

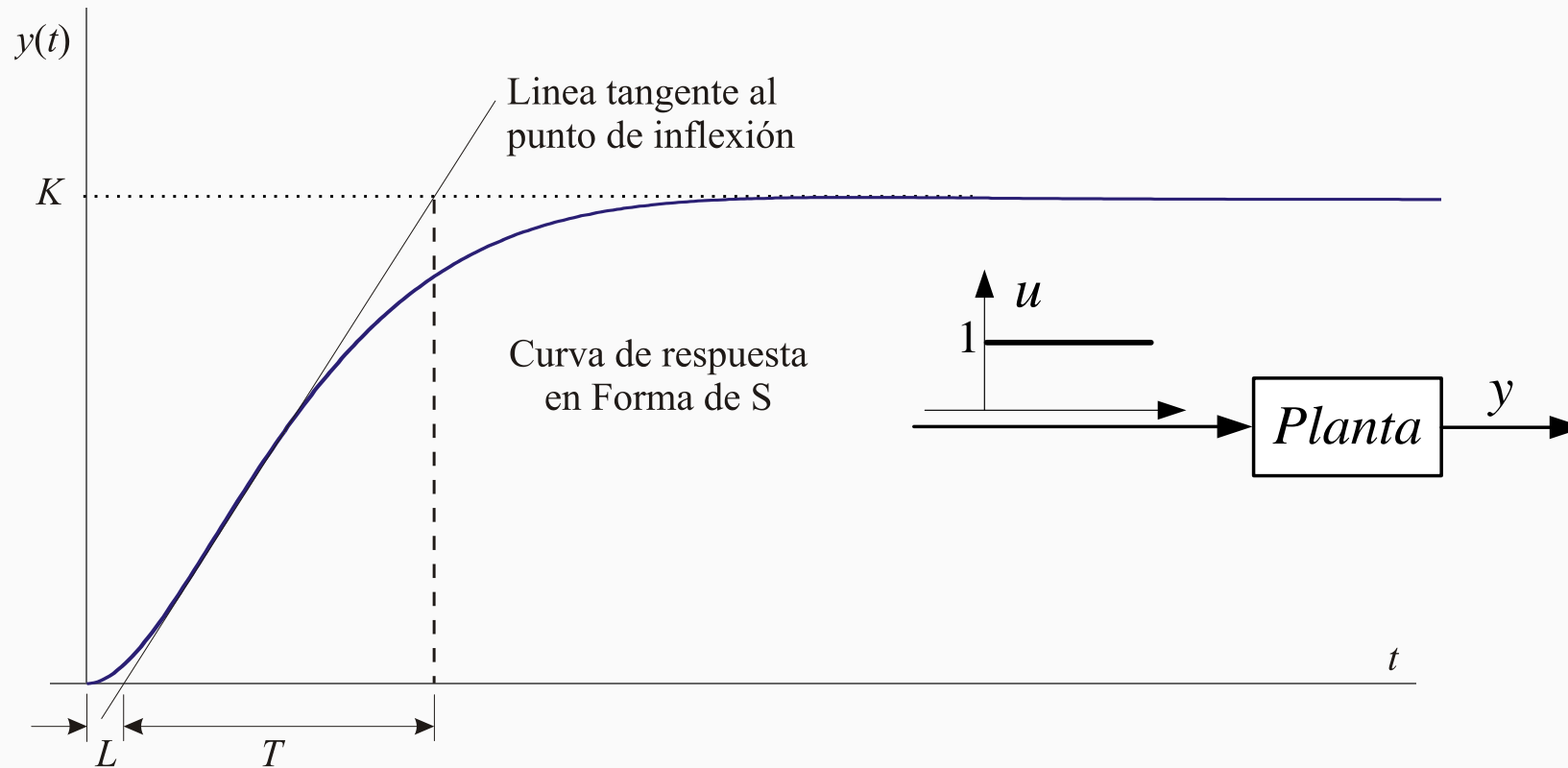
Estos Métodos determinan:

- ✍ Permiten obtener K_p , T_i y T_d con base a características de la respuesta al escalón obtenida en forma experimental o por simulación
- ✍ Permiten obtener K_p , T_i y T_d con el valor crítico de K_p
- ✍ Puede ser efectuado *in-situ* sobre ensayos en la planta

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Existen dos Métodos:

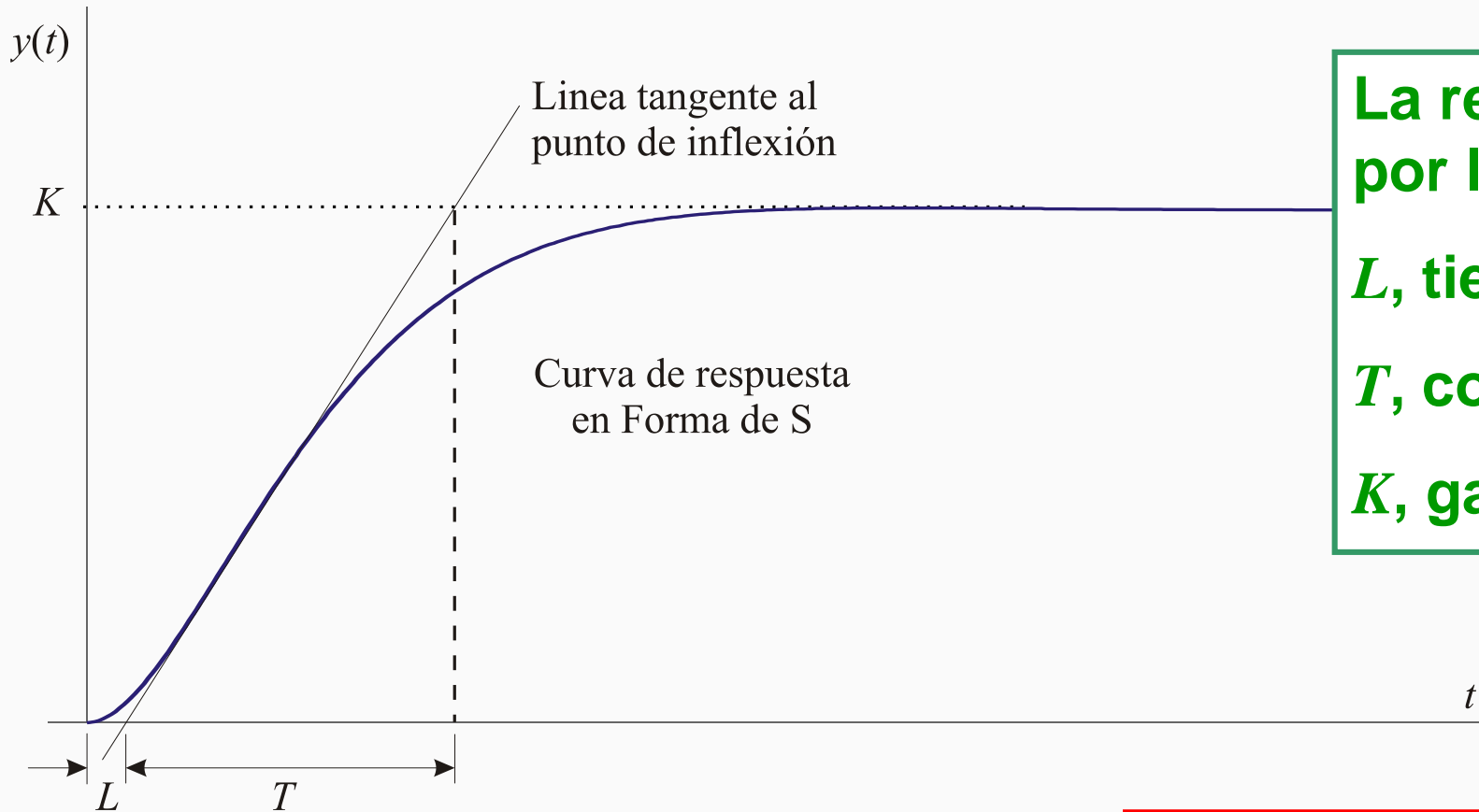
Primer Método: En Lazo Abierto



En la mayoría de las respuestas óptimas, la amplitud de las oscilaciones de la respuesta obtenida luego de la compensación, debe reducirse a un 25% en el primer periodo.

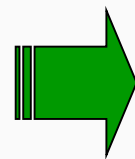
Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Primer Método: En Lazo Abierto



La respuesta se aproxima por líneas rectas con:
 L , tiempo de retardo;
 T , constante de tiempo y
 K , ganancia de lazo abierto

$$G_p(s) = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1}$$



Sistema de Primer Orden con atraso de transporte

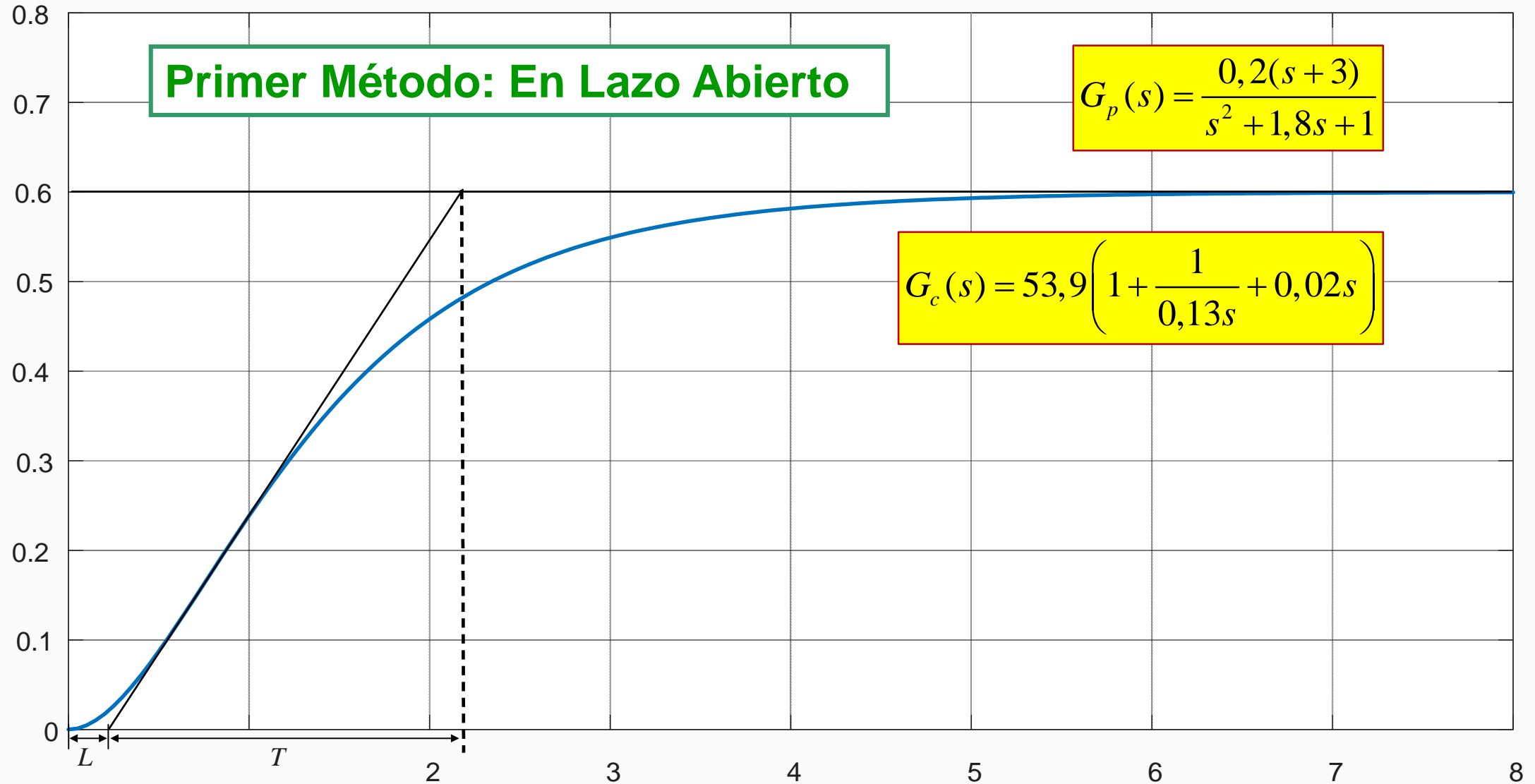
Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Primer Método: En Lazo Abierto

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

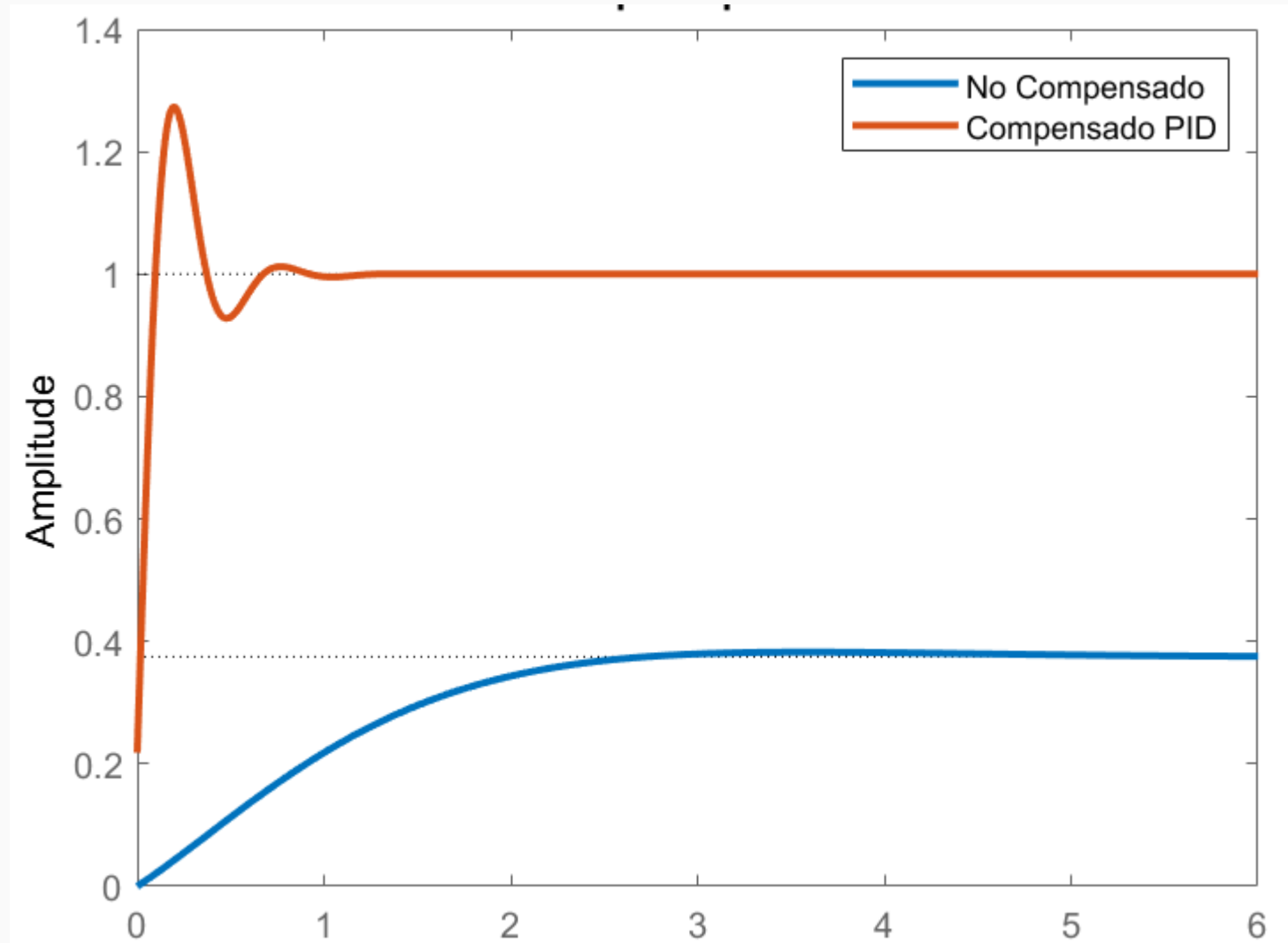
Sintonía de Controladores PID: Ejemplo

$$L = 0,04s \quad T = 2,3s \quad K = 0,6$$



Sintonía de Controladores PID: Ejemplo

Primer Método: En Lazo Abierto



$$G_p(s) = \frac{0,2(s+3)}{s^2 + 1,8s + 1}$$

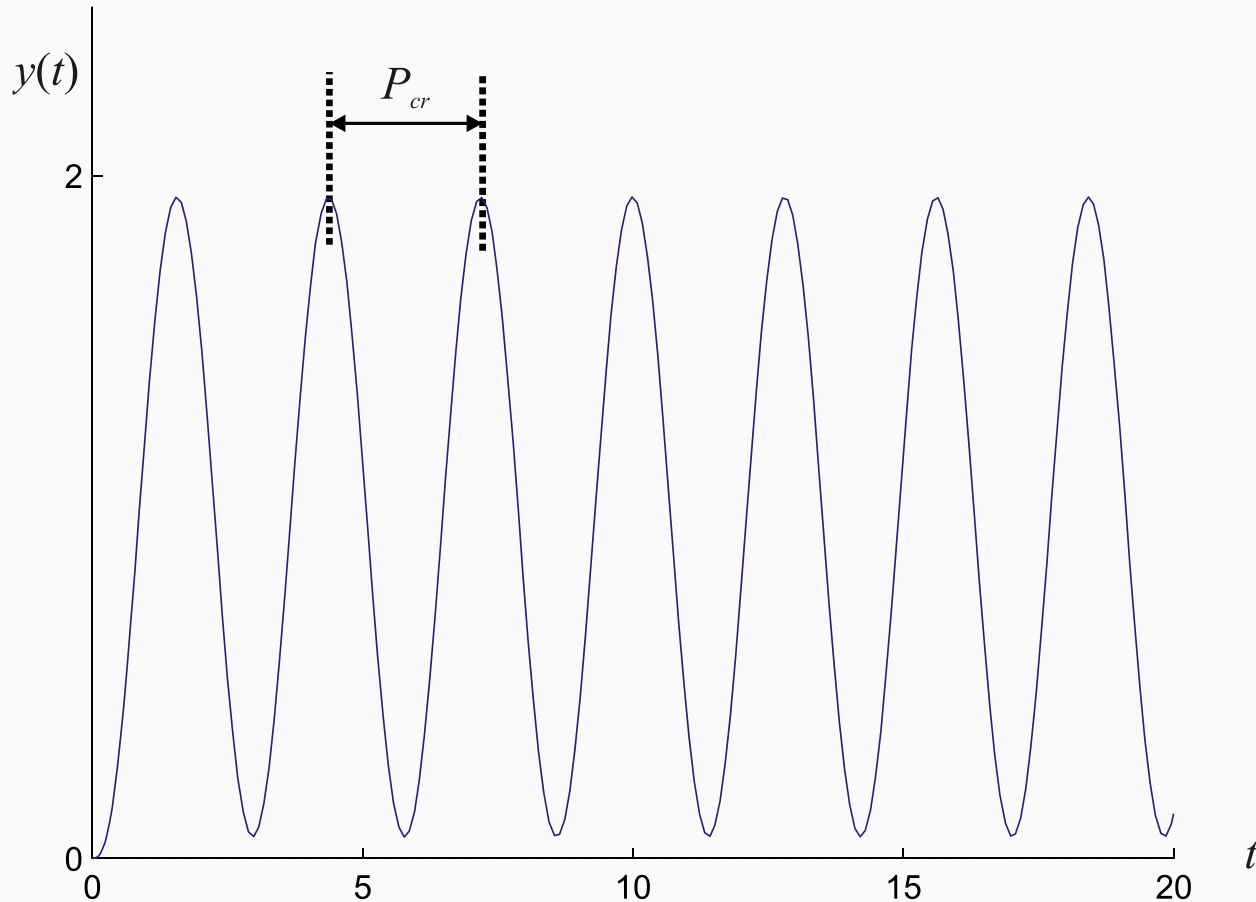
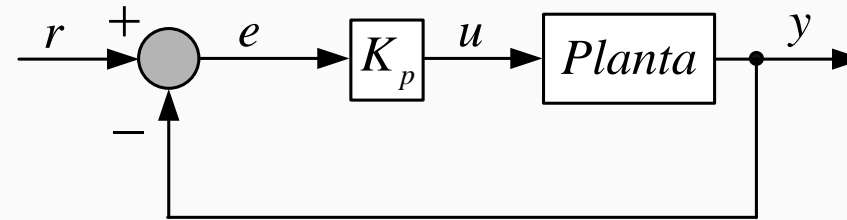
$$G_c(s) = \frac{1,4(s+25,74)^2}{s}$$

$$M_p = 27\%$$

$$t_s = 0,6s$$

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Segundo Método: En Lazo Cerrado



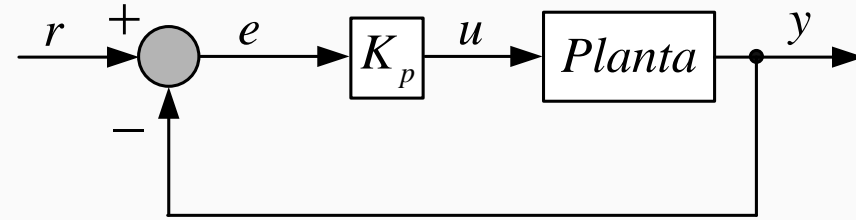
Se aumenta K_p de cero hasta un valor crítico K_{cr}

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

A partir de K_{cr} y P_{cr} se obtienen K_p , T_i y T_d .

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Segundo Método: En Lazo Cerrado



$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

En lazo cerrado y con K_p , se tiene

$$G_{LC}(s) = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p}$$

Con $s = j\omega$ en el polinomio característico e igualando las partes real e imaginaria a cero, pueden hallarse los valores de $K_p = K_{cr}$ y la frecuencia de los polos sobre el eje $j\omega$

$$P_C(s) = (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K_{cr} \quad \Rightarrow \quad -j\omega^3 - 6\omega^2 + 5j\omega + K_{cr} = 0$$

$$-j\omega^3 + 5j\omega = 0 \quad \text{y} \quad -6\omega^2 + K_{cr} = 0$$

De la parte imaginaria = 0, se tiene $\omega = \sqrt{5} \cong 2,24 \text{ r/s}$

De la parte real = 0, se tiene $K_{cr} = 6 \times 5 = 30$

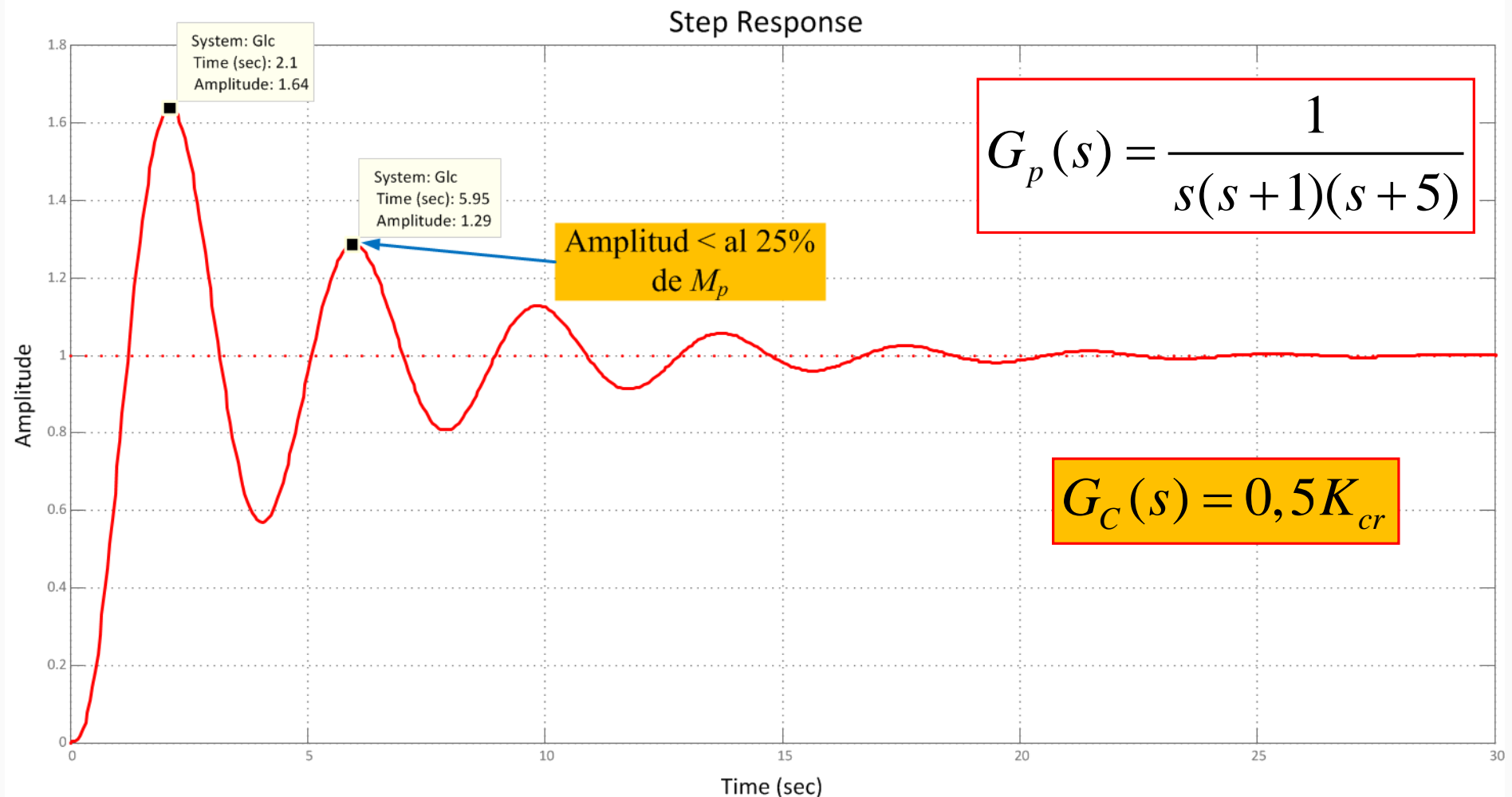
Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Segundo Método: En Lazo Cerrado

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$0,8P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

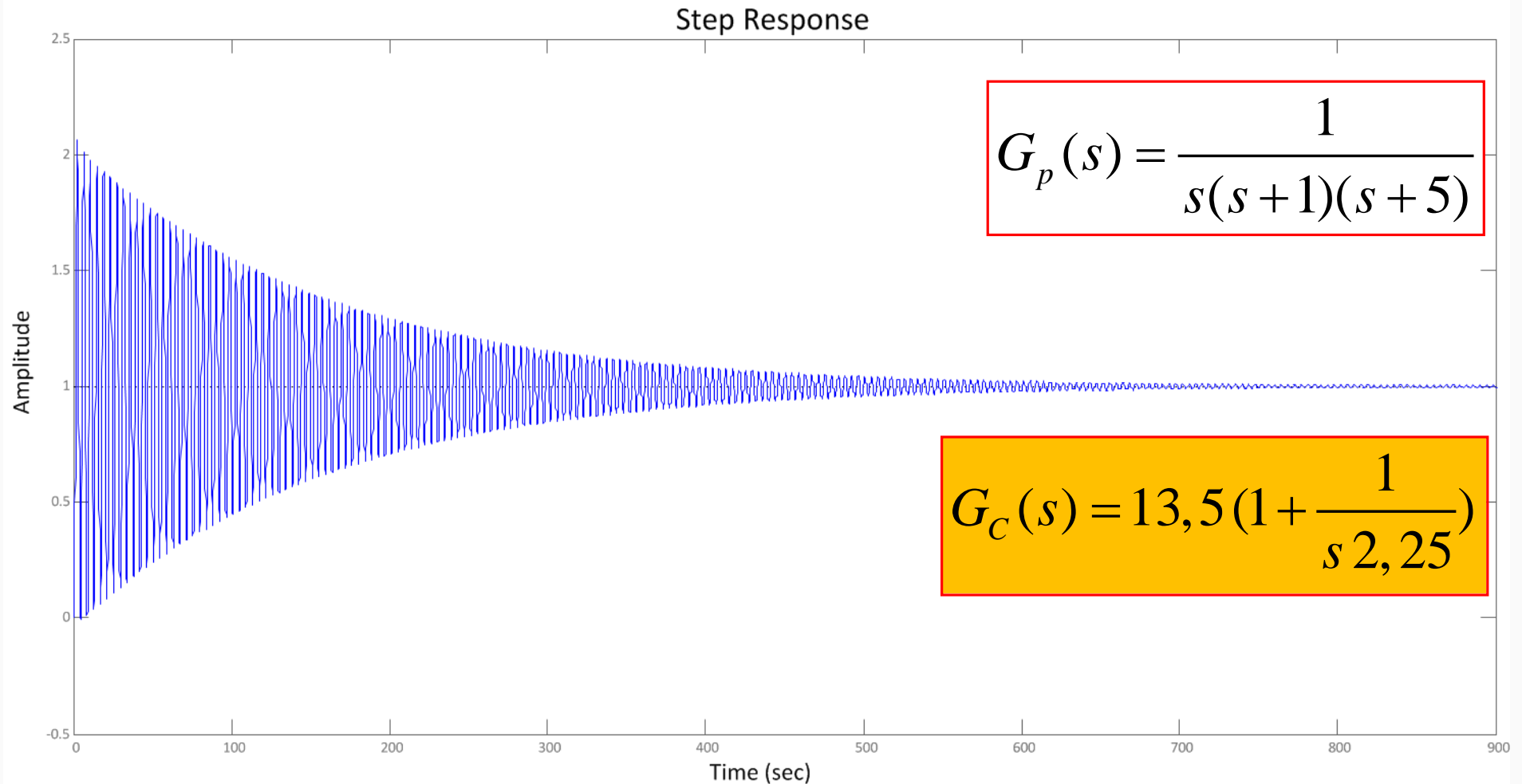
Segundo Método: En Lazo Cerrado



Compensador Proporcional

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

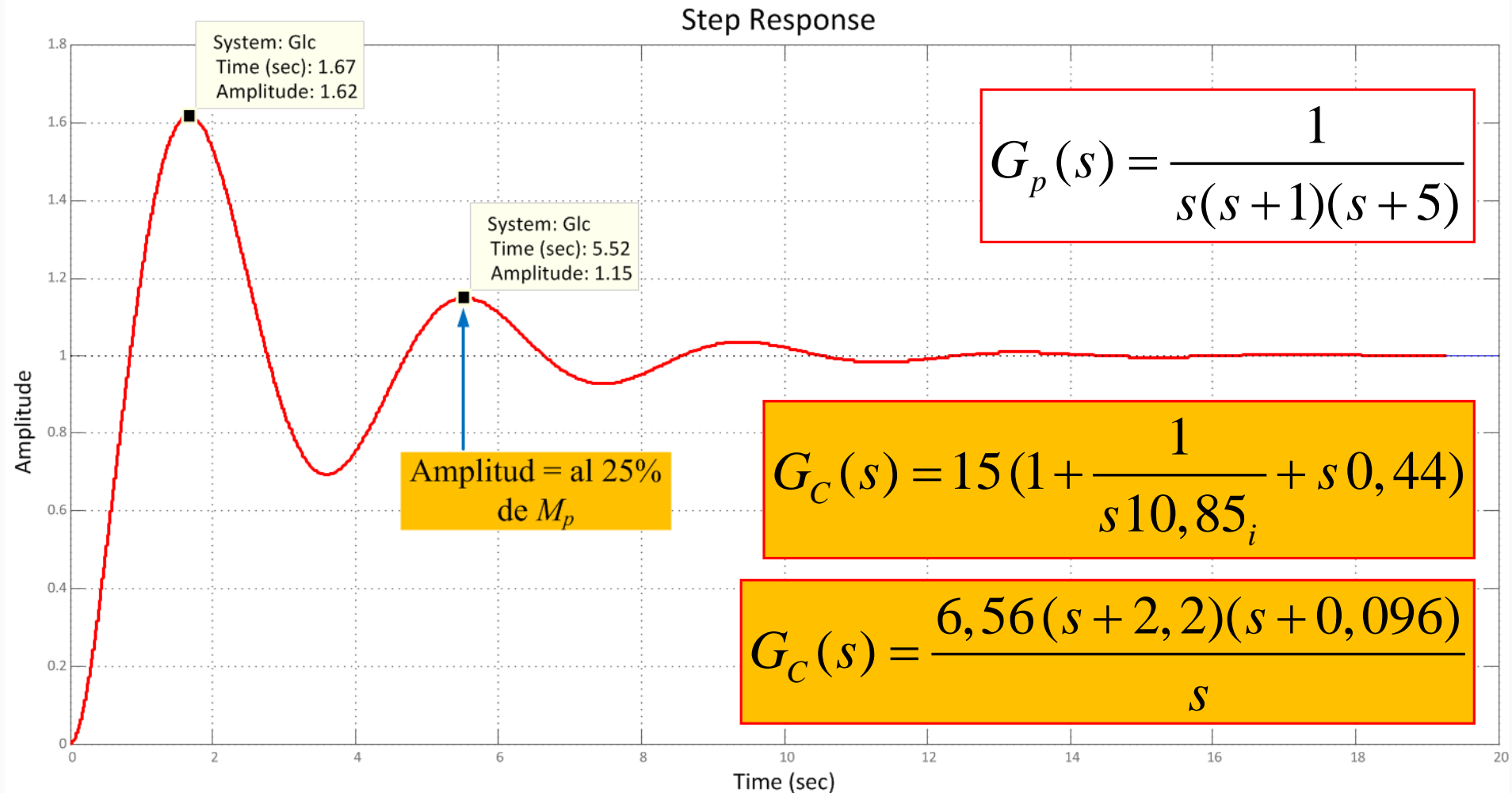
Segundo Método: En Lazo Cerrado



Compensador Proporcional-Integral

Sintonía de Controladores PID: Ziegler-Nichols

Segundo Método: En Lazo Cerrado

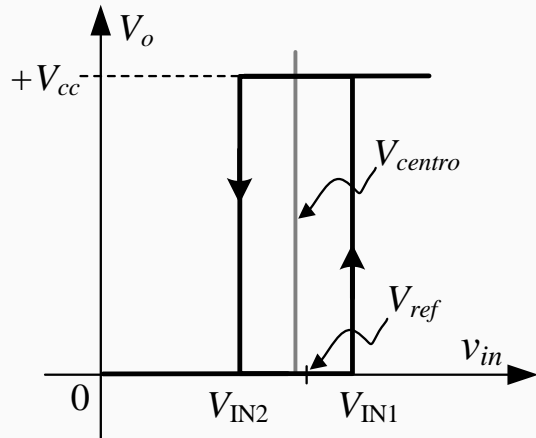
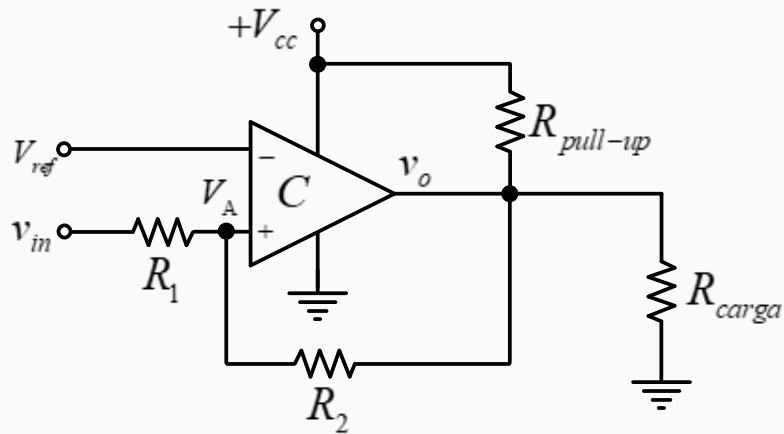


Compensador Proporcional-Integral-Derivativo

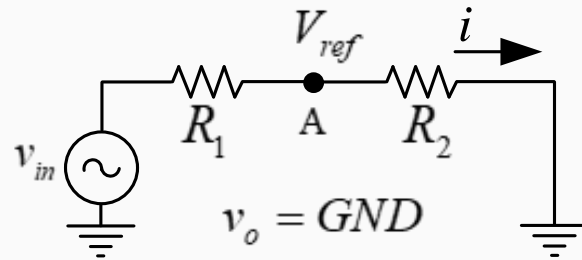
Referencias Bibliográficas

- [1] Ogata, Katsuhiko. “Ingeniería de Control Moderna”.**
- [2] Kuo, Benjamín C. “Sistemas de Control Automático”.**
- [3] Chi-Tsong Chen. “Analog and Digital Control System Design”.**
- [4] Karl J. Astrom and Tore Hagglund. “Control PID Avanzado”.**
- [5] Robert F. Coughlin and Frederick F. Driscoll. “Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales”**
- [6] Manuel Torres Portero. “Circuitos Integrados Lineales: Sus aplicaciones”**

Controlador ON-OFF No Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



- En este caso, el circuito necesita una tensión de referencia externa en el terminal inversor
- La tensión de cambio V_A , en el terminal (+), se desplaza en torno a V_{ref} a medida que V_o cambia de GND a $+V_{cc}$ y viceversa.
- **A) Cuando se inicia, $v_{in} < V_A$ ($V_A = V_{ref}$) $v_o = 0$ V (GND)**



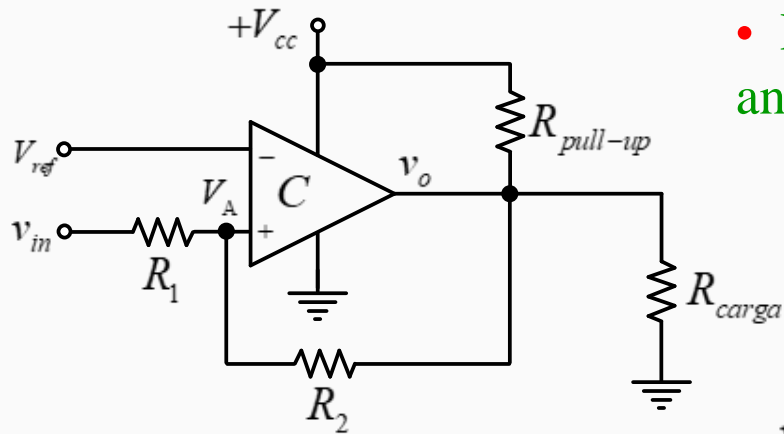
$$V_{IN1} = V_{ref} + i R_1 = V_{ref} + \frac{V_{IN1} R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{IN1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}$$

- Para que la salida pase a $+V_{cc}$, v_{in} debe aumentar hasta superar el valor de V_{IN1} . Cuando $V_o = +V_{cc}$, V_A toma un valor mayor a V_{ref} , o sea:

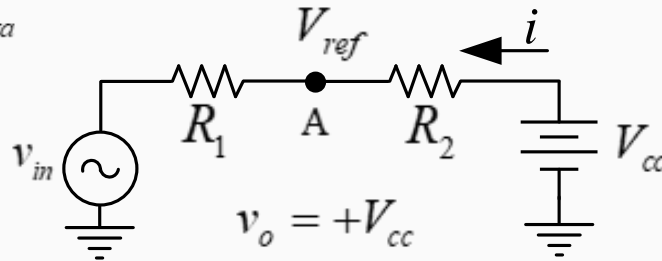
$$V_A = v_{in} + \frac{(V_{cc} - V_{IN1}) R_1}{R_1 + R_2}$$

Controlador ON-OFF No Inversor con tensión de referencia externa y alimentación asimétrica



- Para que la salida pase a $V_o = 0V$ (GND), v_{in} debe quedar por debajo de V_{ref} antes que V_A se haga igual a V_{ref} . El punto de cambio de nivel bajo es V_{IN2} :

- **B) Si $v_{in} > V_{ref}$ y $v_o = +V_{cc}$**



$$V_{IN2} = V_{ref} + i R_1 = V_{ref} - \frac{(V_{cc} - V_{IN2}) R_1}{R_1 + R_2}$$

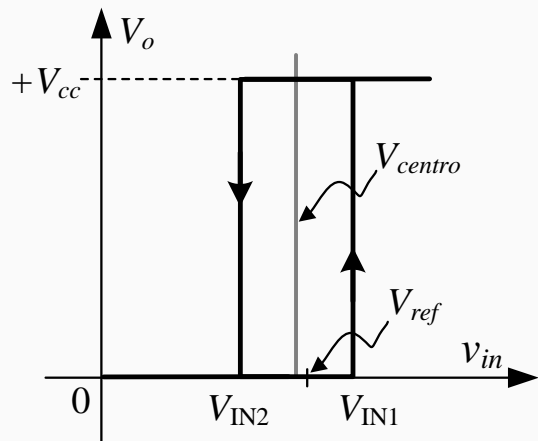
$$V_{IN2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{R_2} V_{cc}$$

- La tensión o ventana de histéresis para este circuito está dada por:

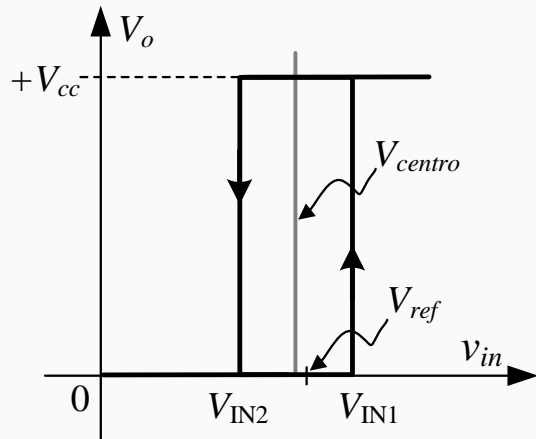
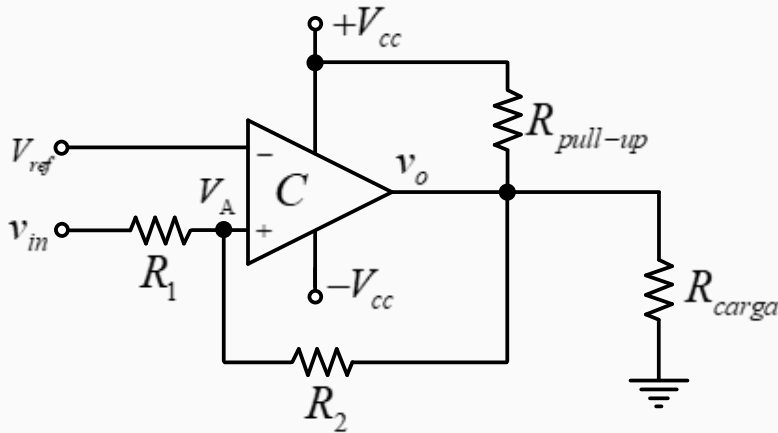
$$V_h = V_{IN1} - V_{IN2} = \frac{R_1}{R_2} V_{cc}$$

- La tensión en la cual se centra la ventana de histéresis para este circuito está dada por:

$$V_{centro} = \frac{V_{IN1} + V_{IN2}}{2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{2R_2} V_{cc}$$

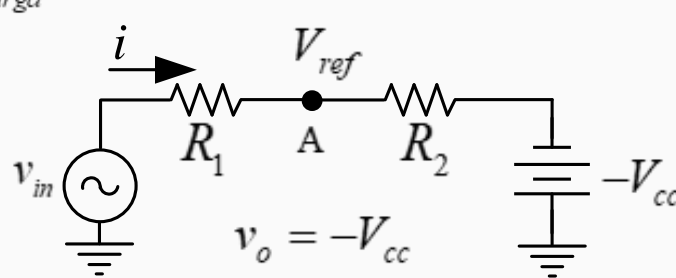


Controlador ON-OFF No Inversor con tensión de referencia externa y alimentación simétrica



- La tensión de cambio V_A , en el terminal (+), se desplaza en torno a V_{ref} a medida que V_o cambia de $-V_{cc}$ a $+V_{cc}$ y viceversa.

- **A) Cuando se inicia, $v_{in} < V_A$ ($V_A = V_{ref}$) $v_o = -V_{cc}$**



$$V_{IN1} = V_{ref} + i R_1 = V_{ref} + \frac{[V_{IN1} - (-V_{cc})] R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{IN1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{R_2} (-V_{cc})$$

- **B) El análisis es igual al caso anterior, por lo que la expresión de V_{IN2} no varía.**
- La tensión o ventana de histéresis para este circuito está dada por:

$$V_h = V_{IN1} - V_{IN2} = \frac{R_1}{R_2} [+V_{cc} - (-V_{cc})]$$

- La tensión en la cual se centra la ventana de histéresis para este circuito está dada por:

$$V_{centro} = \frac{V_{IN1} + V_{IN2}}{2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}$$

Controlador ON-OFF No Inversor con tensión de referencia externa: alimentación simétrica o asimétrica

- Encontramos las expresiones genéricas en función de la relación de R_1 y R_2 .

Siendo, $R_2 = n \times R_1$ Si $R_1 = R \Rightarrow R_2 = nR$

$$V_{IN1} = \frac{n+1}{n} V_{ref} \text{ para } +V_{cc} \text{ y GND} \quad V_{IN1} = \frac{n+1}{n} V_{ref} - \frac{(-V_{cc})}{n} \text{ para } \pm V_{cc}$$

$$V_{IN2} = \frac{n+1}{n} V_{ref} - \frac{+V_{cc}}{n} \text{ para ambos tipos de alimentación}$$

- La tensión de histéresis está dada por:

$$V_h = \frac{+V_{cc}}{n} \text{ para } +V_{cc} \text{ y GND} \quad V_h = \frac{[+V_{cc} - (-V_{cc})]}{n} \text{ para } \pm V_{cc}$$

- La tensión en la cual se centra la ventana de histéresis está dada por:

$$V_{centro} = \frac{n+1}{n} V_{ref} - \frac{+V_{cc}}{2n} \text{ para } +V_{cc} \text{ y GND} \quad V_{centro} = \frac{n+1}{n} V_{ref} \text{ para } \pm V_{cc}$$