Universidad Nacional de Misiones

Facultad de Ingeniería
OBERA

SISTEMAS DE CONTROL y AUTOMATIZACIÓN

Profesor: Fernando Botterón

Ingeniería en Computación

Facultad de Ingeniería - U.Na.M

Tema de la Unidad 2

- ☑ Análisis de la respuesta transitoria de un sistema dinámico:
  - ☑ Escalón y rampa para sistemas de primer orden
  - ☑ Sistemas de segundo orden
- ☑ Especificaciones de la respuesta transitoria para entrada en escalón.
- ☑ Sistemas de orden superior:
  - ☑ aproximación de polo-cero
  - ☑ aproximación por polos dominantes. Concepto de dominancia
- ☑ Ejemplos de sistemas de primer y segundo orden.
- ☑ Análisis del error en estado estacionario: Errores de posición, de velocidad y de aceleración.

Análisis de la Respuesta Transitoria

Respuesta Temporal:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

$y_t(t)$: Respuesta Transitoria

$y_{ss}(t)$: Respuesta Regimen Permanente

Respuesta Transitoria ⇒

- **Característica dinámica del sistema**
- **Afectada por los estados iniciales**

Respuesta Permanente ⇒

- **Depende de la señal de entrada**
- **y si el sistema es estable**

⇓

- Es igual o proporcional a la señal de entrada cuando $t \to \infty$ luego que la Rta. Transitoria cae a 0.

Análisis de la Respuesta Transitoria

Error en Régimen Permanente:

$$e_{ss}(t) = r(t) - y_{ss}(t)$$

En sistemas de control se desea minimizar este error

Para esto se caracteriza la respuesta transitoria respecto a entradas típicas o estándares.

Entradas Típicas

- Función Impulso
- Función Escalón
- Función Rampa
- Función Sinusoidal
- Función Parabólica

Más Utilizadas

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Primer Orden:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{sT+1}} \longrightarrow Y(s)$$

T : Constante de Tiempo

Respuesta al Escalón:

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{1}{sT+1}$$

En el dominio del tiempo:

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}})\,r(t) \quad con \quad r(t) = 1 \quad para \quad t \geq 0$$

$$y(t) = 1 \quad cuando \quad t \to \infty \quad si \quad T > 0$$

Polo de la FT debe estar en el semiplano izquierdo del plano *s* para que el sistema sea estable

Análisis de la Respuesta Transitoria

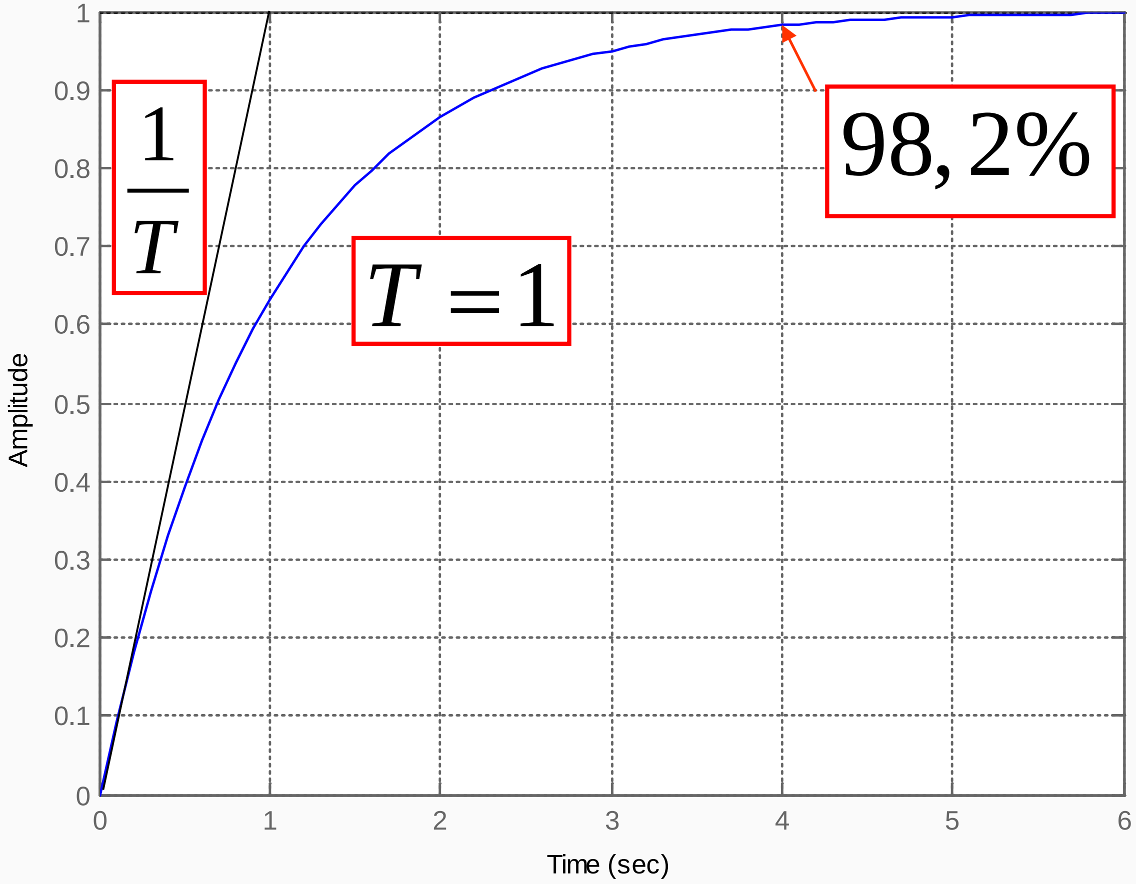
Sistemas de Primer Orden:

Respuesta al Escalón

$$e(t) = r(t) - y(t) = 1 - (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$e_{ss}(\infty) = 0 \;\; cuando \;\; t \rightarrow \infty \;\; si \;\; T > 0$$

Sólo para este ejemplo aquí representado



A efectos prácticos la salida alcanza el valor final:

$$t_{ss} \geq 4T \text{; o sea } y(t) \cong y_{ss}(t) \simeq 1$$

$$si \;\; R(s) = \frac{5}{s} \;\; para \;\; \forall\, t \geq 0$$

$$y(t) = y_{ss}(\infty) = 5; \;\; e_{ss}(\infty) = 0$$

$$t = T\text{; } y(t) = 63\% \text{ de } y_{ss}(\infty)$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

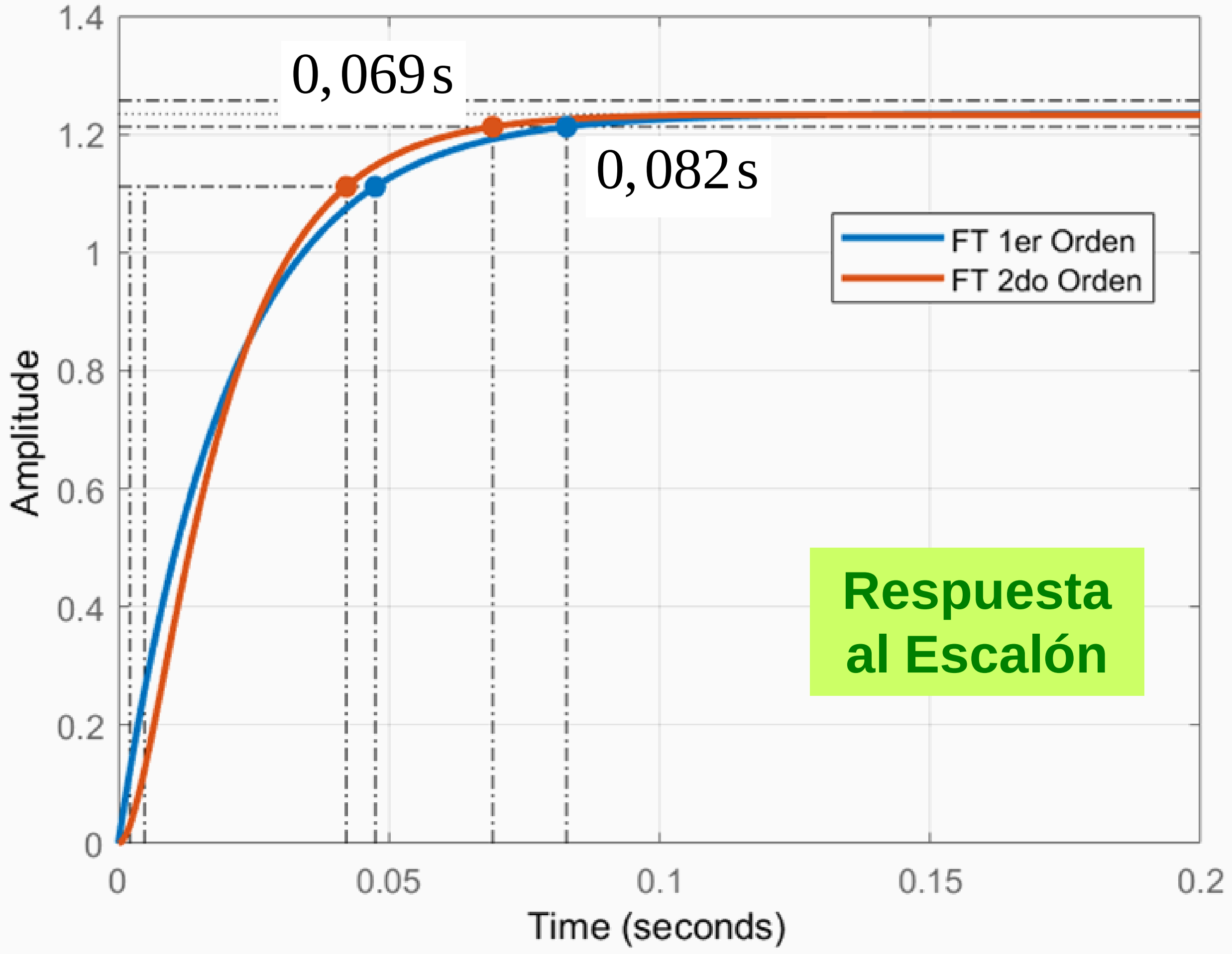
Sistemas de 1er y 2do Orden: Motor CC

$$G_v(s)=\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)}=\frac{K/JL_a}{s^2+\left(\frac{R_a}{L_a}+\frac{b}{J}\right)s+\left(\frac{R_ab}{JL_a}+\frac{K^2}{JL_a}\right)}$$

y $\quad G_{va}(s)=\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m/\tau_m}{s+\frac{1}{\tau_m}}$

$$K_m=\frac{K}{bR_a+K^2}$$

$$\tau_m=\frac{JR_a}{bR_a+K^2}$$



$$\tau_e=\frac{L_a}{R_a}=0,0037\,\mathrm{s}$$

$$\tau_m=\frac{J}{b}=1,67\,\mathrm{s}$$

$$\tau_m \gg \tau_e \ \ (\tau_m=445\,\tau_e)$$

Tiempo de asentamiento

$$\text{si, } \tau_m=0,02\,\mathrm{s} \qquad t_{ss}=4\tau_m=0,08\,\mathrm{s}$$

Valor de régimen estacionario

$$si \ \ R(s)=\frac{1}{s} \ \ para \ \ \forall\, t\geq 0$$

$$y(t)=y_{ss}(\infty)=K_m=1,25\,\mathrm{rad/s}\Rightarrow e_{ss}(\infty)\neq 0$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

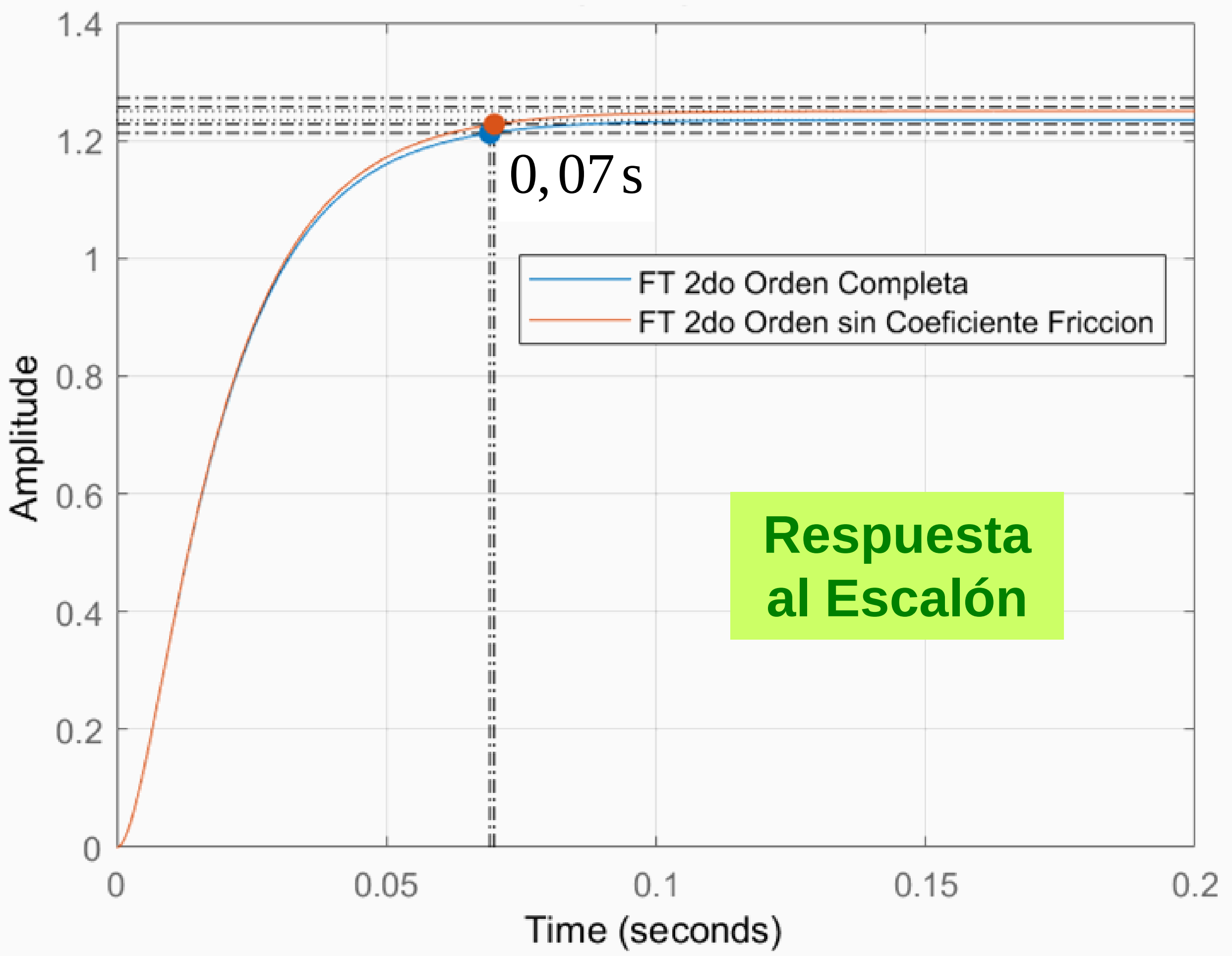
Sistemas de 2do Orden: Motor CC

$$G_v(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{1/JL_a K}{\frac{JL_a}{K^2}s^2 + \frac{R_a J}{K^2}s + 1}$$

Expresada en función de la constante de tiempo τ y considerando *b* = 0

$$\tau = \frac{\sqrt{L_a}}{K} = 0,0089\,\mathrm{s}$$

$$t_{ss} = 8\tau = 0,071\,\mathrm{s}$$



Respuesta al Escalón

Se observa que el tiempo de asentamiento se da en un valor de 8 veces la constante de tiempo del sistema al despreciarse *b*.

Importante aclarar que es un sistema de 2do orden sobreamortiguado, con dos polos reales en:

$$p_1 = -206,3\,\mathrm{r/s} \;\; \text{y} \;\; p_2 = -60,4\,\mathrm{r/s}$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Dos polos en la FT

Se definen:

ξ : Coeficiente de Amortiguamiento

ω_n : Frecuencia Natural no Amortiguada

$\sigma = \xi\omega_n \rightarrow$ Atenuación

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow$ Frecuencia Natural Amortiguada

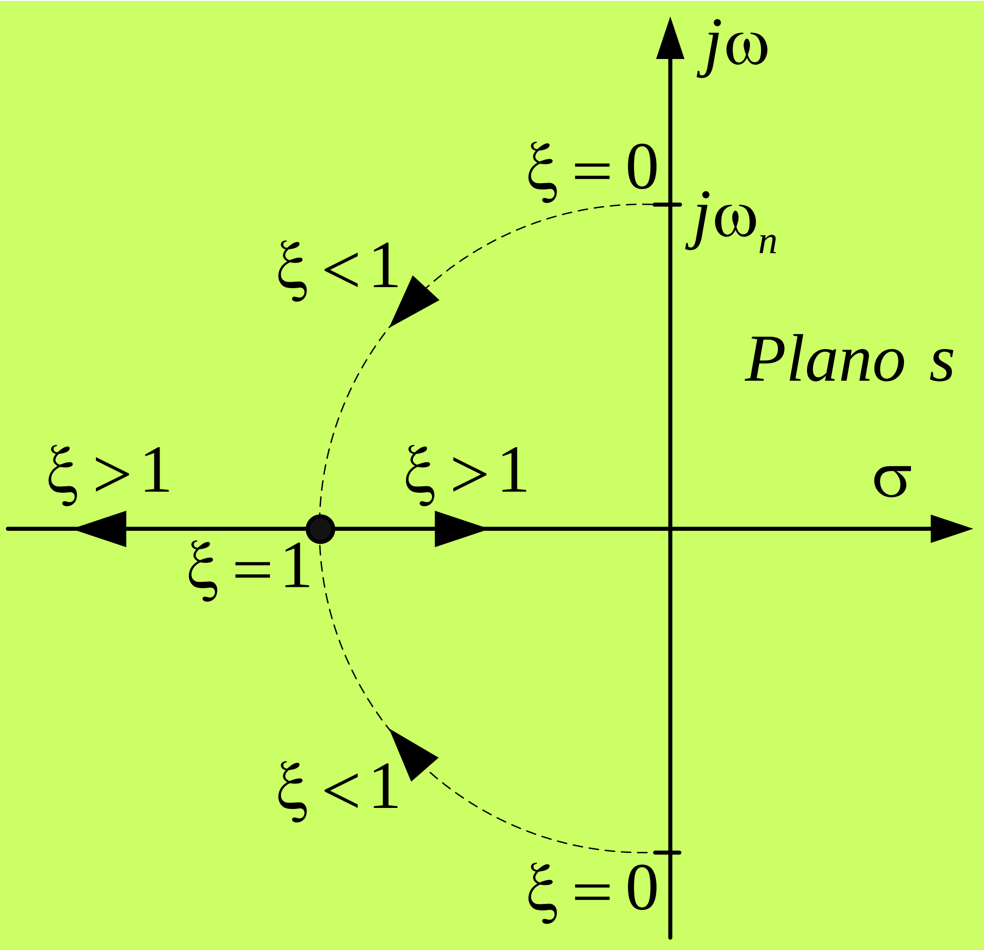
Los polos:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad para \quad \xi < 1 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad para \quad \xi \geq 1$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden:



$\xi = 0 \Rightarrow$ *Sistema Oscilatorio*

$s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$0 < \xi < 1 \Rightarrow$ *Sistema Subamortiguado*

$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega_d$

$\xi = 1 \Rightarrow$ *Amortiguamiento Crítico*

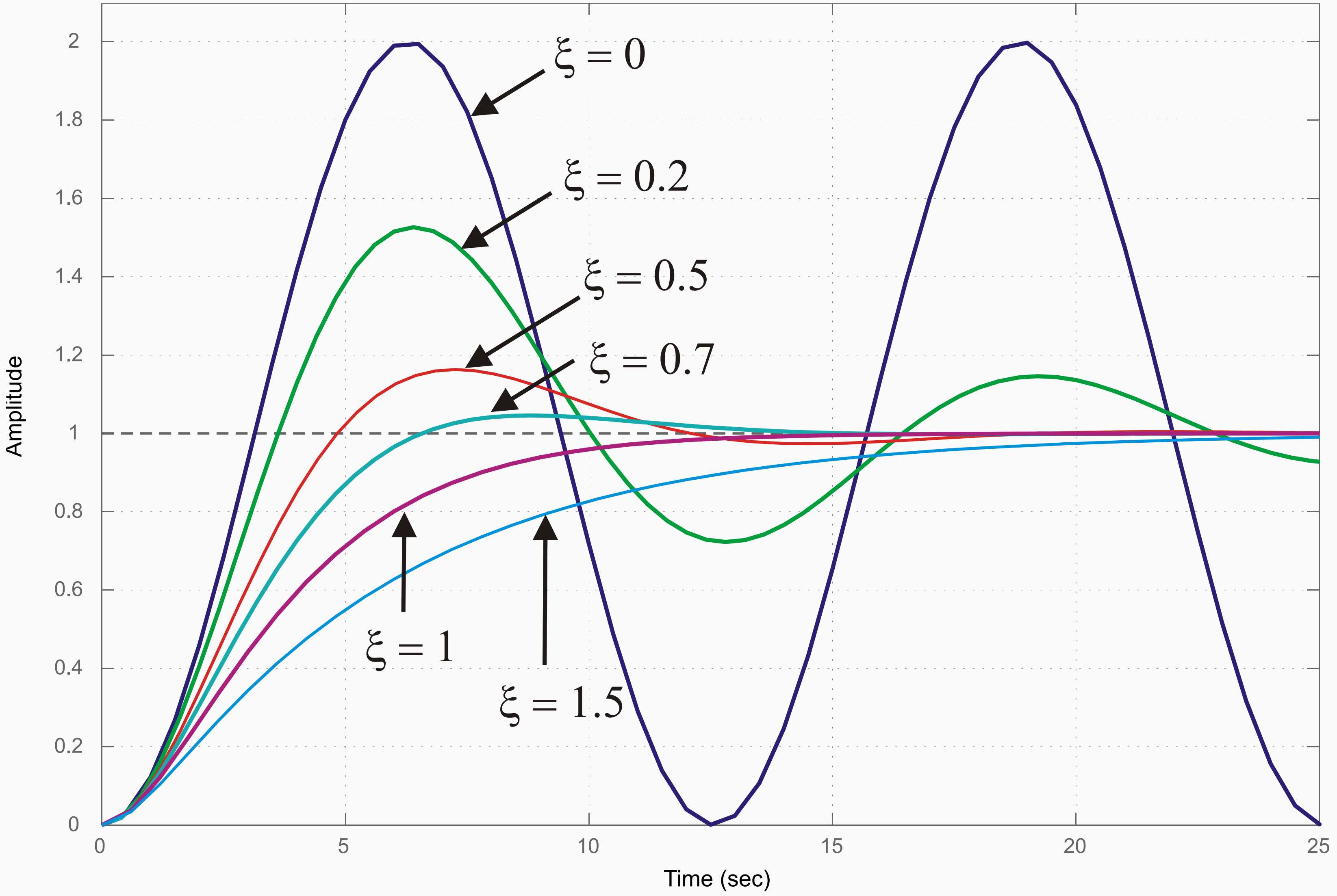
$s_{1,2} = -\xi\omega_n$

$\xi > 1 \Rightarrow$ *Sistema Sobreamortiguado*

$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Respuesta al Escalón



Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Respuesta al Escalón Unitario

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2}\right)$$

En el dominio del tiempo:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, sen(\omega_d t)\right] \quad \text{para } \forall \ t \geq 0$$

- **La frecuencia de la oscilación transitoria es ω_d**
- ω_d ***es inversamente proporcional a*** ξ
- **En régimen estacionario:** cuando $t \to \infty \quad y(\infty) = 1$

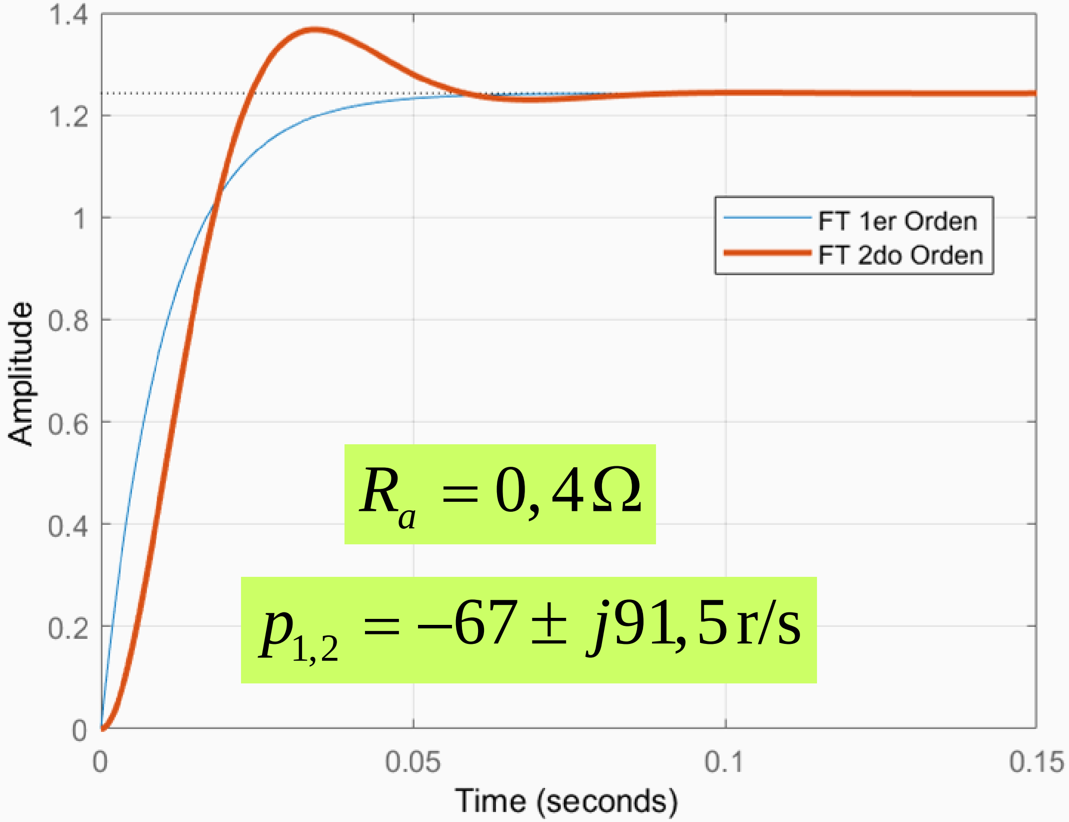
Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Motor CC

$$G_v(s) = \frac{K / JL_a}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)s + \left(\frac{R_a b}{JL_a} + \frac{K^2}{JL_a}\right)}$$

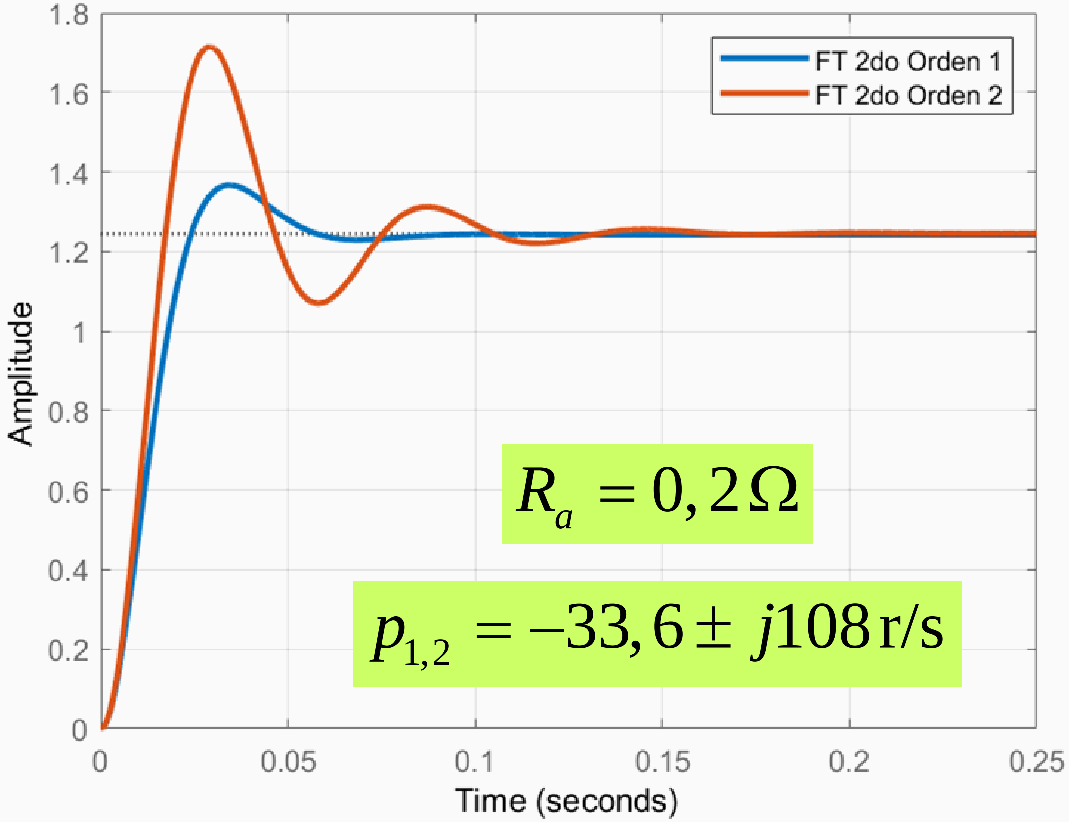
$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)^2 - 4\left(\frac{R_a b}{JL_a} + \frac{K^2}{JL_a}\right)}$$

$\xi = 0,59$ $\sigma = 67\ \text{r/s}$ $\omega_n = 113,37\ \text{r/s}$ $\omega_d = 91,5\ \text{r/s}$



$R_a = 0,4\,\Omega$

$p_{1,2} = -67 \pm j91,5\ \text{r/s}$

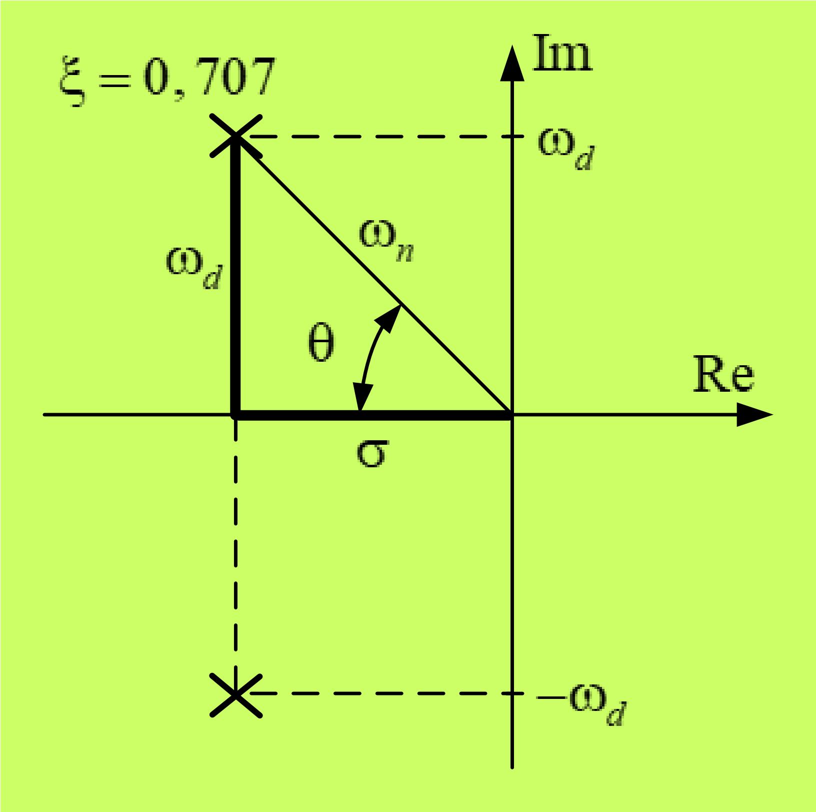


$R_a = 0,2\,\Omega$

$p_{1,2} = -33,6 \pm j108\ \text{r/s}$

Análisis de la Respuesta Transitoria

✍ Ecuaciones Importantes para el Diseño !!!



$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

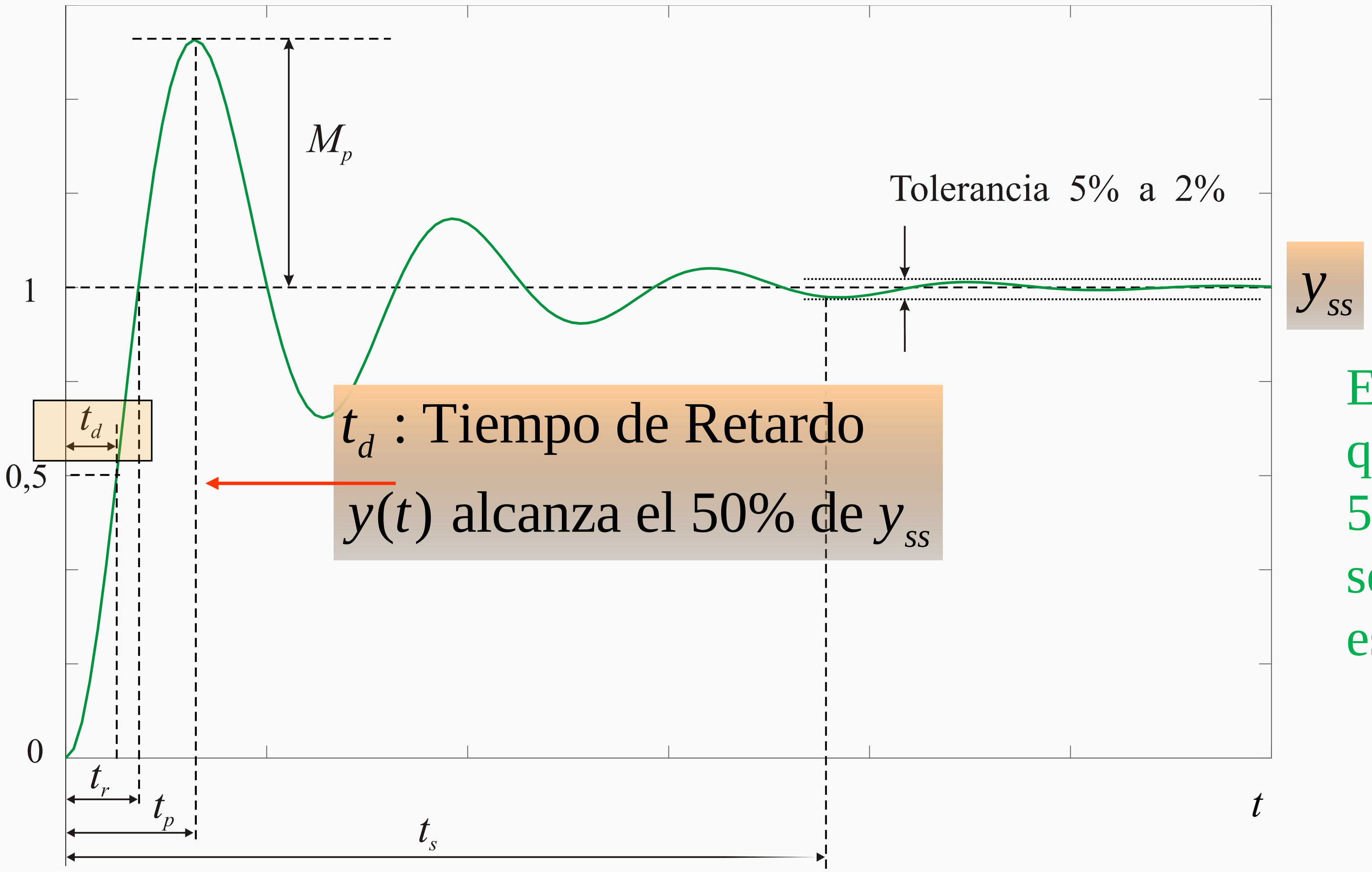
$$\xi = \cos(\theta) = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

$$-\sigma = \xi\omega_n$$

Se Observa que a medida que $\theta \uparrow \xi \downarrow$

Análisis de la Respuesta Transitoria

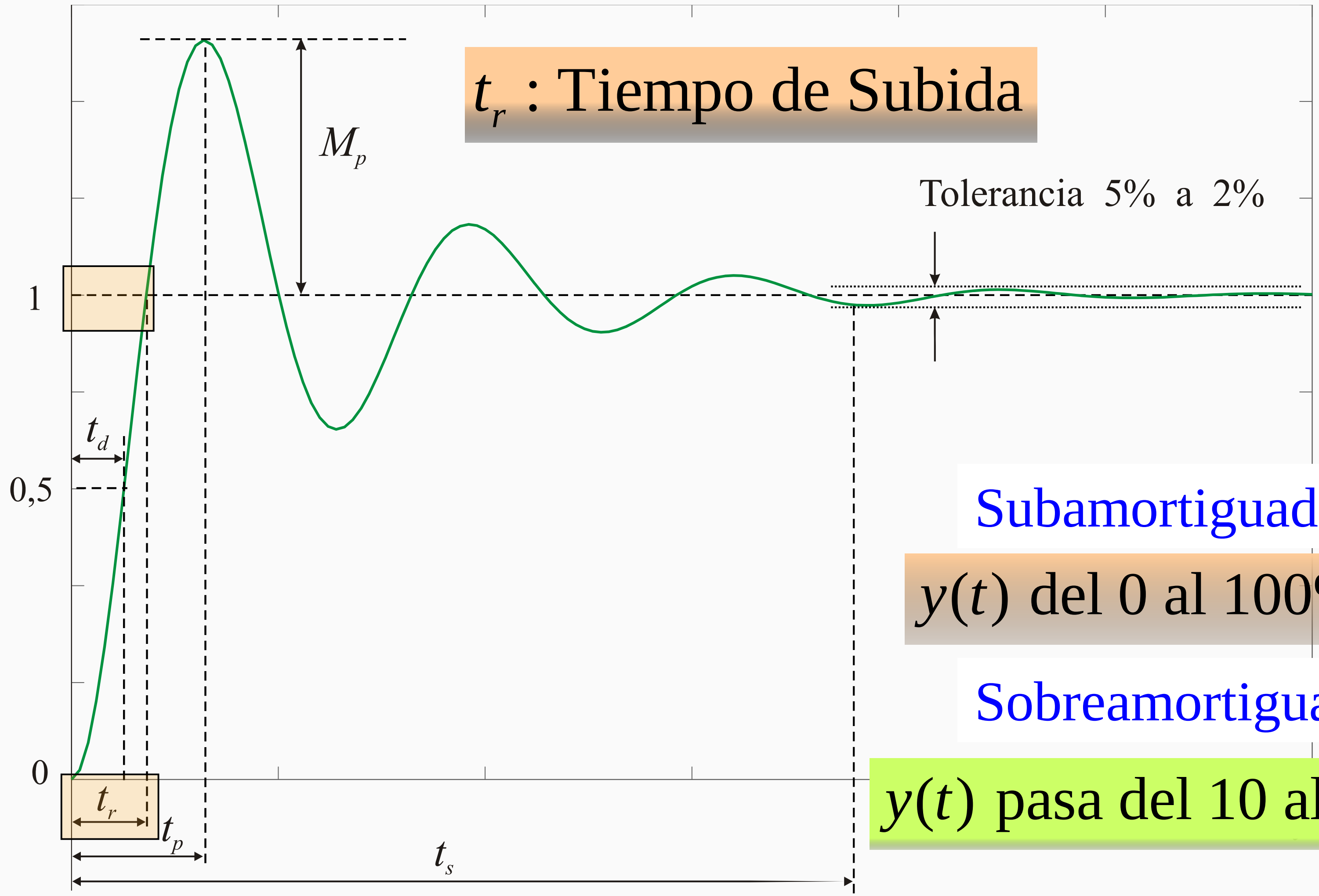
Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria



Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el 50% del valor final, luego de ser aplicada la entrada en escalón.

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria



t_r : Tiempo de Subida

y_{ss}

Matlab por defecto calcula en cualquier caso entre el 10 y el 90 % del valor final

Subamortiguado:

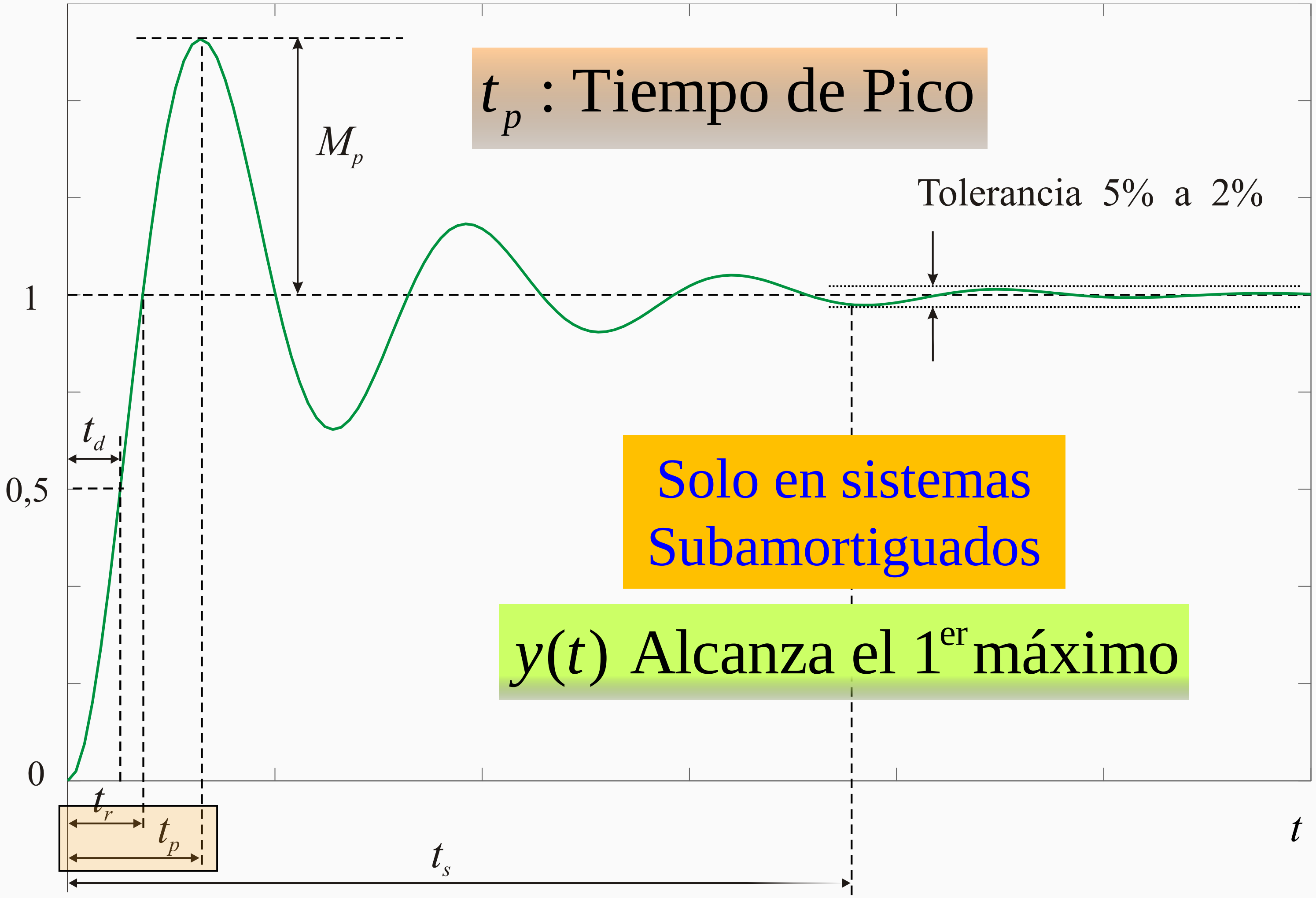
$y(t)$ del 0 al 100% de y_{ss}

Sobreamortiguado:

$y(t)$ pasa del 10 al 90% de y_{ss}

Análisis de la Respuesta Transitoria

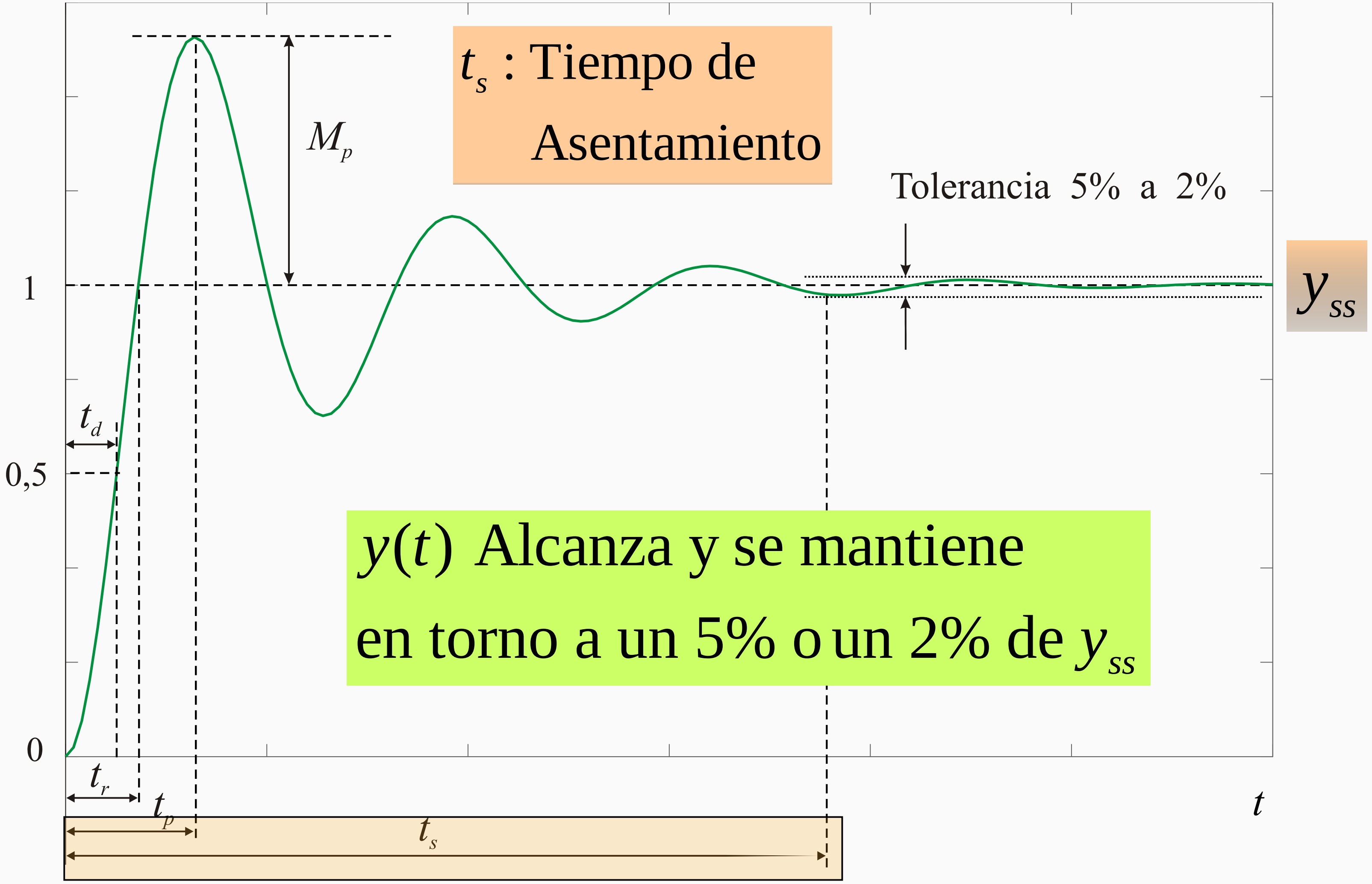
Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria



Es el tiempo en el cual la respuesta al escalón alcanza el primer pico del sobrepaso.

Análisis de la Respuesta Transitoria

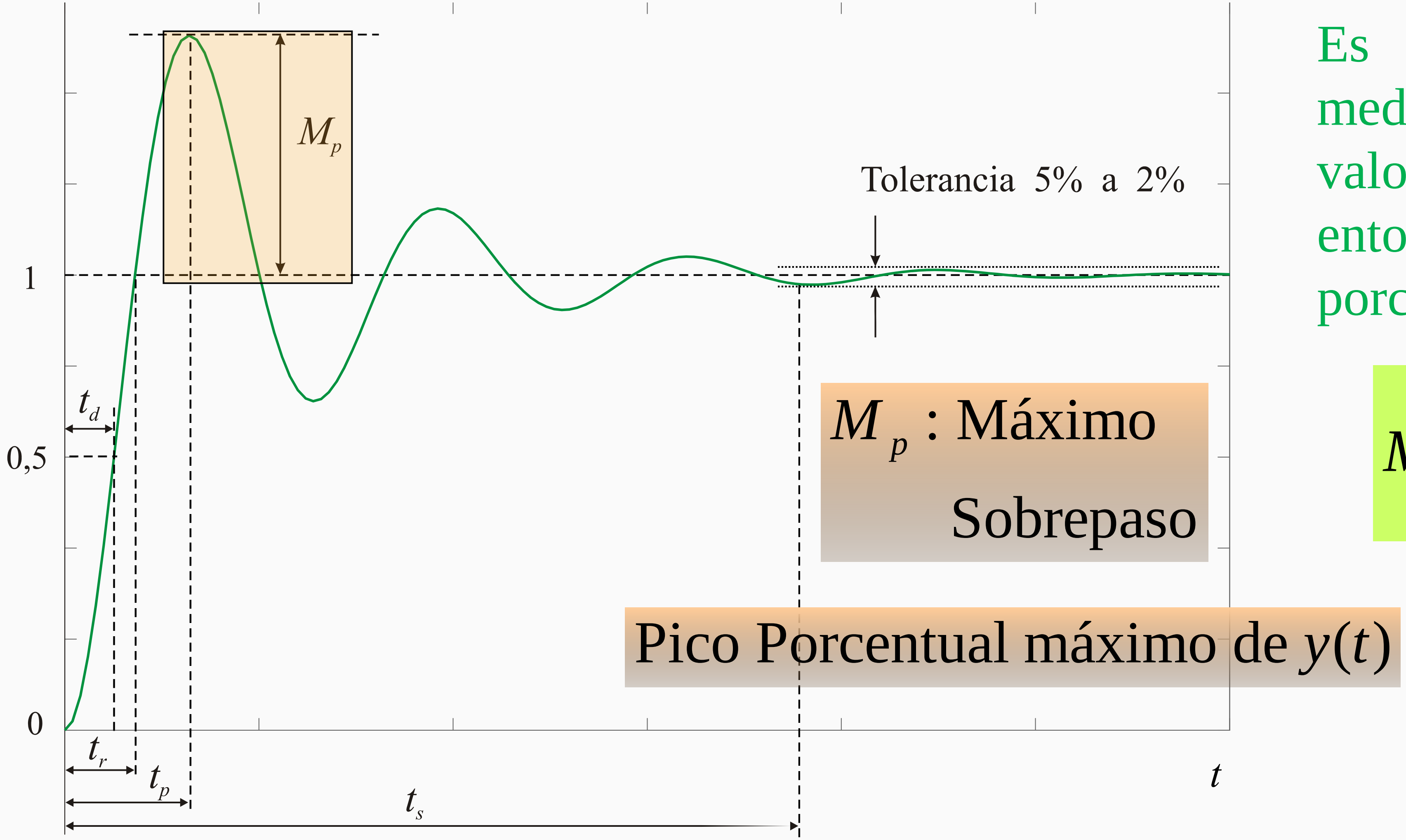
Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria



El tiempo de establecimiento tiene relación con la constante de tiempo mayor o predominante del sistema dinámico.

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria

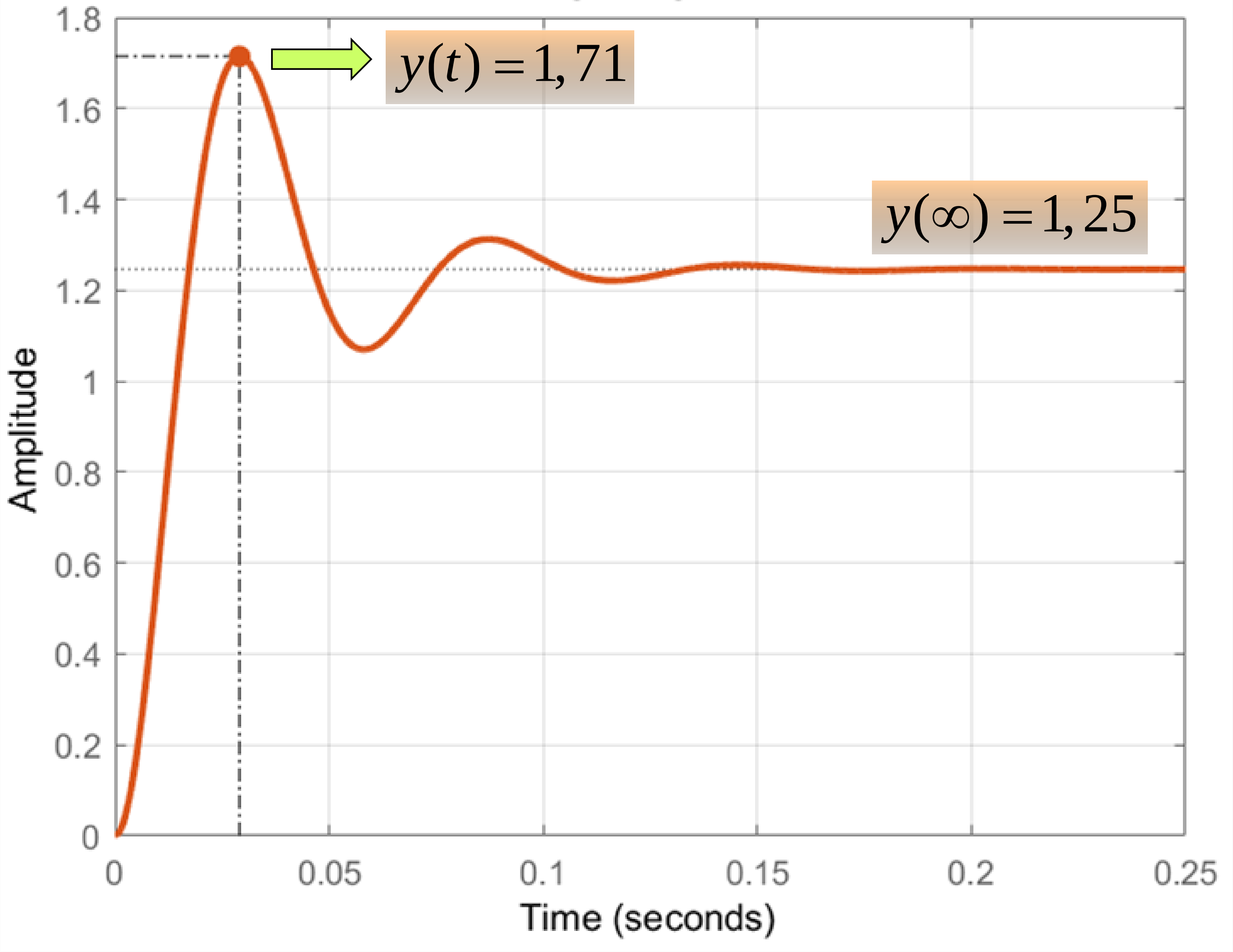


Es el máximo valor de pico medido desde la unidad. Si el valor final difiere de la unidad entonces, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo.

$$M_p(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria

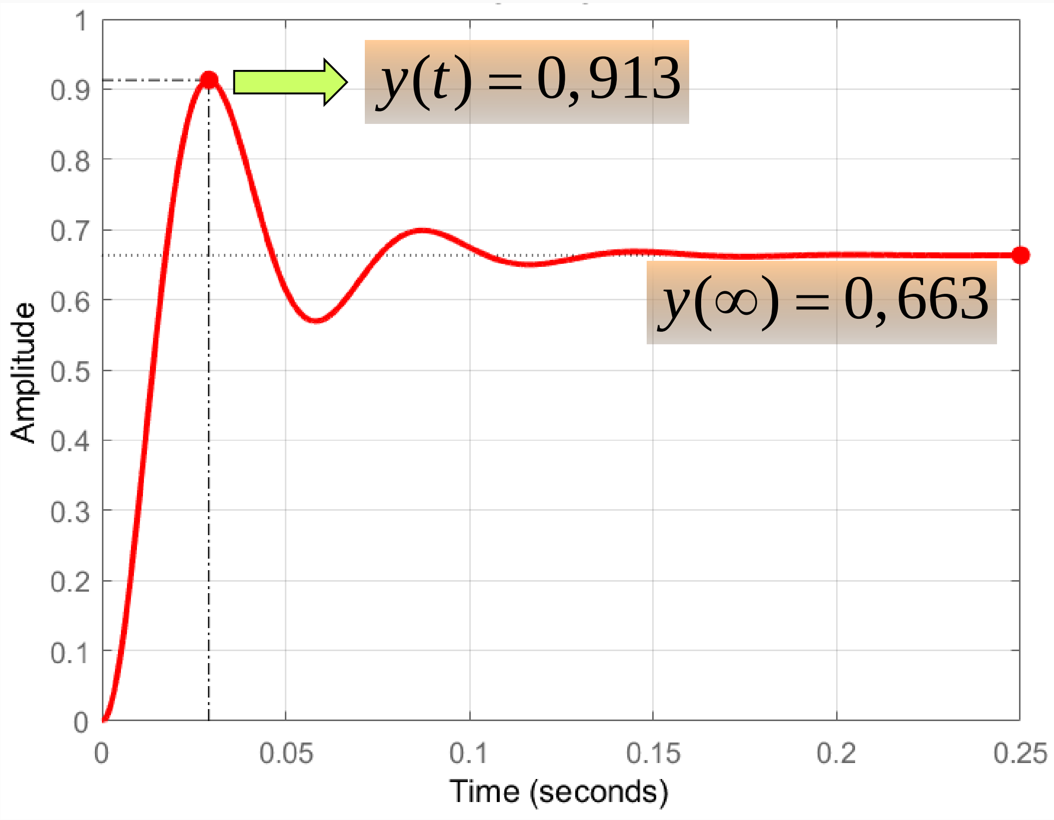


Ejemplo del motor CC

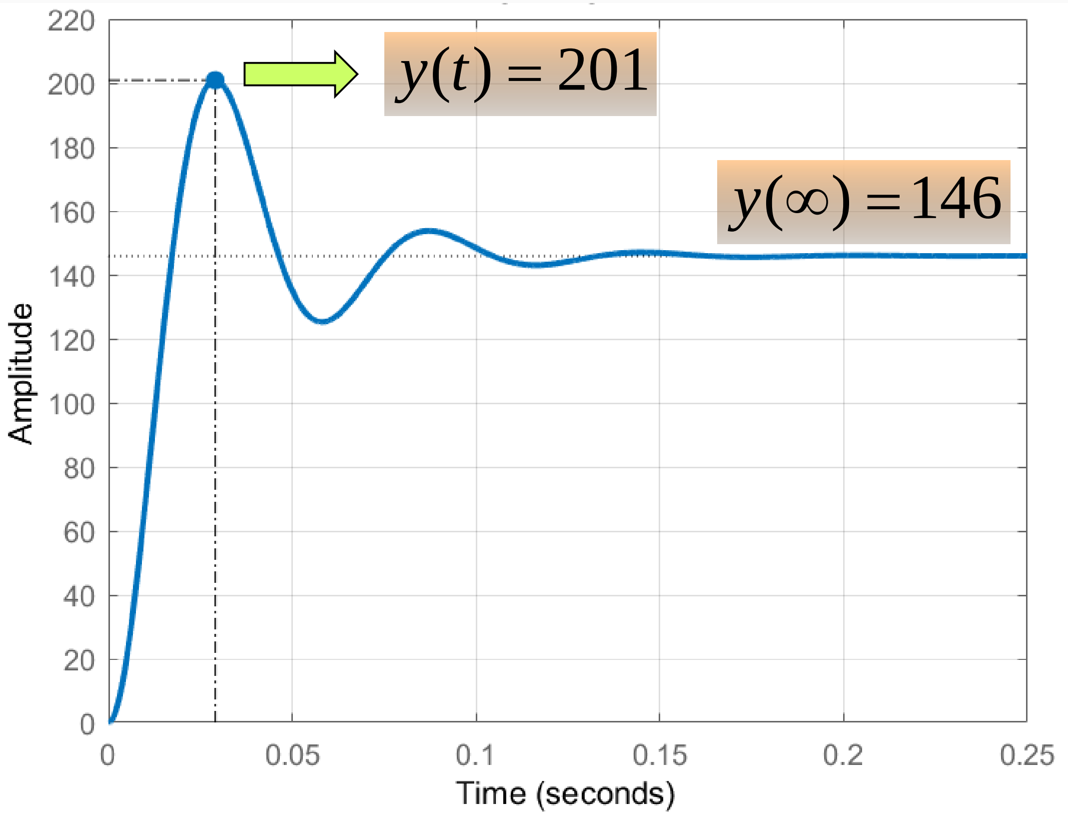
$$M_p(\%) = \frac{1,71 - 1,25}{1,25} = 36,8\%$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria



$$M_p(\%) = \frac{0,913 - 0,663}{0,663} = 37,7\%$$



$$M_p(\%) = \frac{201 - 146}{146} = 37,6\%$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Para obtener el sobrepaso de la respuesta al escalón:

$$\frac{d\left\{1-e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}sen(\omega_d t)\right]\right\}}{dt}=0$$

Se obtiene el tiempo de pico t_p

$$M_p = y(t_p)-1$$

$$M_p = e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

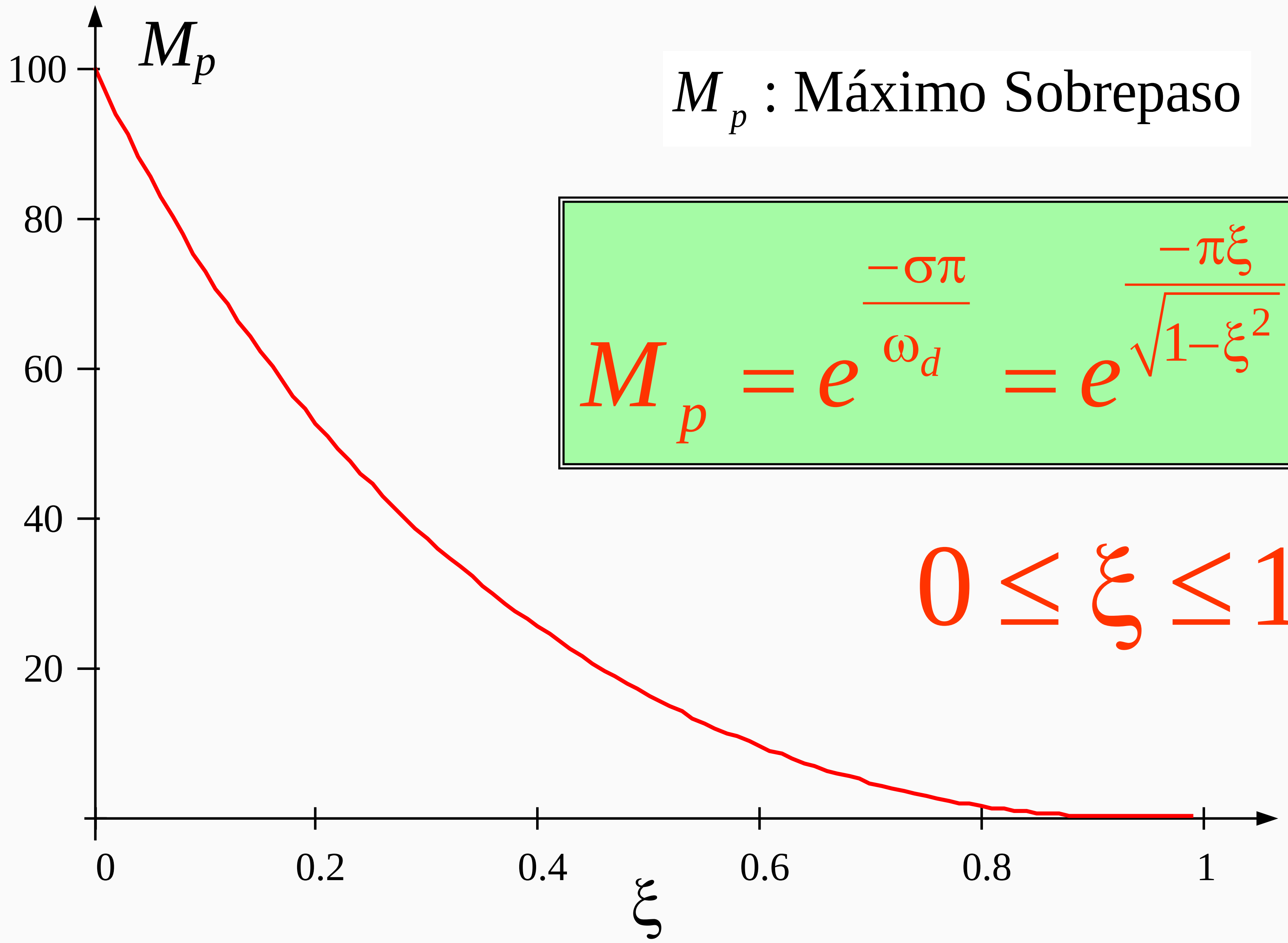
$$\xi\downarrow \; M_p\uparrow$$

IMPORTANTE:

Este es un parámetro indicativo de la **ESTABILIDAD ABSOLUTA** del sistema.

A mayor sobrepaso se tiene menor ξ y por ende, menor estabilidad del sistema.

Análisis de la Respuesta Transitoria



M_p : Máximo Sobrepaso

$$M_p = e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Especificaciones de la Respuesta Transitoria

t_s : Tiempo de Asentamiento

El tiempo t_s para la banda de tolerancia de 2% o 5% se mide en términos de la constante de tiempo $\boldsymbol{T}$

$$T = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{\sigma}$$

Existen 2 criterios:

$$5\% \quad \therefore \quad t_s = 3T = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$2\% \quad \therefore \quad t_s = 4T = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

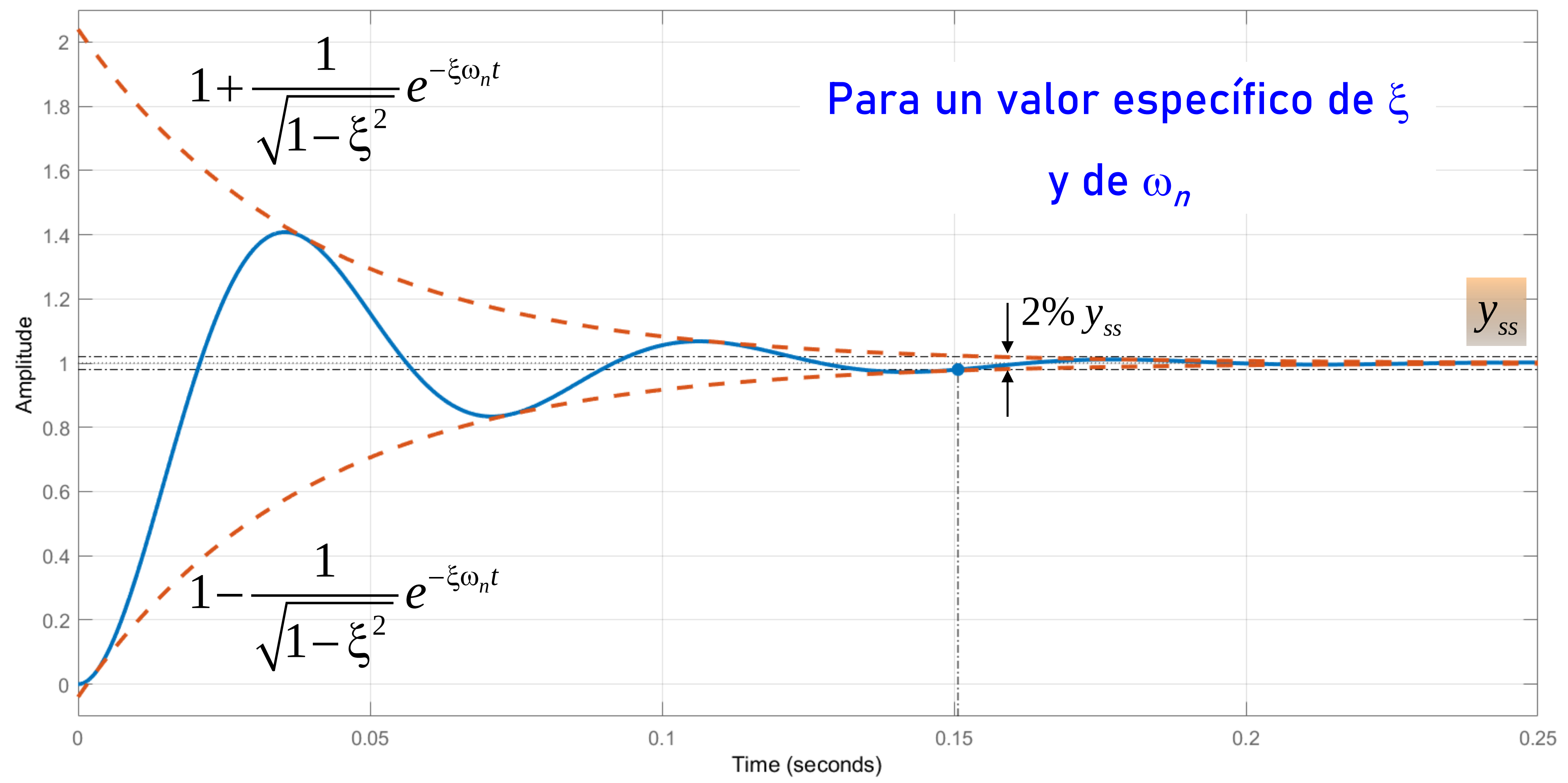
Se Observa que:

$$\boxed{\sigma \uparrow \quad t_s \downarrow}$$

σ aumentando hacia - ∞

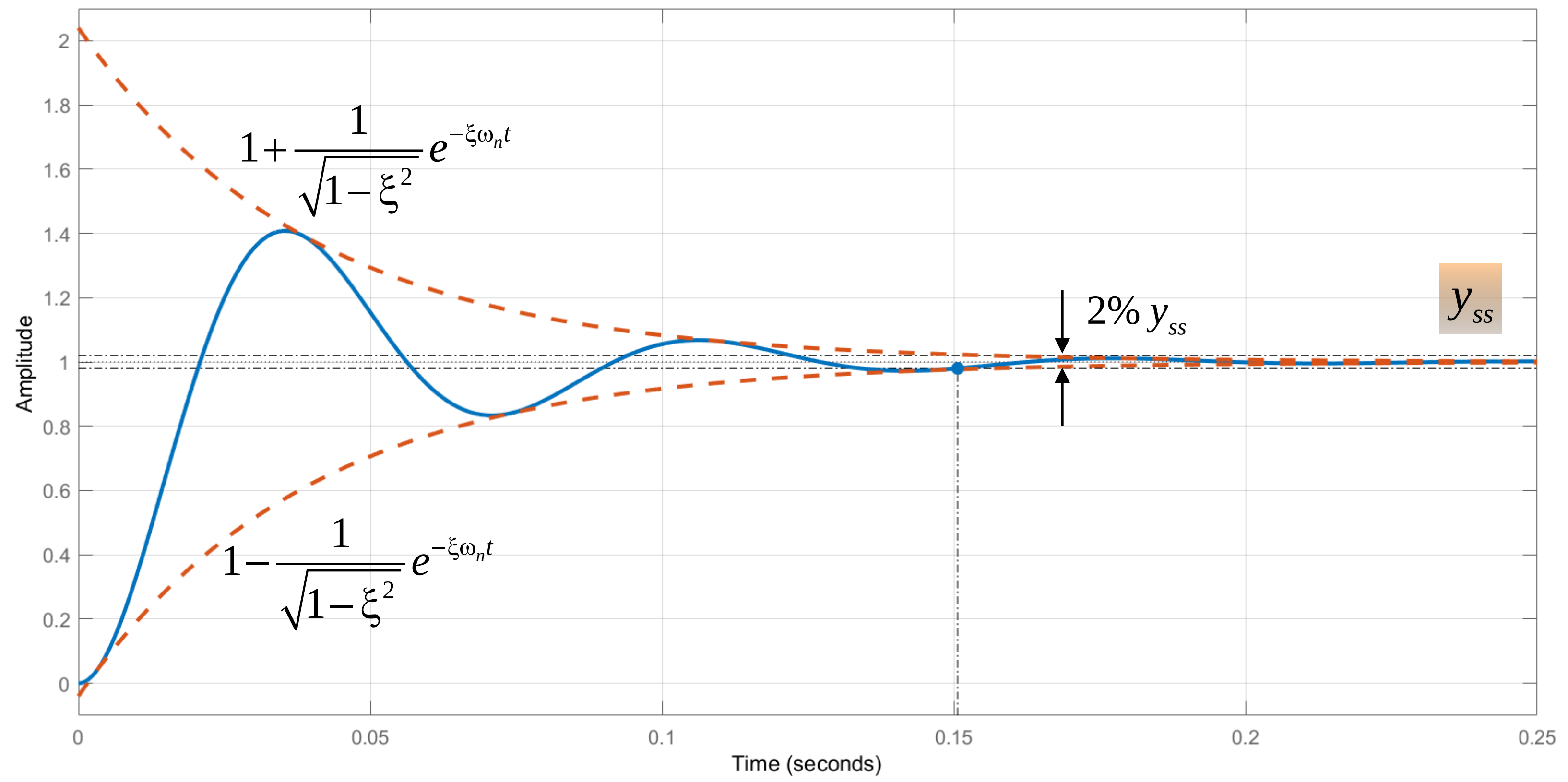
Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Tiempo de asentamiento



Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Segundo Orden: Tiempo de asentamiento



Para un valor especifico de ξ

$$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}=\lim\_\inf$$

$$e^{-\xi\omega_n t}=(1-\lim\_\inf)\sqrt{1-\xi^2}$$

$$e^{-\xi\omega_n t}=py_{ss}\sqrt{1-\xi^2}$$

Resolviendo para $t = t_s$

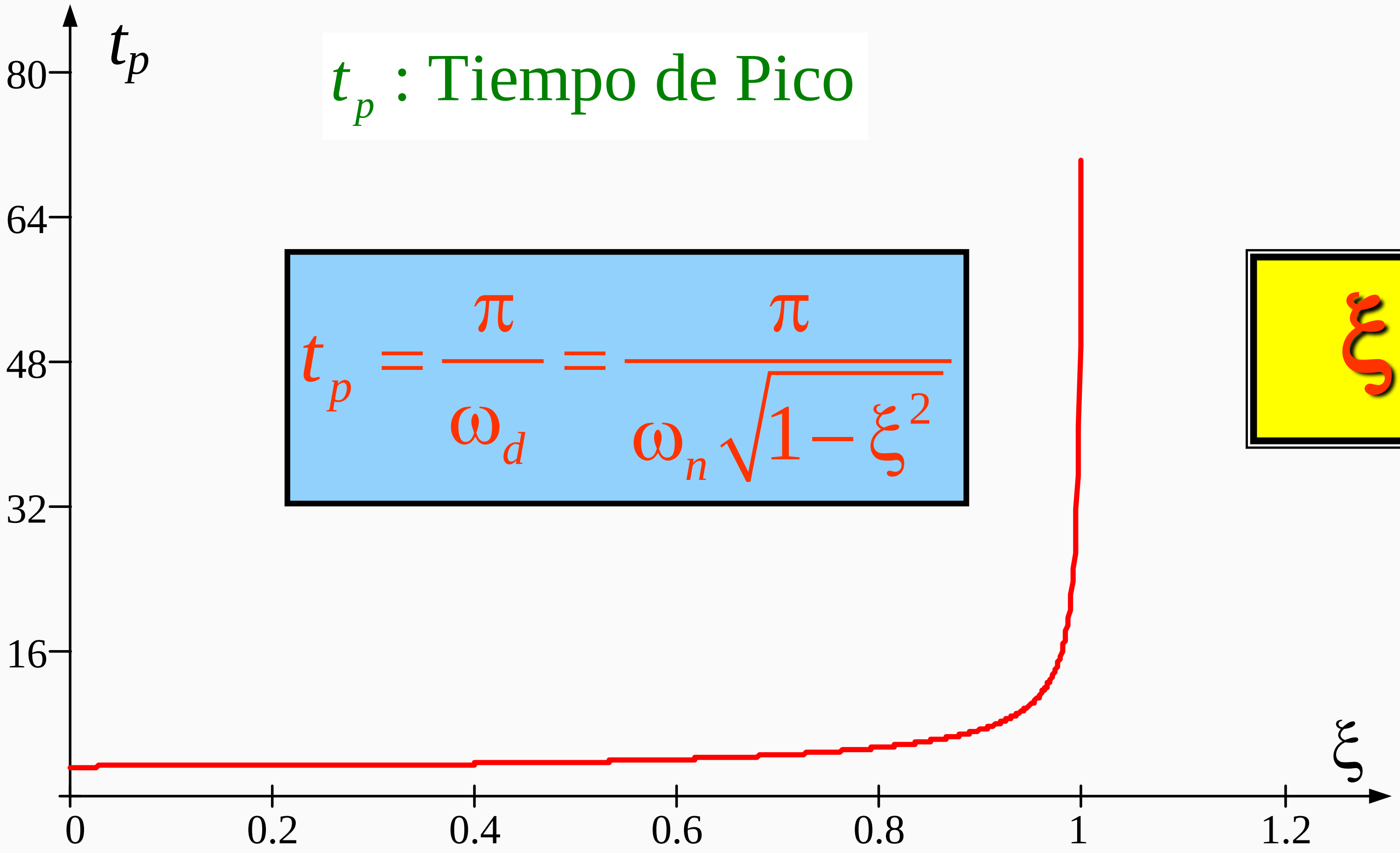
$$t_s=-\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\left(py_{ss}\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$\text{Si}: \lim\_\inf=0,98;\ py_{ss}=0,02$$

$$\text{y}\ \ \xi=0,7$$

$$\boxed{t_s=\frac{4,25}{\xi\omega_n}=\frac{4,25}{\sigma}}$$

Análisis de la Respuesta Transitoria



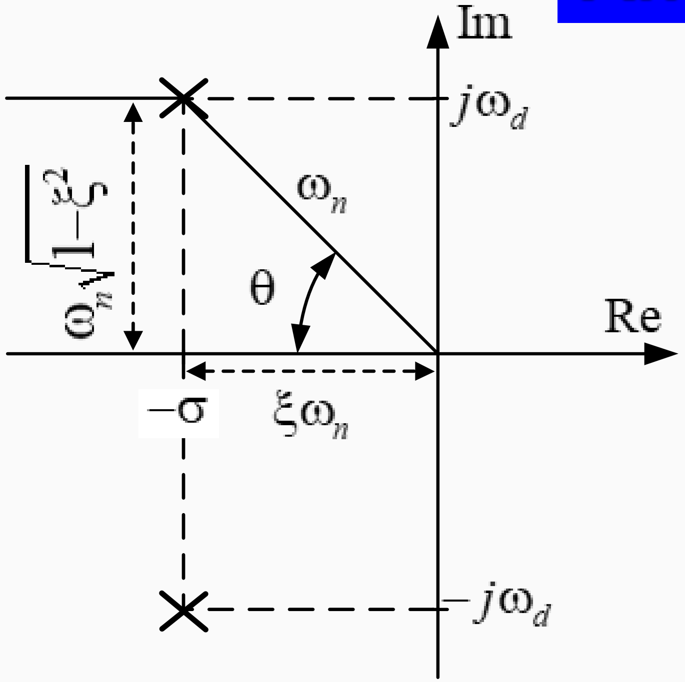
t_p : Tiempo de Pico

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\xi \uparrow \quad t_p \uparrow$

Se observa que t_p es directamente proporcional a ξ

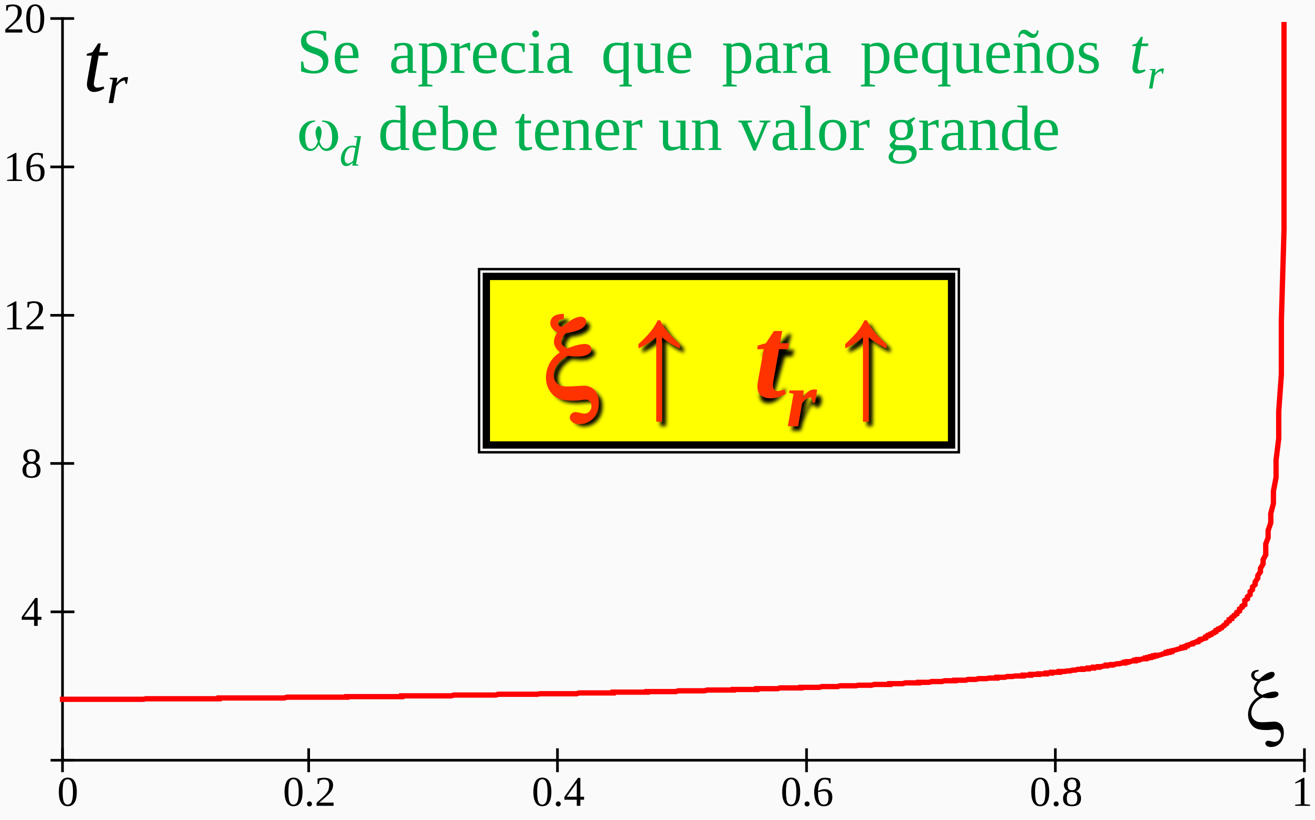
Análisis de la Respuesta Transitoria



t_r : Tiempo de Subida

Se aprecia que para pequeños t_r ω_d debe tener un valor grande

$$\xi \uparrow \quad t_r \uparrow$$



$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d},$$

$$\theta = tg^{-1}\left(-\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

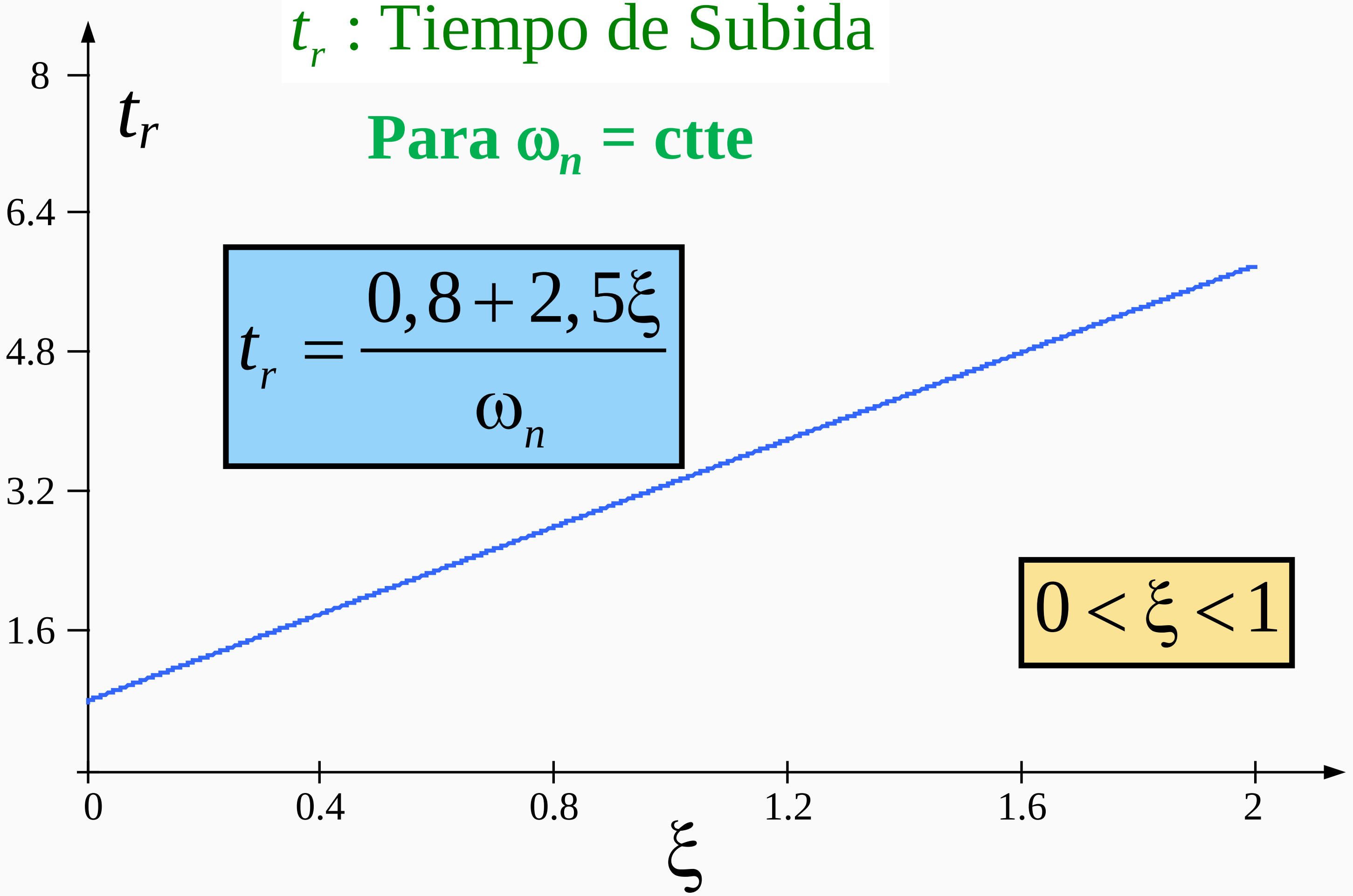
Se observa que t_r es directamente proporcional a ξ

Análisis de la Respuesta Transitoria

t_r : Tiempo de Subida

Para ω_n = ctte

$$\omega_n \uparrow \quad t_r \downarrow$$



$$t_r = \frac{0,8 + 2,5\xi}{\omega_n}$$

$$0 < \xi < 1$$

Aproximación de 2do Orden

$$t_r = \frac{1 - 0,4167\xi + 2,917\xi^2}{\omega_n}$$

Aproximación lineal y de 2° orden de t_r para sistemas subamortiguados

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior

$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k{}^2)}$$

Se observa que la respuesta de un sistema de orden superior está compuesta de varios términos conformados por las respuestas de los sistemas de primero y segundo orden.

La salida se puede reescribir:

$$Y(s) = R(s) + \sum_{j=1}^{q}\frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^{r}\frac{b_k(s+\xi_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}}{s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2}$$

Con $$R(s) = \frac{a}{s}$$

Siendo *a* la magnitud de amplitud del escalón

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior

Realizando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = a + \sum_{j=1}^{q} a_j\, e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k\, e^{-\xi_k \omega_k t} \cos\left(\omega_k \sqrt{1-\xi_k{}^2}\, t\right) + \sum_{k=1}^{r} c_k\, e^{-\xi_k \omega_k t} \operatorname{sen}\left(\omega_k \sqrt{1-\xi_k{}^2}\, t\right)$$

$$\text{cuando } t \to \infty \quad y(t) = a$$

La curva de respuesta de un sistema estable de orden superior es la suma de un número de curvas exponenciales y curvas sinusoidales amortiguadas, las cuales tienden a cero cuando t tiende a infinito, si los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano-s.

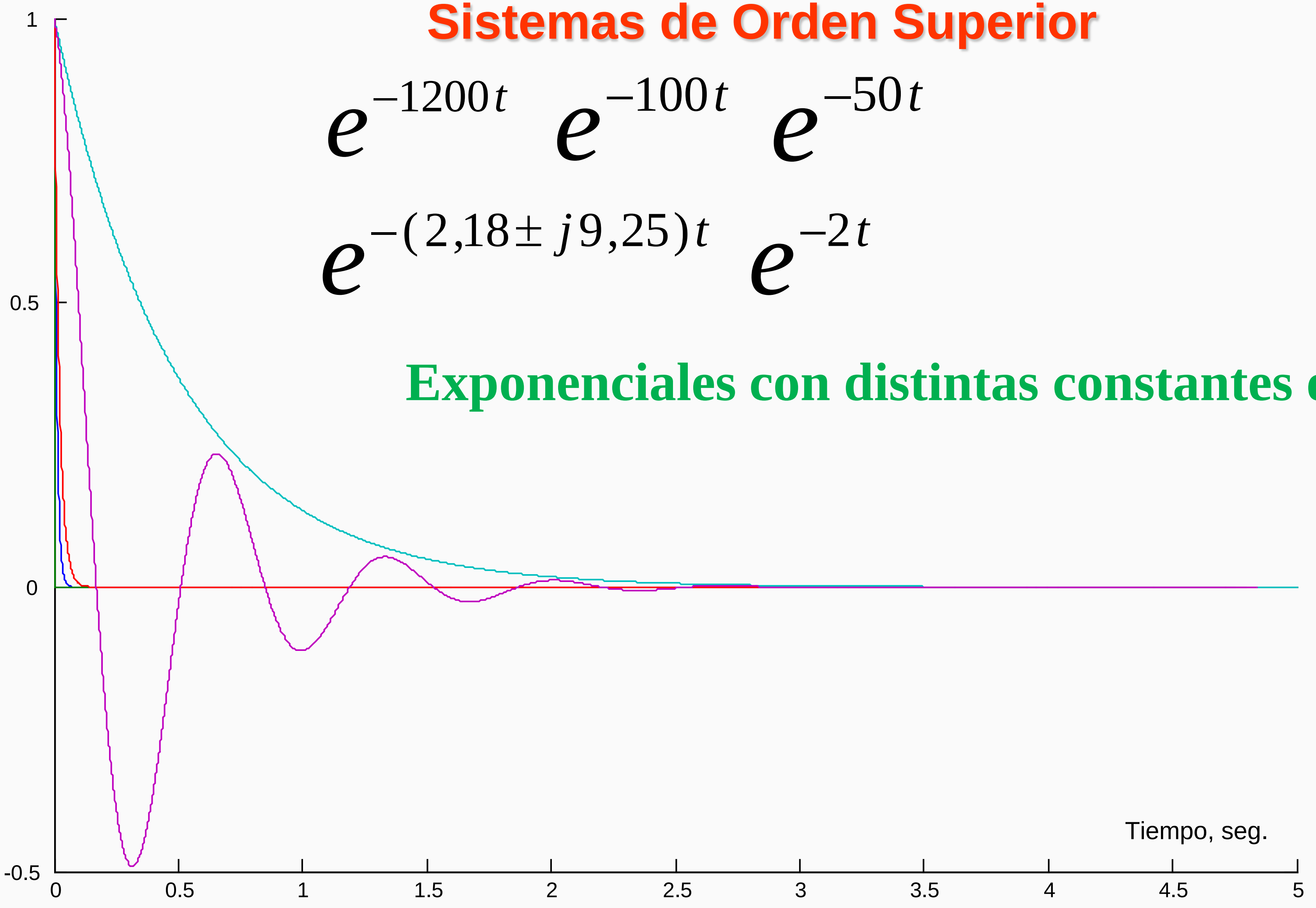
Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior

$$e^{-1200t} \quad e^{-100t} \quad e^{-50t}$$

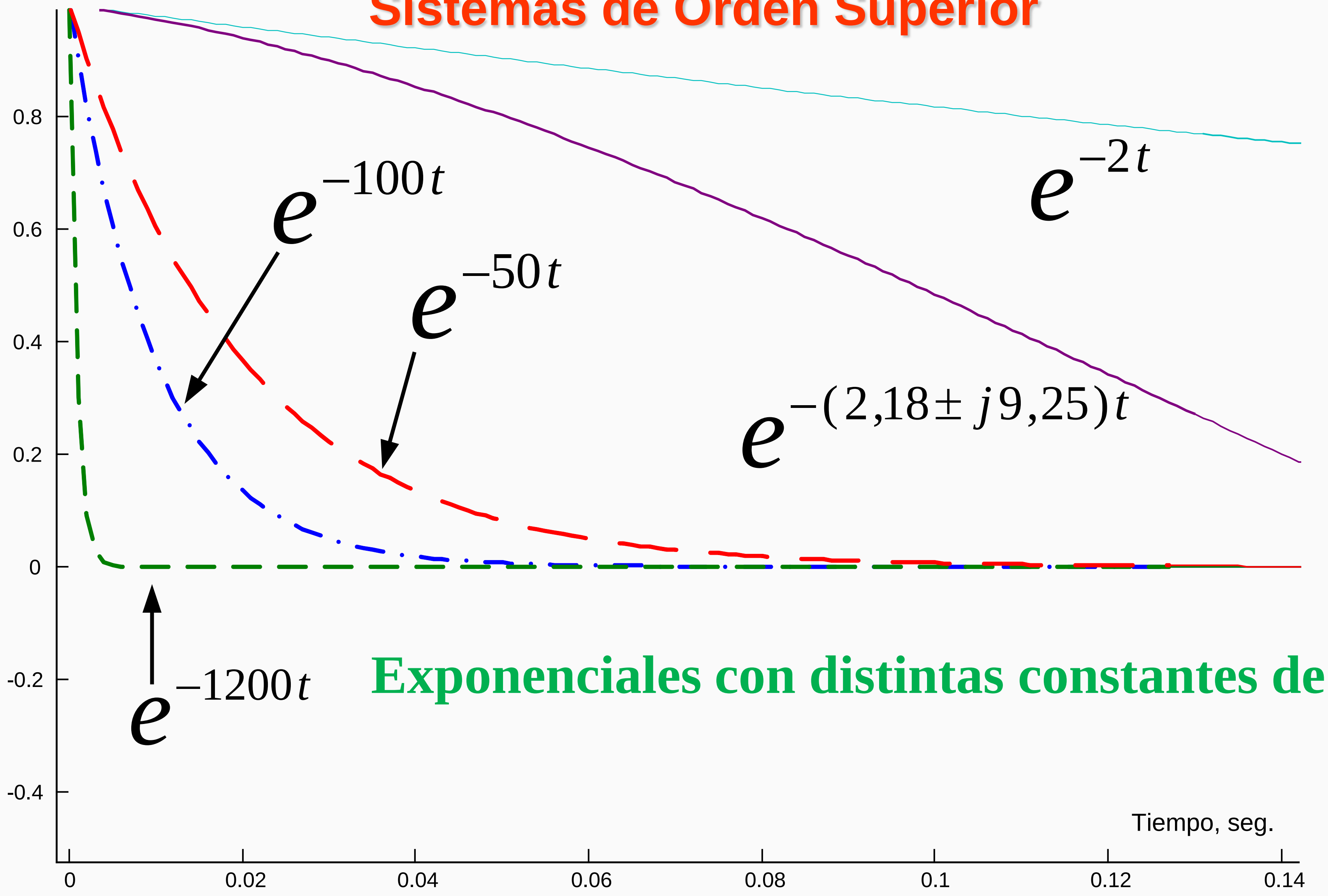
$$e^{-(2{,}18 \pm j9{,}25)t} \quad e^{-2t}$$

Exponenciales con distintas constantes de tiempo



Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior



Exponenciales con distintas constantes de tiempo

Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior

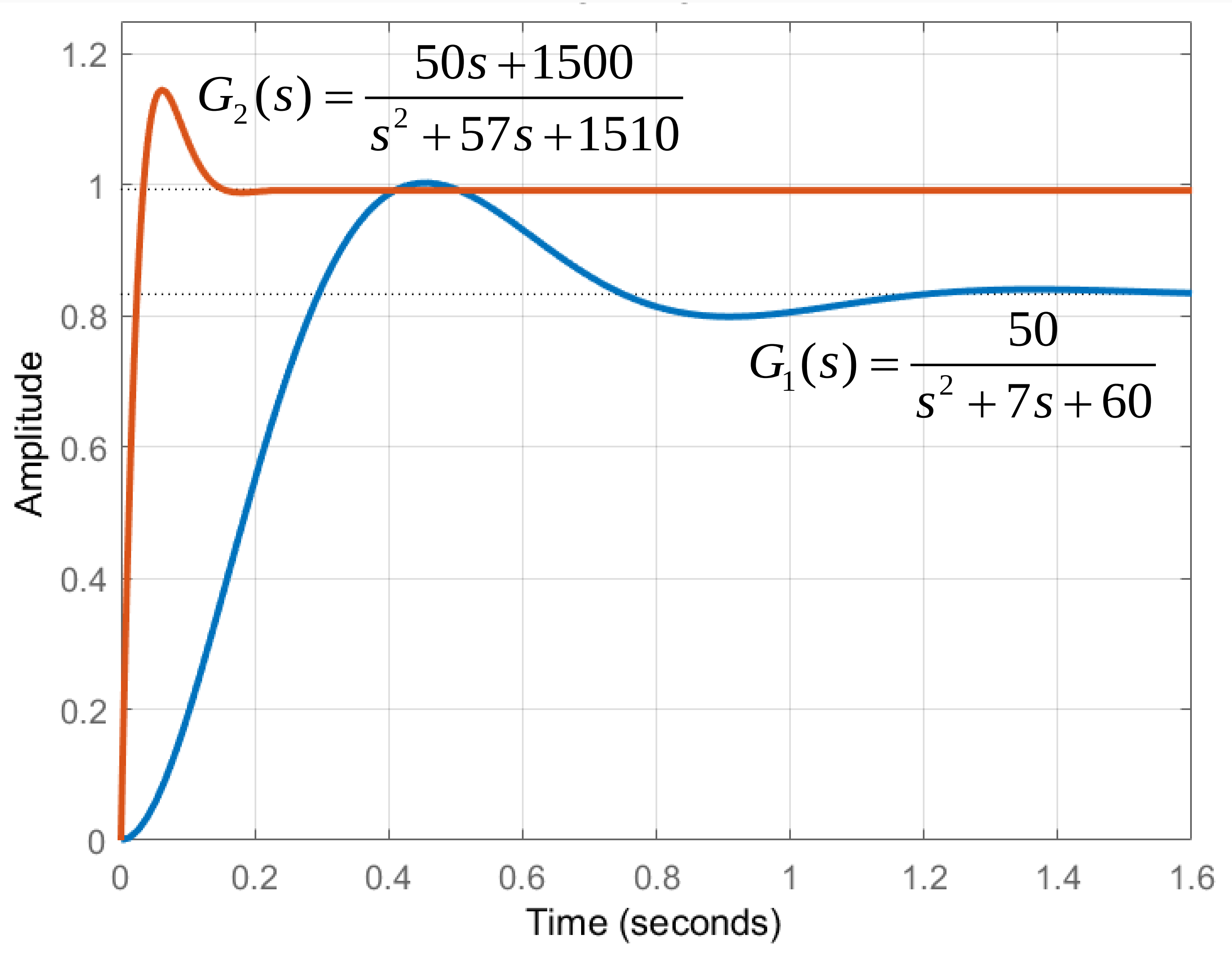
✍ La distancia horizontal al eje $j\omega$ de los polos de lazo cerrado determina el tiempo de asentamiento t_s. Esto es: la parte real $\sigma_k = \xi_k \omega_k$

✍ Los **polos de lazo cerrado** aparecen en los términos transitorios (exponenciales y sinusoidales) e informan sobre el **tipo de la respuesta transitoria.**

✍ Los **ceros de lazo cerrado determinan la forma de la respuesta transitoria.** y por lo tanto **afectan las amplitudes y fases**, pero no a los términos exponenciales.

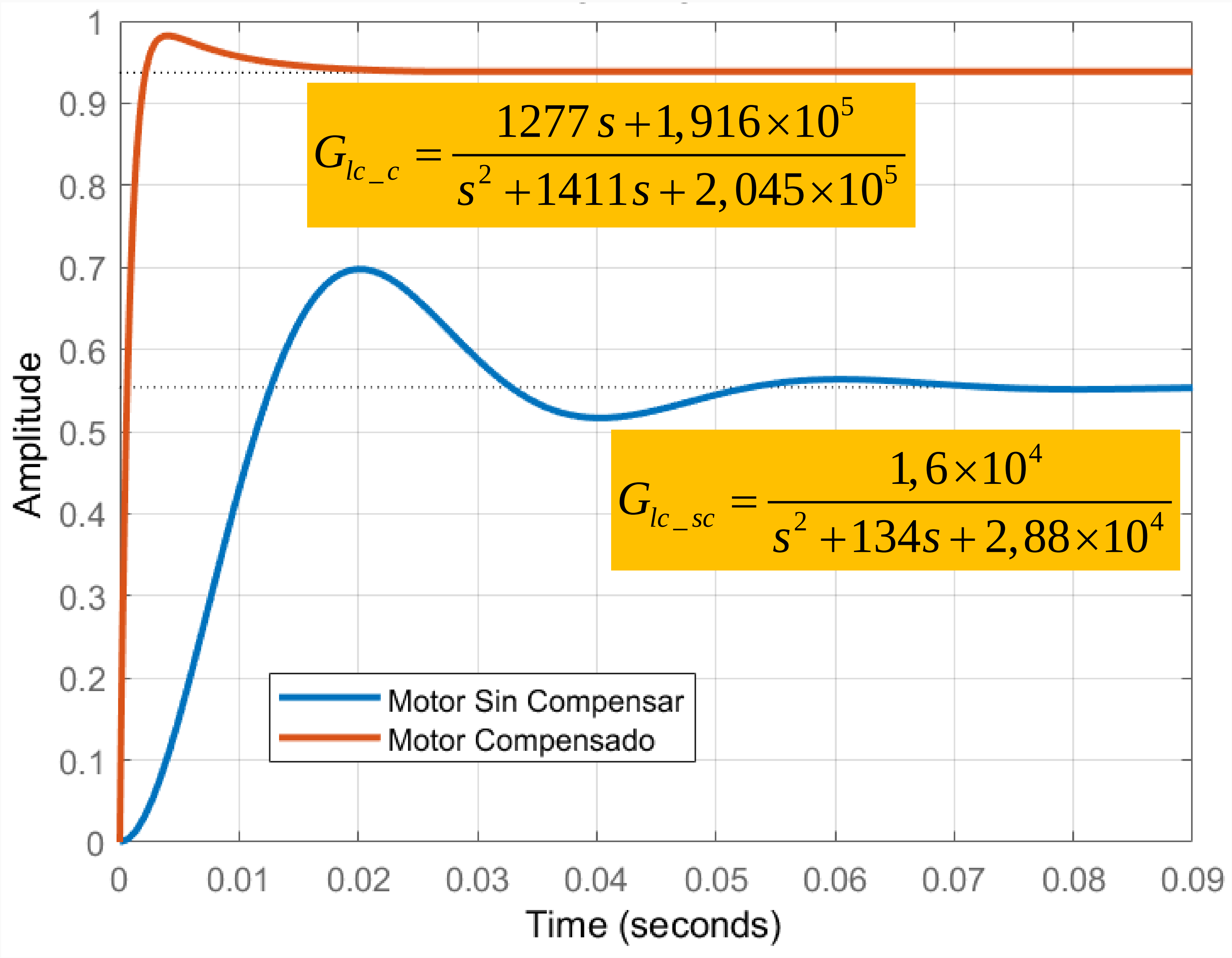
✍ Los polos de la señal de entrada $R(s)$, **producen los términos de la respuesta en estado estacionario o de régimen permanente.**

Análisis de la Respuesta Transitoria

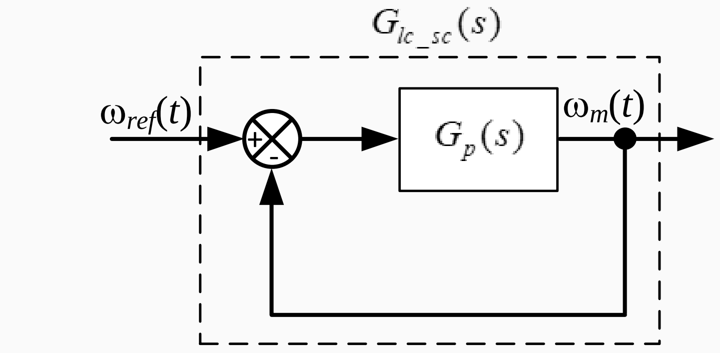


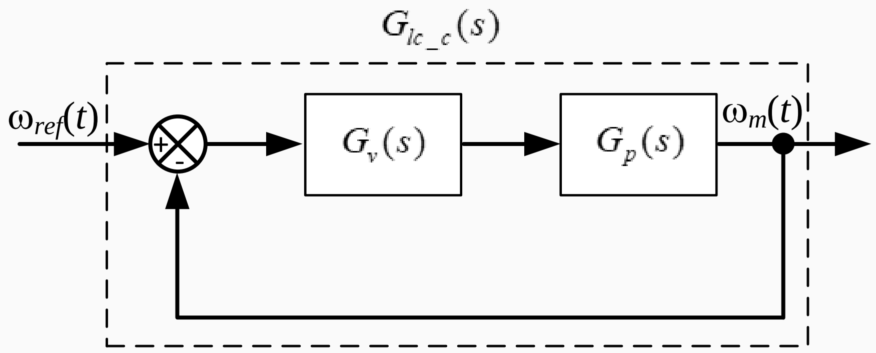
Ejemplos de funciones de transferencia en lazo cerrado con ceros y sin ceros.

Análisis de la Respuesta Transitoria

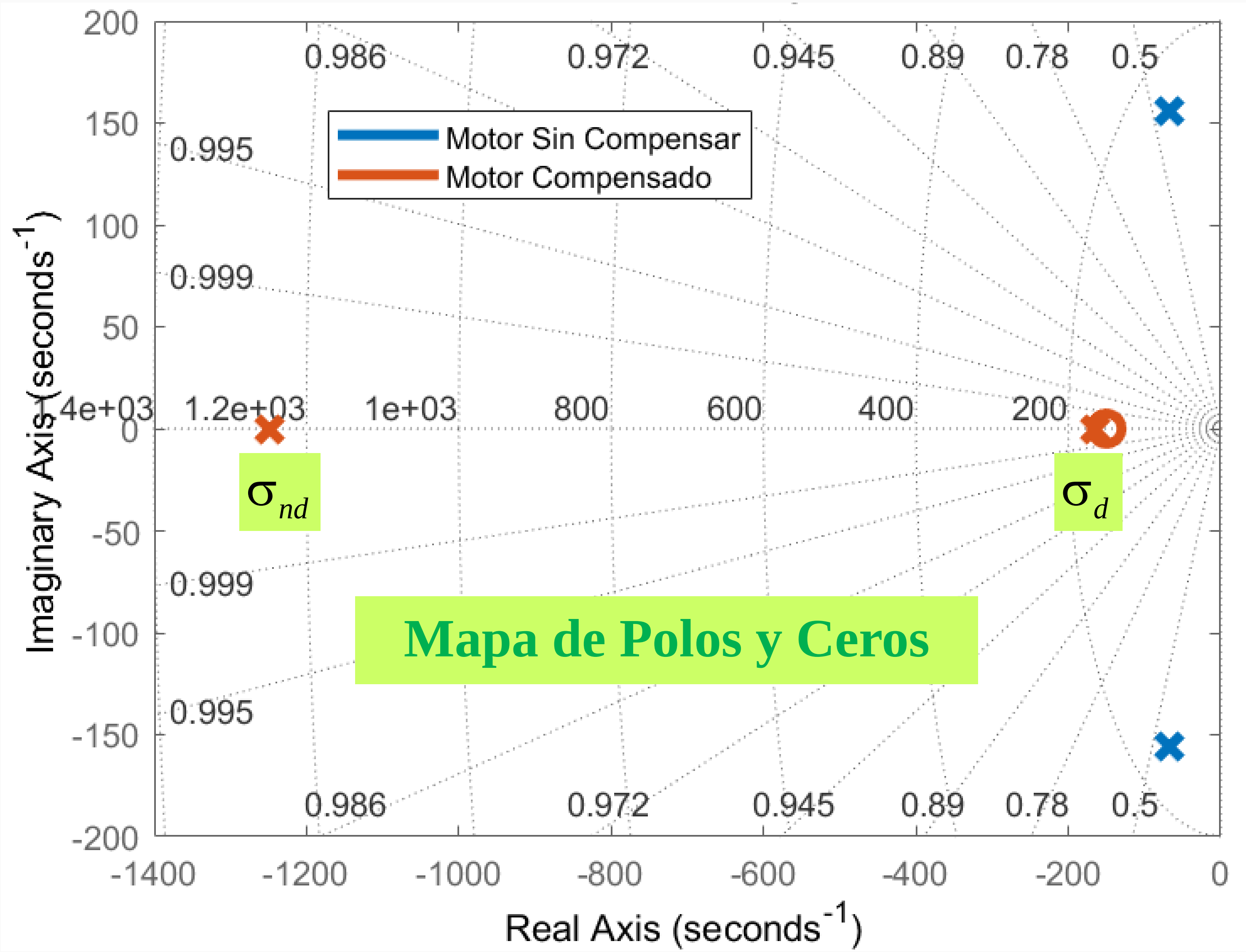


Ejemplos de funciones de transferencia en lazo cerrado con ceros y sin ceros.



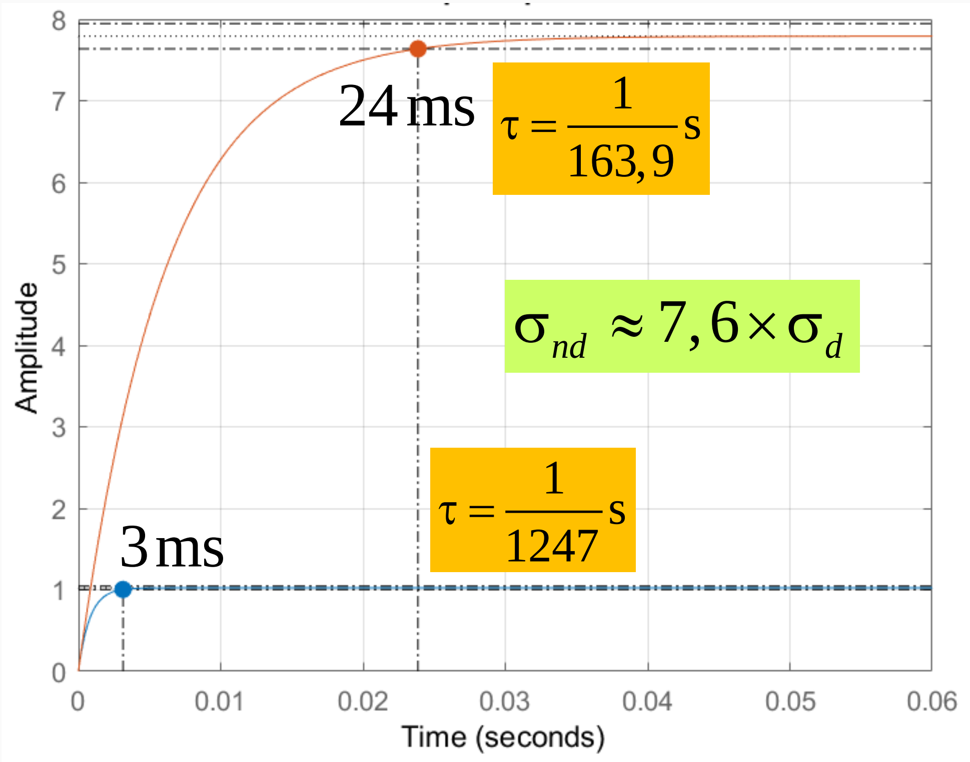


Análisis de la Respuesta Transitoria



$$G_{lc\_c} = \frac{1277(s+150)}{(s+1247)(s+163,9)}$$

$$G_{lc\_sc} = \frac{16000}{(s+67+j156)(s+67-j156)}$$

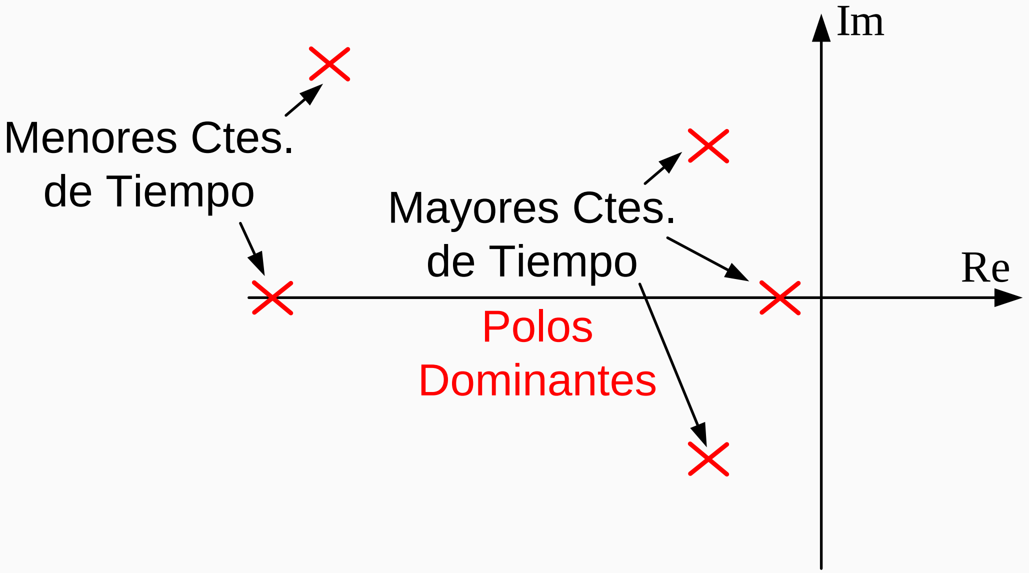


Análisis de la Respuesta Transitoria

Sistemas de Orden Superior

Cancelación de POLO-CERO: Cuando polos y ceros reales se encuentran muy cercanos. También es válido para pares de polos complejos conjugados.

Aproximación de POLOS DOMINANTES: Polos alejados del eje imaginario (reales o no) poseen constantes de tiempo menores (Sus efectos pueden ser despreciados).



Los Polos Dominantes caracterizan plenamente la Respuesta Transitoria y permiten reducir el orden del sistema.

Análisis de la Respuesta Transitoria

Aproximación por POLOS DOMINANTES

$$G_{os}(s) = \frac{136}{s^4 + 18s^3 + 87s^2 + 70s + 136}$$

Sistema de Orden Superior

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -9.1543 \\ p_2 &= -8.3369 \end{aligned}\right\}$$

Polos No Dominantes: constantes de tiempo pequeñas

$$\sigma_{nd} \cong 33 \text{ a } 36 \times \sigma_d$$

$$\left.\begin{aligned} p_3 &= -0.2544 + j1.3105 \\ p_4 &= -0.2544 - j1.3105 \end{aligned}\right\}$$

Polos Dominantes: constantes de tiempo importantes

$$G_{or}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistema de Orden Reducido

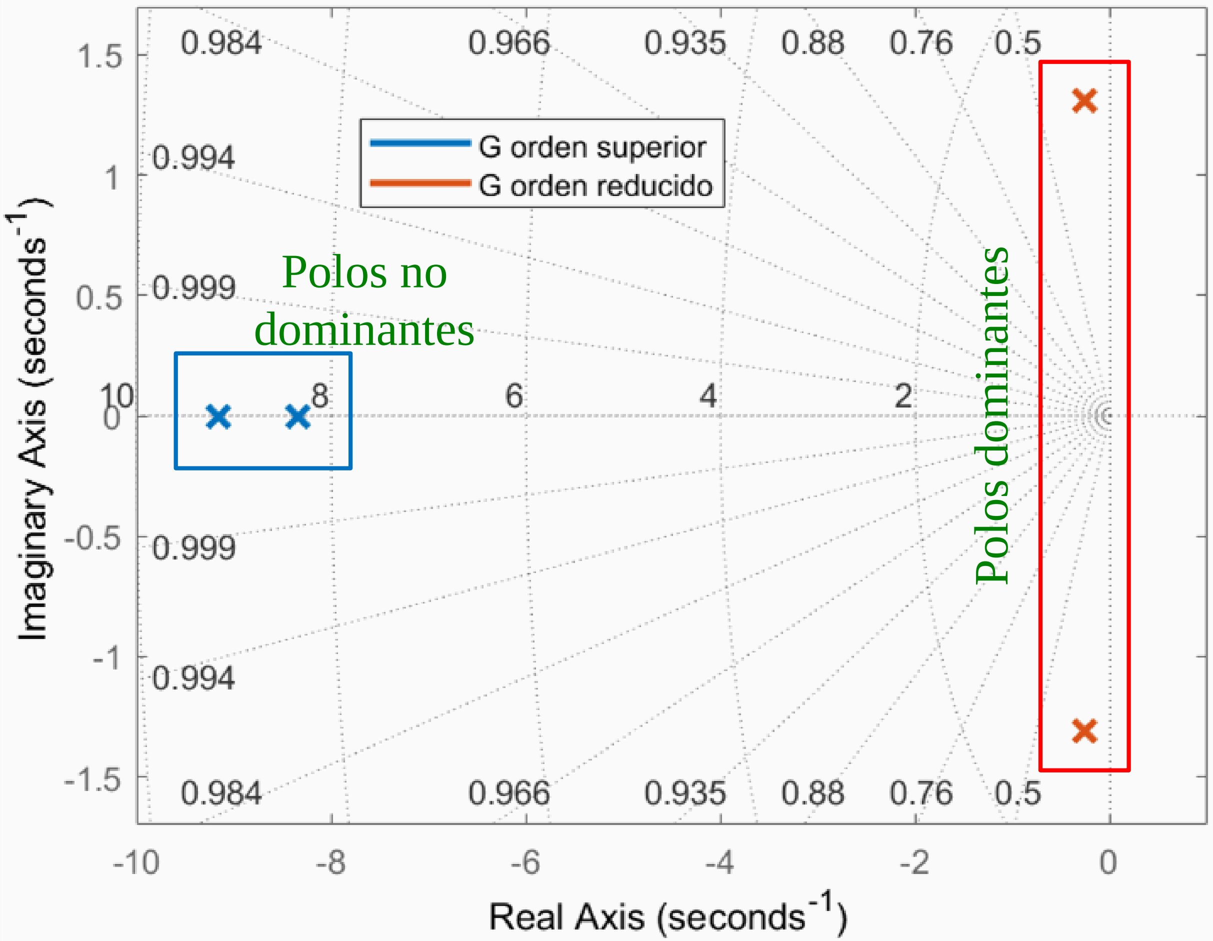
$$\omega_n = |p_3| = 1{,}335 \text{ r/s}$$

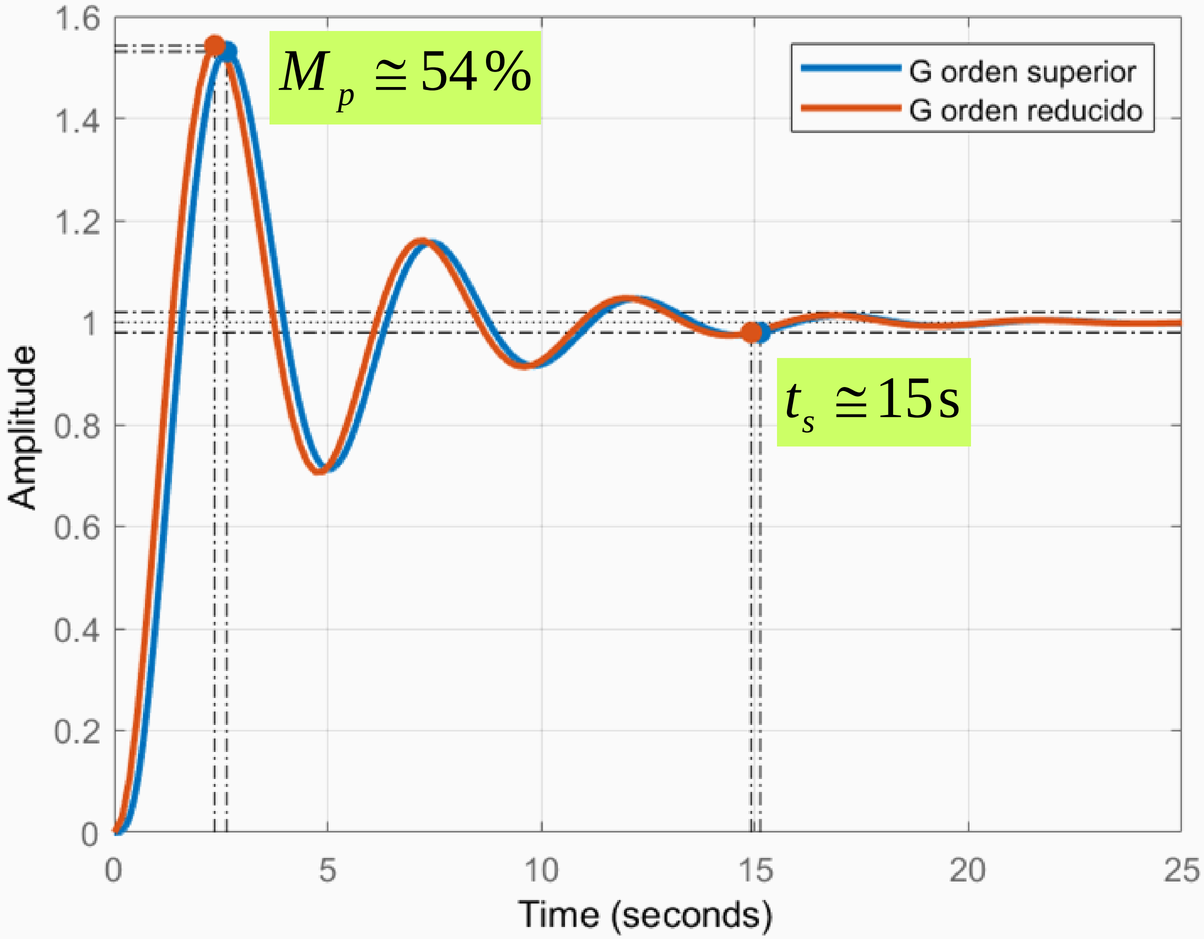
$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0{,}1906$$

Aproximación por POLOS DOMINANTES

$$G_{or}(s) = \frac{1,782}{s^2 + 0,5088\,s + 1,782}$$

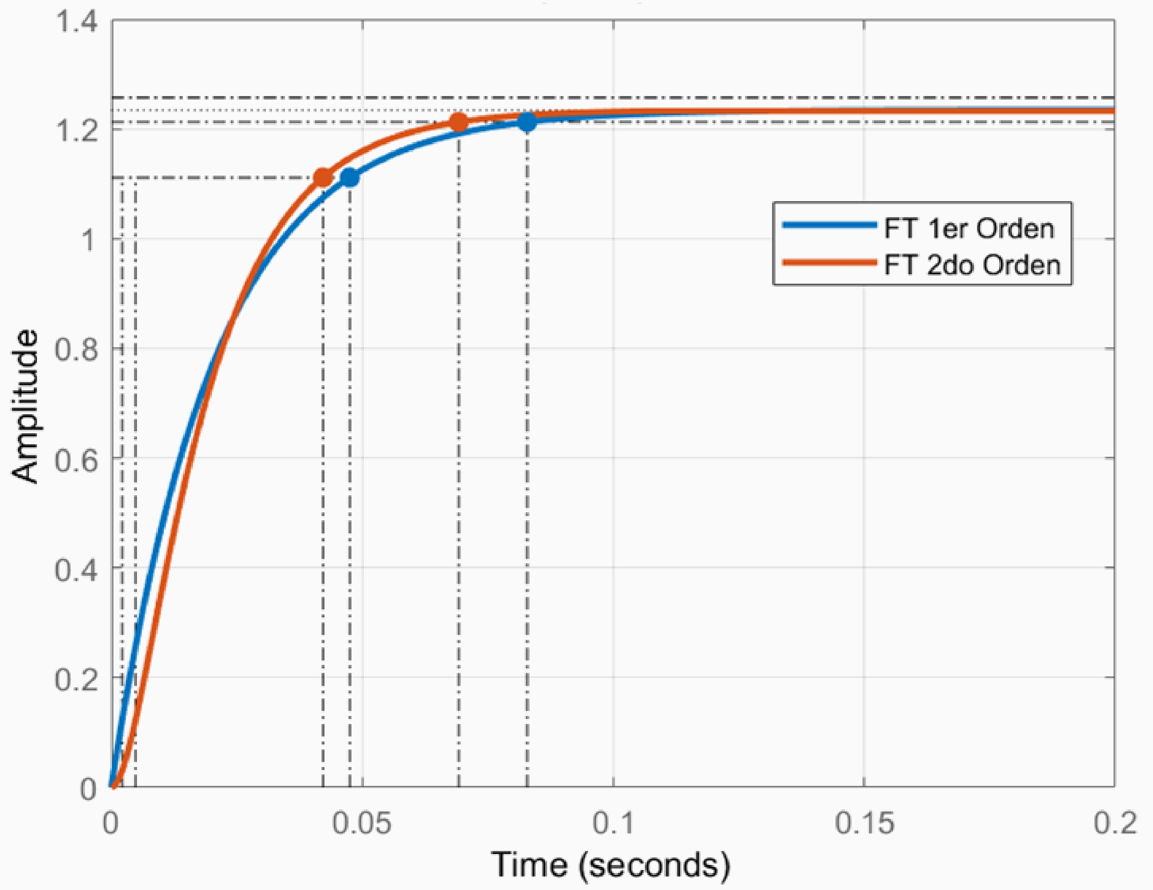
Sistema de Orden Reducido

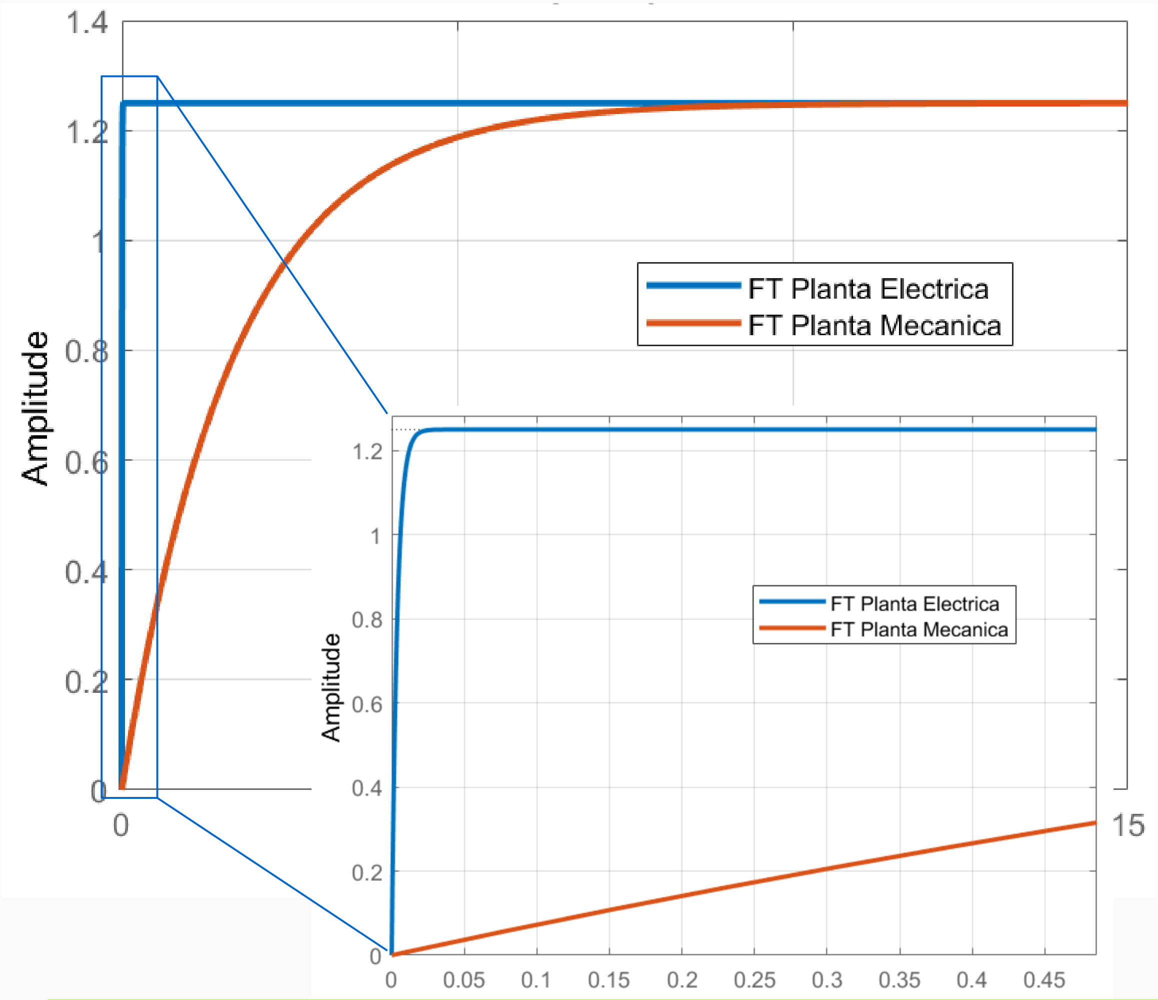




Aproximación por POLOS DOMINANTES

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a} = 0,0037\,\text{s} \qquad \tau_m = \frac{J}{b} = 1,67\,\text{s}$$



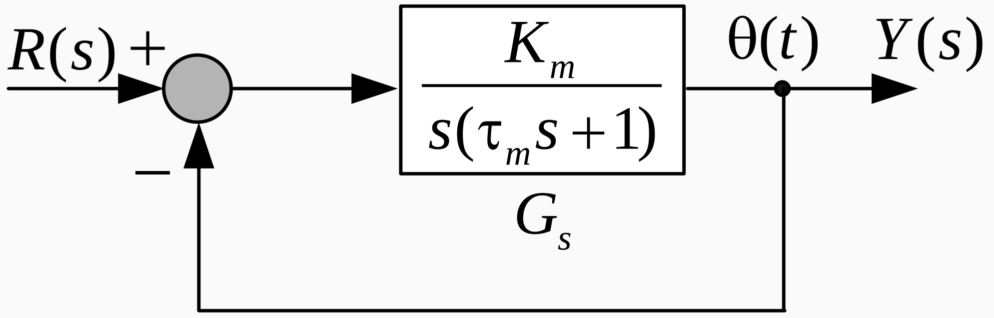


$$G_{oc}(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)} \rightarrow G_{or}(s) = \frac{K_1}{s+p_1}$$

Considerándose que p_1 es el polo dominante de $G_{oc}(s)$

Análisis de la Respuesta Transitoria: Motor CC

Sistemas de Segundo Orden: Servo Motor CC con control de posición



La FT entre la salida y la referencia es:

$$G_{lc} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_s}{1+G_s}$$

$$G_{lc} = \frac{K_m/\tau_m}{s^2 + \frac{1}{\tau_m}s + \frac{K_m}{\tau_m}}$$

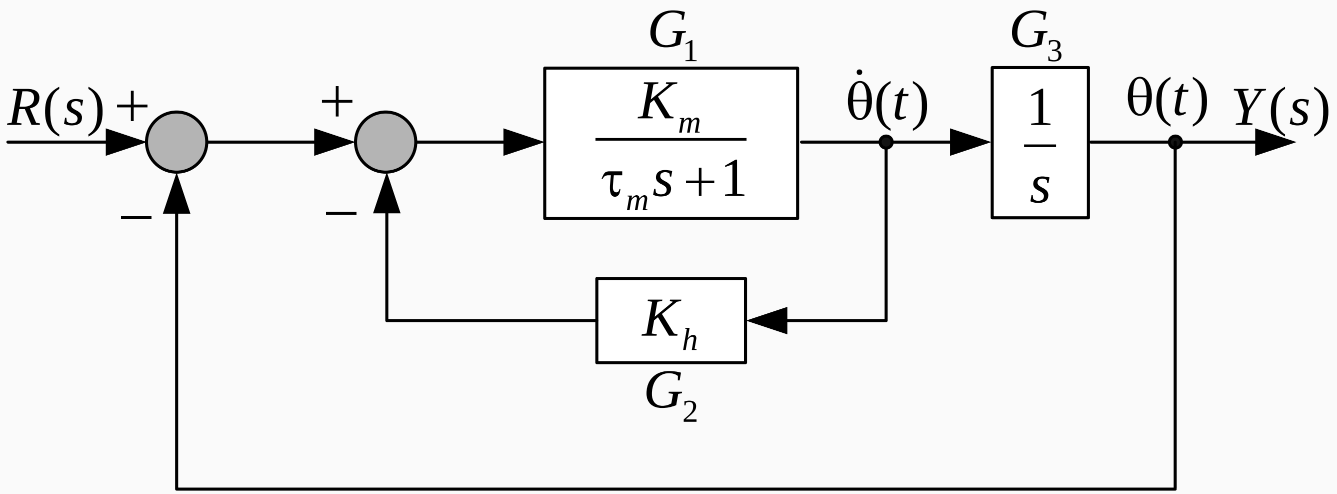
$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{\tau_m}}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2\omega_n\tau_m} = \frac{1}{2\sqrt{K_m\tau_m}}}$$

$$\tau_m = \frac{JR_a}{bR_a + K_tK_b} \qquad K_m = \frac{K_t}{bR_a + K_tK_b}$$

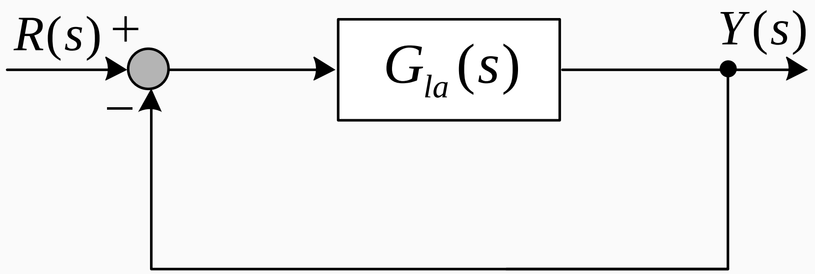
Análisis de la Respuesta Transitoria: Motor CC

Sistemas de Segundo Orden: Servomotor CC con control de posición y realimentación de velocidad



Mediante algebra de bloques:

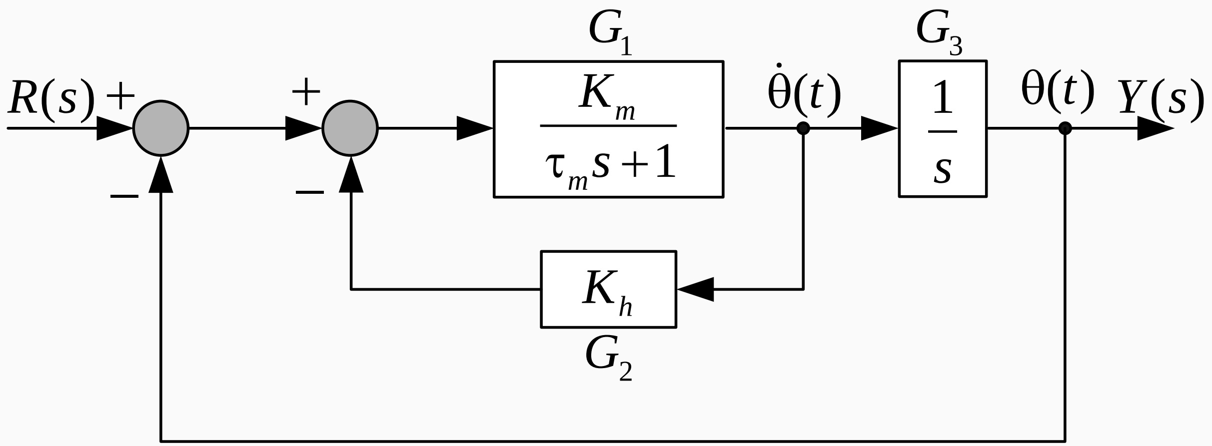
$$G_r = \frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{K_m}{\tau_m s + K_m K_h + 1} \qquad G_{la} = G_r G_3 = \frac{K_m}{s(\tau_m s + K_m K_h + 1)}$$



$$G_{lc} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{la}}{1+G_{la}}$$

Análisis de la Respuesta Transitoria: Motor CC

Sistemas de Segundo Orden: Servomotor CC con control de posición y realimentación de velocidad



$$G_{lc} = \frac{K_m / \tau_m}{s^2 + s\dfrac{(K_m K_h + 1)}{\tau_m} + \dfrac{K_m}{\tau_m}}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{\tau_m}}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{K_m K_h + 1}{2\omega_n \tau_m} = \frac{K_m K_h + 1}{2\sqrt{K_m \tau_m}}}$$

ξ Aumenta con la realimentación de la medida de la velocidad !!!

Análisis de la Respuesta Transitoria: Motor CC

Determinación del valor de K_h

Se definen las siguientes especificaciones de desempeño transitorio para el sistema en lazo cerrado

$$M_p \leq 10\% \qquad t_p \leq 0.9\,\text{seg}$$

Siendo la ctte de tiempo del motor: $\tau_m = 0,85$

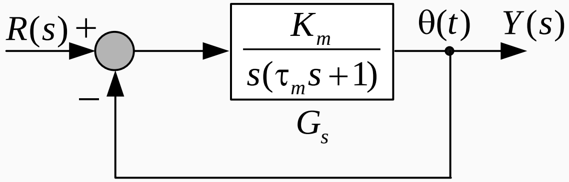
$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 10\% \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\ln(M_p)^2 + \pi^2}} = 0,59$$

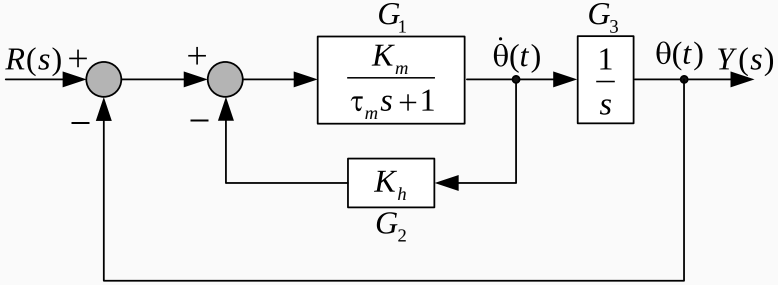
$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{\pi}{0,9} = 3,49\ \text{rad/seg} \qquad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = 4,328\ \text{rad/seg}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{\tau_m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_m = \omega_n{}^2\,\tau_m \cong 16}$$

$$K_m = 16 \qquad \xi = \frac{K_m K_h + 1}{2\sqrt{K_m \tau_m}}$$

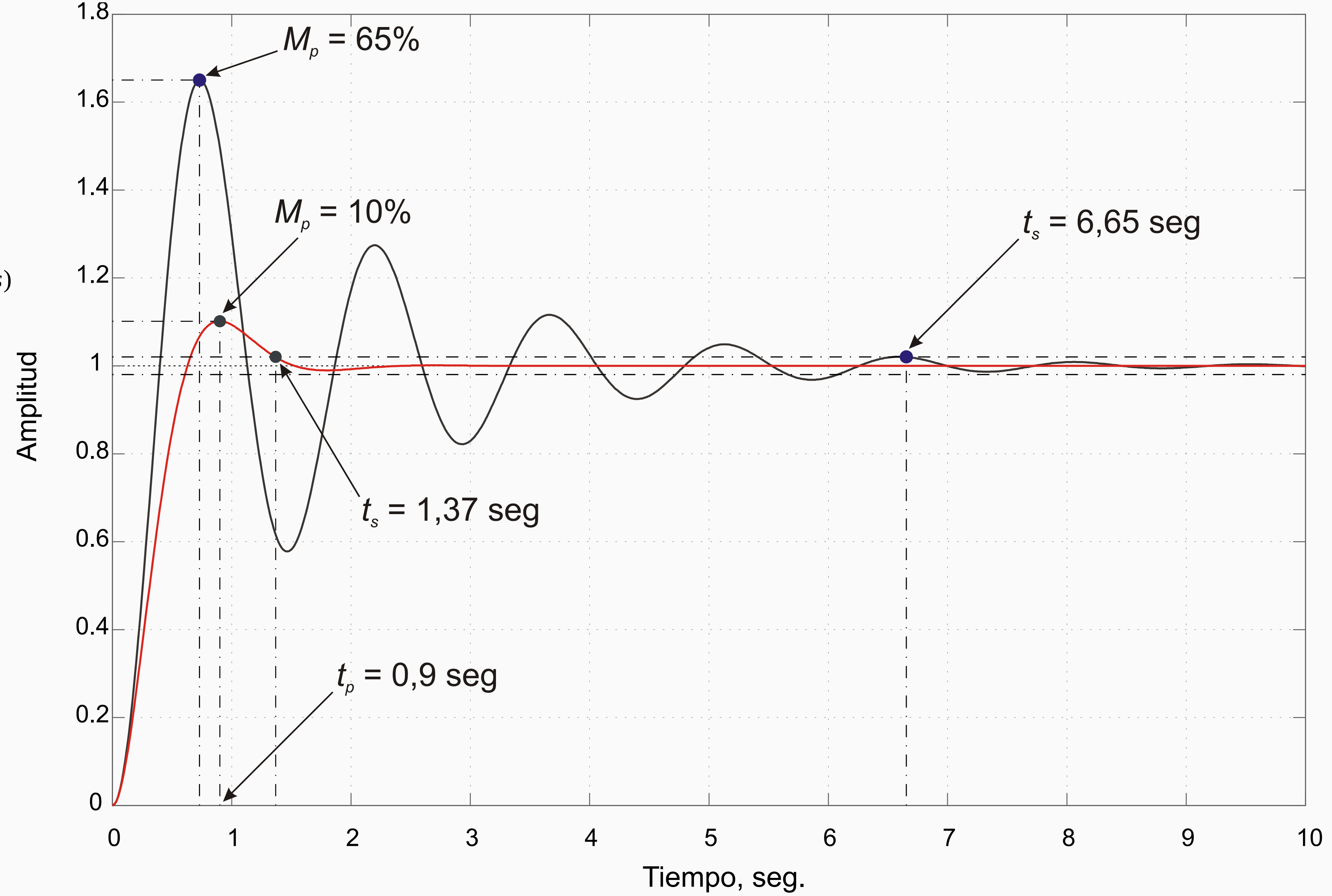
$$\boxed{K_h = \frac{2\xi\omega_n\tau_m - 1}{K_m} = 0,2}$$



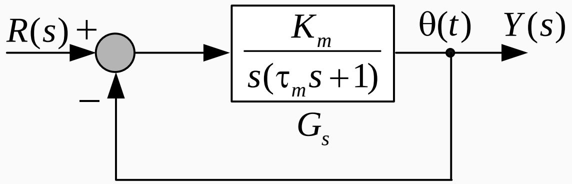


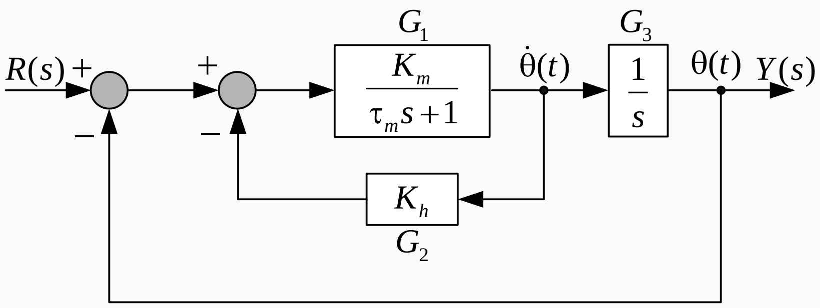
Respuestas de salida

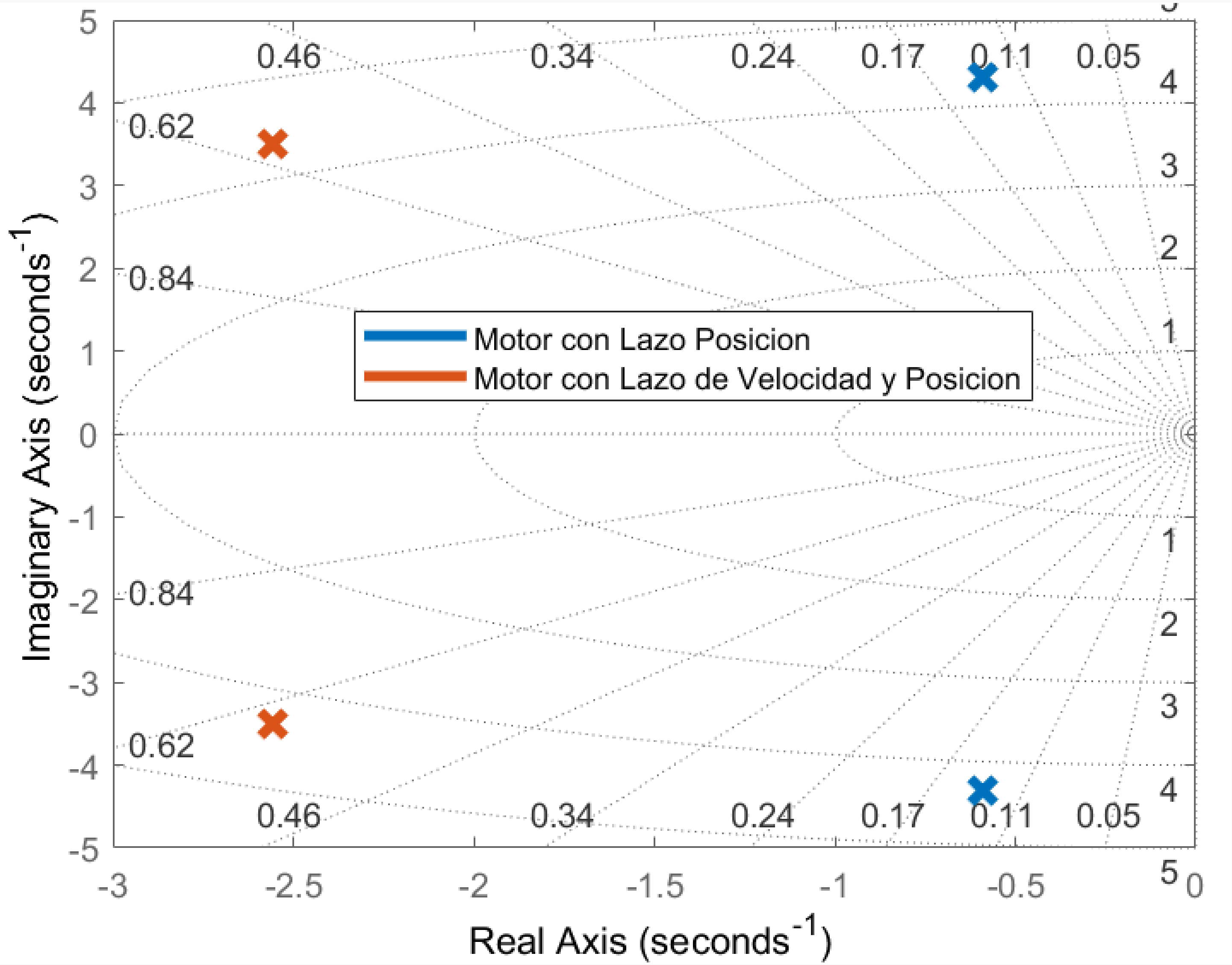
posición angular



Análisis de la Respuesta Transitoria: Motor CC

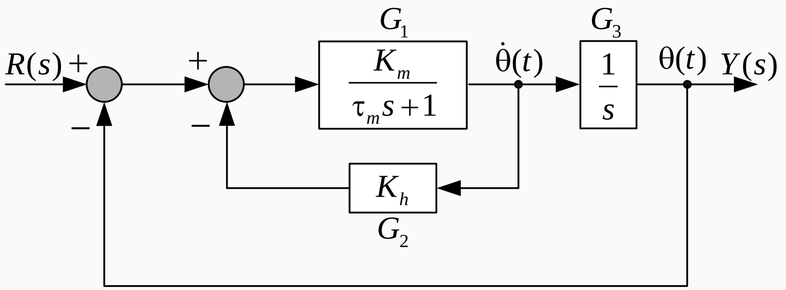






Polos de lazo cerrado

Respuestas en Frecuencia de Lazo Abierto



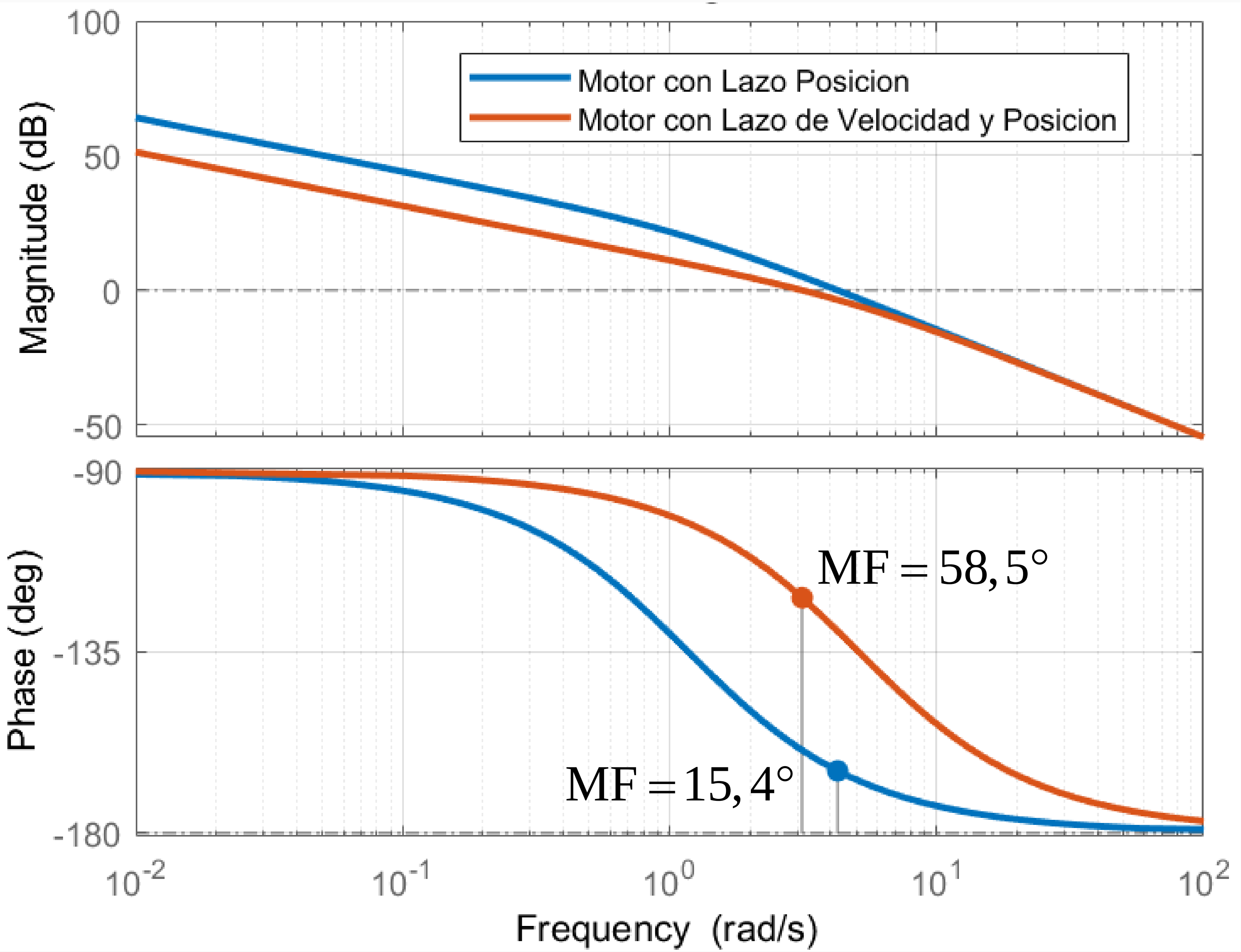
Analizamos la Estabilidad Relativa:

Márgenes de Fase

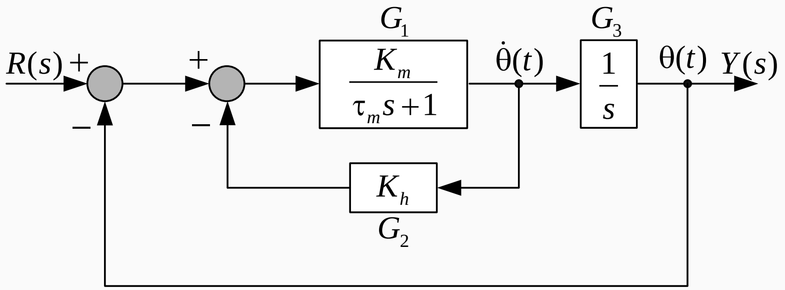
Márgenes de Ganancia

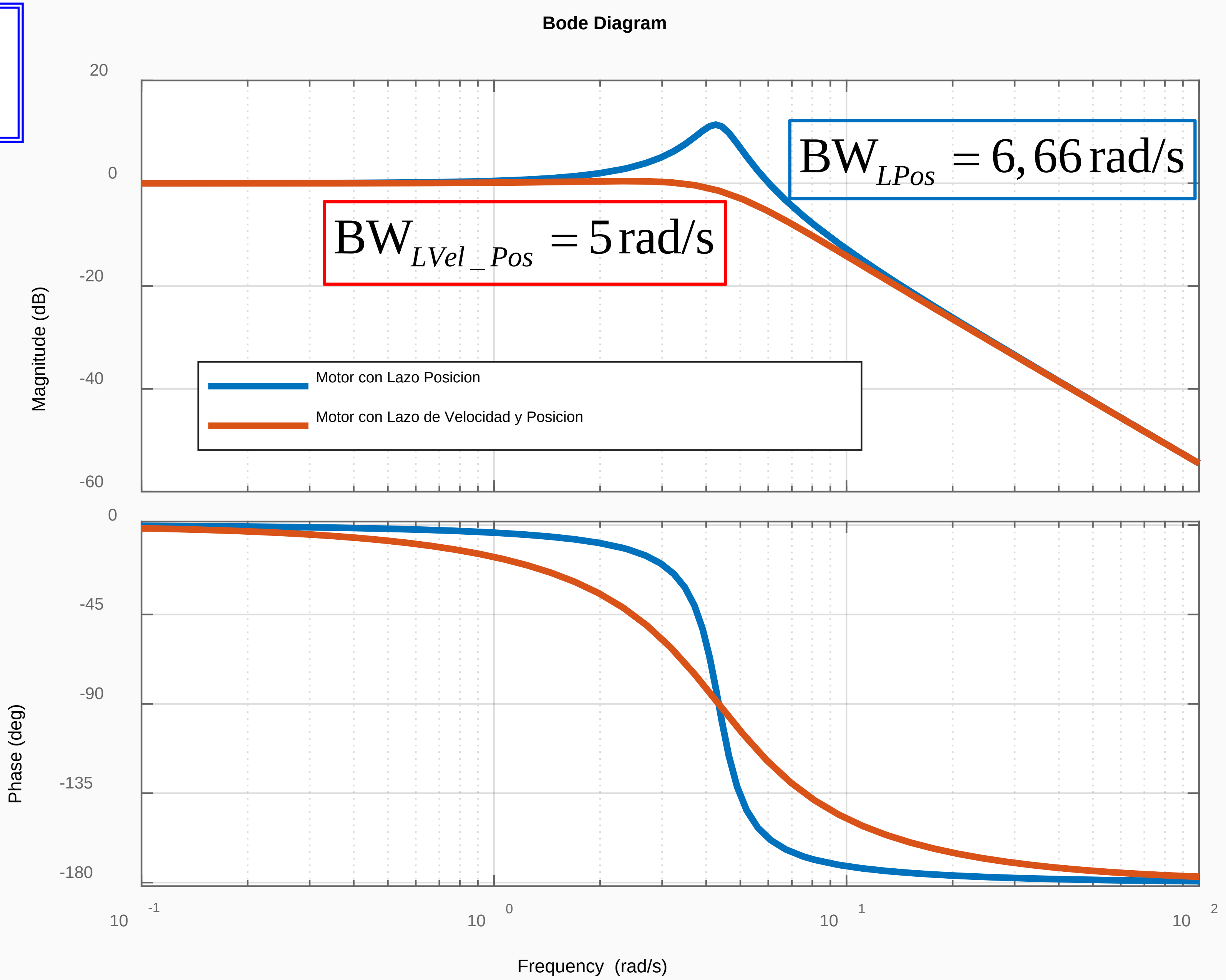
Se relacionan con los respectivos factores de amortiguamiento relativo.

Ganancias en las bajas frecuencias (Errores)



Respuestas en Frecuencia de Lazo Cerrado



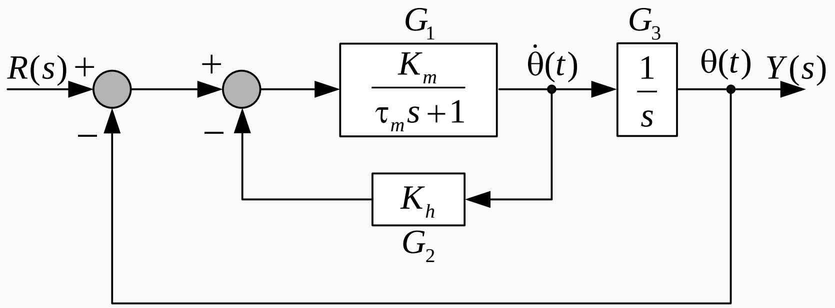


Analizamos el desempeño de régimen transitorio y de régimen estacionario:

Anchos de Banda (tiempos de subida y de asentamiento)

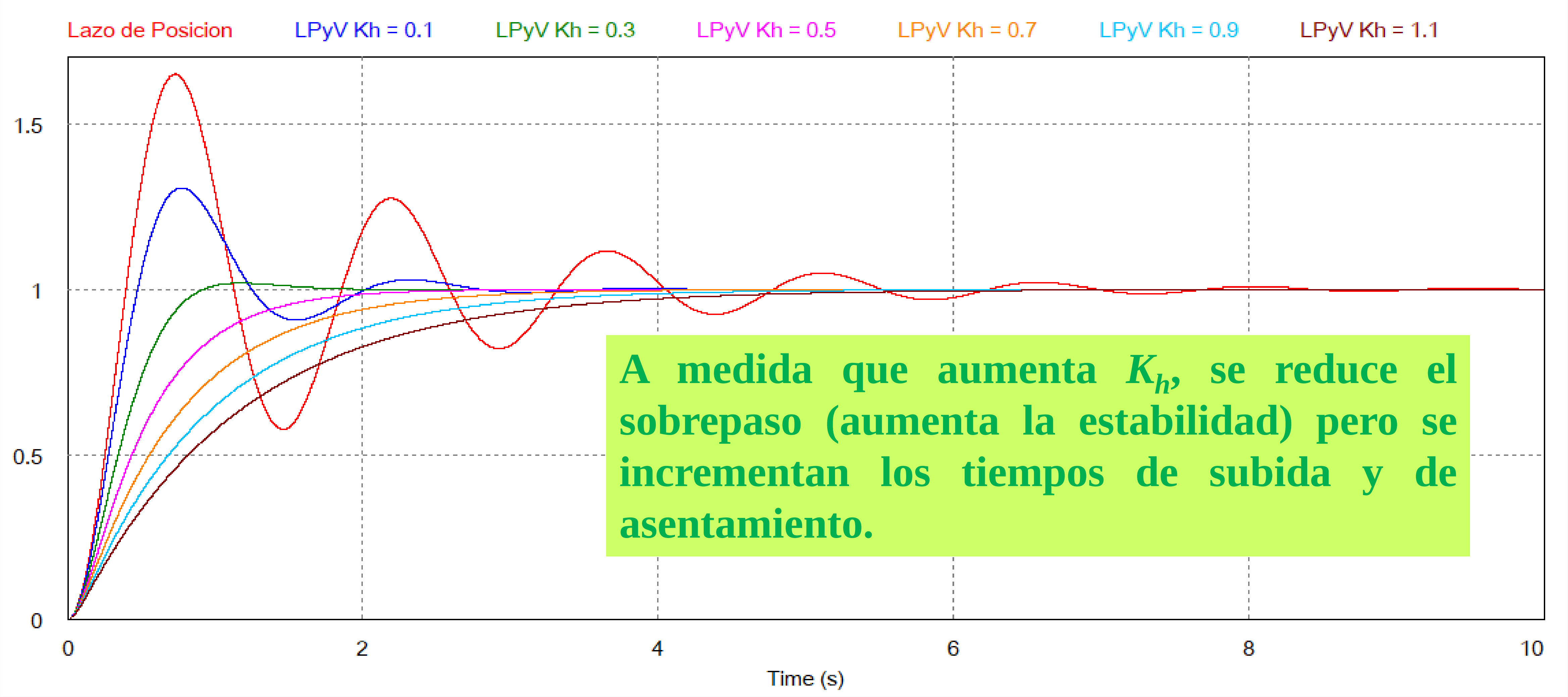
Ganancia en Bajas Frecuencias (Errores)

Picos de Resonancia (Sobrepasos - Estabilidad)



Análisis de desempeño variando K_h

$$0{,}1 \leq K_h \leq 1{,}1$$



A medida que aumenta K_h, se reduce el sobrepaso (aumenta la estabilidad) pero se incrementan los tiempos de subida y de asentamiento.

Clasificación de los sistemas de control

- **Los sistemas de control se clasifican de acuerdo a la capacidad que tienen de seguir diferentes tipos de entrada, tales como: escalón, rampa, cuadráticas, sinusoidales, entre otras.**

- **Algunas son combinaciones de las mencionadas anteriormente, formando un perfil de referencia específico.**

- **¿Cómo ponderar esta capacidad del sistema de control? Analizando el error que presenta la salida ante una entrada determinada.**

Considérese un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria cuya FTLA es $G_{la}(s)$

$$G_{la}(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\boxed{s^N}\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)}$$

Esta clasificación se basa en la cantidad de integradores o polos al origen que posee la FTLA. Esto determina el Tipo de Sistema: $N = 0$; $N = 1$; $N = 2$; sistema de tipo 1; de tipo 2; de tipo 3, respectivamente.

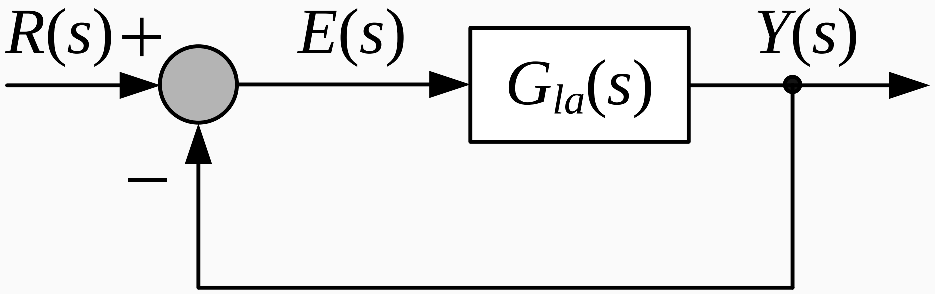
Importante: A mayor *N* mejora la precisión, pero se reduce la estabilidad del sistema en lazo cerrado

Análisis de error en estado estacionario

- **Precisión o Exactitud en Sistemas de Control:**
  Es una de las Especificaciones mas Importantes

- **El sistema de control debe seguir con error nulo la referencia impuesta en estado estacionario o de régimen permanente.**

- **Por esta razón es importante obtener las expresiones de los errores estacionarios en función de la señal de entrada y de la FTLA o Camino Directo:**



$$E(s) = \frac{1}{1+G_{la}(s)} R(s)$$

Teorema del Valor Final:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1+G_{la}(s)}$$

Análisis de error en estado estacionario

- A continuación se definen las "Constantes de Error Estático": Cuanto mayores resulten estas constantes, menores serán los errores de estado estacionario.

Importante a saber:

- La salida de un sistema de control puede ser: velocidad, aceleración, corriente, temperatura, presión, caudal, entre otras, pero en este análisis no se hace referencia a la forma física de la variable.
- Si se menciona "posición", se hace referencia a la salida propiamente dicha, si se habla de "velocidad" se hace referencia a la razón de cambio de esta variable.
- En definitiva, el término "posición", "velocidad" y "aceleración" está directamente relacionado con el tipo de referencia (escalón, rampa o parábola) aplicada al sistema de control.

Análisis de error en estado estacionario

Constante de error estático de posición K_p: entrada en escalón unitario

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad e_{ssp} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+G_{la}(s)}\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{1+G_{la}(0)}$$

La constante K_p se define como:

$$\boxed{K_P \triangleq \lim_{s\to 0} G_{la}(s) = G_{la}(0)} \qquad e_{ssp} = \frac{1}{1+K_P}$$

Para sistemas de tipo 0

$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = K_e \quad e_{ssp} = \frac{1}{1+K_e} \Rightarrow K_e \to \infty \quad e_{ssp} \to 0$$

Para sistemas de tipo 1 o mayor

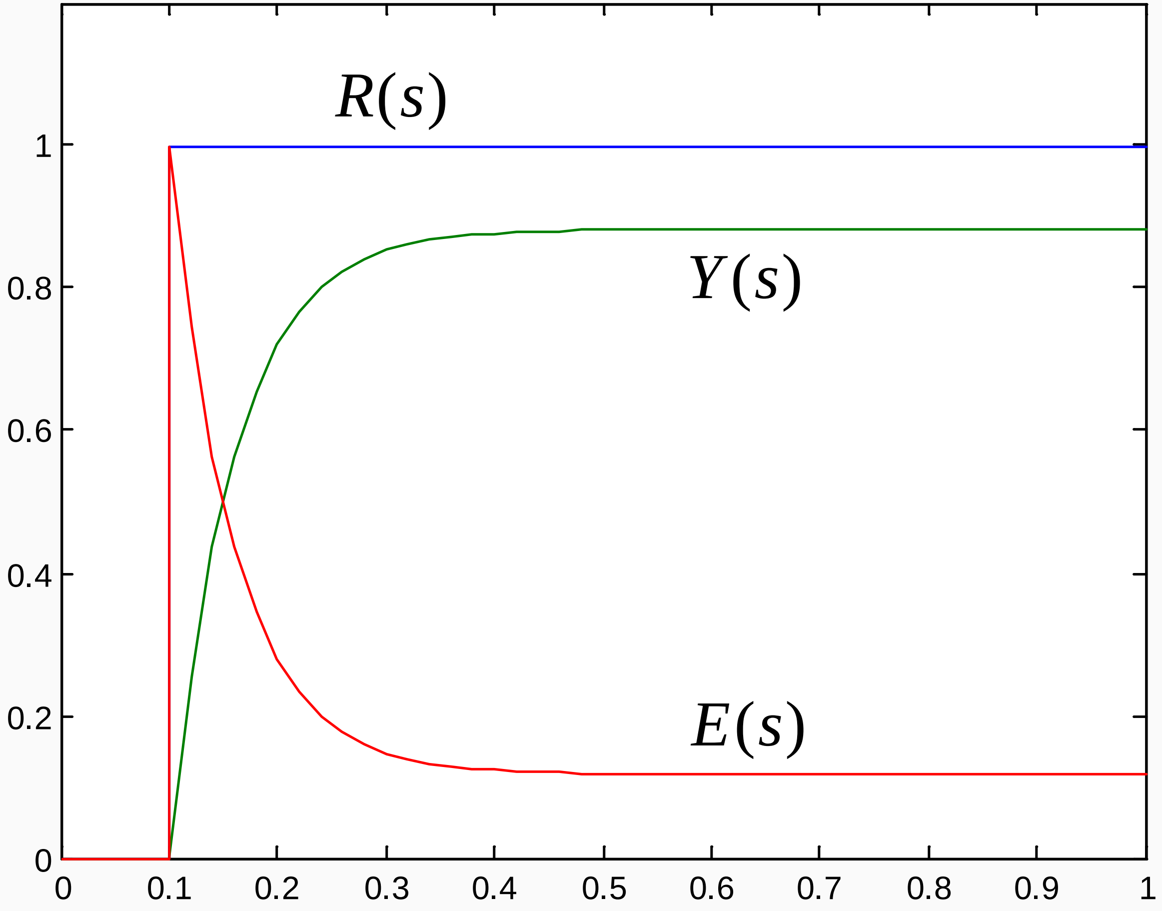
$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = \infty \qquad e_{ssp} = 0$$

Análisis de error en estado estacionario

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_P}$$

Para sistemas de tipo 0 (sin polo al origen):

$$G_p(s) = \frac{1,5}{s+2}$$



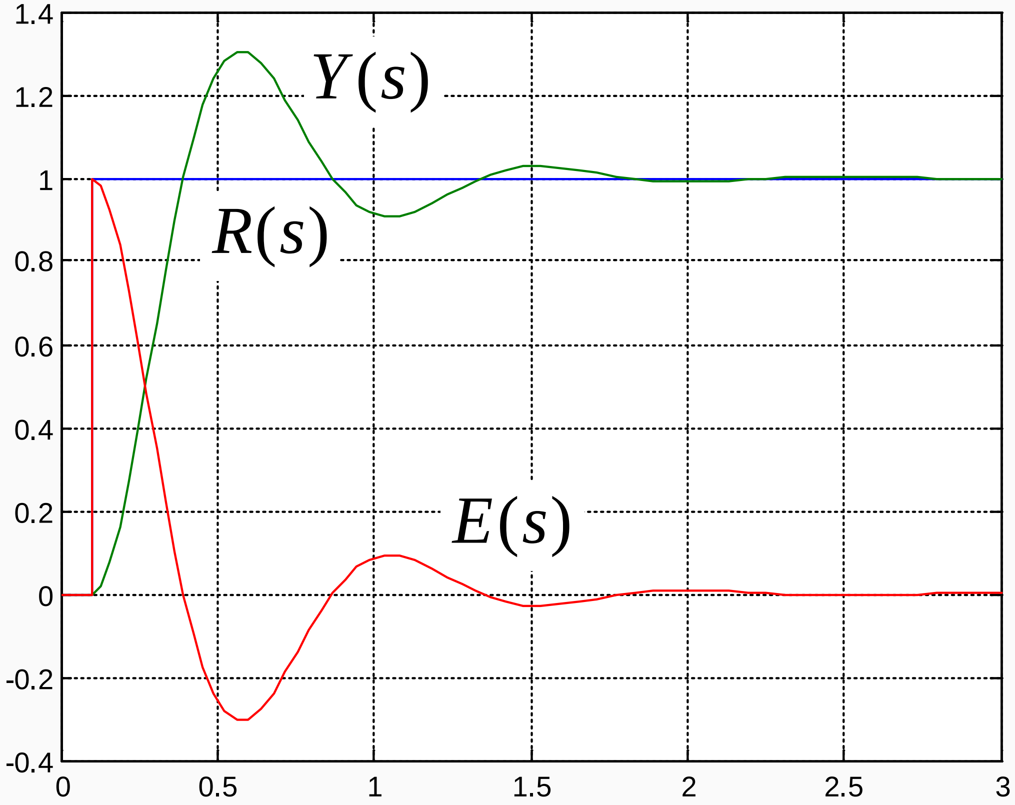
Análisis de error en estado estacionario

Constante de error de posición K_p: entrada en escalón

Para sistemas de tipo 1 (un polo al origen):

$$K_P = \infty \qquad e_{ssp} = 0$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+5)}$$



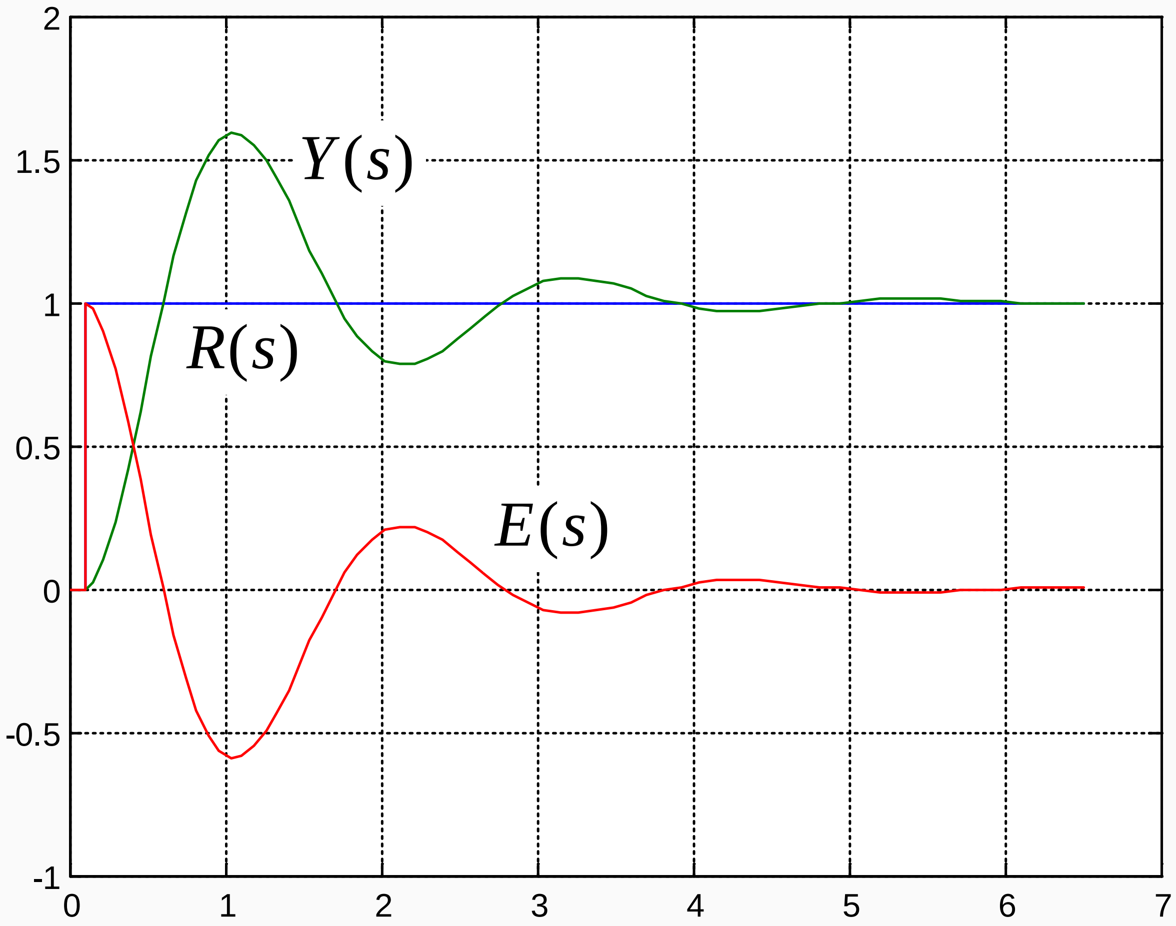
Análisis de error en estado estacionario

Para sistemas de tipo 1 o de orden mayor: s^n con $n > 1$

$$K_P = \infty$$

$$e_{ssp} = 0$$

$$G_p(s) = \frac{s+2}{s^2(s+5)}$$



Análisis de error en estado estacionario

Constante de error de velocidad K_v: entrada en rampa

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \qquad e_{ssv} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G_{la}(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_{la}(s)}$$

$$\boxed{K_V \triangleq \lim_{s\to 0} sG_{la}(s)} \qquad e_{ssv} = \frac{1}{K_V}$$

Para sistemas de tipo 0

$$K_V = \lim_{s\to 0} s \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = 0 \qquad e_{ssv} = \frac{1}{K_V} = \infty$$

Para sistemas de tipo 1

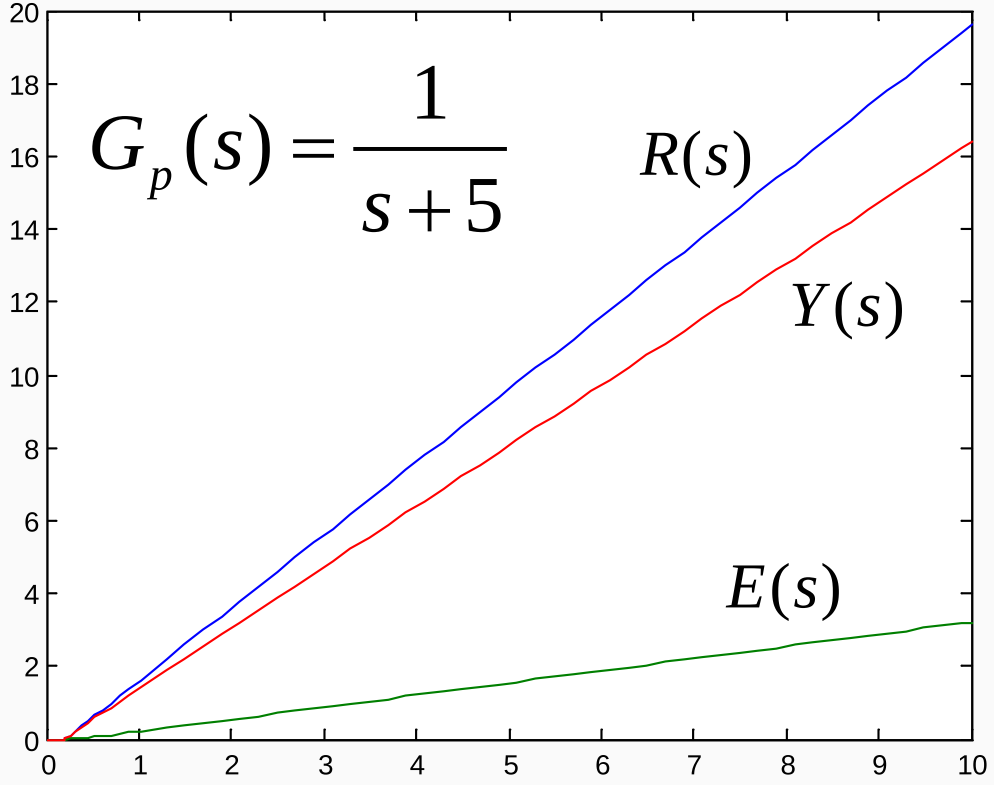
$$K_V = \lim_{s\to 0} s \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = K_e \qquad e_{ssv} = \frac{1}{K_e}$$

Para sistemas de tipo 2 o mayor

$$K_V = \lim_{s\to 0} s \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^2(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = \infty \qquad e_{ssv} = 0$$

Análisis de error en estado estacionario

Constante de error de velocidad K_v: entrada en rampa



$$e_{ssv} = \frac{1}{K_V} = \infty$$

Análisis de error en estado estacionario

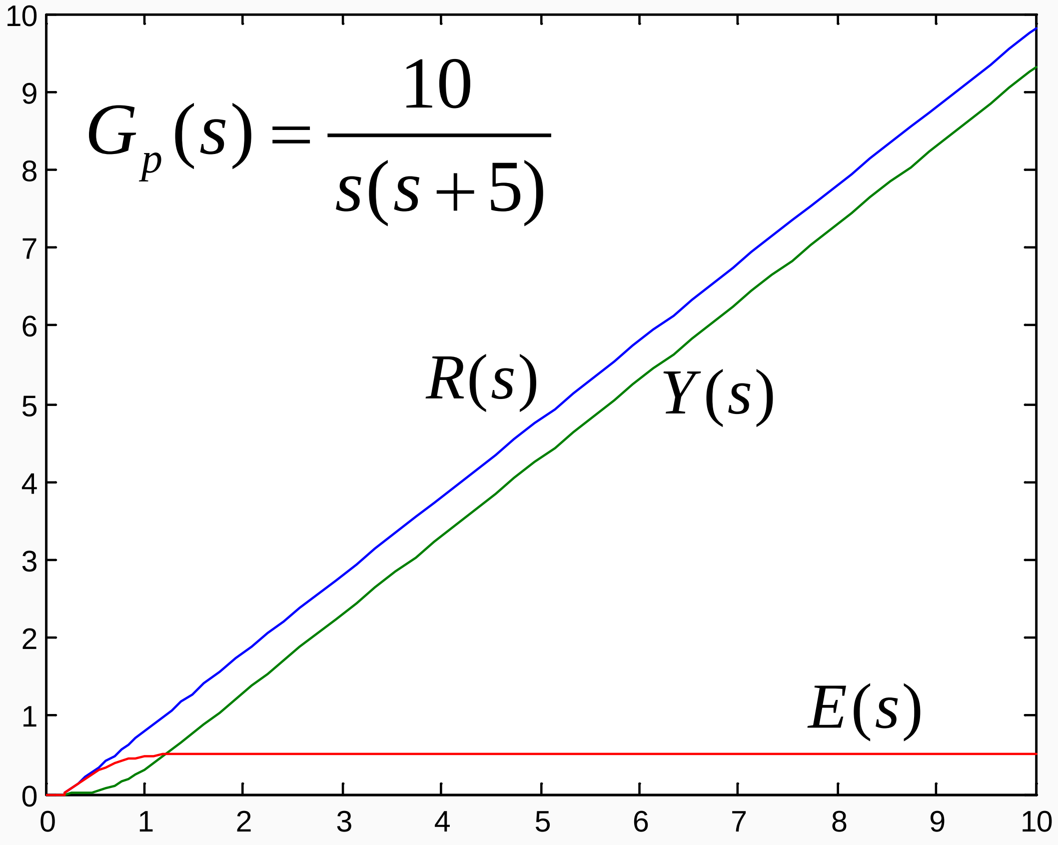
Constante de error de velocidad *Kv*: entrada en rampa

Sistemas Tipo 1, *n* = 1:

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG_{la}(s)$$

$$K_V = K$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K}$$



Análisis de error en estado estacionario

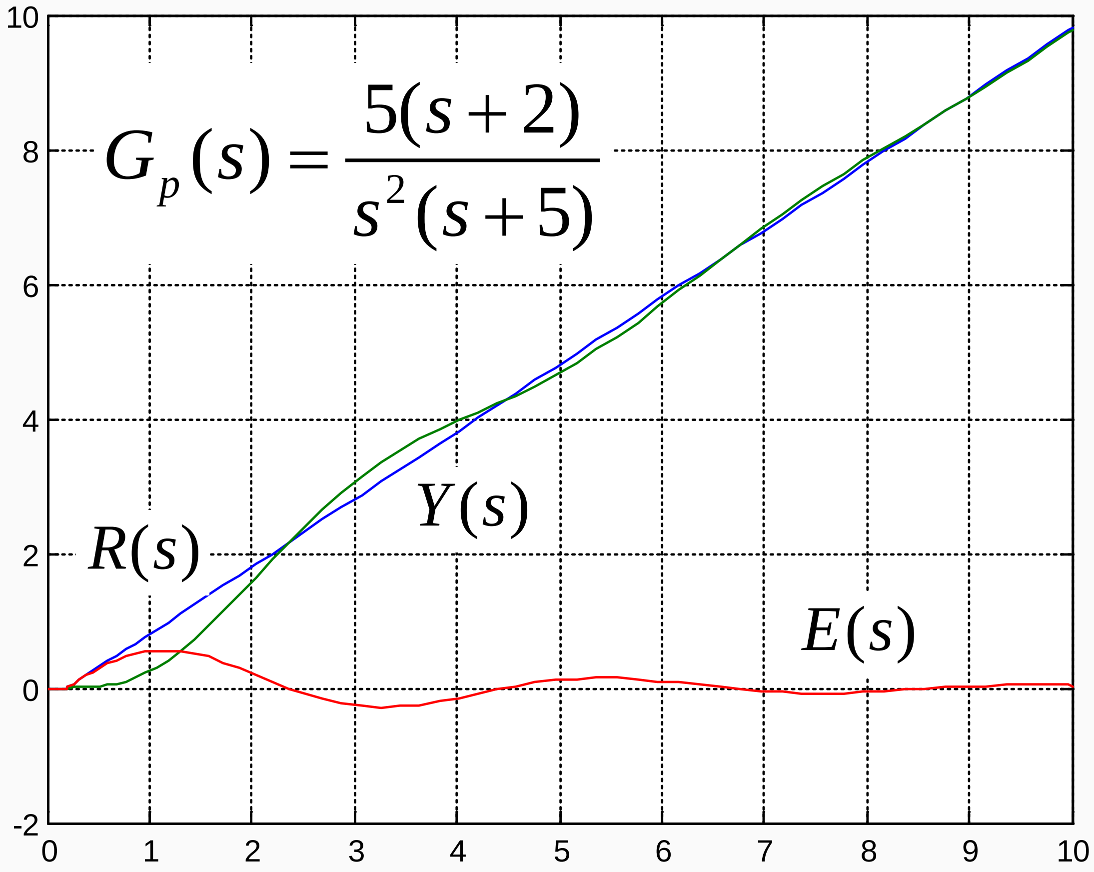
Constante de error de velocidad K_v: entrada en rampa

Sistemas de tipo 2 o de orden mayor

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG_{la}(s)$$

$$K_V = \infty$$

$$e_{ssv} = 0$$



Análisis de error en estado estacionario

Constante de error de aceleración K_A: entrada parabólica

$$r(t)=\frac{t^2}{2}\ \ para\ t\geq 0;\ r(t)=0\ \ para\ \ t<0 \qquad R(s)=\frac{1}{s^3}$$

Error estacionario de aceleración

$$e_{ssa}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_{la}(s)}\frac{1}{s^3}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G_{la}(s)}$$

$$\boxed{K_A=\lim_{s\to 0} s^2 G_{la}(s)} \qquad e_{ssa}=\frac{1}{K_A}$$

Análisis de error en estado estacionario

Constante de error de aceleración K_A: entrada en parábola

Sistemas Tipo 0:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = 0 \qquad K_A = 0 \qquad e_{ssa} = \infty$$

Sistemas Tipo 1:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = 0 \qquad K_A = 0 \qquad e_{ssa} = \infty$$

Sistemas Tipo 2:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^2(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = K_e \qquad K_A = K \qquad e_{ssa} = \frac{1}{K_e}$$

Sistemas Tipo 3: o mayor

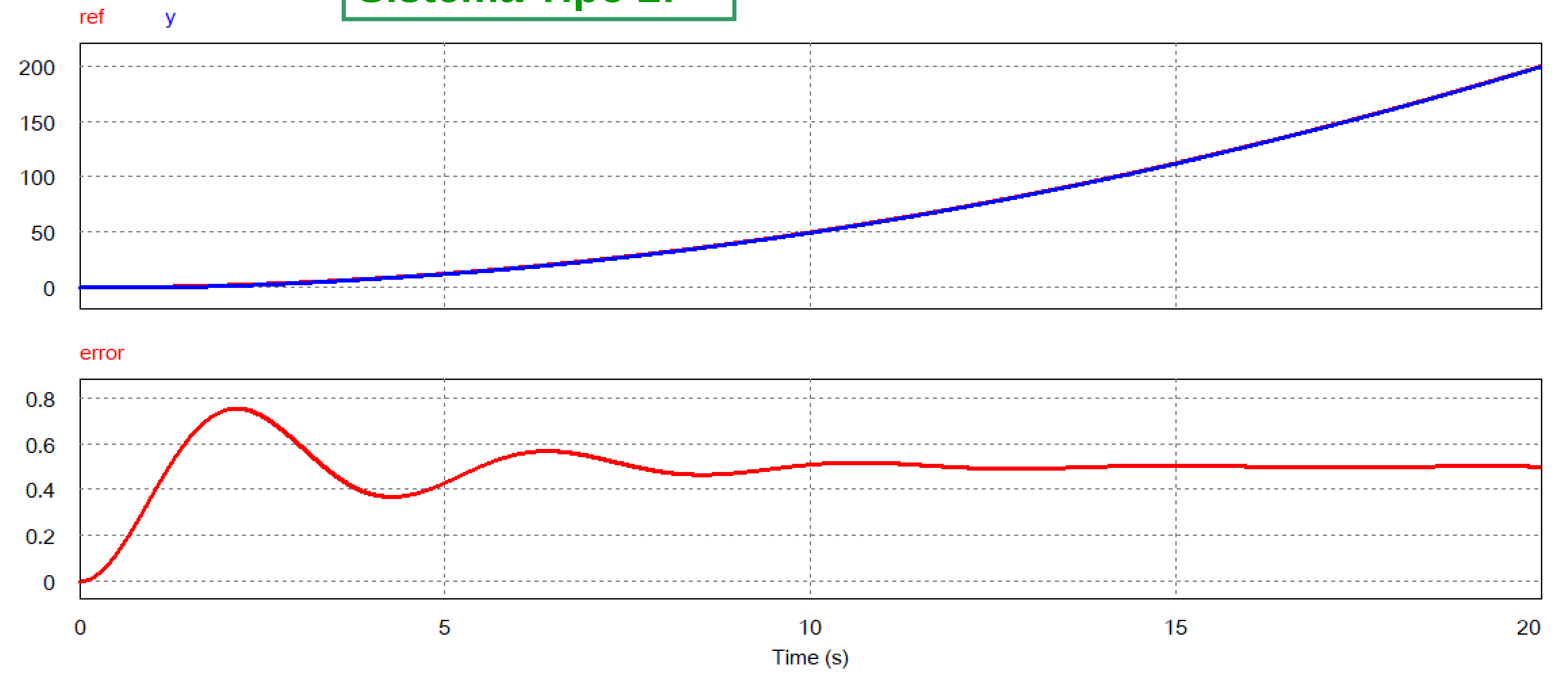
$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^3(s+p_1)(s+p_2)\cdots} = \infty \qquad K_A = \infty \qquad e_{ssa} = 0$$

$$K_e = \frac{K\, z_1 z_2 \cdots z_n}{p_1 p_2 \cdots p_n}$$

Error de aceleración entrada en parábola

$$G_p(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+5)}$$

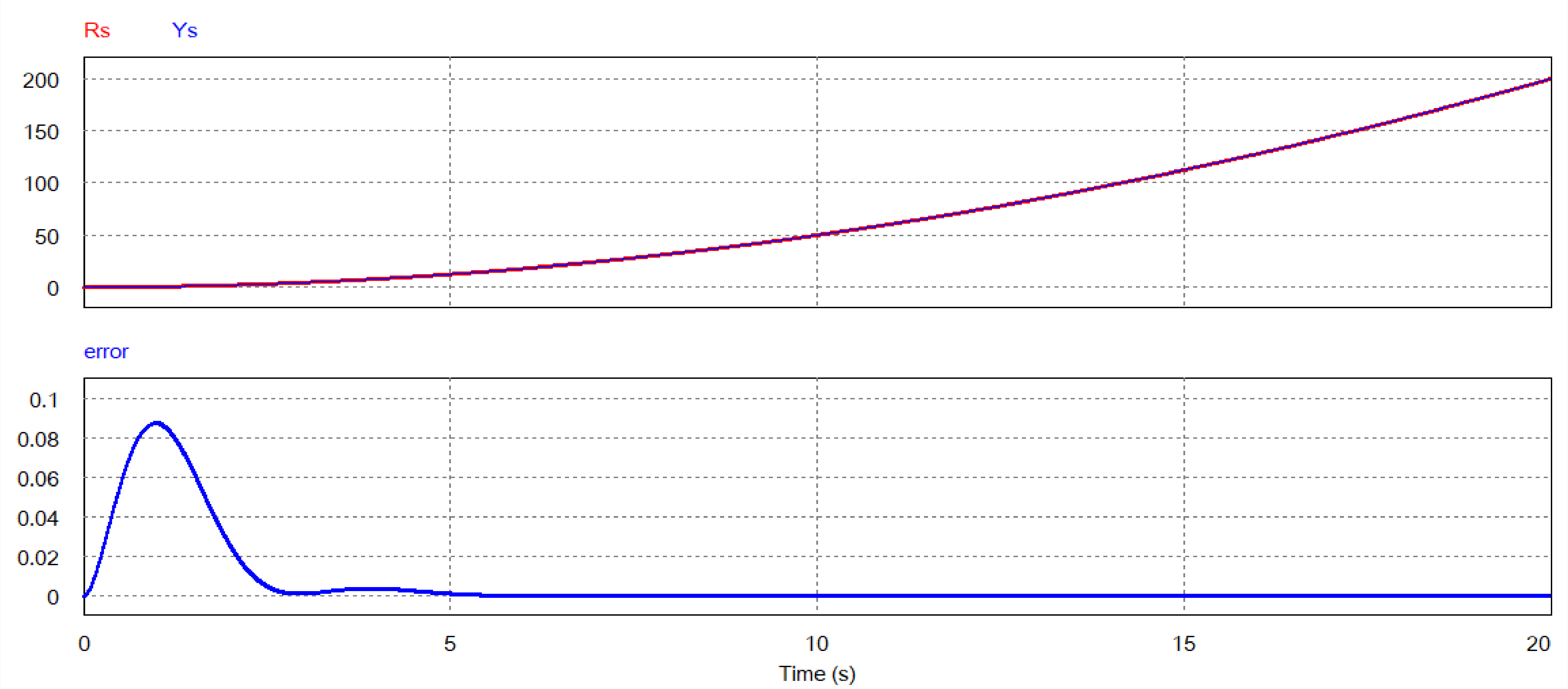
Sistema Tipo 2:



Error de aceleración entrada en parábola

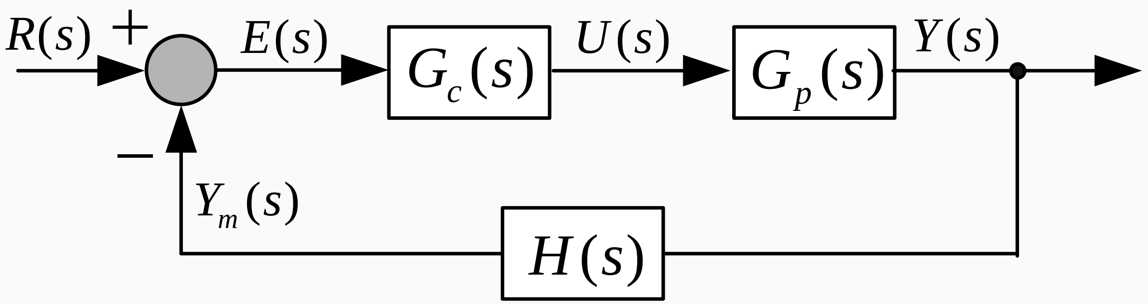
Sistema Tipo 3:

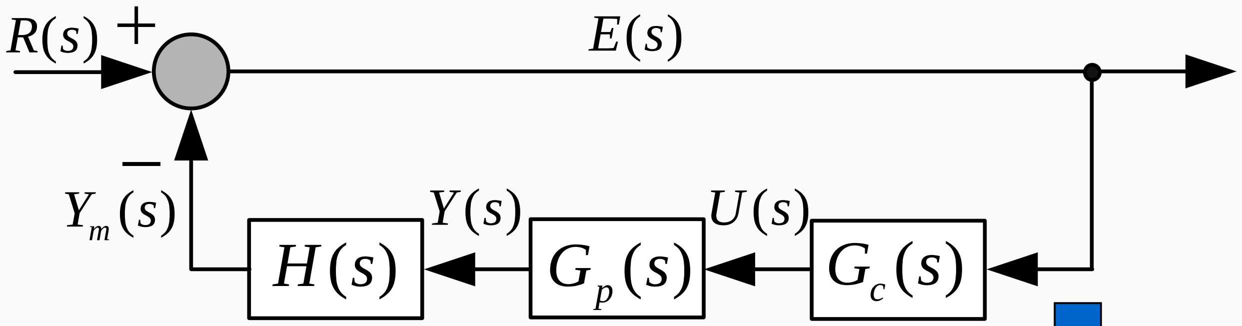
$$G_p(s) = \frac{5(s+2)^3}{s^3(s+5)}$$



Análisis de error en estado estacionario

- Considérese el caso en el cual existe una FT del sensor en la realimentación:





$$E(s) = R(s) - Y_m(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = E(s)G_c(s)G_p(s)$$

$$E(s) = R(s) - \left[H(s)G_c(s)G_p(s)\right]E(s)$$

$$E(s)\left[1 + H(s)G_c(s)G_p(s)\right] = R(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)}R(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + H(s)G_{la}(s)}R(s) \quad con \; G_{la}(s) = G_c(s)G_p(s)$$

En Matlab

$$E(s) = \; feedback\left(1, H(s)G_c(s)G_p(s)\right)$$

Análisis de error en estado estacionario

- **Aplicándose el Teorema del Valor Final:** $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+H(s)G_{la}(s)} R(s)$

- **Considerándose un sistema de tipo 0:**

Sean: $G_c(s) = K;\quad G_p(s) = \frac{K_p}{s+a};\quad H(s) = \frac{K_s}{s+b}\qquad G_{la}(s) = \frac{KK_p}{s+a}\quad y\quad H(s)G_{la}(s) = \frac{K_sKK_p}{(s+a)(s+b)}$

- **El error de posición resulta:**

$$e_{ssp} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+\frac{K_sKK_p}{(s+a)(s+b)}} \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{ab}{ab+K_sKK_p}$$

- **El error de velocidad resulta:**

$$e_{ssv} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+\frac{K_sKK_p}{(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\frac{sK_sKK_p}{ab}} \to \infty$$

- **El error de aceleración resulta:** $e_{ssa} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\frac{K_sKK_p}{(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\frac{s^2K_sKK_p}{ab}} \to \infty$

Análisis de error en estado estacionario

- **Considerándose un sistema de tipo 1:**

Sean: $G_c(s) = K; G_p(s) = \dfrac{K_p}{s(s+a)}; H(s) = \dfrac{K_s}{s+b} \quad G_{la}(s) = \dfrac{KK_p}{s(s+a)} \quad y \quad H(s)G_{la}(s) = \dfrac{K_s KK_p}{s(s+a)(s+b)}$

- **El error de posición resulta:**

$$\boxed{e_{ssp} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\dfrac{K_s KK_p}{s(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s} = \frac{s}{\dfrac{\cancel{s}K_s KK_p}{\cancel{s}(s+a)(s+b)}} = 0}$$

- **El error de aceleración resulta:**

$$\boxed{e_{ssa} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\dfrac{K_s KK_p}{s(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^3} = \frac{\cancel{s}}{\dfrac{\cancel{s}^{\cancel{3}} K_s KK_p}{\cancel{s}(s+a)(s+b)}} \to \infty}$$

- **El error de velocidad resulta:**

$$\boxed{e_{ssv} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\dfrac{K_s KK_p}{s(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^2} = \frac{\cancel{s}}{\dfrac{\cancel{s}^{\cancel{2}} K_s KK_p}{\cancel{s}(s+a)(s+b)}} = \frac{ab}{K_s KK_p} \to (ctte)}$$

Análisis de error en estado estacionario

- **Considerándose un sistema de tipo 2:**

$$\text{Sean: } G_c(s) = K; G_p(s) = \frac{K_p}{s^2(s+a)}; H(s) = \frac{K_s}{s+b} \quad G_{la}(s) = \frac{KK_p}{s^2(s+a)} \quad y \;\; H(s)G_{la}(s) = \frac{K_sKK_p}{s^2(s+a)(s+b)}$$

- **El error de posición resulta:**

$$\boxed{e_{ssp} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\frac{K_sKK_p}{s^2(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s} = \frac{\cancel{s}}{\frac{\cancel{s}K_sKK_p}{s^{\cancel{2}}(s+a)(s+b)}} = 0}$$

- **El error de aceleración resulta:**

$$\boxed{e_{ssa} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\frac{K_sKK_p}{s^2(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^3} = \frac{\cancel{s}}{\frac{\cancel{s}^{\cancel{3}}K_sKK_p}{\cancel{s}^{\cancel{2}}(s+a)(s+b)}} = \frac{ab}{K_sKK_p}}$$

- **El error de velocidad resulta:**

$$\boxed{e_{ssv} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\frac{K_sKK_p}{s^2(s+a)(s+b)}} \frac{1}{s^2} = \frac{s}{\frac{\cancel{s}^{\cancel{2}}K_sKK_p}{\cancel{s}^{\cancel{2}}(s+a)(s+b)}} = 0}$$

✓ **El error de aceleración para tipo 3 o mayor, resulta cero.**

Referencias Bibliográficas

[1] Ogata, Katsuhiko. “Ingeniería de Control Moderna”.

[2] Kuo, Benjamín C. “Sistemas de Control Automático”.

[3] Chi-Tsong Chen. “Analog and Digital Control System Design”.