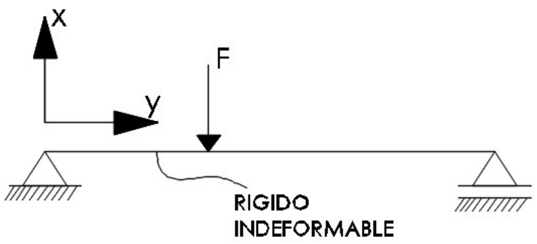
CONCEPTOS GENERALES

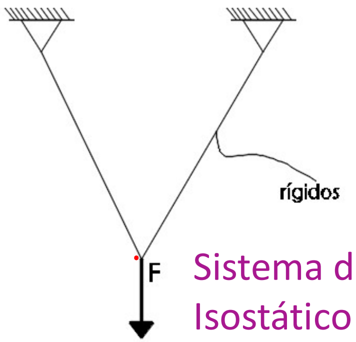
ESTATICA DE LOS CUERPOS SOLIDOS RIGIDOS

La estática considera a los cuerpos como sólidos rígidos indeformables

Solo puede resolver sistemas ISOSTATICOS → es decir igual cantidad de vínculos que de grados de libertad:

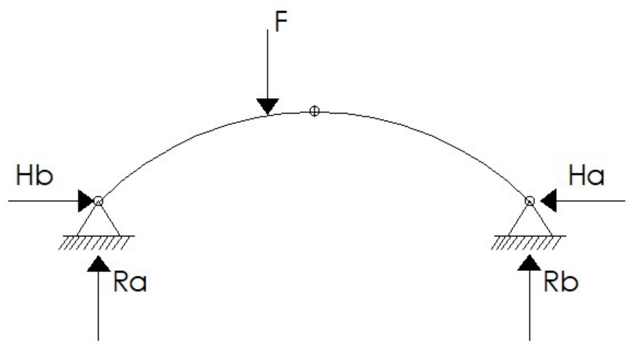


Viga simplemente apoyada
Isostática



Sistema de dos fuerzas concurrentes
Isostático

$$\sum Fx = 0$$
$$\sum Fy = 0$$
$$\sum Fz = 0$$
$$\sum Me = 0$$



Arco de tres articulaciones
Isostático

CONCEPTOS GENERALES

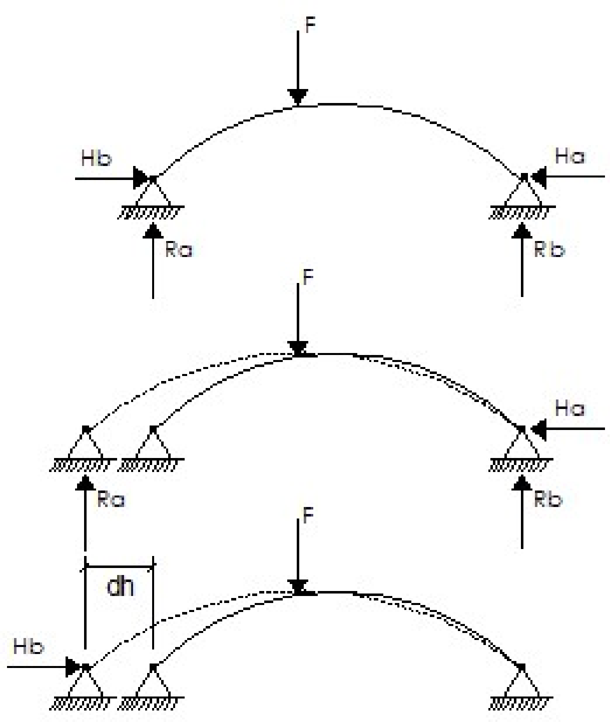
RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HIPERSTATICOS

Tenemos mas vínculos que grados de libertad

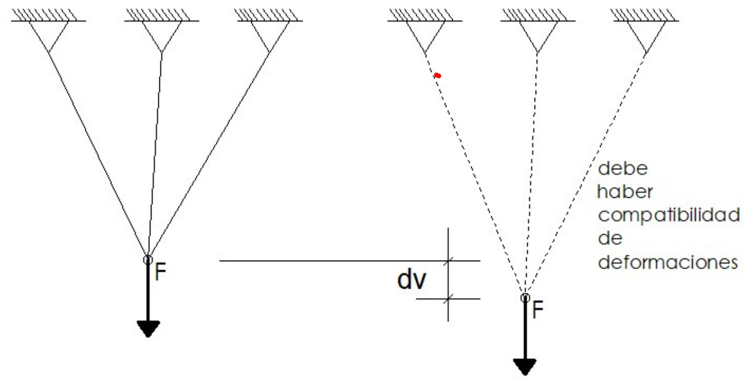
No se pueden resolver a través de las ecuaciones de equilibrio
Necesitamos ecuaciones adicionales

Las ecuaciones adicionales necesarias para la resolución se consiguen considerando el sólido como deformables y a estas ecuaciones adicionales las llamamos:

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIÓN



Viga elástico biarticulado
Hiperestático



Sistema de tres fuerzas concurrentes
Hiperestático

EN AMBOS CASOS OBSERVAMOS QUE SOLO SE PODRA RESOLVER SI EL SÓLIDOS ES DEFORMABLE

DEFINICIÓN DEL SOLIDO DEFORMABLE

DEFINIREMOS UN SÓLIDO DEFORMABLE IDEAL a través de una serie de propiedades

Los sólidos deformables reales se aproximan en mayor o menor medida a estos sólidos ideales y podremos aplicarles dentro de cierto entorno de deformaciones las teorías elaboradas para el solido deformable ideal.

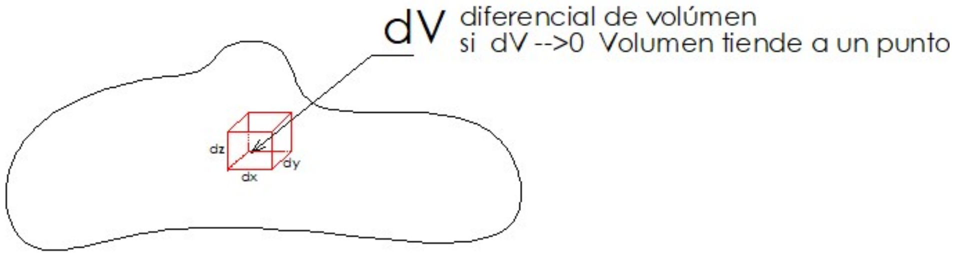
CONTINUO:

Existe continuidad de las propiedades a través de todo el sólido

Acá la articulación corta la continuidad de las propiedades
Y debe ser considerado como dos sólidos unidos No como un solo sólido

HOMOGENEO:

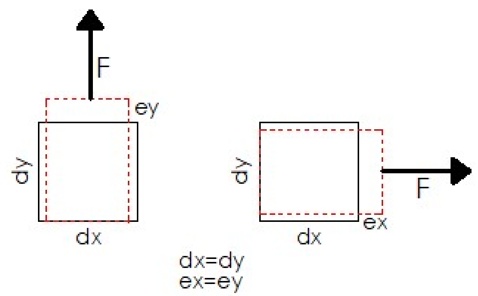
Cada punto o dV posee las propiedades del sólido total



ISOTROPO:

El sólido posee las mismas propiedades físicas en todas la direcciones

Acá se analiza la propiedad física de la deformación debida a una fuerza aplicada



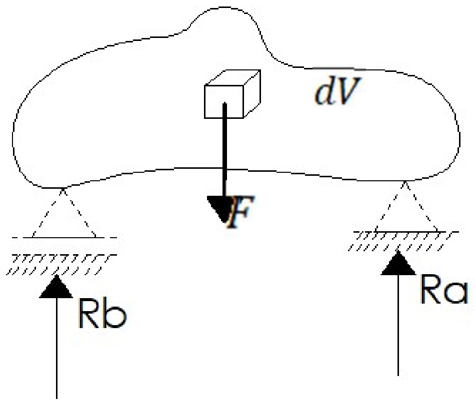
Mas adelante agregaremos la propiedad de elasticidad lineal
- El solido se deforma proporcionalmente a las fuerzas aplicadas
- Las deformaciones desaparecen cuando deja de actuar las fuerzas que las originan y recupera la forma inicial

FUERZAS ACTUANTES

FUERZAS EXTERIORES

Si suponemos un solido con sus propiedades **C,H,I** veremos que estan sometidos a dos tipos de fuerzas exteriores:

FUERZAS DE MASA



$$dm = \gamma . dV$$

$$F = P.dm = P.\gamma.dV$$

P: Fuerza por unidad de masa

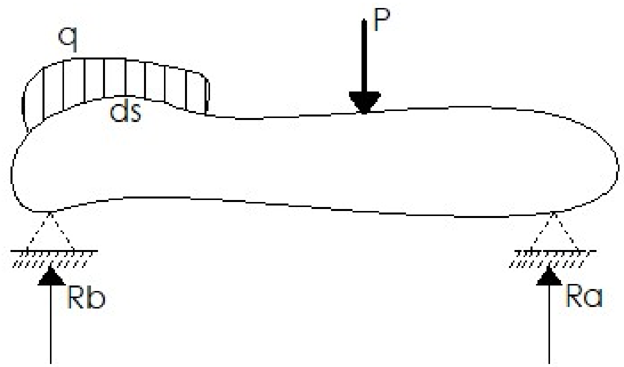
Ej: Fuerzas gravitacionales, Fuerzas inerciales, etc

FUERZAS DE SUPERFICIE

Son fuerzas que provienen de la interacción entre cuerpos o de acciones exteriores

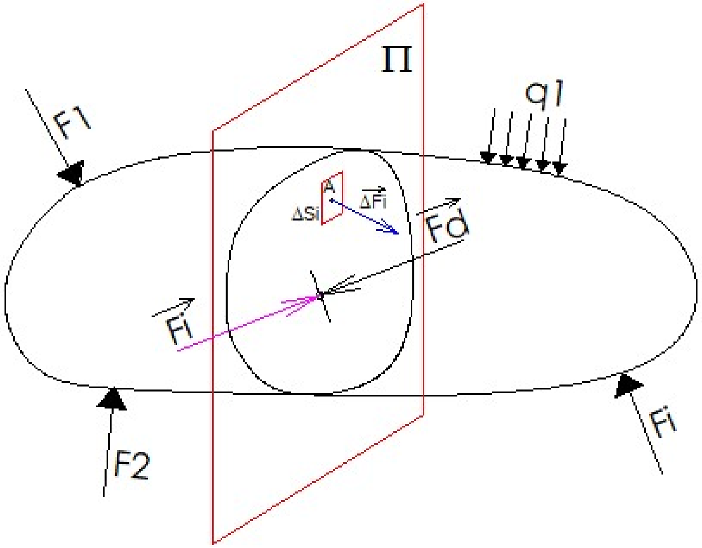
q: fuerza por unidad de superficie (presión**)**
ds: es un elemento diferencial de superficie
q.ds= F(fuerza elemental)

Las fuerzas pueden ser también puntuales P → CARGA CONCENTRADA



CONCEPTO DE TENSIÓN EN UN PUNTO

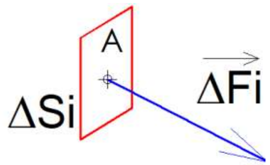
Si consideramos un sólido sometido a la acción de fuerzas exteriores en equilibrio



Seccionamos el cuerpo en dos partes a través del plano Π
Debe haber equilibrio entre las fuerzas de la izquierda y de la derecha
Este equilibrio se manifiesta entre las resultantes a ambos lados del plano Π $\overrightarrow{Fd} = -\overrightarrow{Fi}$

Este estado de equilibrio consiste en la aplicación de la Fi sobre la Fd a través de la transmisión sobre el plano Π

La transmisión se da en cada área elemental ΔSi en el cual actúa una fuerza elemental ΔFi



$S\pi = \Sigma \Delta Si$

$\overrightarrow{Fd} = -\overrightarrow{Fi} = \Sigma \overrightarrow{\Delta Fi}$

Compresión se considera (-) y trata de acercar dos secciones consecutivas
Tracción se considera (+) y trata de alejarlas

Haciendo el cociente incremental: $\dfrac{\overrightarrow{\Delta Fi}}{\Delta Si} = \vec{t}$ SE DENOMINA TENSIÓN EN UN PUNTO
Y es una magnitud vectorial

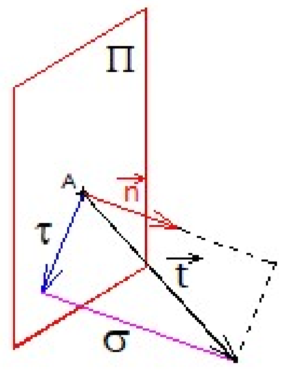
$\Delta Si \to 0$

$$\sum_{t \to \infty} \vec{t} \,.\, \Delta Si = \int \vec{t} \,.\, ds = Fi = Fd$$

COMPONENTES DE TENSIÓN

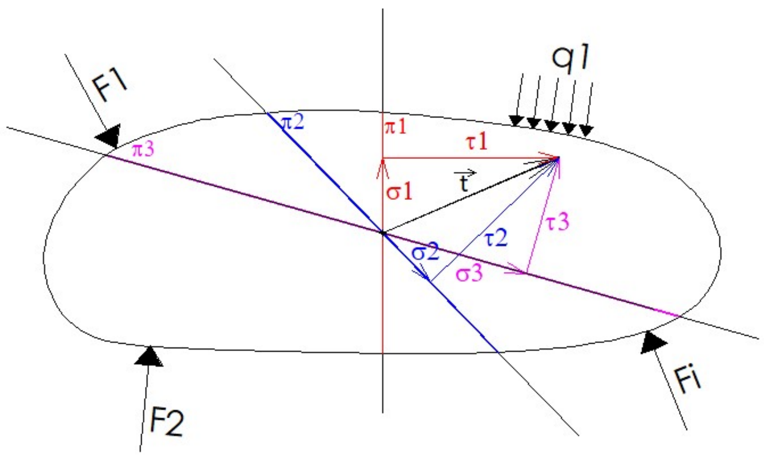
La tensión   en el punto A según el plano   se puede descomponer en:

- Una componente normal según la dirección normal al plano π denominada σ
- Una componente ubicada en el plano π denominada τ



REGIMEN DE TENSIÓN EN UN PUNTO

Al variar la dirección del plano p los valores s y t también variaran pudiendo llegar a anularse alguno de ellos ser máximos o mínimo



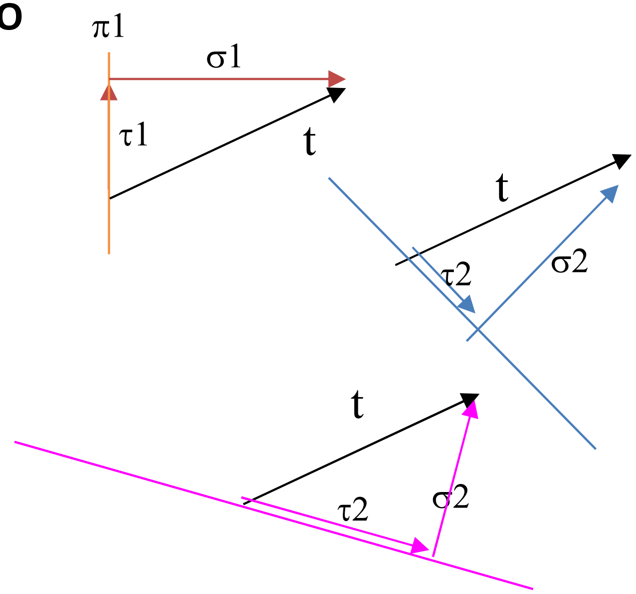
Los infinitos valores de σ y τ asociados a los infinitos planos p que pasan por cada punto se denomina **REGIMEN DE TENSIÓN EN EL PUNTO**

Para:

$\pi 1$ tendremos $\sigma 1$ y $\tau 1$

$\pi 2$ tendremos $\sigma 2$y $\tau 2$

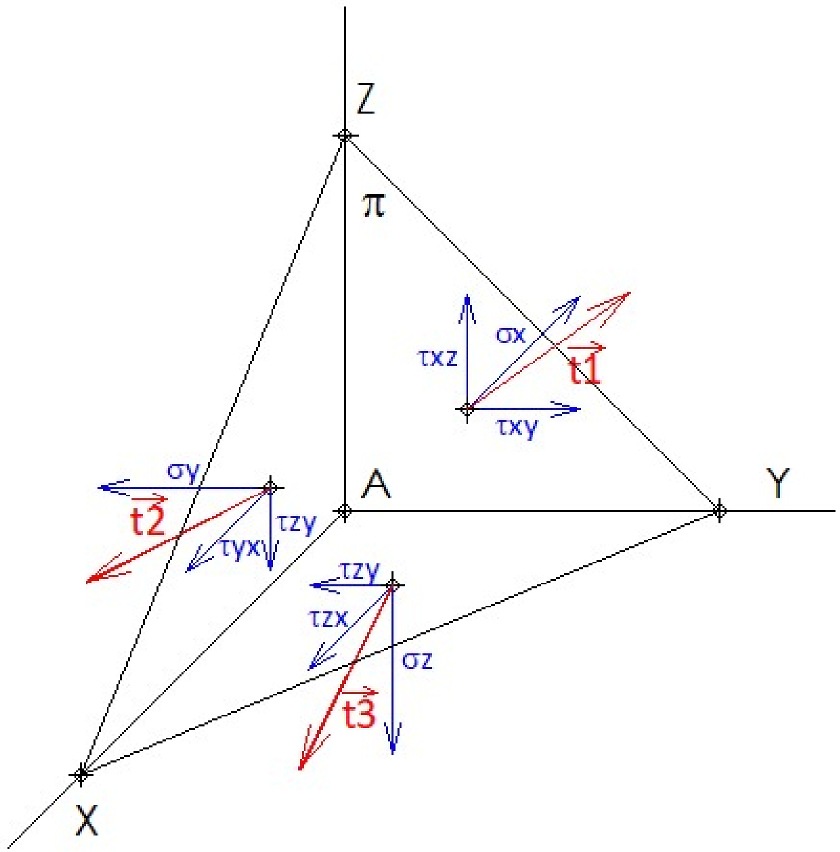
$\pi 3$ tendremos $\sigma 3$ y $\tau 3$



SISTEMA TENSIONAL CARTESIANO

Adoptando un sistema cartesiano en el punto considerado A

El tetraedro significa el punto con las direcciones consideradas, es decir, el plano π pasa por el punto y las caras de tetraedro son diferenciales de áreas que tienden a cero.



Las componentes cartesianas de las tensión t en componentes: normales σi y tangenciales τij son:

$$\vec{t1}=\sigma x.\vec{i}+\tau xy.\vec{j}+\tau xz.\vec{k}$$
$$\vec{t2}=\tau yx.\vec{i}+\sigma y.\vec{j}+\tau yz.\vec{k}$$
$$\vec{t3}=\tau zx.\vec{i}+\tau zy.\vec{j}+\sigma z.\vec{k}$$

En notación tensorial con subíndices tij

$$\vec{t1}=t11.\vec{i}+t21.\vec{j}+t31.\vec{k}$$
$$\vec{t2}=t12.\vec{i}+t22.\vec{j}+t32.\vec{k}$$
$$\vec{t3}=t13.\vec{i}+t23.\vec{j}+t33.\vec{k}$$

tii: tensión normal

tij: tensión tangencial

Notación:

-Para las tensiones principales normales σi: El subíndice indica el eje normal al plano considerado en el cual actúa.

-Para las tensiones tangenciales τij asociada a un plano normal al eje k

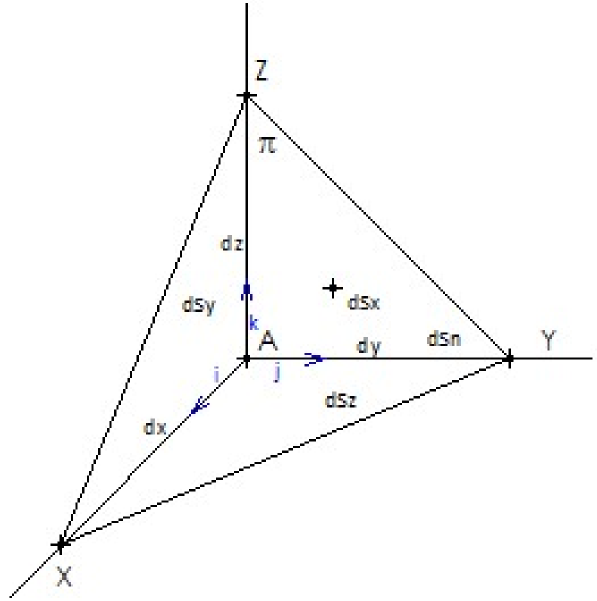
- El índice i indica la dirección de la tensión normal asociada a dicho plano.
- El índice j indica la dirección de la tensión esa tensión τ dentro del plano considerado.

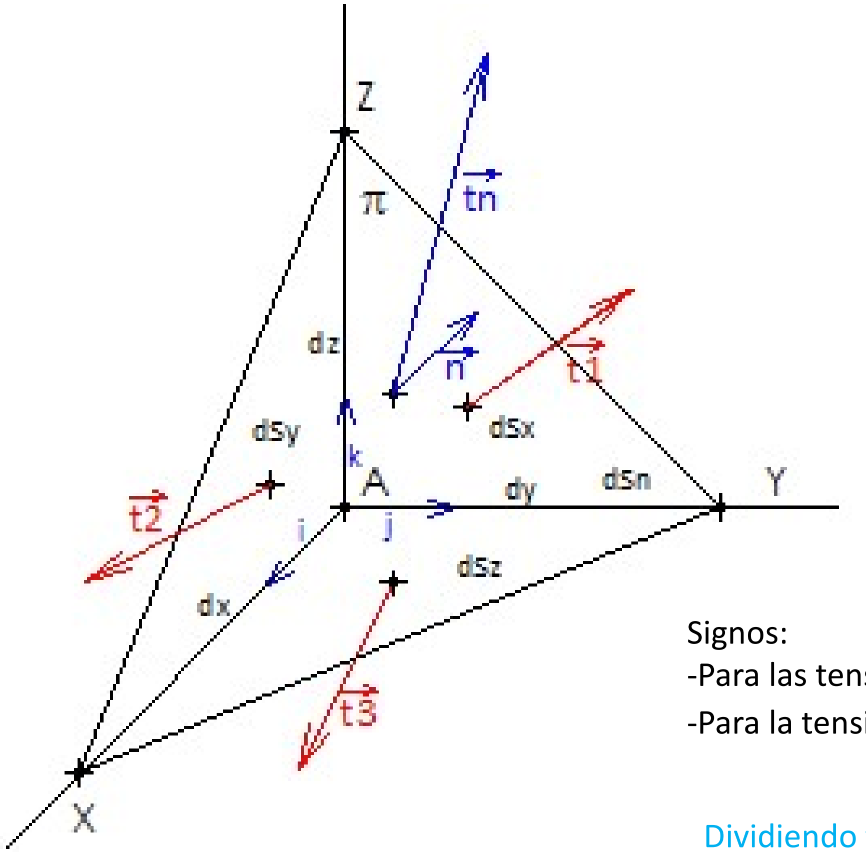
ESTADO DE EQUILIBRIO

Consideremos el tetraedro elemental en el punto A

Cuyos lados elementales son: dx dy dz

Y sus caras elementales son: dSn dSx dSy dSz





El plano π esta definido por sus cosenos directores $\vec{n}=\alpha.\vec{i}+\beta.\vec{j}+\gamma.\vec{k}$

Siendo α β γ los cosenos de los ángulos que forman la normal n al plano π considerado con cada uno de los ejes cartesianos

La ecuación vectorial de equilibrio es: $+\vec{tn}.dSn-\vec{t1}.dSx-\vec{t2}.dSy-\vec{t3}.dSz=0$

Signos:

-Para las tensiones t1,t2,t3 se han considerado que actúan según los versores –i,-j,-k

-Para la tensión tn que actúa en el plano p se considera que tiene la dirección del versor ň

Dividiendo todo por el escalar: dSn

$$\vec{tn}=\vec{t1}.\frac{dSx}{dSn}+\vec{t2}.\frac{dSy}{dSn}+\vec{t3}.\frac{dSz}{dSn}$$

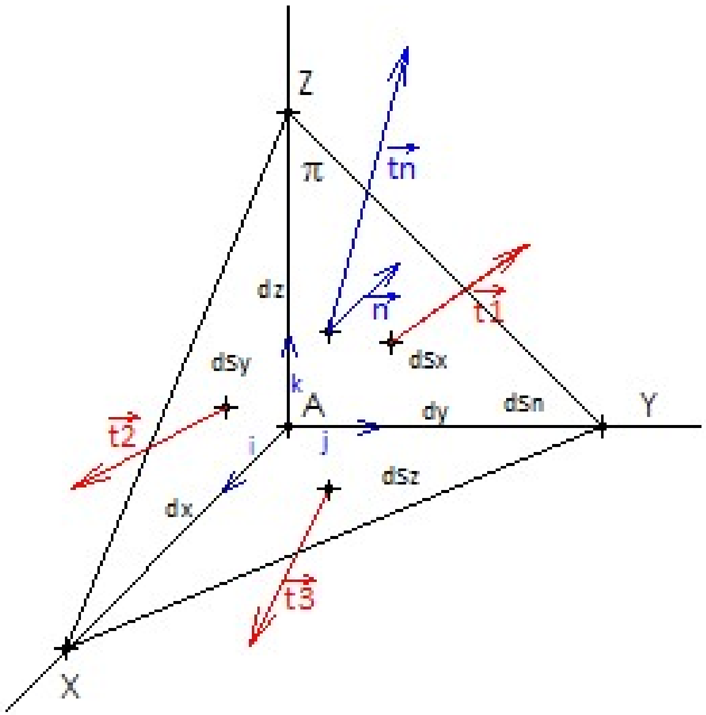
Como: $\alpha=\frac{dSx}{dSn}$ $\beta=\frac{dSy}{dSn}$ $\gamma=\frac{dSz}{dSn}$

Nos queda el equilibrio vectorial de tensiones: $\vec{tn}=\vec{t1}.\alpha+\vec{t2}.\beta+\vec{t3}.\gamma$

ESTADO DE EQUILIBRIO

Reemplazando en la ecuación de equilibrio las tensiones t1,t2,t3 por sus componentes cartesianas según los ejes: $\vec{tn}=\alpha.\sigma x.\vec{i}+\alpha.\tau xy.\vec{j}+\alpha.\tau xz.\vec{k}+\beta.\tau yx.\vec{i}+\beta.\sigma y.\vec{j}+\beta.\tau yz.\vec{k}+\gamma.\tau zx.\vec{i}+\gamma.\tau zy.\vec{j}+\gamma.\sigma z.\vec{k}$

Como tn expresado como combinación lineal de sus componentes según los ejes: $\vec{tn}=tnx.\vec{i}+tny.\vec{j}+tnz.\vec{k}$



Igualando las componentes según $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

$$tnx.i=\alpha.\sigma x.i+\beta.\tau yx.i+\gamma.\tau zx.i$$
$$tny.j=\alpha.\tau xy.j+\beta.\sigma y.j+\gamma.\tau zy.j$$
$$tnz.k=\alpha.\tau xz.k+\beta.\tau yz.k+\gamma.\sigma z.k$$

$$tnx=\alpha.\sigma x+\beta.\tau yx+\gamma.\tau zx$$
$$tny=\alpha.\tau xy+\beta.\sigma y+\gamma.\tau zy$$
$$tnz=\alpha.\tau xz+\beta.\tau yz+\gamma.\sigma z$$

Expresando en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} tnx \\ tny \\ tnz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma x & \tau yx & \tau zx \\ \tau xy & \sigma y & \tau zy \\ \tau xz & \tau yz & \sigma z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

En forma sintética: $[tni] = [\sigma]\,[n]$

$[tni]$: tensión obrante en el plano π

$[\sigma]$: tensor de tensiones

$[n]$: versor en la dirección normal

CARÁCTER TENSORIAL DEL ESTADO DE TENSIÓN

El estado de tensión es una magnitud de carácter tensorial

Tensor de 2do grado y se representa por un ordenamiento de 9 escalares

El tensor de tensiones se representa por una matriz:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La representación matricial del tensor puede cambiar según el sistema referencial adoptado
Habrá un sistema referencial para el cual el tensor se representa mediante una matriz diagonal:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Podemos pasar de una representación a otra a través de rotaciones del sistema referencial
Sabemos que un cambio de ejes mediante rotación se obtiene mediante la aplicación de una matriz sobre el tensor dado

LA MATRIZ DE ROTACIÓN

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se aplica sobre el tensor mediante la siguiente operación matricial

$$[\sigma'] = [A^{-1}]^T . [\sigma] . [A]^T = [A] . [\sigma] . [A]^T$$

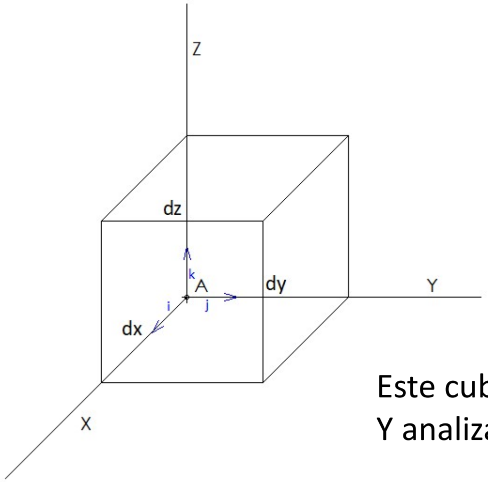
3x3 . 3x3. 3x3= 3x3

Es decir si: A una representación de un tensor en un sistema dado se le pre multilica por la matriz representativa de una rotación y se la pos multiplica por su transpuesta, **SE OBTIENE LA REPRESENTACIÓN DEL TENSOR EN EL NUEVO SISTEMA ROTADO**

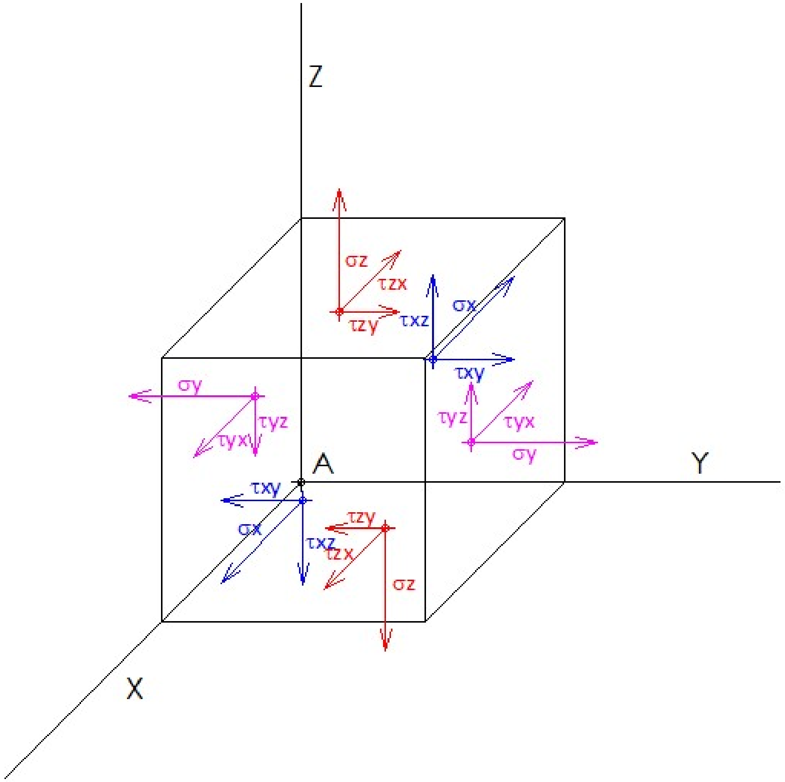
SIMETRÍA DEL TENSOR DE TENSIONES

Teorema de Cauchy o de tensiones recíprocas

Tomando un cubo elemental de aristas dx, dy, dz



Este cubo representa el punto A
Y analizaremos el estado tensional en este punto



<u>CONVENCIÓN DE SIGNOS</u>

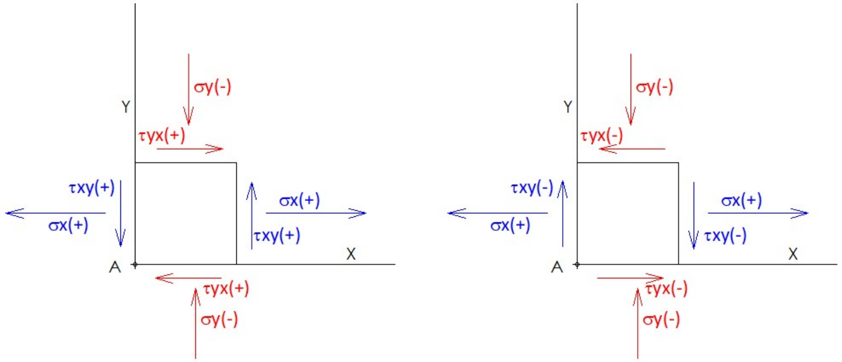
Cara positiva se define a aquella cuyo vector saliente tiene la dirección positiva del eje

Tensiones normales

Una tensión normal que tiene la dirección de la normal saliente a una cara positiva o negativa se define como tracción Si es entrante como compresión.

Tensiones tangenciales

En una cara positiva una tensión tangencial es positiva cuando tiene la dirección del eje ortogonal positivo al de la cara dada. Una tensión tangencial positiva en una cara negativa tiene la dirección del eje ortogonal negativo.

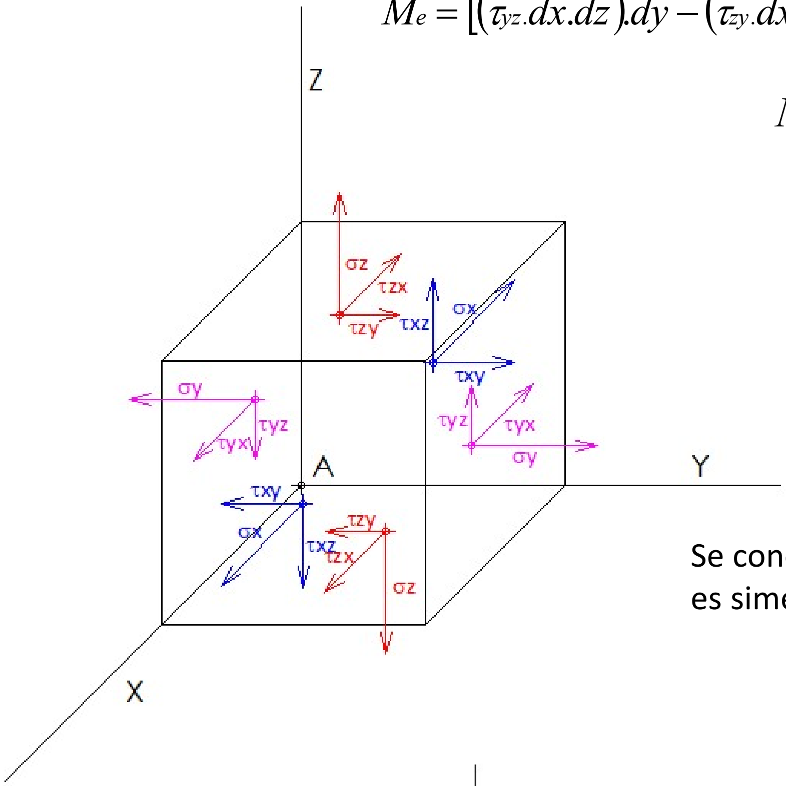


Tomando momento respecto a A de las fuerzas que provocan las tensiones obrantes:

$$\vec{M}_e = \left[(\tau_{yz}.dx.dz).dy - (\tau_{zy}.dx.dy).dz\right].\hat{i} + \left[(\tau_{zx}.dx.dy).dz - (\tau_{xz}.dz.dy).dx\right].\hat{j} + \left[(\tau_{zy}.dz.dy).dx - (\tau_{yz}.dz.dx).dy\right].\hat{k} = 0$$

SIMETRÍA DEL TENSOR DE TENSIONES

Teorema de Cauchy o de tensiones recíprocas



$$\vec{M}_e = \left[(\tau_{yz}.dx.dz).dy - (\tau_{zy}.dx.dy).dz\right]\hat{i} + \left[(\tau_{zx}.dx.dy).dz - (\tau_{xz}.dz.dy).dx\right]\hat{j} + \left[(\tau_{zy}.dz.dy).dx - (\tau_{yz}.dz.dx).dy\right]\hat{k} = 0$$

$$\vec{M}_e = 0.\hat{i} + 0.\hat{j} + 0.\hat{k} = 0$$

Para que el momento sea nulo lo deben ser sus componentes sobre los ejes

$$\left[(\tau_{yz}.dx.dz).dy - (\tau_{zy}.dx.dy).dz\right] = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\left[(\tau_{zx}.dx.dy).dz - (\tau_{xz}.dz.dy).dx\right] = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

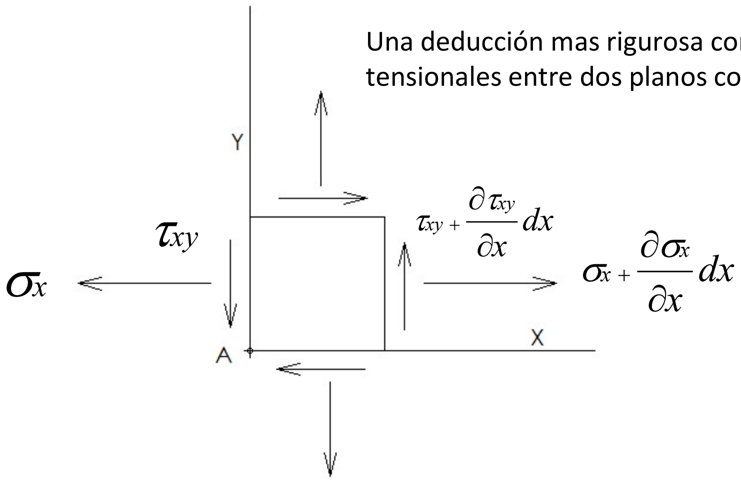
$$\left[(\tau_{zy}.dz.dy).dx - (\tau_{yz}.dz.dx).dy\right] = 0 \Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Se concluye entonces que el tensor de tensiones es simétrico

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Una deducción mas rigurosa contempla las variaciones tensionales entre dos planos consecutivos



$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right).dy.dz.\frac{dy}{2}$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - \tau_{xy}\right).dy.dz.dx$$

Los momentos de las fuerzas debida a las variaciones son infinitesimos de orden superior y se desprecian

INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES

Dado el tensor de tensiones:
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Se reconocen los siguientes invariantes en el tensor de tensiones (propios de un tensor simétrico de 2do orden)
Estos invariantes son constantes para los distintos sistemas en los cuales se representa el tensor

1-) Invariante escalar: la suma de la diagonal mayor de la matriz

$$\sigma x + \sigma y + \sigma z = \sigma 1 + \sigma 2 + \sigma 3 = J1$$

2-) El determinante mayor de la matriz

$$\det|\sigma| = cte = J_3$$

3-) La suma de los determinantes menores

$$\sigma x.\sigma y - \tau xy^2 + \sigma y.\sigma z - \tau yz^2 + \sigma z.\sigma x - \tau zx^2 = J2$$

Es decir que si nosotros hacemos un cambio de ejes mediante la rotación:

$$[\sigma'] = [A^{-1}]^T.[\sigma].[A]^T = [A].[\sigma].[A]^T$$

LOS INVARIANTES SE MANTENDRAN

TENSOR PRINCIPAL

De los infinitos sistemas de ejes que pasan por un punto existe siempre uno en los cuales la representación del tensor es a través de una matriz diagonal:

Un tensor cualquieras en un punto: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

Habrá siempre una transformación de ejes : $[\sigma'] = [A^{-1}]^T . [\sigma] . [A]^T = [A] . [\sigma] . [A]^T$

En la cual el tensor se representará con: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

Este nuevo sistema de ejes tiene como direcciones los **autovectores o vectores propios** de la transformación

Los valores: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Son los autovalores de la transformación

DETERMINACIÓN DE LOS VECTORES PROPIOS

Se definen como autovectores aquellas direcciones que cumplen con las siguiente condición

$$[\sigma].[v] = \sigma.[v]$$

Se considera a: $[\sigma]$ Como un operador lineal y la aplicación deñ mismo sobre un vector da un vector paralelo

Entonces: $[\sigma].[v] = \sigma.[I][v]$

$$[\sigma].[v] - \sigma.[I][v] = 0$$

$$([\sigma].[v] - \sigma.[I])[v] = 0$$

Desarrollando las ecuación matricial en un sistema de ecuaciones lineales:

$$(\sigma_x - \sigma).v_1 + \tau_{xy}.v_2 + \tau_{xz}.v_3 = 0$$
$$\tau_{yx}.v_1 + (\sigma_y - \sigma).v_2 + \tau_{yz}.v_3 = 0$$
$$\tau_{zx}.v_1 + \tau_{zy}.v_2 + (\sigma_z - \sigma).v_3 = 0$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene solución distinta de la trivial solo si el determinante de los coeficientes es igual a cero

O sea:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Que nos conduce a la ecuación característica: $R.\sigma^3 + S.\sigma^2 + T.\sigma = 0$

Resolviendo obtenemos los autovalores: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

DETERMINACIÓN DE LOS VECTORES PROPIOS

Dijimos que los vectores propios se definían a través de: $[\sigma].[v] = \sigma.[v]$

Esto conduce a:

$$(\sigma_x - \sigma).v_1 + \tau_{xy}.v_2 + \tau_{xz}.v_3 = 0$$
$$\tau_{yx}.v_1 + (\sigma_y - \sigma).v_2 + \tau_{yz}.v_3 = 0$$
$$\tau_{zx}.v_1 + \tau_{zy}.v_2 + (\sigma_z - \sigma).v_3 = 0$$

Habiendo obtenido los autovalores de la transformación $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Para cada autovalor resolvemos el sistema de ecuaciones lineales buscando las componentes de los vectores solución del mismo.

Veremos que para cada auto valor el sistema de ecuaciones nos expresa una dependencia entre sus componentes y por lo tanto para cada autovalor nos da una dirección de soluciones

Entonces habrá que fijar alguna componente y determinar las restantes.

Obtendremos entonces los vectores propios:

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 \rightarrow & v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \sigma_2 \rightarrow & v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \sigma_3 \rightarrow & v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{array}$$

Estos vectores propios se pueden versorizar:

$$\widehat{e}_1 = [e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}]$$
$$\widehat{e}_2 = [e_{2x}, e_{2y}, e_{2z}]$$
$$\widehat{e}_3 = [e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}]$$

Recordemos que para versorizar un vector debemos dividir cada una de sus componentes por el modulo del vector:

$$\begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{11}}{|v_1|} \\ \frac{v_{12}}{|v_1|} \\ \frac{v_{13}}{|v_1|} \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

Hemos determinado los vectores propios o direcciones principales de las tensiones cuyos valores son: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Los versores del sistema principal son:

$$\hat{e}_1 = [e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}]$$
$$\hat{e}_2 = [e_{2x}, e_{2y}, e_{2z}]$$
$$\hat{e}_3 = [e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}]$$

La matriz de transformación que lleva del sistema dado al sistema principal es:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cada fila de la matriz de transformación contiene los versores principales correspondientes:

$$[a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}] = [e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}]$$

Entonces la matriz de transformación nos queda:

$$[A] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix}$$

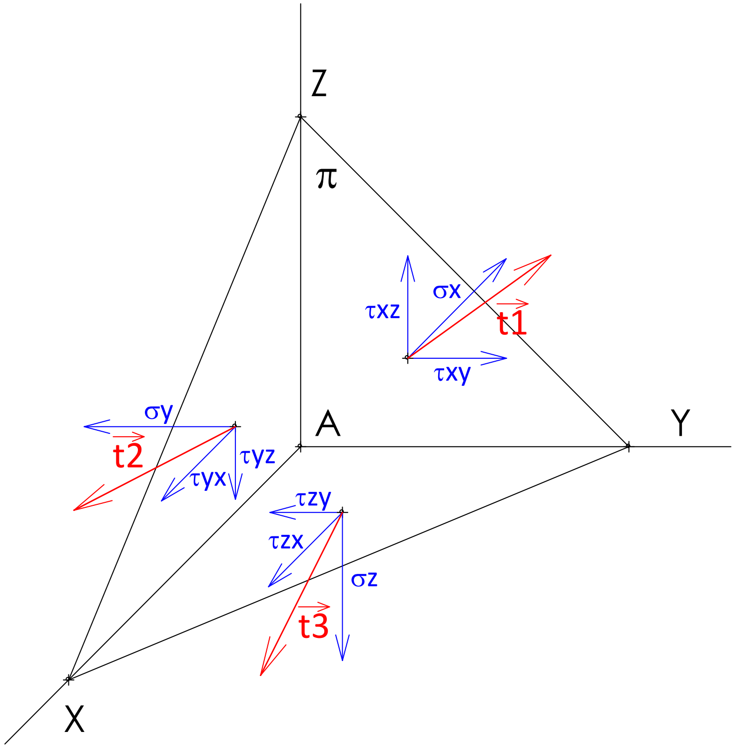
Cualquier tensor o vector se transformará de un base a su base principal a través de la ecuación matricial:

Para transformar un tensor, por ejemplo el tensor de tensiones: $[\sigma'] = [A^{-1}]^T . [\sigma] . [A]^T = [A] . [\sigma] . [A]^T$

Para transformar un vector: $[v'] = [A] . [v]$

ESTADO TRIPLE DE TENSIÓN

El estado triple viene caracterizado por el siguiente estado tensional



Sabemos que este tetraedro representa al punto A y su estadio tensional

El tensor simétrico asociado a este sistema de ejes es:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Se materializan las tensiones en un plano cualquiera π definido por su versor normal: $\hat{e}_n = l.\hat{i} + m.\hat{j} + n.\hat{k}$

Donde *l,m,n* son los cosenos directores de la normal al plano π

La tensión total asociada al plano π es: $[\vec{t}\,] = [\sigma].[\hat{e}]$

$$\vec{t} = t_x\ .\hat{i} + t_y\ .\hat{j} + t_z\ .\hat{k}$$

El valor de la tensión normal al plano π se obtiene proyectando escalarmente sobre la normal es:

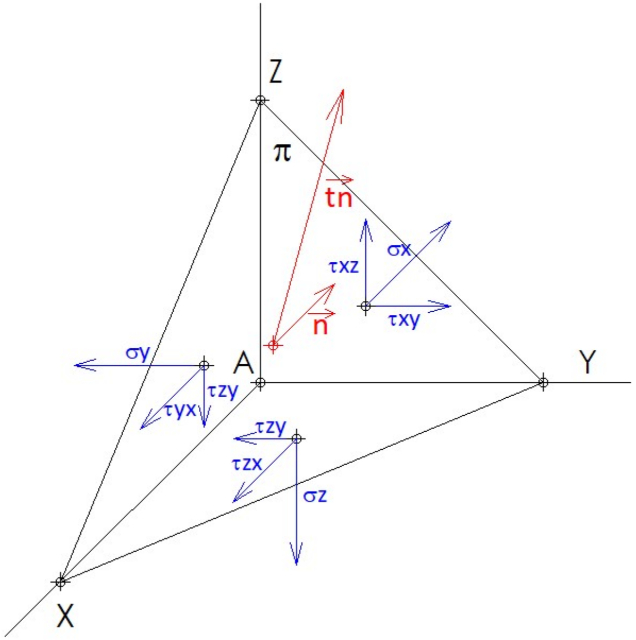
$$\sigma = \vec{t}.\hat{e} = \hat{e}.\vec{t} = [\hat{e}].[\vec{t}\,] = [\hat{e}].[\sigma].[\hat{e}]$$

1x3 . 3x3. 3x1= 1x1 (escalar)

La cuadrática asociada es:

$$\sigma = l^2.\sigma_x + m^2.\sigma_y + n^2.\sigma_z + 2.l.m.\tau_{xy} + 2.l.n.\tau_{xz} + 2.m.n.\tau_{yz}$$

ESTADO TRIPLE DE TENSIÓN



La cuadrática asociada es:

$$\sigma = l^2.\sigma_x + m^2.\sigma_y + n^2.\sigma_z + 2.l.m.\tau_{xy} + 2.l.n.\tau_{xz} + 2.m.n.\tau_{yz}$$

La tensión normal en forma vectorial es: $\vec{\sigma} = \sigma.\widehat{e}_n = \sigma_{nx}.\widehat{i} + \sigma_{nx}.\widehat{j} + \sigma_{nx}.\widehat{k}$

Vectorialmente se deduce la tensión tangencial:

$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = (t_x - \sigma_{nx}).\widehat{i} + (t_y - \sigma_{ny}).\widehat{j} + (t_z - \sigma_{nz}).\widehat{k}$$

El módulo de la tensión tangencial es: $|\tau|^2 = \vec{\tau}.\vec{\tau}$

Las direcciones principales se y los autovalores obtienen con :

$$R.\sigma^3 + S.\sigma^2 + T.\sigma = 0 \qquad \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

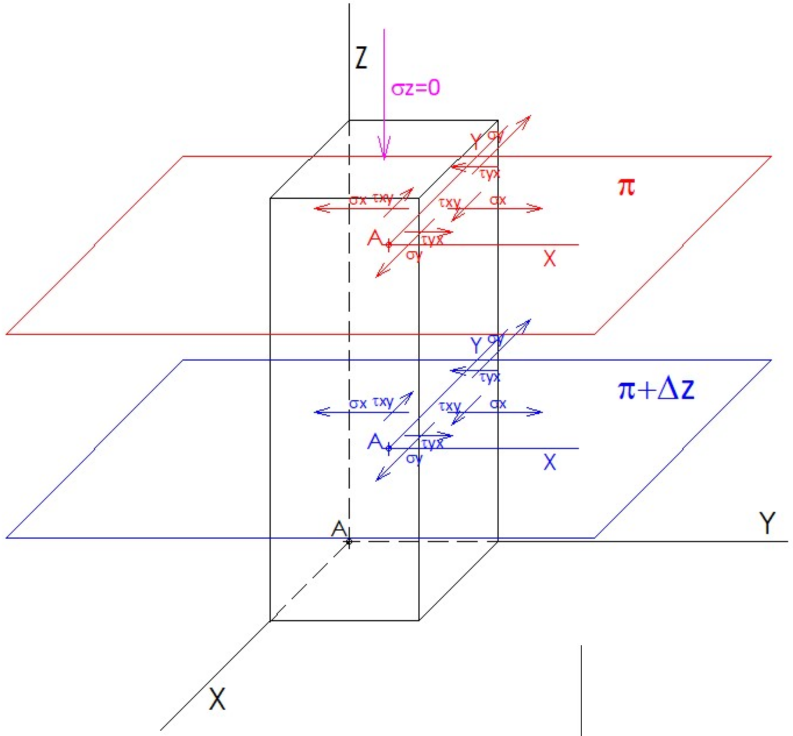
$$\begin{array}{llll} \sigma_1 \dashrightarrow & v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \sigma_2 \dashrightarrow & v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \sigma_3 \dashrightarrow & v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{array}$$

Finalmente la representación diagonal del tensor: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

ESTADO TENSIONAL PLANO

El estado plano de tensiones o estado tensional plano es aquel en el cual la tensión axil en una dirección es nula, como asimismo las tensiones tangenciales asociadas a esa dirección.

Eso lleva a que en planos paralelos del solido se observen los mismos esquemas tensionales .



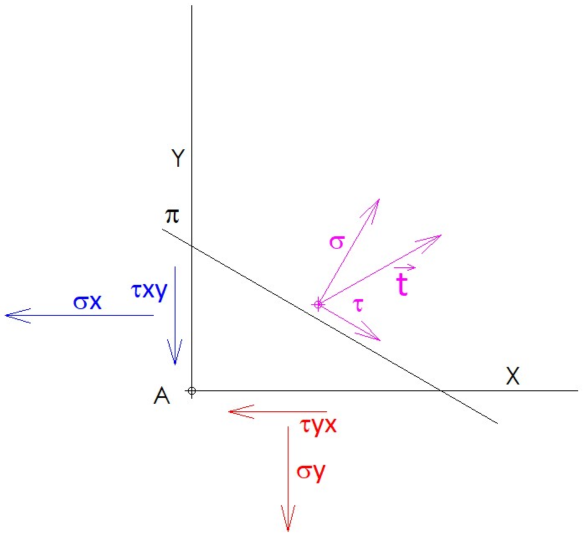
El tensor asociado a este tipo de estado tensional es:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que en los planos paralelos los esquemas tensionales se repiten, se pude trabajar con dos dimensiones

El tensor asociado a este tipo de estado tensional nos quedará:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



El plano π viene dado por los cosenos directores

$$\hat{e}_n = l.\hat{i} + m.\hat{j}$$

Las formulas resolutivas del estado tensional son:

$$[\vec{t}\,] = [\sigma].[\hat{e}]$$

$$\sigma = \vec{t}.\hat{e} = \hat{e}.\vec{t} = [\hat{e}].[\vec{t}\,] = [\hat{e}][\sigma].[\hat{e}]$$

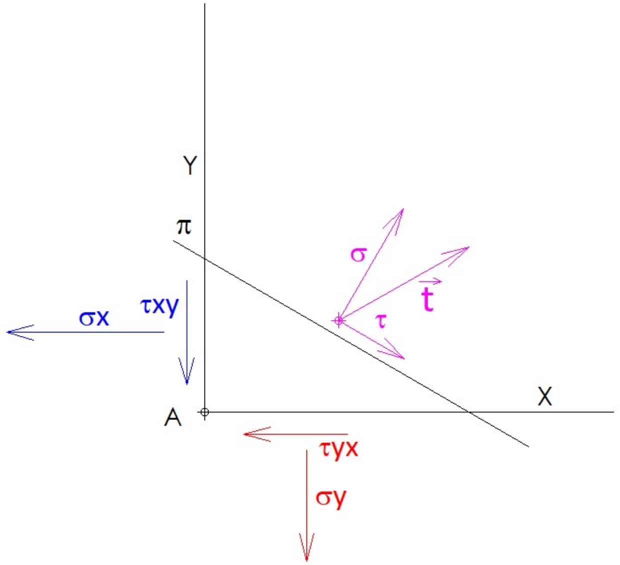
$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = (t_x - \sigma_{nx}).\hat{i} + (t_y - \sigma_{ny}).\hat{j}$$

$$|\sigma| = [\hat{e}].[\sigma].[\hat{e}]$$

$$\sigma = l^2.\sigma_x + m^2.\sigma_y + 2.l.m.\tau_{xy}$$

ESTADO TENSIONAL PLANO

Determinación de las direcciones principales

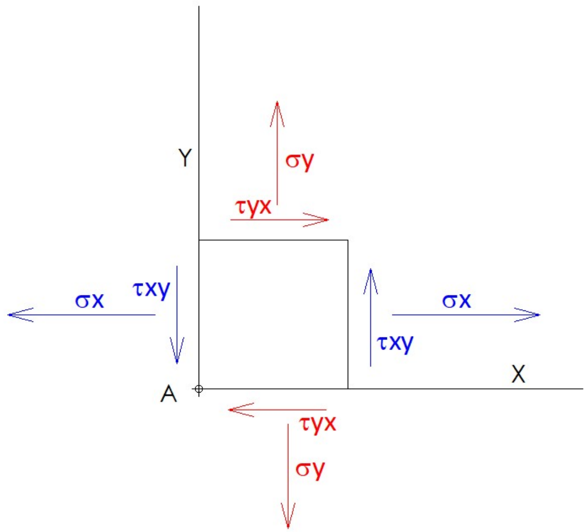


El tensor asociado a un estado plano es: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$

La ecuación característica se obtiene resolviendo:

$$det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Y nos queda:



El plano π viene dado por los cosenos directores

Las formulas resolutivas del estado tensional son: $[\vec{t}\,] = [\sigma].[\hat{e}]$

$$\sigma = \vec{t}.\hat{e} = \hat{e}.\vec{t} = [\hat{e}].[\vec{t}\,] = [\hat{e}].[\sigma].[\hat{e}]$$

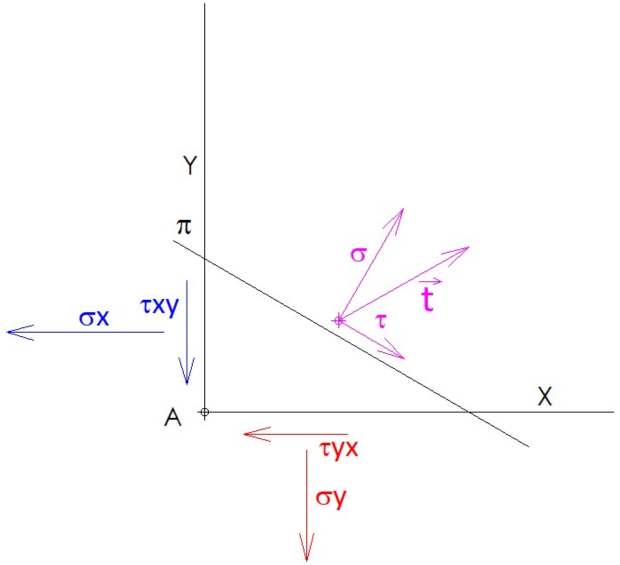
$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = (t_x - \sigma_{nx}).\hat{i} + (t_y - \sigma_{ny}).\hat{j}$$

$$|\sigma| = [\hat{e}].[\sigma].[\hat{e}]$$

$$\sigma = l^2.\sigma_x + m^2.\sigma_y + 2.l.m.\tau_{xy}$$

ESTADO TENSIONAL PLANO

Determinación de las tensiones y direcciones principales



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

La ecuación característica se obtiene resolviendo:

$$det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Y nos queda:

$$(\sigma_x - \sigma).(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y).\sigma + \sigma_x.\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_{1-2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones

$$(\sigma_x - \sigma).v_1 + \tau_{xy}.v_2 = 0$$

$$\tau_{yx}.v_1 + (\sigma_y - \sigma).v_2 = 0$$

$$\sigma_1 \rightarrow \quad v_{11} \quad v_{12}$$

$$\sigma_2 \rightarrow \quad v_{21} \quad v_{22}$$