

TEMA I: Modelación Experimental de Procesos

Índice

1	Métodos Clásicos para Modelación o Identificación de Procesos.....	- 2 -
1.1	Introducción	- 2 -
2	Modelación de Procesos en Lazo Abierto a través de la Respuesta al Escalón	- 3 -
3	Modelación de procesos de sistemas sobre y sub-amortiguados.....	- 4 -
3.1	Modelación de procesos de primer orden	- 5 -
3.1.1	Métodos de Ziegler-Nichols y de Hägglund.....	- 6 -
3.1.2	Métodos de Smith y de Sundaresan-Krishnaswamy	- 8 -
3.1.3	Método de Nishikawa	- 10 -
3.1.4	Método de dos Puntos General	- 11 -
3.2	Modelación de procesos de segundo orden.....	- 13 -
3.2.1	Método alternativo para respuestas subamortiguadas	- 15 -
3.2.2	Método de tres puntos de Stark – Mollenkamp	- 16 -
3.2.3	Método de tres puntos de Jahanmiri – Fallahi	- 17 -
3.3	Índices de Desempeño	- 18 -
4	Identificación de las constantes de la función de transferencia de un motor CC mediante la respuesta al escalón.....	- 19 -
5	Modelación de Procesos mediante la respuesta en Frecuencia	- 21 -
5.1	Introducción	- 21 -

1 Métodos Clásicos para Modelación o Identificación de Procesos

1.1 Introducción

La puesta en funcionamiento de un determinado proceso que opera en lazo cerrado, requiere de la realización adecuada del proyecto de los parámetros del controlador. A este proceso, se lo denomina comúnmente, sintonía de los parámetros del controlador. Para proyectar o sintonizar correctamente los parámetros de un controlador, tal como el que se muestra en la Figura 1, cuya función de transferencia es $G_c(s)$, es necesario en primer lugar identificar la dinámica del proceso a controlar, o sea, la función de transferencia $G_p(s)$. Identificado el modelo del proceso, es posible efectuar la compensación adecuada del lazo de control.

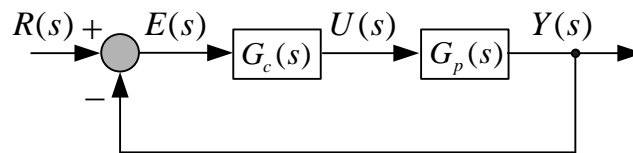


Figura 1 – Sistema lineal de control con realimentación unitaria.

Para realizar este proceso de identificación o modelación de los parámetros del proceso, se requiere que este último sea alimentado por algún tipo de señal, a fin de excitar los modos que determinan el comportamiento dinámico del sistema en cuestión. En este procedimiento, tanto la señal de entrada como la señal de respuesta del proceso deben ser registradas. Las señales de entrada que se pueden utilizar para realizar estos ensayos son del tipo **impulso, escalón, rampa y sinusoidal**. Nótese que este procedimiento puede ser realizado siempre que el sistema sea de una sola entrada y una sola salida.

En el análisis y proyecto de sistemas de control, es útil adoptar una base de comparación para poder evaluar el desempeño resultante de esos sistemas. Esta base de comparación, puede formarse cotejando las diferentes respuestas de esos sistemas, aplicándose a la entrada algunas de las señales patrones, enunciadas anteriormente.

Del conjunto de señales mencionadas, las más utilizadas para evaluar las características dinámicas esenciales de un proceso, son la entrada en **escalón** y la **sinusoidal**; en el **dominio del tiempo** y **de la frecuencia**, respectivamente. Utilizando una entrada en escalón, es posible determinar las principales características dinámicas que identifican a un determinado sistema o proceso, entre ellas, la estabilidad, tiempo de respuesta, atraso de transporte, polos con bajo factor de amortiguamiento relativo, error en régimen permanente; entre las características más relevantes y que pueden inferirse visualmente en la respuesta a este tipo de entrada. Por otro lado, a través de la respuesta en frecuencia, utilizándose diagramas de magnitud y de fase, también es posible

determinar, mediante una interpretación gráfica las principales características dinámicas del proceso; pero además, comparativamente con el método de modelación de respuesta al escalón, la respuesta en frecuencia posibilita obtener información acerca de algunas dinámicas que en la respuesta al escalón no aparecen visualmente y tampoco son posibles de ser determinadas analíticamente.

Es importante destacar que estos métodos de identificación son válidos para sistemas lineales. Para el caso específico de la respuesta de un proceso con señales de entrada en escalón, se considera que el sistema **“es lineal si la forma de la curva de respuesta del proceso ante la entrada al escalón, no depende de la amplitud de la señal de entrada”**. Por otro lado, para el caso de la respuesta en frecuencia, además de ser aplicable solo a sistemas lineales, el proceso en cuestión debe ser estable; dado que la respuesta en frecuencia de sistemas inestables no puede ser medida.

2 Modelación de Procesos en Lazo Abierto a través de la Respuesta al Escalón

El procedimiento usual es realizar una conmutación abrupta a través de un aumento o decremento en la magnitud del escalón, magnitud que puede ser tensión o corriente, o abertura o cierre de una válvula. Es importante aclarar que los valores medidos de la magnitud de salida pueden estar relacionados a variables físicas no eléctricas, como ser presión, temperatura, humedad, caudal, entre otras; no en tanto, la magnitud de entrada al proceso impuesta por el actuador, estará relacionada generalmente a una tensión o corriente. Este ensayo se realiza a lazo abierto.

Algunos ejemplos de respuesta al escalón de sistemas en lazo abierto se muestran en la Figura 2 y la Tabla I resume las características dinámicas de estos procesos.

Tabla I – Características Dinámicas de Procesos en Lazo Abierto a través de la Respuesta al Escalón

Respuesta	Comportamiento según el tipo de respuesta						
	Estable	Inestable	Oscilatorio	Atraso de Transporte	Fase No Mínima	Sub Amortiguado	Sobre Amortiguado
A	X						X
B	X			X		X	
C		X					
D			X				
E	X			X			X
F	X				X		X

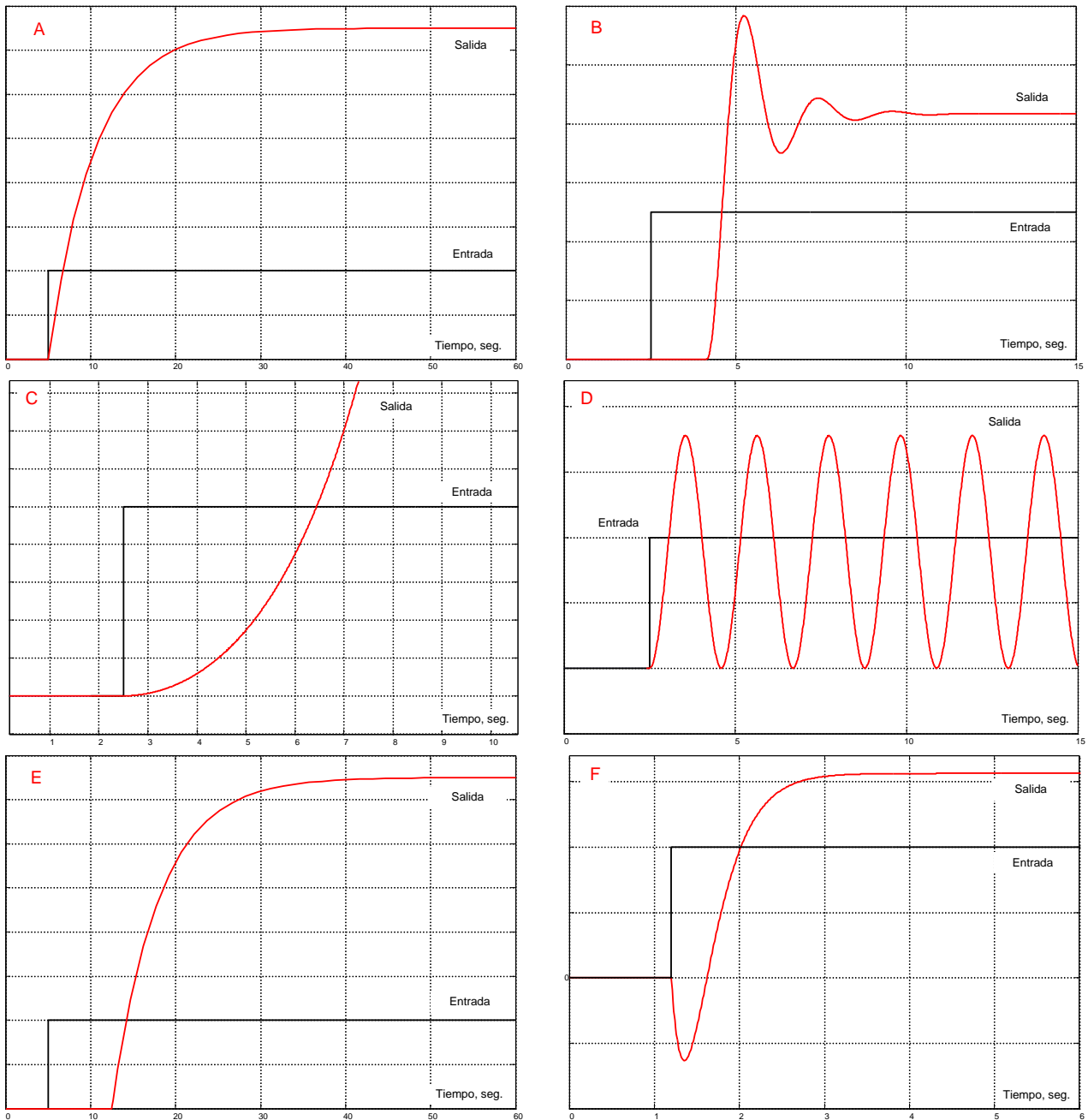


Figura 2 – Respuestas típicas de procesos en lazo abierto para entradas en escalón.

3 Modelación de procesos de sistemas sobre y sub-amortiguados

Para realizar el proyecto de los parámetros del controlador, es común basarse en un modelo del proceso de orden reducido que pueda representar de forma aproximada la dinámica de un sistema de orden elevado. Los modelos de orden reducido más utilizados son los de primer o segundo orden incluyendo el tiempo muerto o atraso de transporte.

Las funciones de transferencia de estos modelos de orden reducido son las dadas en (1), (2), (3) y (4); respectivamente, de primer orden más atraso de transporte, polo doble más atraso de

transporte, segundo orden sobre-amortiguado más atraso de transporte y segundo orden sub-amortiguado más atraso de transporte.

✍ **Primer orden más atraso de transporte**

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (1)$$

✍ **Polo doble más atraso de transporte**

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p e^{-\theta s}}{(\tau s + 1)^2} \quad (2)$$

✍ **Segundo orden sobre-amortiguado más atraso de transporte**

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3)$$

✍ **Segundo orden sub-amortiguado más atraso de transporte**

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (4)$$

A efectos de poder aplicar los diferentes métodos de sintonía de controladores existentes en la literatura, algunos de los cuales serán abordados en esta asignatura, se requiere que los sistemas sobre-amortiguados de orden superior a uno, se representen en lo posible, por modelos de primer orden más atraso de transporte como el dado por la ecuación (1), en el caso de que el tiempo muerto sea significativo respecto de la constante de tiempo del proceso. Por otro lado, algunos pocos sistemas sobre-amortiguados requieren de un modelo de segunda orden como el de la ecuación (3). Si la respuesta del proceso es sub-amortiguada deberá representarse por un modelo como el dado en (4).

3.1 Modelación de procesos de primer orden

Un modelo que representa la dinámica de muchos de los procesos comúnmente encontrados en la industria es el dado por la ecuación (1). Como se puede observar en esta función de transferencia, existen 3 parámetros a determinar: la ganancia estática “ K_p ”, el atraso de transporte “ θ ” y la constante de tiempo “ τ ”.

La respuesta al escalón unitario de este modelo en el dominio de Laplace puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$Y(s) = \left(\frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau s + 1} \right) \left(\frac{a}{s} \right), \text{ donde } U(s) = \frac{a}{s} \quad (5)$$

En la (5), el parámetro “ a ” es conocido y es un valor arbitrario, adoptado en función del proceso en particular. Aplicándose la transformada inversa de Laplace a la (5), se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo, que permite en base a mediciones, la aplicación de los diferentes métodos de estimación de los parámetros antes mencionados. Esta respuesta temporal está dada a continuación:

$$y(t) = a K_p \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} \right) \quad (6)$$

En la literatura existen una gran variedad de métodos para identificar los parámetros “ K_p ”, “ θ ” y “ τ ” (tanto de modelos de primer o de segundo orden más atraso de transporte), en base a la respuesta del proceso a una entrada en escalón. Entre ellos se presentaran aquí los siguientes:

- 📖 Ziegler y Nichols, 1942;
- 📖 Sundaresan y Krishnaswamy, 1977;
- 📖 Nishikawa, 1984;
- 📖 Smith, 1985;
- 📖 Hägglund, 1991;
- 📖 Stark, 1984; Mollenkamp, 1988; Seborg, 1989; Dorf y Bishop, 1995; Jahanmiri-Fallahi, 1997. Estos últimos métodos se relacionan a la identificación de sistemas de segundo orden modelados por funciones de transferencia del tipo dadas en (3) y (4).

3.1.1 Métodos de Ziegler-Nichols y de Hägglund

En estos dos métodos, los parámetros K_p , θ y τ se obtienen conforme se ilustra en la Figura 3. Este método de identificación, propuesto por Ziegler y Nichols fue el primero, el cual surgió de un procedimiento de sintonización de controladores industriales también desarrollado por estos dos autores. Una vez registradas las mediciones de las señales de entrada y de salida, desde que se aplica el escalón de entrada hasta que el sistema alcance el régimen de operación estable, el método requiere que se trace una recta tangente a la curva de salida del proceso en el punto de inflexión o de máxima pendiente de la misma. Esto se muestra en la Figura 3.

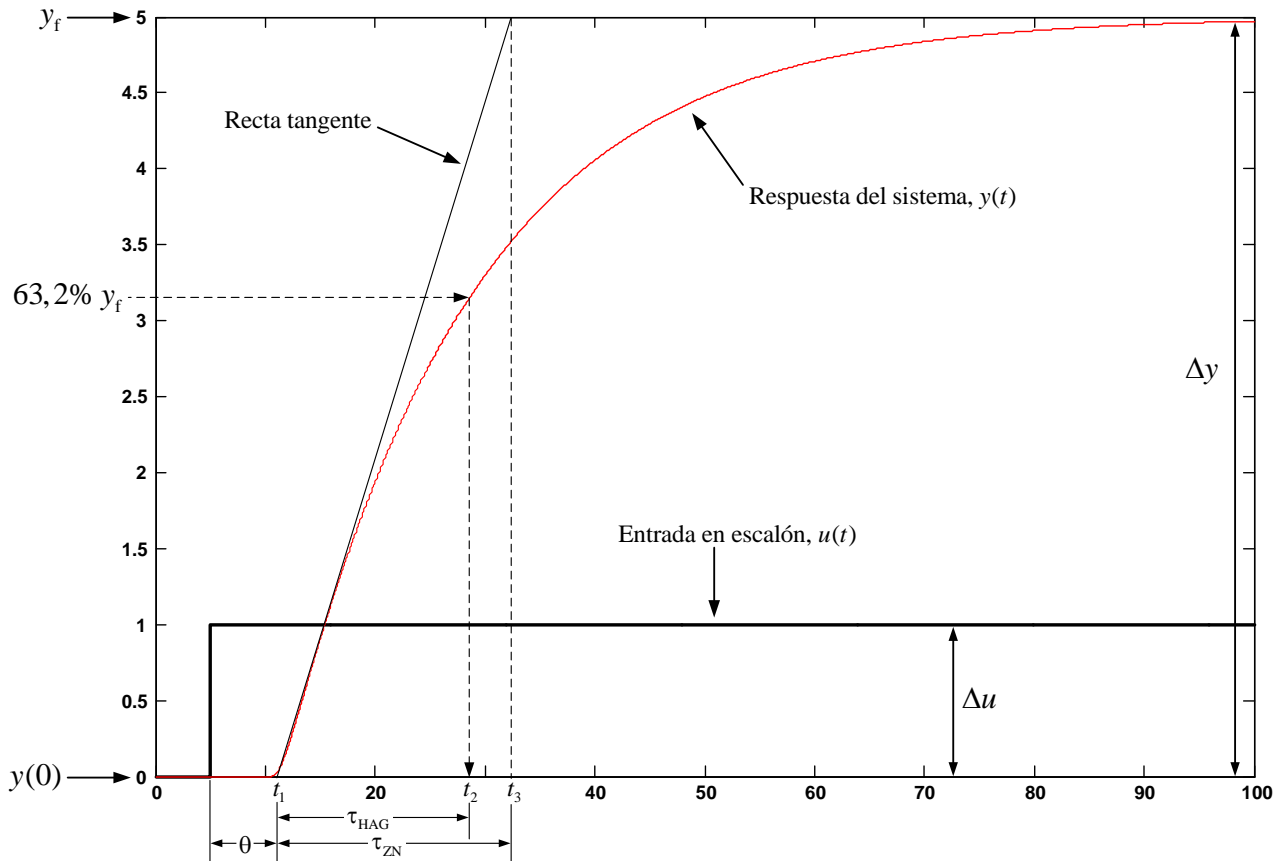


Figura 3 – Métodos de Ziegler-Nichols y de Hägglund para la modelación de procesos de primer orden.

El atraso de transporte θ se obtiene de la medición del intervalo de tiempo entre el instante de la aplicación del escalón y el punto donde la tangente trazada corta al eje del tiempo, instante t_1 ; o en general, donde la tangente corta a la recta $y(t) = y(0)$. La constante de tiempo τ se determina por la medición del intervalo de tiempo entre el instante t_1 y el instante t_3 , este último obtenido a partir de la proyección sobre el eje del tiempo de la intersección entre la tangente y la recta $y(t) = y_f$; siendo y_f el valor final finito al que tiende la variable de salida del proceso cuando $t \rightarrow \infty$. Finalmente, la ganancia estática K_p se determina por el cambio total en la salida dividido el cambio en la entrada, esto es:

$$K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \text{ donde } \Delta y = y_f. \tag{7}$$

En la Figura 3 es posible observar que el método propuesto por Hägglund es una modificación del método propuesto por Ziegler y Nichols, dado que la constante de tiempo muerto θ y la ganancia estática K_p se determinan de la misma forma, excepto por la constante de tiempo τ del sistema, la cual se obtiene de medir el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 , donde t_2 es el instante para el cual la curva de la respuesta de salida alcanza el 63,2% del valor final y_f , o sea, $y(t) = y(0) + 0,632 y_f$. Es importante observar que el valor inicial $y(0)$ puede ser tanto igual a cero

como un valor inicial diferente de cero, es por esto que aparece explícito en las ecuaciones de las rectas.

3.1.2 Métodos de Smith y de Sundaresan-Krishnaswamy

Los métodos descritos en el punto 3.1.1 requieren el trazado de una recta tangente en el punto de máxima inflexión de la curva de respuesta del proceso. Esto en la práctica no siempre es posible de realizarse de forma precisa si la respuesta presenta ruido. Este trazado impreciso de la tangente puede afectar la determinación tanto del atraso de transporte como de la constante de tiempo del modelo. Por lo tanto, en estos casos, para identificar con mayor precisión estos dos parámetros, es posible establecer dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando dos puntos sobre la curva de respuesta. De este modo se garantiza que la respuesta del modelo coincide con la respuesta del sistema real, por lo menos en estos dos puntos.

En el método de Smith, como se aprecia en la Figura 4, sobre la curva de respuesta al escalón se marcan dos instantes de tiempo, t_1 y t_2 , que corresponden respectivamente a los instantes en los cuales la curva alcanza el 28,3% y el 63,2% del valor final y_f , o sea,

$$\begin{aligned} t_1 &= \theta + \tau/3 \\ t_2 &= \theta + \tau; \end{aligned} \quad (8)$$

y los valores de salida están dados por:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(0) + 0,283 y_f \\ y(t_2) &= y(0) + 0,632 y_f. \end{aligned} \quad (9)$$

De esta forma, los parámetros del modelo dado en (1), se calculan mediante las ecuaciones dadas en (10).

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u}; \\ \tau &= 1,5(t_2 - t_1); \\ \theta &= (t_2 - \tau). \end{aligned} \quad (10)$$

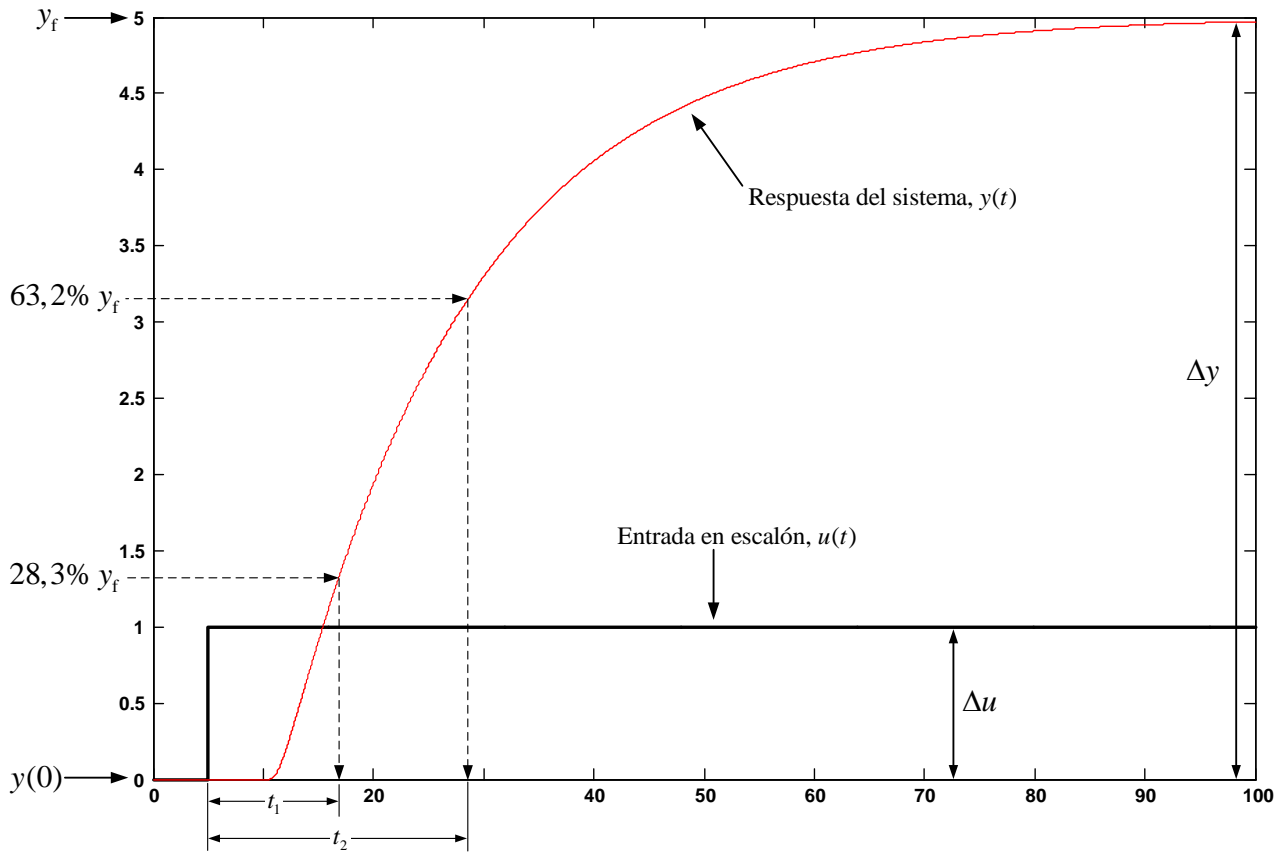


Figura 4 – Método de Smith para la modelación de procesos de primer orden.

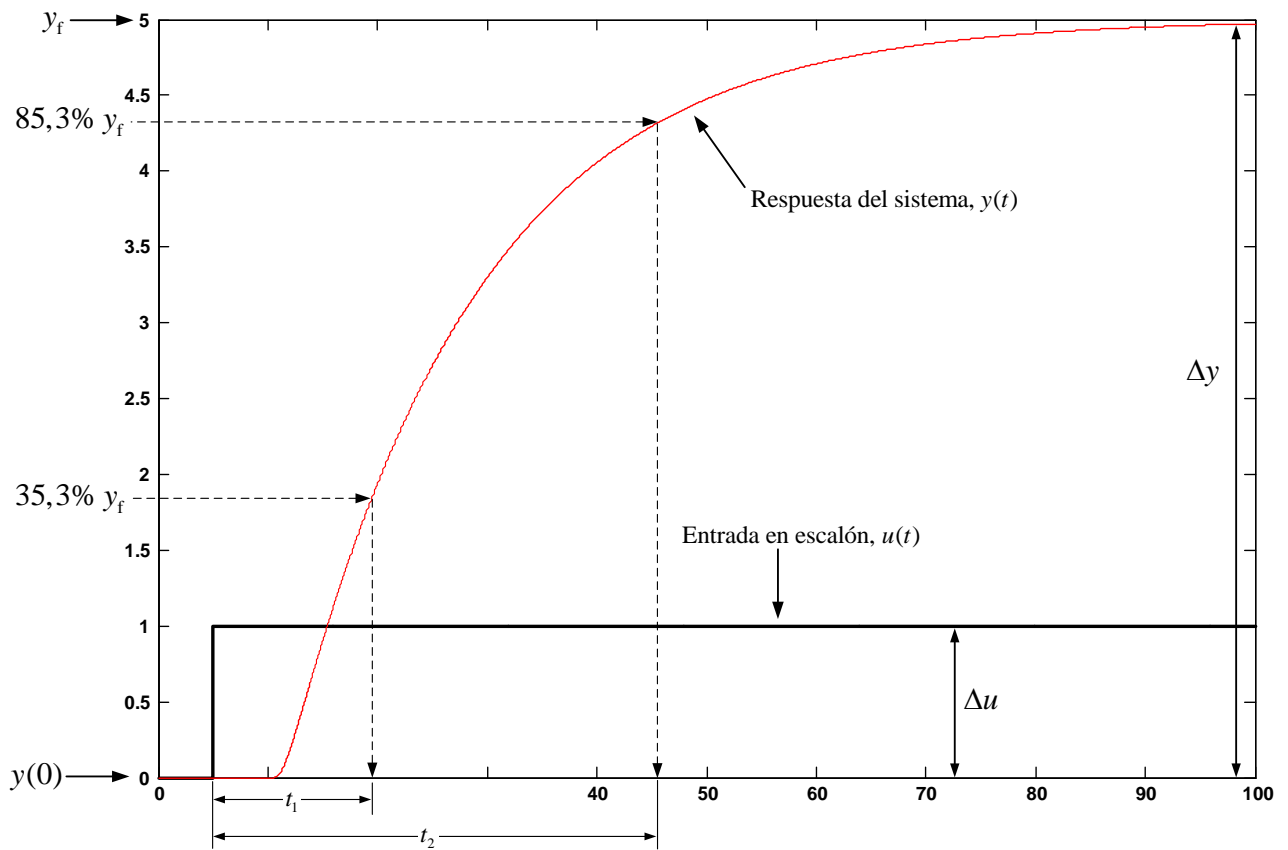


Figura 5 – Método de Sundaesan y Krishnaswamy para la modelación de procesos de primer orden.

El método de Sundaresan y Krishnaswamy, de forma semejante al método de Smith, evita la utilización del punto de inflexión de la curva de respuesta, estimando también dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , que corresponden respectivamente a los instantes en los cuales la curva alcanza el 35,3% y el 85,3% del valor final y_f , como se muestra en la Figura 5.

Los valores de salida están dados por:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(0) + 0,353 y_f \\ y(t_2) &= y(0) + 0,853 y_f. \end{aligned} \quad (11)$$

De esta forma, los parámetros del modelo dado en (1), se calculan mediante las ecuaciones dadas en (12).

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u}; \\ \tau &= 0,67(t_2 - t_1); \\ \theta &= 1,3t_1 - 0,29t_2. \end{aligned} \quad (12)$$

3.1.3 Método de Nishikawa

El método propuesto por Nishikawa se basa en calcular los parámetros del modelo dados por la (1) en base a la estimación de las áreas mostradas en la Figura 6. Las áreas pueden obtenerse analíticamente mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{\infty} |\Delta y(\infty) - \Delta y(t)| dt, \text{ donde } \Delta y(\infty) = y_f - y(0) \\ A_1 &= \int_0^{t_0} \Delta y(t) dt, \text{ y } t_0 = \frac{A_0}{\Delta y(\infty)} \end{aligned} \quad (13)$$

El área A_0 es equivalente a la suma de las constantes de tiempo más el tiempo muerto del sistema:

$$\tau_T = \sum_{j=1}^n \tau_j + \theta = \frac{A_0}{\Delta y(\infty)} = t_0 \quad (14)$$

Los parámetros del modelo son calculados por las ecuaciones dadas en (15).

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u}; \\ \tau &= \frac{A_1}{0,368 \Delta y(\infty)}; \\ \theta &= t_0 - \tau. \end{aligned} \quad (15)$$

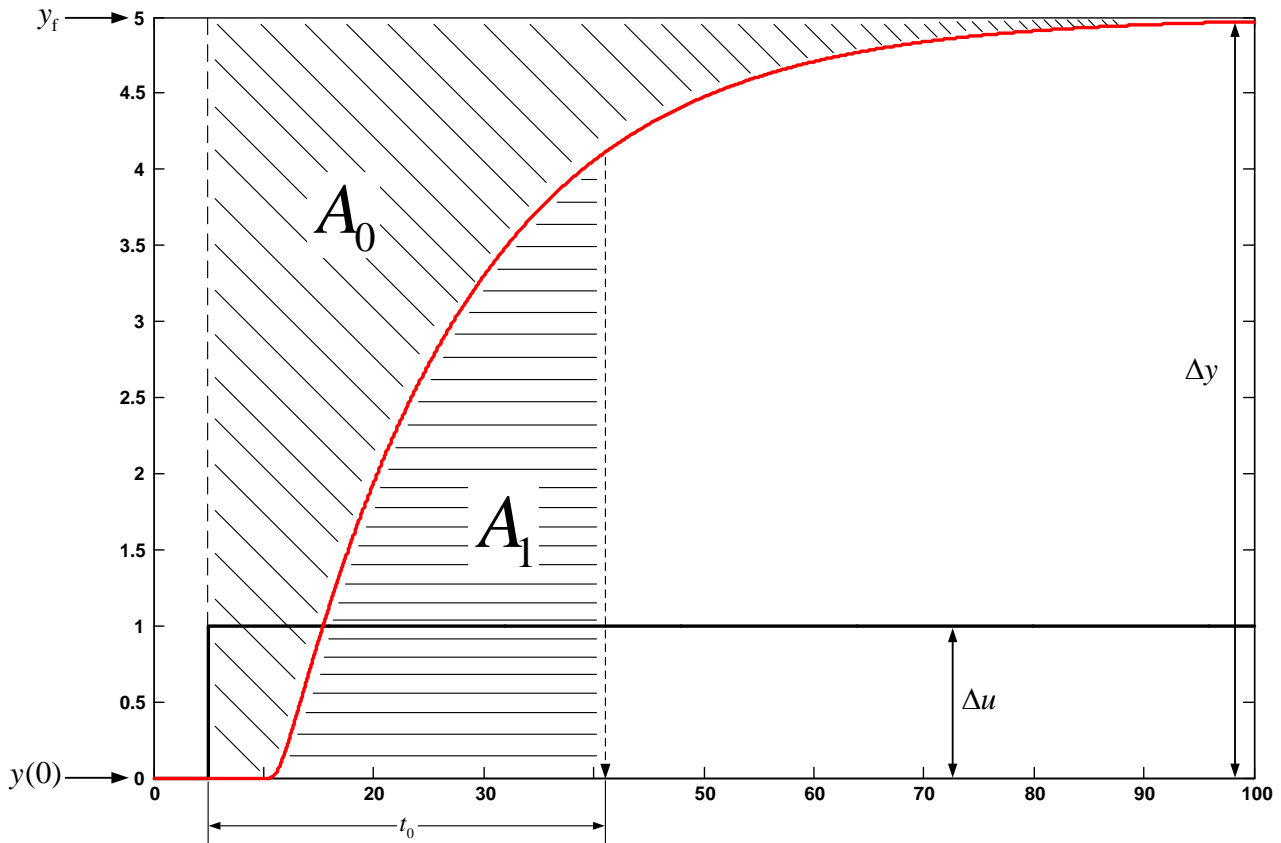


Figura 6 – Método de Nishikawa para la modelación de procesos de primer orden.

3.1.4 Método de dos Puntos General

Posteriormente al método de dos puntos de Smith se han desarrollado otros basados en el mismo procedimiento, diferenciándose únicamente en la selección de los dos instantes en que la respuesta del modelo se hace coincidir con la del proceso real. Se puede entonces establecer un conjunto de ecuaciones generales para los métodos de dos puntos, con el fin de identificar un modelo de primer orden como el dado por la ecuación (1), con base en los tiempos requeridos para alcanzar dos puntos específicos en la curva de respuesta del proceso.

Si p_1 y p_2 son dos valores porcentuales del cambio en la respuesta del sistema a un cambio en escalón en la entrada y t_1 y t_2 son los tiempos requeridos para alcanzar estos dos valores, como se muestra en la Figura 7, entonces los parámetros de un modelo de primer orden más tiempo muerto se pueden obtener de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau &= at_1 + bt_2; \\ \theta &= ct_1 + dt_2; \\ K_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u}.\end{aligned}\tag{16}$$

Los porcentajes del cambio en la respuesta para la determinación de los dos tiempos requeridos por el procedimiento de identificación, así como los valores de las constantes a , b , c y d ;

dependen del método propuesto por cada autor. Estos métodos y los respectivos valores de estas constantes y porcentajes se resumen en la Tabla II.

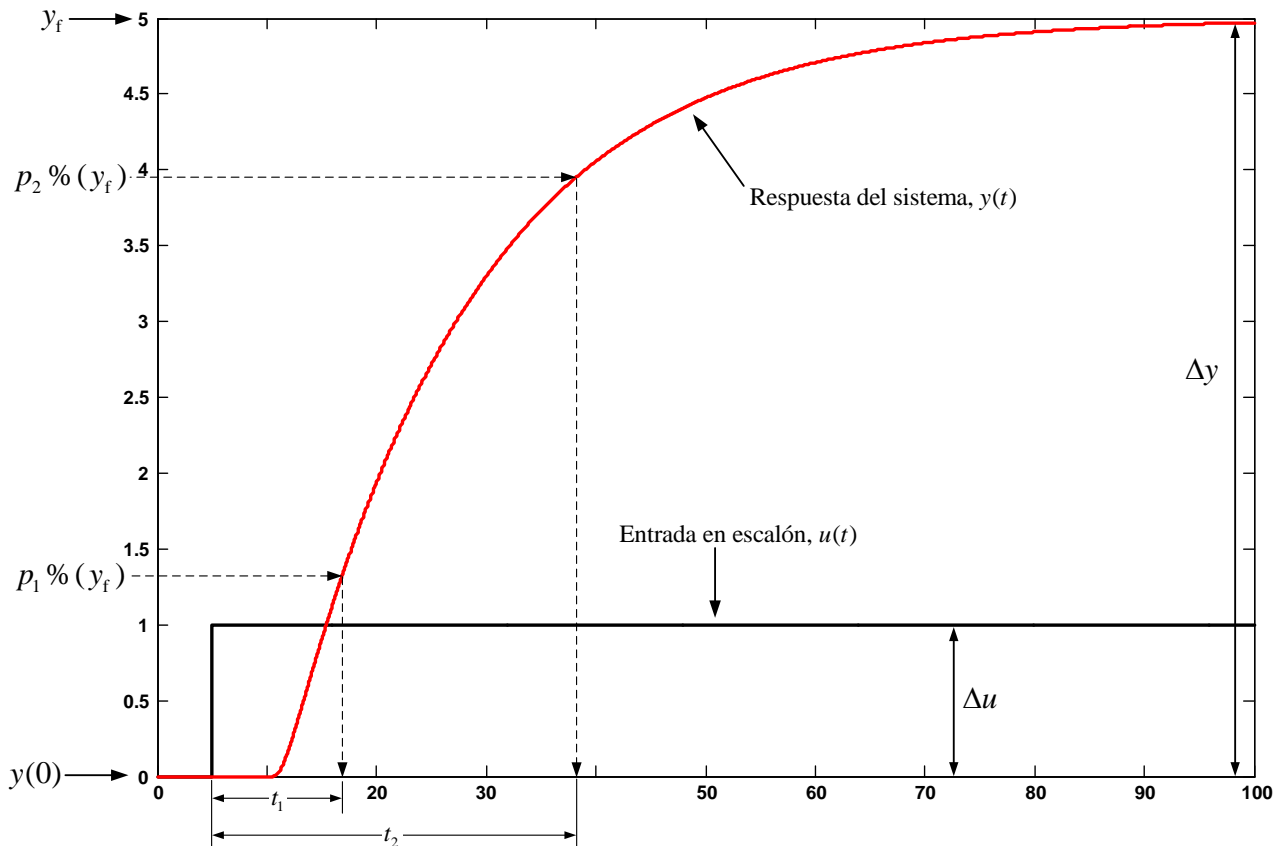


Figura 7 – Método General de dos Puntos para la modelación de procesos de primer orden o polo doble más atraso de transporte.

Tabla II – Constantes para el método general de dos puntos. Modelos de primer orden más atraso de transporte

Método	% $p_1 (t_1)$	% $p_2 (t_2)$	a	b	c	d
Alfaro	25	75	-0,91	0,91	1,262	-0,262
Bröida	28	40	-5,5	5,5	2,8	-1,8
Chen y Yang	33	67	-1,4	1,4	1,54	-0,54
Ho	35	85	-0,67	0,67	1,3	-0,29
Smith	28,3	63,2	-1,5	1,5	1,5	-0,5
Vitecková	33	70	-1,245	1,245	1,498	-0,498

Por otro lado, en la Tabla III se muestran los tiempos y constantes para obtener un modelo de segundo orden con un polo doble dado por la ecuación (2); y se utilizan los métodos de Ho y Vitecková, también basados en dos puntos sobre la curva de respuesta del proceso.

Tabla III – Constantes para el método general de dos puntos. Modelos de polo doble más atraso de transporte

Método	% $p_1 (t_1)$	% $p_2 (t_2)$	a	b	c	d
Ho	35	85	-0,463	0,463	1,574	-0,574
Vitecková	33	70	-0,749	0,749	1,937	-0,937

Algunos ejemplos típicos de procesos de primer orden, pueden ser los siguientes:

- ♣ Control de Nivel de Líquidos;
- ♣ Procesos Térmicos;
- ♣ Control de Velocidad de Servomecanismos.

3.2 Modelación de procesos de segundo orden

Considere la representación matemática clásica de un sistema de segundo orden sub-amortiguado descrito por la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{para } 0 < \xi < 1 \quad (17)$$

Si la entrada $U(s)$ es un escalón unitario, la (17) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{a}{s}, \quad \text{donde } a = 1 \quad (18)$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación, la cual puede ser obtenida directamente por tabla, resulta:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n b t) + \frac{\xi}{b} \sin(\omega_n b t) \right] \quad \text{o también} \quad (19)$$

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{b} \sin(\omega_d t) \right] \quad \text{para } \forall t \geq 0$$

donde $\omega_d = \omega_n b$ es la **frecuencia angular natural no amortiguada**, y $b = \sqrt{1 - \xi^2}$.

El pico máximo de la respuesta al escalón se da en el instante t_p (tiempo de pico), el cual se obtiene haciendo la derivada primera respecto al tiempo de la (19) e igualándola a cero, dado que en este punto máximo la pendiente es nula. Evaluando esta derivada primera en t_p este instante de tiempo resulta dado por,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n b} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (20)$$

En este instante puede evaluarse el sobrepaso máximo de la respuesta de salida respecto al valor de régimen estacionario de la misma, o sea, y_f , que es igual a 1 en este caso:

$$M_p = y(t_p) - 1 = -e^{-(\xi\omega_n)(\pi/\omega_d)} \left[\cos(\pi) + \frac{\xi}{b} \sin(\pi) \right] \quad (21)$$

$$M_p = e^{-(\xi\omega_n)(\pi/\omega_d)} = e^{-(\sigma\pi/\omega_d)} = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

por lo tanto, es fácil saber cuánto vale el primer pico máximo de la respuesta en el instante t_p :

$$y(t_p) = 1 + M_p = 1 + e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (22)$$

Estas especificaciones se pueden ver en la respuesta al escalón sub-amortiguada mostrada en la Figura 8. Es posible observar, que midiendo de la gráfica el valor de $y(t_p)$, el factor de amortiguamiento ξ puede ser calculado a partir de la (22) como presenta la ecuación (23), o sea:

$$\xi = \frac{-\ln[y(t_p) - 1]}{\sqrt{\ln^2[y(t_p) - 1] + \pi^2}}, \quad (23)$$

y con la ecuación (20) puede determinarse la frecuencia natural no amortiguada ω_n . De la misma Figura 8 se pueden obtener los restantes parámetros de interés de este tipo de respuesta, parámetros que pueden ser usados como factores de mérito para comparar el desempeño dinámico de diferentes procesos. Entre ellos podemos determinar:

- ✚ **Tiempo de subida, t_r :** tiempo que la salida del sistema lleva para ir desde 0 a 100% del valor final y_f , para el caso de sistema sub-amortiguados, esto es $0 < \xi < 1$. Para sistemas sobre-amortiguados $\xi \geq 1$, se utiliza el intervalo de 10 a 90%;
- ✚ **Tiempo de asentamiento o de establecimiento, t_s :** es el tiempo que lleva la respuesta del sistema para encontrarse en un intervalo del 2 o del 5% del valor final;
- ✚ **Porcentaje de sobrepaso o sobreimpulso, M_p :** Valor en porcentaje del máximo pico que alcanza la respuesta, luego de aplicada la entrada en escalón, por sobre el valor final o de referencia: $M_p (\%) = \frac{y(t_p) - y_f}{y_f} \times 100$
- ✚ **Error en régimen permanente, e_{ss} :** Diferencia entre el valor de referencia deseado (valor de la entrada en escalón para $t \geq 0$) y el valor alcanzado por la respuesta cuando $t \rightarrow \infty$.

El caso del proceso de segundo orden anteriormente analizado no tiene en cuenta el valor de ganancia estática K_p y un posible atraso de transporte. Casos más generales de sistemas de segundo orden, sobre-amortiguados o sub-amortiguados son como los representados por las funciones de transferencia (3) y (4). Aquí tenemos 3 parámetros a determinar, además de la ganancia estática, por lo tanto se requieren de tres puntos sobre la curva de respuesta al escalón para identificar correctamente esos parámetros.

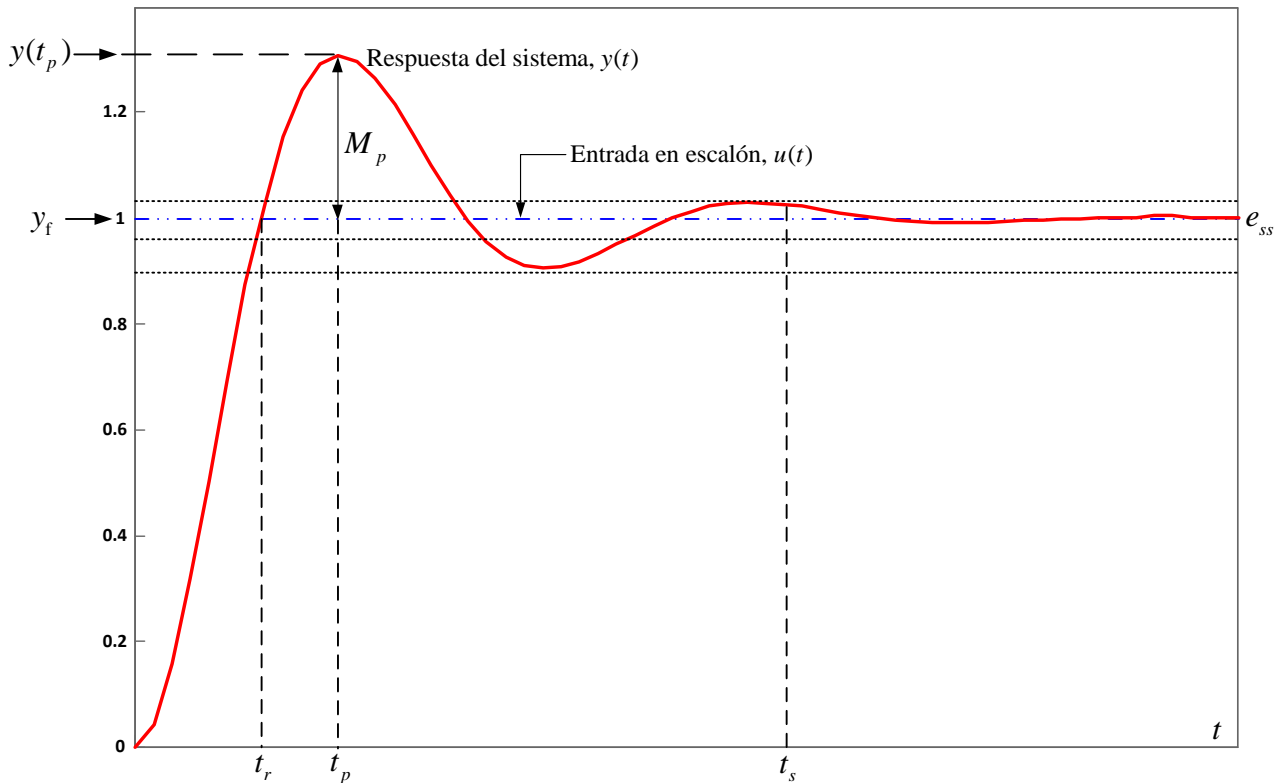


Figura 8 – Respuesta al escalón de un proceso de segundo orden.

3.2.1 Método alternativo para respuestas subamortiguadas

Otro método que puede ser utilizado para identificar el modelo de un proceso cuya respuesta a una entrada en escalón presenta una característica como la presentada en la Figura 8, es el método propuesto por Cheng-Liang Chen [5] para funciones de transferencia como la que se muestra en la (4), la cual se repite a continuación:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \tag{24}$$

Para identificar los parámetros que aparecen en la (24) se toma como base la respuesta subamortiguada que se muestra en la Figura 9. De esta figura se obtienen las siguientes definiciones:

$$K_p = \frac{y_\infty}{\Delta u} \tag{25}$$

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \tag{26}$$

$$\tau = \frac{(t_{m1} - t_{p1})\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \tag{27}$$

$$\theta = 2t_{p1} - t_{m1} \tag{28}$$

El valor de la salida en régimen estacionario y_∞ puede obtenerse directamente del gráfico o calcularse por la siguiente ecuación:

$$y_\infty = \frac{c_{p1}c_{p2} - c_{m1}^2}{c_{p1} + c_{p2} - 2c_{m1}} \tag{29}$$

Y finalmente el valor de sobrepaso de la respuesta puede obtenerse como sigue:

$$M_p = \frac{1}{3} \left[\frac{c_{p1} - y_\infty}{y_\infty} + \frac{y_\infty - c_{m1}}{c_{p1} - y_\infty} + \frac{c_{p2} - y_\infty}{y_\infty - c_{m1}} \right] \tag{30}$$

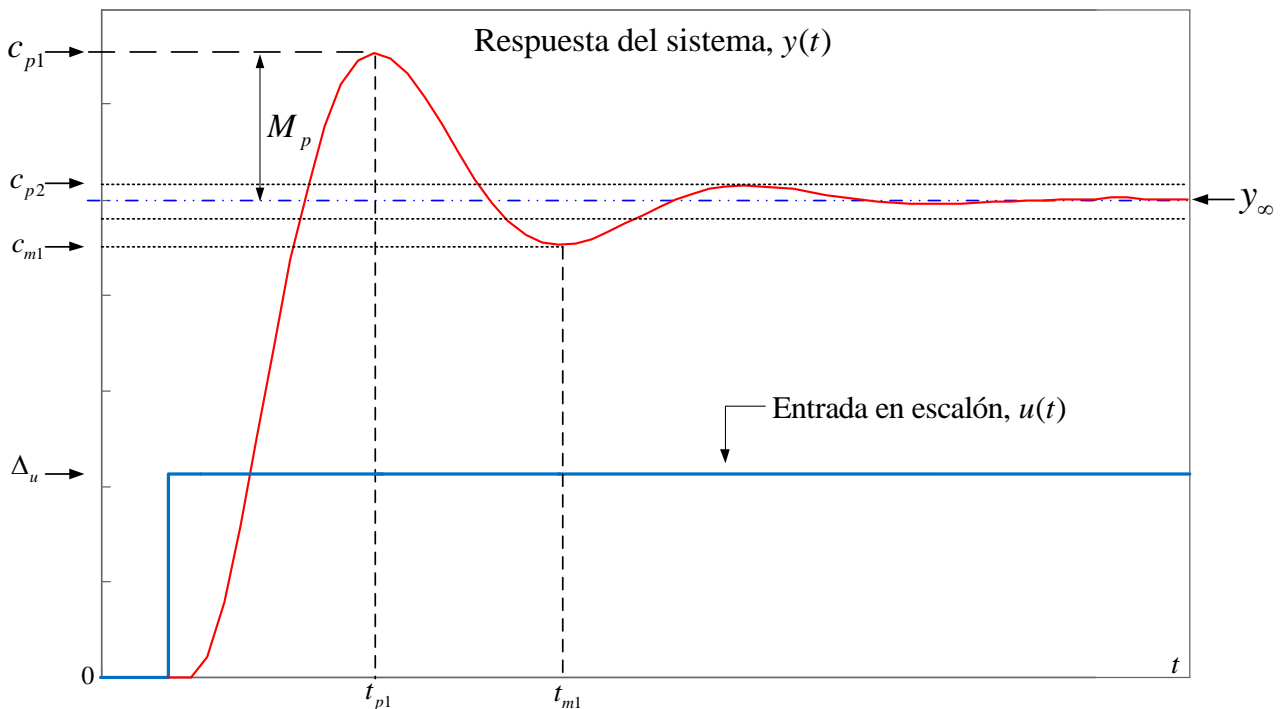


Figura 9 – Respuesta al escalón de un proceso de subamortiguado con atraso de transporte.

3.2.2 Método de tres puntos de Stark – Mollenkamp

Los instantes seleccionados en este método, son los tiempos requeridos para que la respuesta al escalón alcance el 15% (t_{15}), el 45% (t_{45}), y el 75% (t_{75}) del valor final y_f .

Basado en estos instantes de tiempo, los parámetros del modelo son calculados por el siguiente algoritmo:

(i)
$$x = \frac{t_{45} - t_{15}}{t_{75} - t_{15}} \tag{31}$$

(ii)
$$\xi = \frac{0,0805 - 5,547(0,475 - x)^2}{x - 0,356} \tag{32}$$

(iii)
$$\begin{aligned} f_2(\xi) &= 0,708(2,811)^\xi & \text{para } \xi < 1 \\ f_2(\xi) &= 2,6\xi - 0,60 & \text{para } \xi \geq 1 \end{aligned} \tag{33}$$

$$(iv) \quad \omega_n = \frac{f_2(\xi)}{t_{75} - t_{15}} \quad (34)$$

$$(v) \quad f_3(\xi) = 0,922(1,66)^\xi \quad (35)$$

$$(vi) \quad \theta = t_{45} - \frac{f_3(\xi)}{\omega_n} \quad (36)$$

$$(vi) \quad \tau_{1,2} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_n} \quad \text{si, y solo si } \xi \geq 1 \quad (37)$$

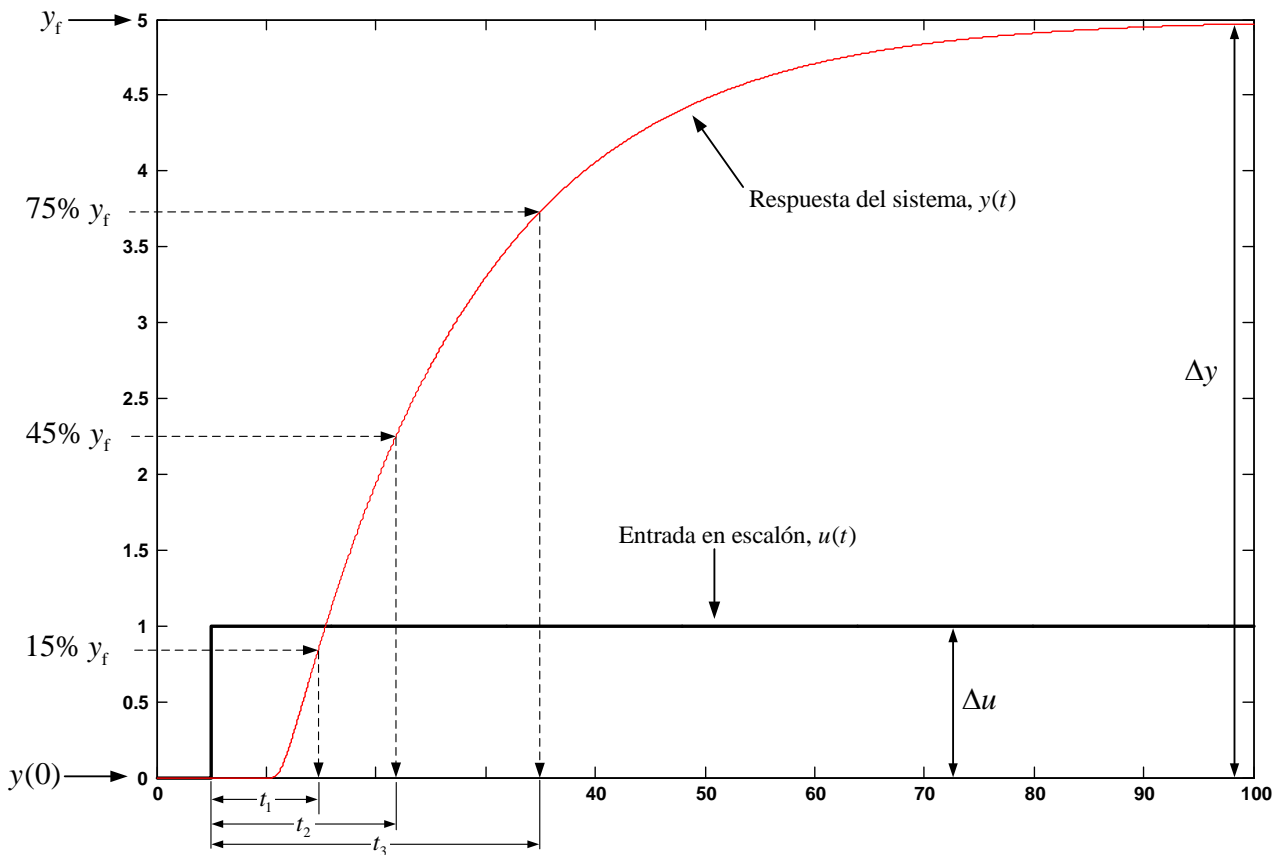


Figura 10 – Método de tres puntos de Stark-Mollenkamp para la modelación de procesos de segundo orden más atraso de transporte.

3.2.3 Método de tres puntos de Jahanmiri – Fallahi

Este método está basado en los tiempos requeridos para que la respuesta al escalón alcance el 2% (t_2) o el 5% (t_5), el 70% (t_{70}), y el 90% (t_{90}) del valor final y_f . Basado en estos instantes de tiempo, las ecuaciones para identificar el modelo son:

$$\theta = t_2 \text{ o } t_5, \text{ dependiendo cuál de estos tiempos da el menor error de modelo (IEAP)} \quad (38)$$

$$\eta = \frac{t_{90} - t_{70}}{t_{90} - \theta} \quad (39)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{0,4844651 - 0,75323499\eta}{1 - 2,0946444\eta}}, \text{ para } \eta \geq 0,4771 \quad (40)$$

$$\xi = 13,9352 \text{ para } \eta \geq 0,4771 \quad (41)$$

$$\tau = \frac{t_{90} - \theta}{0,424301 + 4,62533\xi - 2,65412e^{\xi}} \quad (42)$$

La ganancia estática, en cualquiera de los casos de identificación de modelos de segundo orden se calcula igualmente que para los casos de primer orden $K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$.

3.3 Índices de Desempeño

Definiendo el error de predicción de un modelo como la diferencia entre la salida medida de la planta, $y_p(t)$ y la salida predicha por el método de identificación, $y_m(t)$, pueden definirse los siguientes índices de desempeño:

Integral del error de predicción absoluto:

$$\text{IEAP} = \int_0^{\infty} |y_p(t) - y_m(t)| dt \quad (43)$$

Integral del error de predicción cuadrático:

$$\text{IECP} = \int_0^{\infty} [y_p(t) - y_m(t)]^2 dt \quad (44)$$

Estos índices pueden ser considerados como índices de desempeño del proceso a controlar. El índice IEAP, representa el área diferencial entre la respuesta de la planta y la del modelo identificado, de manera que si este índice tiende a cero, entonces $y_m(t) \rightarrow y_p(t)$. Cuanto menor sea este índice de desempeño, mejor será la representación dada por el modelo.

El índice IECP da mayor peso a las desviaciones grandes que a las pequeñas, por lo que dados dos modelos que posean valores del IEAP similares, el que tenga un menor IECP, predecirá la salida de la planta con desviaciones máximas menores.

Dado que es imposible hacer la evaluación infinita de las expresiones (43) y (44), estos se pueden calcular para un intervalo de tiempo finito, entre 0 y $10\tau_T$, siendo $\tau_T = \sum_{i=1}^n \tau_i$ la sumatoria de las constantes de tiempo de la planta.

4 Identificación de las constantes de la función de transferencia de un motor CC mediante la respuesta al escalón

Este es un método de estimación paramétrica donde se asume que la función de transferencia del proceso es conocida, pero no sus parámetros. La función de transferencia de un motor de CC que acciona una carga de momento de inercia J vinculada rígidamente al eje del motor, y cuya variable de salida es la posición angular del eje, viene dada por:

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{s(\tau_m s + 1)} \quad (45)$$

donde $K_m = \frac{K_t}{K_t K_b + b R_a}$ y $\tau_m = \frac{J R_a}{K_t K_b + b R_a}$, son respectivamente la ganancia estática del motor y la constante de tiempo del motor.

A pesar de que K_t , K_b , R_a y L_a pueden ser dadas por el fabricante u obtenerse mediante ensayos experimentales, el momento de inercia J de la carga y el coeficiente de fricción viscosa b no son fácilmente medibles. El momento de inercia de la carga J puede ser obtenible de forma analítica si la carga posee forma regular, pero el coeficiente de fricción b , no puede ser obtenido analíticamente. Por otro lado, estas dos últimas constantes pueden ser obtenidas en base a medidas. Entonces, si deben realizarse mediciones, es más fácil hacerlas para obtener directamente la función de transferencia (45).

Supongamos que aplicamos la tensión de armadura al motor y medimos la velocidad angular del eje; entonces, la función de transferencia (45) se reduce a:

$$G_p(s) = \frac{s\Theta(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad (46)$$

Sea “ a ” la tensión aplicada en forma de escalón para $\forall t \geq 0$, la velocidad puede ser calculada como:

$$W(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \cdot \frac{a}{s} \quad (47)$$

Utilizándose la expansión en fracciones parciales y luego aplicándose la transformada inversa de Laplace, se puede obtener fácilmente la expresión de la velocidad en función del tiempo, o sea:

$$W(s) = \frac{a_1}{\tau_m s + 1} + \frac{a_2}{s} \quad (48)$$

donde,

$$a_1 = (\tau_m s + 1) \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \cdot \frac{a}{s} \Bigg|_{s=-\frac{1}{\tau_m}} = -aK_m \tau_m \tag{49}$$

$$a_2 = s \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \cdot \frac{a}{s} \Bigg|_{s=0} = aK_m$$

$$W(s) = -\frac{aK_m \tau_m}{\tau_m s + 1} + \frac{aK_m}{s} \tag{50}$$

La transformada inversa de Laplace de la (50) resulta:

$$w(t) = aK_m - aK_m e^{-t/\tau_m}, \text{ para } \forall t \geq 0 \tag{51}$$

Dado que τ_m es positivo, el término $e^{-t/\tau_m} \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto, la respuesta en estado estacionario tiende al valor aK_m . Esto implica que $W(\infty) = aK_m$, como muestra la Figura 11. A este resultado puede llegarse, aplicándose el teorema del valor final a la (47).

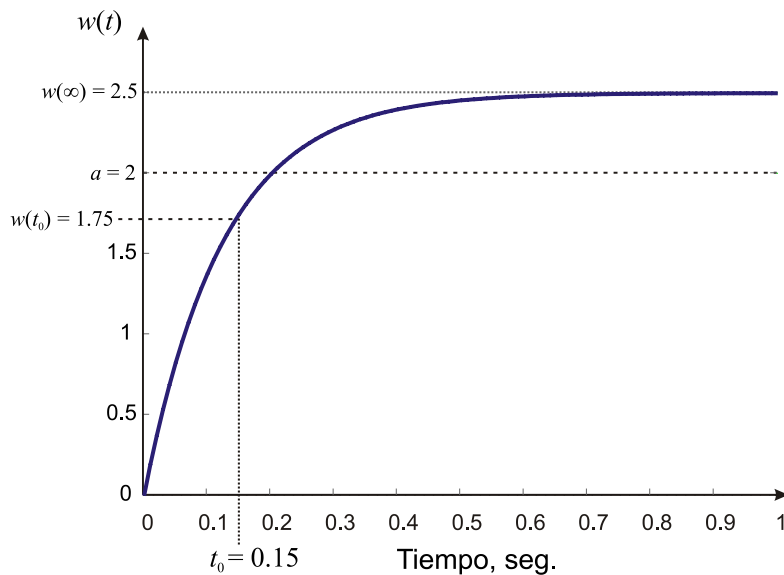


Figura 11. Respuesta al escalón del motor. Valor de la referencia aplicada $a = 2$ rad/seg.

O sea, que si se conoce la velocidad final o de régimen permanente a partir de la medida de la misma y conocido el valor de “a” del escalón aplicado, la constante del motor K_m resulta:

$$K_m = \frac{W(\infty)}{a}, \text{ para } t \geq 0 \tag{52}$$

Para hallar la constante del motor, de la ecuación (51) se tiene:

$$e^{-t/\tau_m} = 1 - \frac{w(t)}{aK_m} = 1 - \frac{w(t)}{W(\infty)}, \tag{53}$$

Así, aplicándose el logaritmo natural a ambos lados de la (53) se tiene que:

$$-\frac{t}{\tau_m} = \ln\left(1 - \frac{w(t)}{W(\infty)}\right). \quad (54)$$

Es fácil observar, que si se mide la velocidad en un instante t , digamos $t = t_0$, en la región del transitorio, de la última ecuación se tiene que la constante de tiempo del motor puede calcularse como,

$$\tau_m = -\frac{t_0}{\ln\left(1 - \frac{w(t_0)}{W(\infty)}\right)}. \quad (55)$$

Así, la constante de tiempo del motor, es fácilmente obtenible a partir de la velocidad final y una medida adicional de la velocidad en un instante “ t_0 ” de la etapa transitoria.

De la Figura 11, se pueden obtener los siguientes datos: $W(\infty) = 2,5 \text{ rad/seg}$, $a = 2 \text{ rad/seg}$ y de (52), $K_m = 1,25$. Luego, $t_0 = 0,15 \text{ seg}$ y $w(t_0) = 1,75 \text{ rad/seg}$ y de la ecuación (55) $\tau_m = 0,1246 \text{ seg}$.

Con estos datos, la función de transferencia estimada midiéndose la velocidad resulta:

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1,25}{0,1246s + 1} = \frac{10,0321}{s + 8,0257} \quad (56)$$

y midiendo la posición del eje,

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1,25}{s(0,1246s + 1)} = \frac{10,0321}{s(s + 8,0257)}. \quad (57)$$

5 Modelación de Procesos mediante la respuesta en Frecuencia

5.1 Introducción

El método de la respuesta en frecuencia en la identificación de sistemas lineales está basado en los diagramas de Bode. En este método se aplican entradas de tipo sinusoidal al proceso a identificar, y se mide la salida del mismo una vez que este está operando en régimen permanente. En este ensayo deben ser observados y adquiridos o registrados tanto la magnitud como el desplazamiento de fase entre la señal de entrada y la señal de salida. Estas medidas son obtenidas en un intervalo de frecuencias de interés para el proceso en particular.

En la aplicación práctica deben garantizarse señales sinusoidales en diferentes frecuencias y medir “precisamente” en estas frecuencias las razones de magnitud y de fase entre las señales de entrada y de salida. Es importante siempre recordar que este método es aplicable solamente a

sistemas o procesos lineales y además estables, ya que la respuesta en frecuencia de sistemas inestables no puede ser medida en la práctica.

Dado que los sistemas físicos poseen varios tipos de no linealidades, es necesario considerar cuidadosamente la amplitud máxima de la señal sinusoidal que será aplicada a la entrada del proceso. Si la amplitud es tal que lleva al sistema a la saturación, el ensayo de respuesta en frecuencia resultará impreciso. El ensayo podría resultar erróneo también, si la amplitud de la señal sinusoidal es muy pequeña. Para asegurarnos que el sistema bajo ensayo está operando en su región lineal, debe apreciarse y verificarse en cada medición que la señal adquirida o muestreada a la salida del proceso sea también sinusoidal.

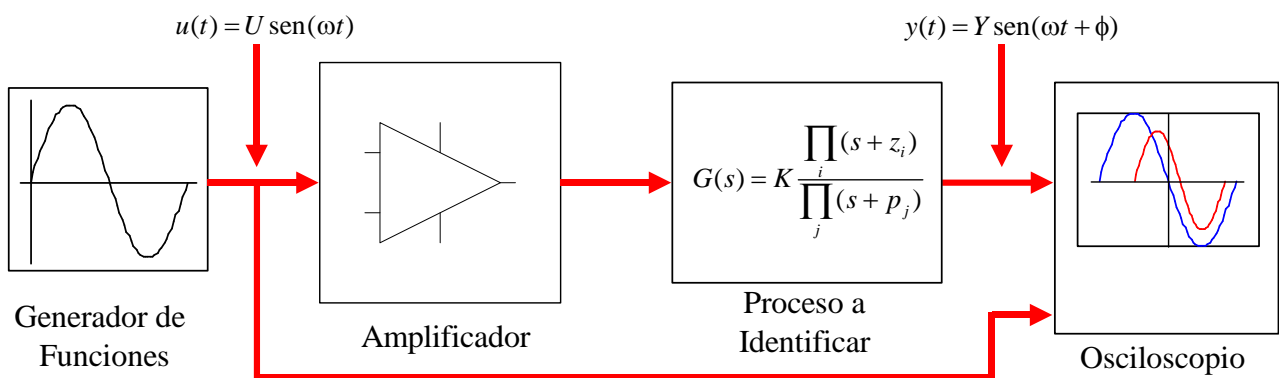


Figura 12. Esquema de bloques para la obtención de la respuesta en frecuencia de un proceso.

Si la función de transferencia del proceso es $G(s)$, entonces la respuesta en frecuencia se obtiene por la substitución de s por $j\omega$, o sea:

$$G(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + j \text{Im}(j\omega) . \tag{58}$$

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \angle \phi(\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)} . \tag{59}$$

Donde,

$$|G(\omega)| = \sqrt{[\text{Re}(\omega)]^2 + [\text{Im}(\omega)]^2} \quad \text{y} \quad \phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \right] . \tag{60}$$

$$Y(\omega) = U |G(\omega)| \quad \text{y} \quad \phi(\omega) = \omega \Delta t , \tag{61}$$

con Δt , intervalo de tiempo entre las señales de entrada, $u(t)$ y de salida $y(t)$.

La identificación o estimación de la función de transferencia del proceso a partir de la gráfica de Bode, trazada en base a los valores experimentales de magnitud, fase y frecuencia, es fácilmente obtenible recordando las diferentes contribuciones de magnitud y fase de factores comúnmente encontrados en una función de transferencia: (i) Ganancia constante K ; (ii) polos o ceros al origen, simples o múltiples; (iii) polos o ceros sobre el eje real, simples o múltiples; (iv) par de polos o

ceros complejos conjugados. En gran parte de los casos prácticos reales de procesos, se encontrarán pares de polos complejos conjugados y una característica a tener en cuenta en que todos los procesos físicos reales presentan siempre características pasa bajas.

Ejemplo 1:

Considere la función de transferencia de un proceso real, dada a seguir y su correspondiente diagrama de Bode:

$$G_p(s) = \frac{1,89}{s^4 + 5,9s^3 + 12,03s^2 + 9,4s + 1,89} \tag{62}$$

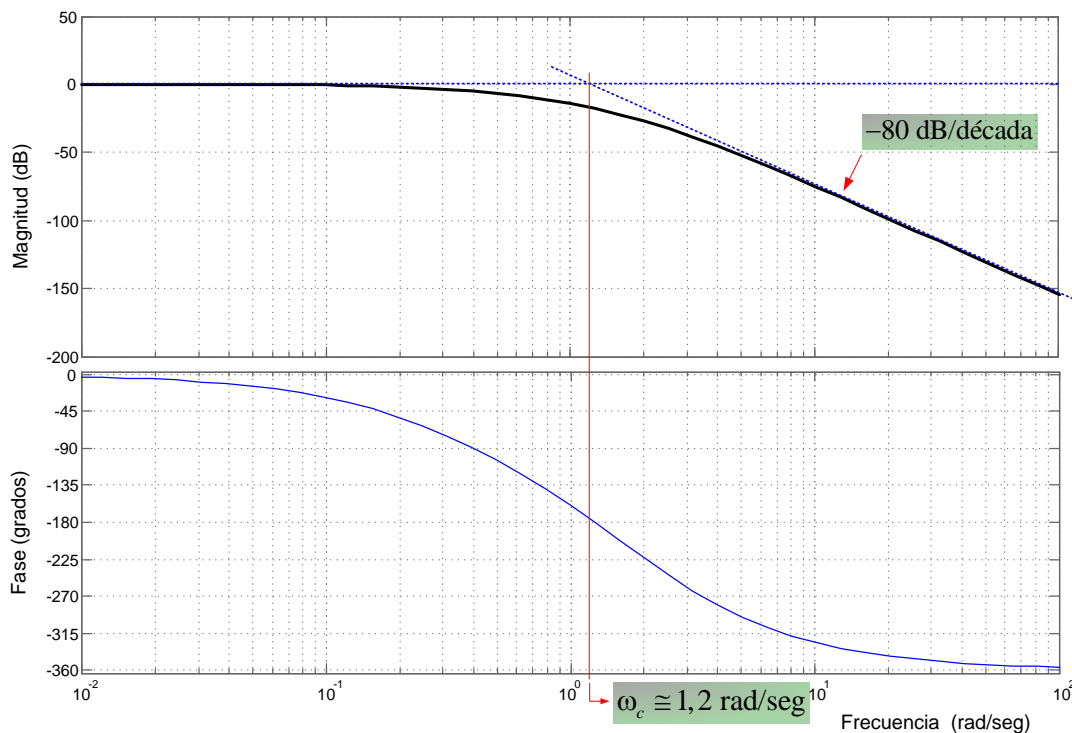


Figura 13. Diagrama de Bode del proceso dado por la ecuación (62). Ejemplo 1.

Del diagrama de magnitud y de la aproximación asintótica es fácil identificar las siguientes propiedades del sistema: La ganancia estática *K* es unitaria, dado que en las bajas frecuencias, la asíntota de baja frecuencia es paralela al eje de 0dB y corta al eje de magnitud en 0dB. La inclinación final en las altas frecuencias es de -80dB/década, lo que sugiere que el sistema es de orden 4, en relación al número de polos, esto es *n* - *m* = 4. Además, la curva de fase no demuestra la presencia de ceros en alta frecuencia.

Por otro lado, la asíntota de baja frecuencia o de ganancia estática, corta a la asíntota de alta frecuencia aproximadamente en 1,2 rad/seg; definiéndose así la frecuencia de corte. Es importante agregar, que la intersección de estas dos asíntotas, se produce donde la ganancia cae aproximadamente a -3dB×*n*; en este caso a -12dB. A partir de estos datos, y sabiendo que la función

de transferencia genérica para un polo real puede escribirse para régimen permanente sinusoidal como

$$G_p(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n} \quad \text{o} \quad G_p(s) = \frac{\omega_c^n}{(s + \omega_c)^n}, \quad (63)$$

la función de transferencia estimada resulta:

$$G_{pe}(j\omega) = \frac{1,2^4}{\left(1 + j\frac{\omega}{1,2}\right)^4} \quad (64)$$

$$G_{pe}(s) = \frac{1,2^4}{(s + 1,2)^4} \quad (65)$$

Con el objetivo de comparar ambos sistemas y tener una idea de la estimación efectuada, se trazan ambas respuestas en frecuencia, la de la planta real y la de la planta estimada, en un mismo gráfico, como se muestra en la Figura 14.

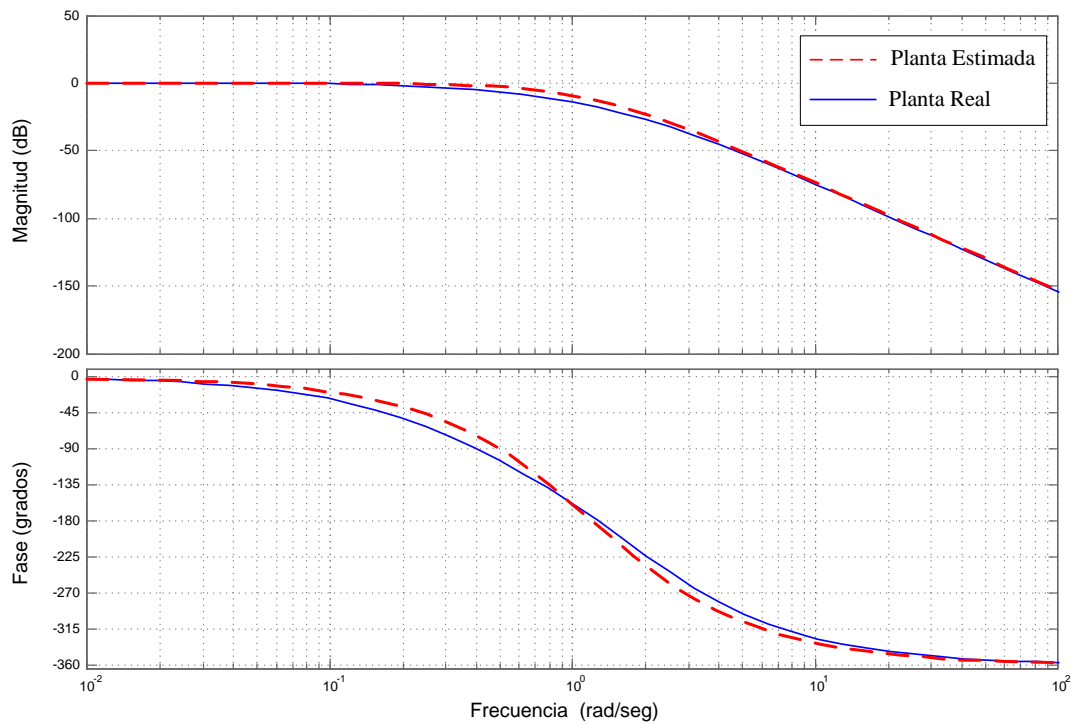


Figura 14. Respuestas en frecuencia del proceso real, dado por la ecuación (62) y el proceso estimado, dado por la ecuación (65). Ejemplo 1.

Ejemplo 2:

Consideremos a continuación la respuesta en frecuencia del proceso de la Figura 15. Del diagrama de magnitud y de la aproximación asintótica pueden inferirse las siguientes propiedades del sistema: La ganancia estática K es unitaria, dado que en las bajas frecuencias, la asíntota de baja

frecuencia es paralela al eje de 0dB y corta al eje de magnitud en 0dB. La inclinación final en las altas frecuencias es de -60dB/década, lo que sugiere que el sistema es de orden 3 en relación al número de ceros, esto es $n - m = 3$.

La asíntota de baja frecuencia, corta a la asíntota de alta frecuencia aproximadamente en 1 rad/seg, donde la ganancia cae aproximadamente a $-3dB \times 3 = -9dB$; definiéndose así la frecuencia de corte. Por otro lado, en la curva de fase, se observa que el proceso identificado, curva en líneas de trazos azul, presenta un incremento constante de fase respecto a la que sería la curva de fase en concordancia con la curva de magnitud. Esto indica que el proceso presenta un tiempo muerto o atraso de transporte. En el caso de que el tiempo muerto fuese nulo o despreciable, la curva de fase tendería a un valor de fase dado por $-90^\circ \times 3$, en este caso, -270° . Este tiempo muerto o atraso de transporte, puede ser inferido mediante la diferencia de fase entre la curva real y la curva del proceso sin atraso.

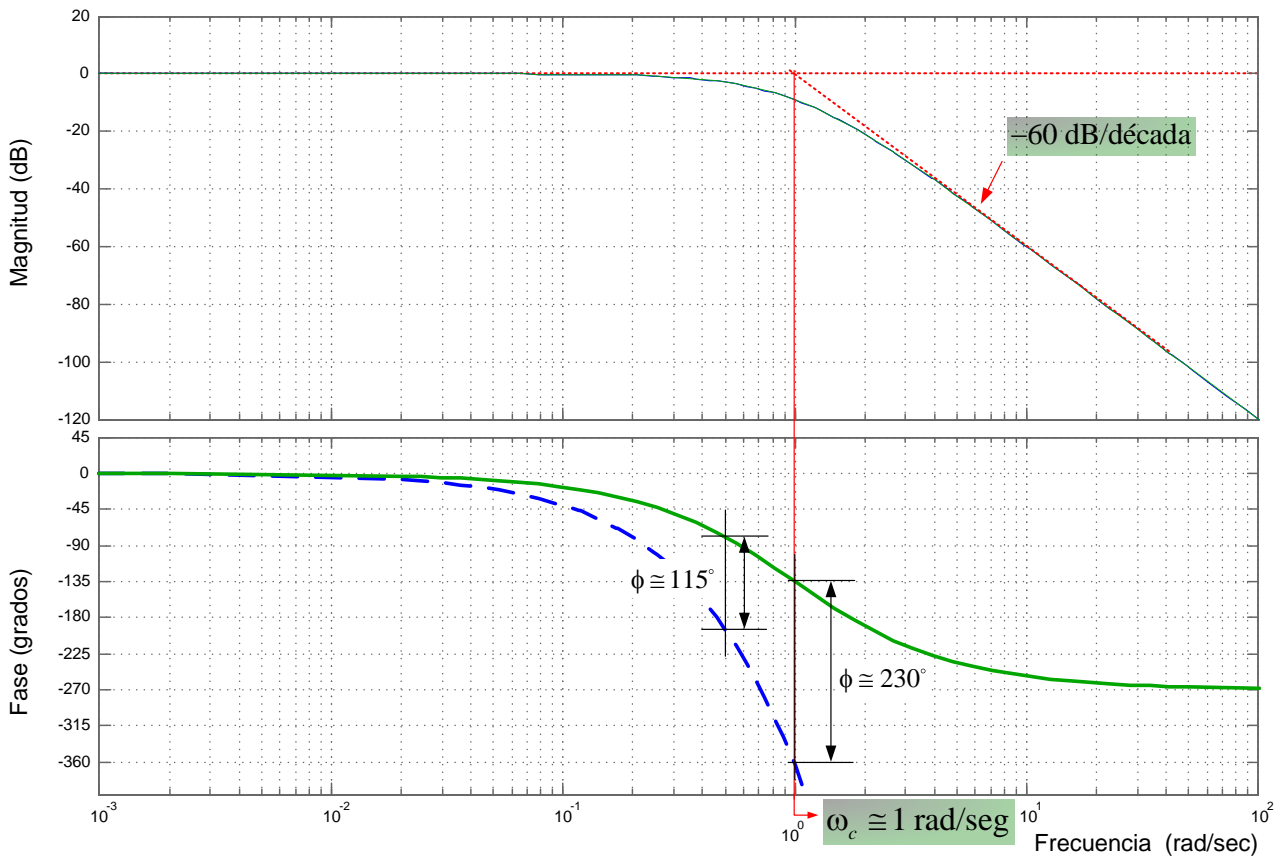


Figura 15. Respuestas en frecuencia del proceso real, dado por la ecuación (62) y el proceso estimado, dado por la ecuación (65). Ejemplo 2.

En la Figura 15 se describen 2 valores de ángulos entre estas curvas, de 115° y 230° para frecuencias angulares de 0,5 rad/seg y 1 rad/seg, respectivamente. Sabiendo que $\phi = \omega t$, donde ϕ está dado en radianes, se tiene:

$$\phi = 115^\circ \text{ o } 2 \text{ radianes} \Rightarrow t = \theta = \frac{\phi}{\omega} = 4 \text{ segundos}$$

$$\phi = 230^\circ \text{ o } 4,014 \text{ radianes} \Rightarrow t = \theta = \frac{\phi}{\omega} \approx 4 \text{ segundos}$$

Y de esta forma podrían probarse con otros valores de ángulos y frecuencias, los que darían aproximadamente un atraso de transporte de 4 segundos. Con base en la estimación realizada hasta aquí a partir de las curvas de magnitud y fase, puede decirse que la función de transferencia estimada del proceso es la siguiente:

$$G_{pe}(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+1)^3} \tag{66}$$

Ejemplo 3:

Estimar la función de transferencia a partir del diagrama de Bode mostrado en la Figura 16.

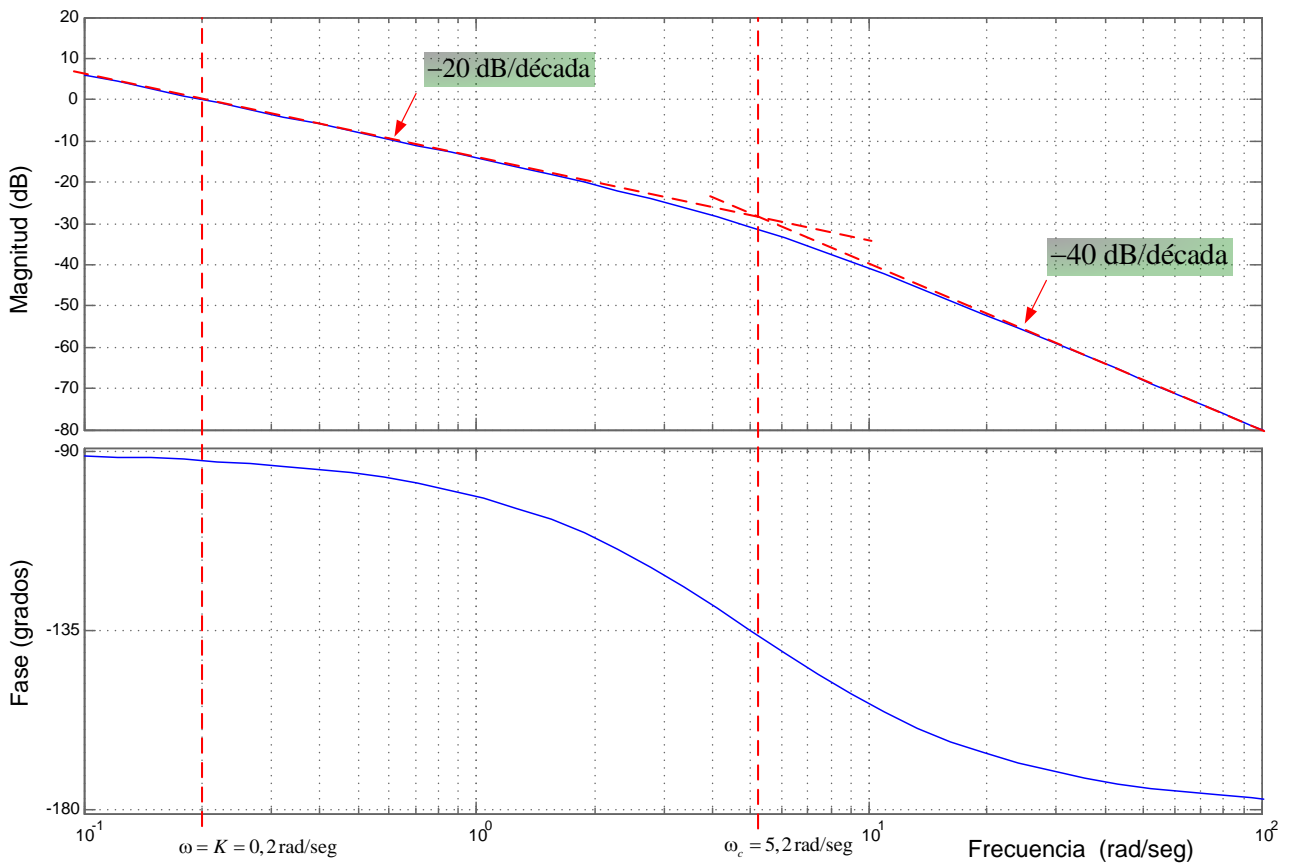


Figura 16. Respuesta en frecuencia del proceso a identificar. Ejemplo 3.

Del diagrama de magnitud y de la aproximación asintótica pueden inferirse las siguientes propiedades del sistema: La inclinación inicial de la curva de magnitud es de -20dB/década, lo que indica que el proceso tiene un polo al origen. El cruce de la asíntota en las bajas frecuencias con el eje de 0dB permite encontrar la ganancia estática *K*, donde $K = \omega = 0,2 \text{ rad/seg}$. La inclinación

final en las altas frecuencias es de -40dB/década, lo que sugiere que el sistema es de orden 2, en relación al número de ceros, esto es $n - m = 2$.

La asíntota de baja frecuencia corta a la asíntota de alta frecuencia aproximadamente en la frecuencia de 5,2 rad/seg y donde la ganancia cae aproximadamente a $-3dB \times 2 = -6dB$; definiéndose así la frecuencia de corte.

A partir de estos datos podemos escribir la función de transferencia de este sistema para régimen permanente, de la siguiente forma:

$$G_e(j\omega) = 0,2 \frac{1}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{5,2})} \tag{67}$$

o también,

$$G_e(j\omega) = \frac{1,04}{j\omega(5,2 + j\omega)} \tag{68}$$

y sustituyendo $j\omega$ por s , resulta:

$$G_e(s) = \frac{1,04}{s(s + 5,2)} \tag{69}$$

La comparación entre el gráfico de magnitud del proceso real y el estimado se muestra en la Figura 17, y la comparación de la fase, en la Figura 18.

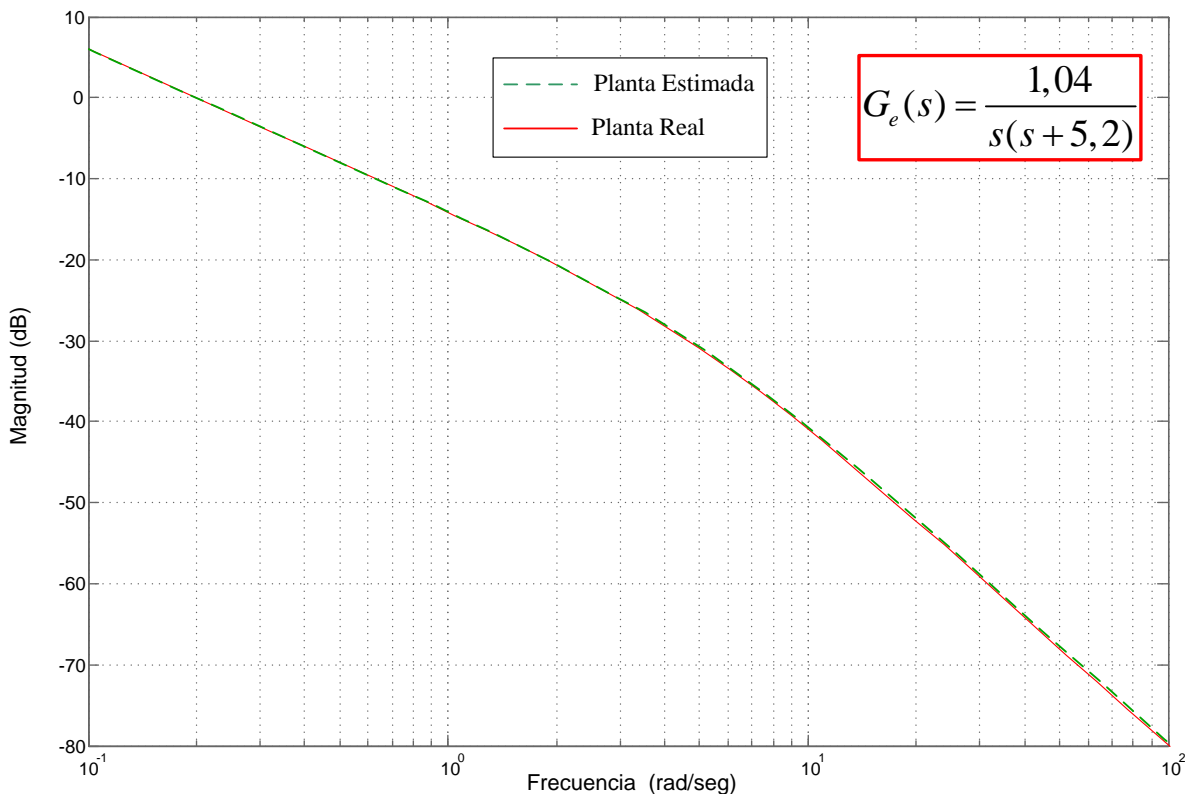


Figura 17. Respuesta en frecuencia del proceso identificado y proceso real. Curva de Magnitud. Ejemplo 3.

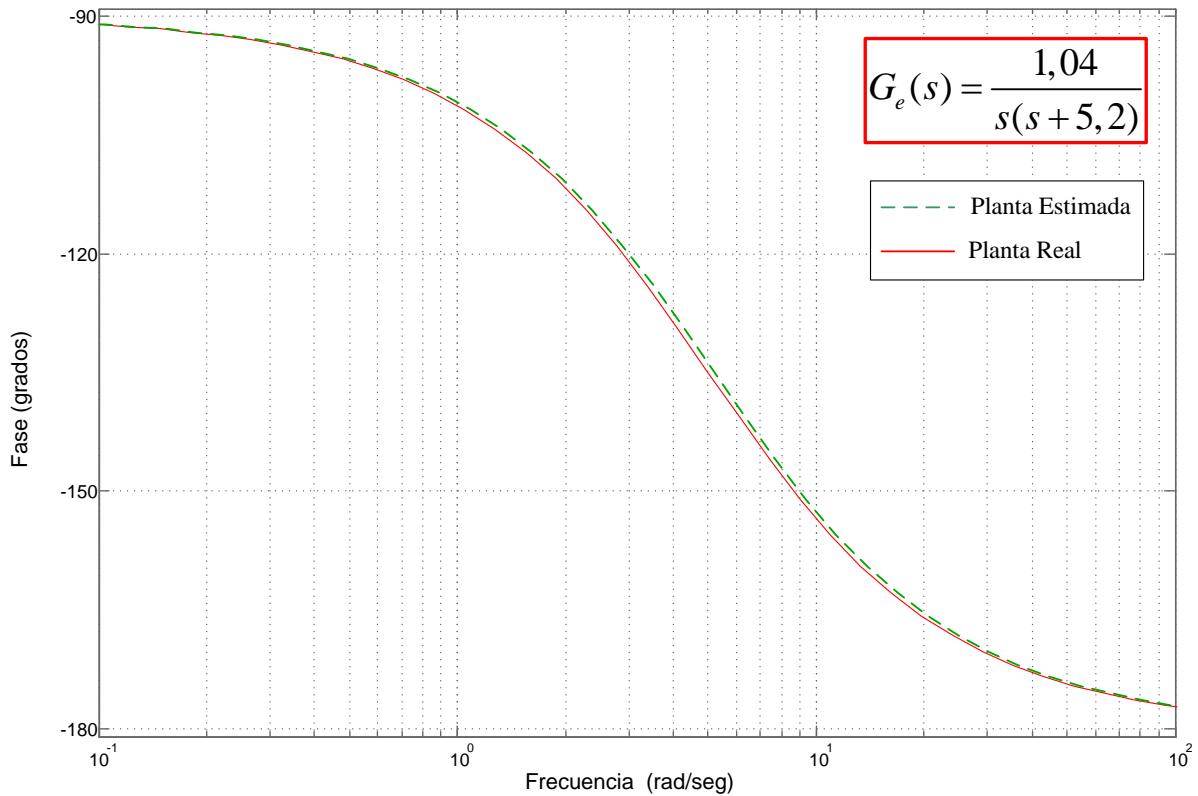


Figura 18. Respuesta en frecuencia del proceso identificado y proceso real. Curva de fase. Ejemplo 3.

Ejemplo 4:

La curva de magnitud de la respuesta en frecuencia de la Figura 19 presenta una inclinación inicial a -20dB/década en las bajas frecuencias, lo que supone la presencia de un polo al origen, o sea un término $(-1/j\omega)$. La intersección de esta línea recta con el eje de 0dB, nos da el valor de frecuencia igual a la ganancia estática, en este caso: $K = 5,6$. Las sucesivas pendientes en el sentido de las altas frecuencias son de -40dB/década, -60dB/década y finalmente -40dB/década. Esto indica la presencia de dos polos reales negativos, aproximadamente en 4rad/seg y 25rad/seg, y finalmente un cero real negativo en -70rad/seg. La presencia de este cero se puede inferir no solamente del cambio de pendiente en las altas frecuencias sino también de la tendencia de la curva de fase en las altas frecuencias, Figura 20; que produce un aporte de fase positivo. A partir de estos datos podemos escribir la función de transferencia de este proceso para régimen permanente, de la siguiente forma:

$$G_e(j\omega) = 5,6 \frac{(1 + j\omega/70)}{j\omega(1 + j\omega/4)(1 + j\omega/25)} \tag{70}$$

o también,

$$G_e(j\omega) = 8 \frac{(j\omega + 70)}{j\omega(j\omega + 4)(j\omega + 25)} \tag{71}$$

y sustituyendo $j\omega$ por s , resulta:

$$G_e(s) = 8 \frac{(s + 70)}{s(s + 4)(s + 25)} \tag{72}$$

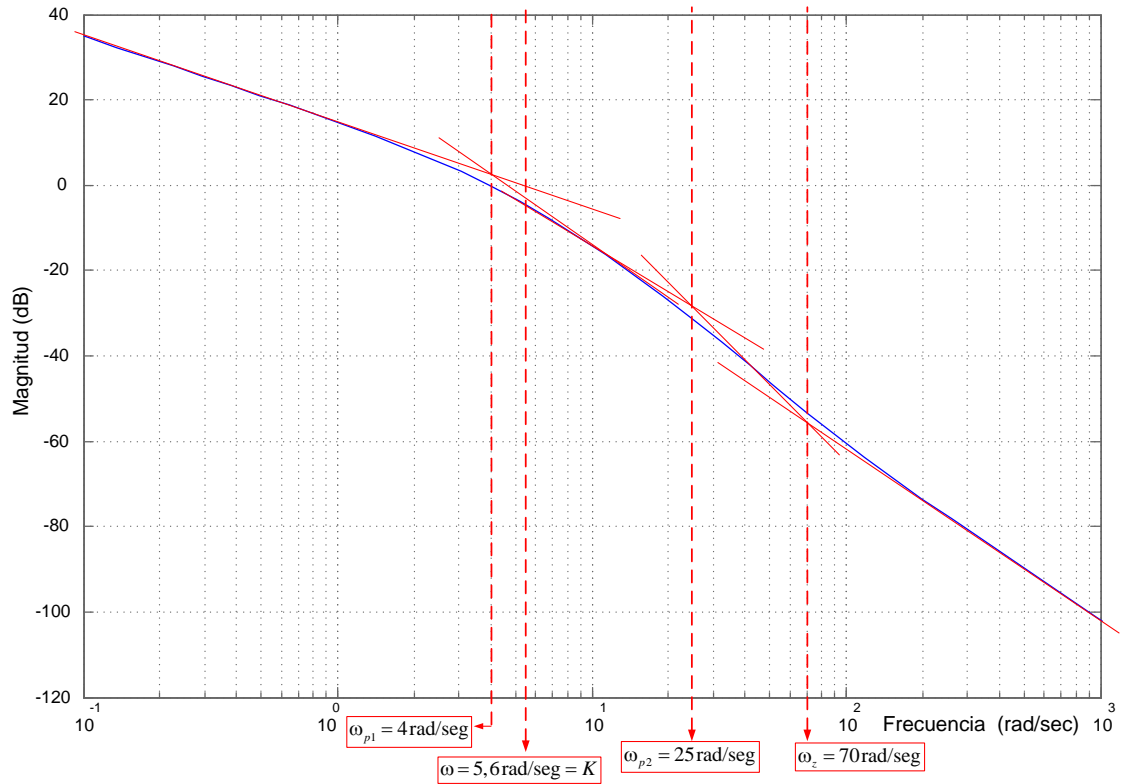


Figura 19. Respuesta en frecuencia del proceso identificado. Curva de magnitud. Ejemplo 4.

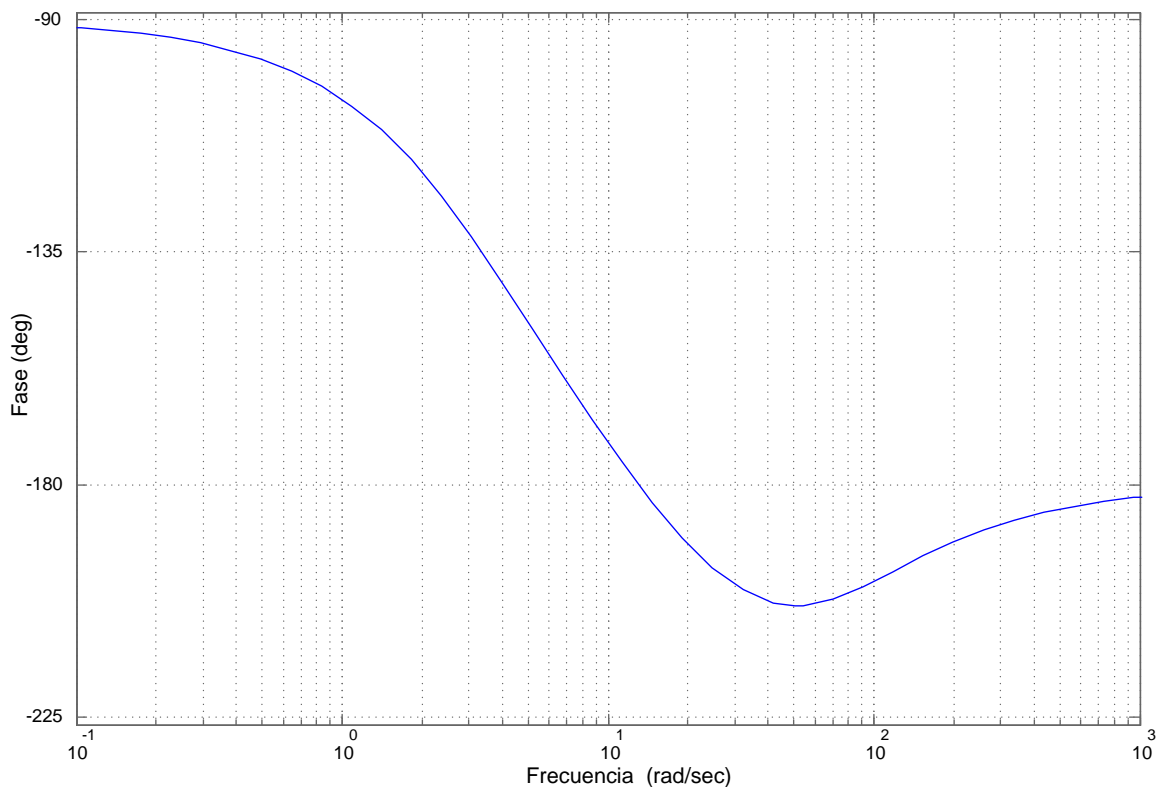


Figura 20. Respuesta en frecuencia del proceso identificado. Curva de fase. Ejemplo 4.

Ejemplo 5:

La curva de magnitud de la respuesta en frecuencia de la Figura 21 no presenta inclinación inicial en las bajas frecuencias, lo que representa un término constante igual a la ganancia estática, en este caso $K = 1$. La pendiente en las altas frecuencias es de -40dB/década y además esta respuesta presenta un pico de resonancia positivo en la frecuencia de 5rad/seg lo que indica la presencia de un par de polos complejos conjugados con parte real negativa. El valor de magnitud en decibels del pico de resonancia, representado en la gráfica, es de aproximadamente $7,86\text{dB}$; a partir del cual es posible conocer cuánto vale el factor de amortiguamiento relativo ξ . Este factor de amortiguamiento resulta igual a $0,2$. La expresión escrita en la gráfica de magnitud de la Figura 21, surge del siguiente análisis: La expresión en régimen permanente sinusoidal de un sistema con un par de polos complejos conjugados, puede escribirse de la siguiente forma:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{2\xi}{\omega_n} \omega - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (73)$$

y la magnitud en decibels para el trazado del diagrama de Bode resulta:

$$A_{\text{dB}} = 20\log(K) - 20\log\left|1 + j \frac{2\xi}{\omega_n} \omega - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|. \quad (74)$$

Para $\omega = \omega_n$, considerando que $K = 1$ y obteniéndose el valor absoluto, la anterior resulta

$$A_{\text{dB}}(\omega_n) = -20\log(2\xi). \quad (75)$$

A partir de estos datos podemos escribir la función de transferencia estimada de este proceso para régimen permanente, de la siguiente forma:

$$G_e(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (76)$$

Multiplicando y dividiendo la (76) por ω_n^2 , resulta en,

$$G_e(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + (j\omega)^2}, \quad (77)$$

y finalmente, sustituyéndose $j\omega$ por s , se tiene:

$$G_e(s) = \frac{25}{s^2 + 2s + 25}. \quad (78)$$

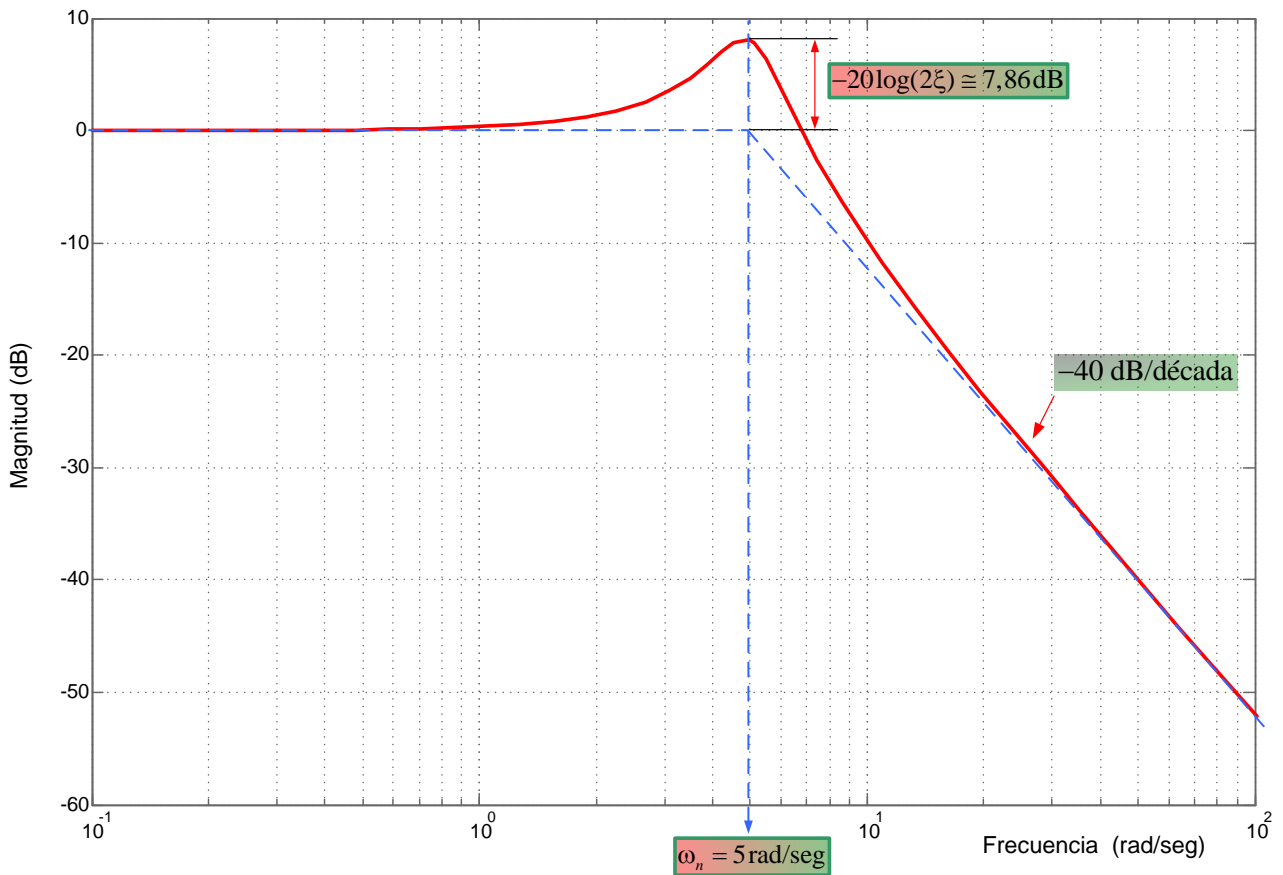


Figura 21. Respuesta en frecuencia del proceso identificado. Curva de magnitud. Ejemplo 5.

Es importante destacar que $\omega_n \neq \omega_{max}$, pero dado que la diferencia es pequeña, la hipótesis de considerarlas iguales resulta en una aproximación aceptable para estimar la función de transferencia. Si se quisiera obtener un valor más aproximado del factor ξ , el valor máximo en dB de la curva de magnitud surge de calcular la derivada primera del valor absoluto de la (74), e igualarla a cero para obtener ω_{max} . Esta magnitud resulta igual a $\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ para $\xi < 1/\sqrt{2}$.

Sustituyéndose este valor de ω en la (74) y calculándose el módulo, para $K = 1$, se tiene que:

$$A_{dB}(\omega_{max}) = -10 \log [4\xi^2(1 - \xi^2)]. \tag{79}$$

Para el valor obtenido de $\xi = 0,2$ se tiene que $A_{dB}(\omega_{max}) = 8,136$, valor próximo al obtenido experimentalmente.

Ejemplo 6:

A continuación se muestra un caso de modelación experimental en base a la respuesta de magnitud en función de la frecuencia, de un sensor de tensión aislado utilizado para medir tensiones de corriente alterna elevadas en sistemas de control. Este circuito medidor de tensión está formado por un transductor más un circuito de acondicionamiento, como muestra la Figura 22.

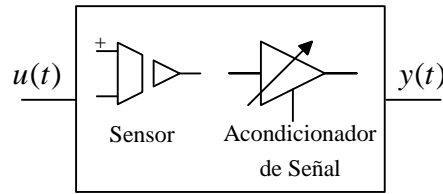


Figura 22 – Sistema dinámico. Sensor + Acondicionador de señal. (Caja negra).

Tabla IV – Valores experimentales de entrada-salida para diferentes valores de frecuencia

Frecuencia (kHz)	Tensión de Entrada $u(t)$. (V_{pp})	Tensión de Salida $y(t)$. (V_{pp})	Ganancia (dB)	Fase (μs)	Fase ($^\circ$)
0,01	8	8	0	0	0
0,02	8	8	0	0	0
0,02	8	8	0	0	0
0,1	8	8	0	0	0
0,2	8	8	0	0	0
0,5	8	8	0	0	0
1	8	8	0	0	0
2	8	8	0	0	0
5	8	8	0	6	-10.8
10	8	7.8	-0.22	6	-21.6
20	8	7.4	-0.68	6	-43.2
50	8	5.8	-2.80	5.6	-100.8
100	8	2.8	-9.12	4.1	-148.8
200	8	0.56	-23.10	2.4	-170.8

La Tabla IV muestra los valores experimentales obtenidos durante el proceso de medición y los gráficos de la Figura 23 y la Figura 24, muestran las respuestas de magnitud y de fase en función de la frecuencia, trazadas en base a los datos experimentales y al modelo estimado. Se observa en este gráfico, que la asíntota de alta frecuencia de la respuesta experimental de magnitud, presenta una pendiente de -40dB/década, con lo que el sistema resulta ser de orden 2. Además, observándose la curva de fase, se aprecia que no existen ceros en alta frecuencia. La asíntota de baja frecuencia corta al eje de 0dB en 0, por lo tanto la ganancia estática de este sistema es unitaria. La intersección de las asíntotas de baja y alta frecuencia se cortan donde la magnitud cae a -6dB; definiéndose así la frecuencia de corte en $\omega_n \cong 4,7 \times 10^5$ rad/seg.

La función de transferencia normalizada de un proceso de segundo orden en régimen permanente sinusoidal, puede escribirse por la siguiente ecuación,

$$G_e(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2 (j\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} (j\omega) + 1} \tag{80}$$

Dado que el sistema no posee pico de resonancia, el mismo presenta 2 polos reales negativos, y por lo tanto, $\xi = 1$; de esta forma, sustituyéndose los valores de ξ y ω_n y reemplazando $j\omega$ por s , la función de transferencia estimada para estos valores experimentales es la siguiente:

$$G_e(s) = \frac{1}{\frac{1}{(4,7 \times 10^5)^2} s^2 + \frac{2}{4,7 \times 10^5} s + 1} \tag{81}$$

$$G_e(s) = \frac{(4,7 \times 10^5)^2}{s^2 + 2 \times 4,7 \times 10^5 s + (4,7 \times 10^5)^2} \tag{82}$$

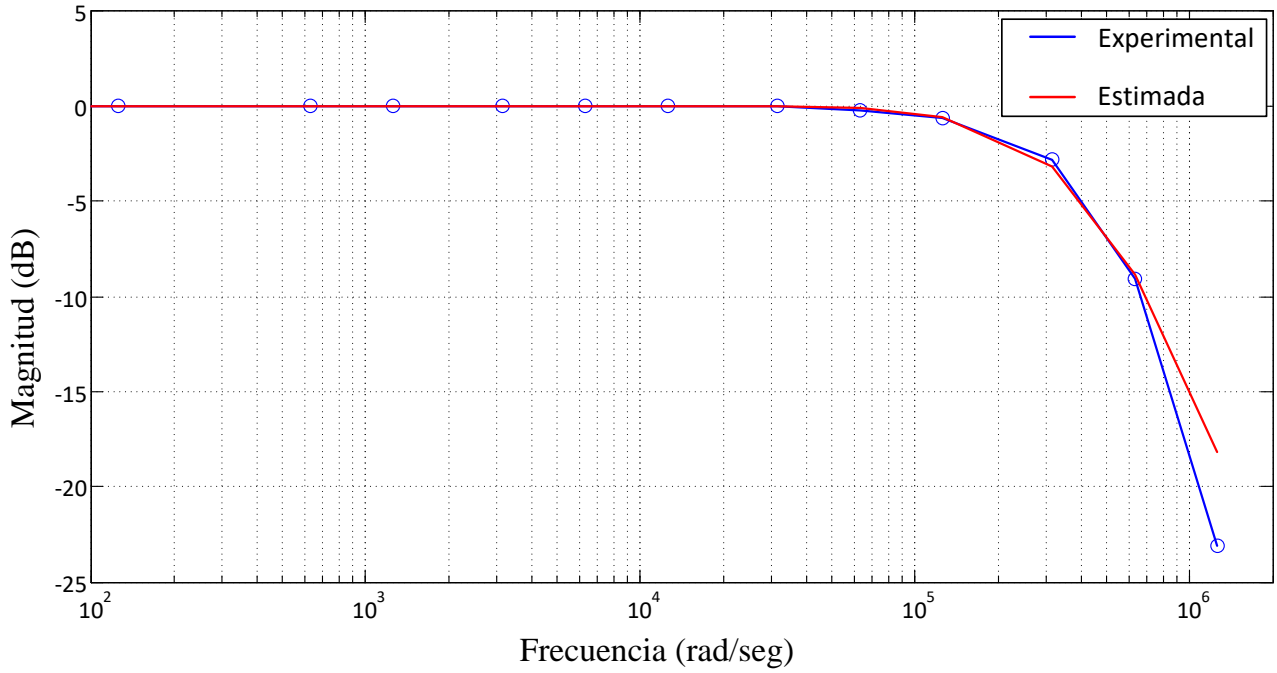


Figura 23 – Respuesta en frecuencia de magnitud.

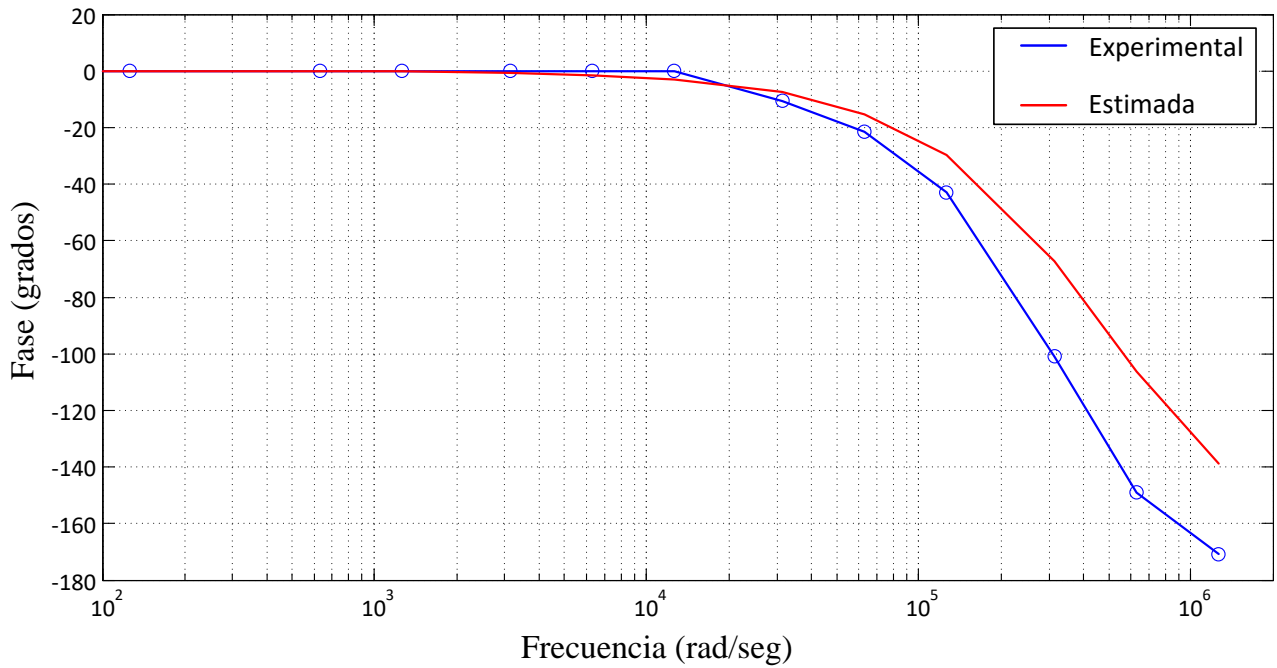


Figura 24 – Respuesta en frecuencia de fase.

Referencias Bibliográficas

- [1] – Feedback Control Systems, Charles L. Phillips and Royce D. Harbor, Fourth Edition, Prentice Hall, 2000.
- [2] – Identificación De Procesos Sobreamortiguados Utilizando Técnicas De Lazo Abierto, Víctor M. Alfaro, Ingeniería 11 (1,2):11-25, 2001 San José. Costa Rica.
- [3] – Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares, Antonio, A. R. Coelho e Leandro, Dos Santos Coelho. Editora da UFSC, 2004.
- [4] – Modern Control Engineering, Katsuhiko Ogata, Third Edition, Prentice Hall, 1997.
- [5] – A Simple Method for On-Line Identification and Controller Tuning, Cheng-Liang Chen, AIChE Journal, Vol. 35, No. 12, December 1989.