Motor de corriente continua (CC) con excitación independiente

La Figura 1 presenta el esquema descriptivo de un sistema electromecánico, en este caso formado por un motor CC con excitación independiente de campo y una carga acoplada al eje del mismo.

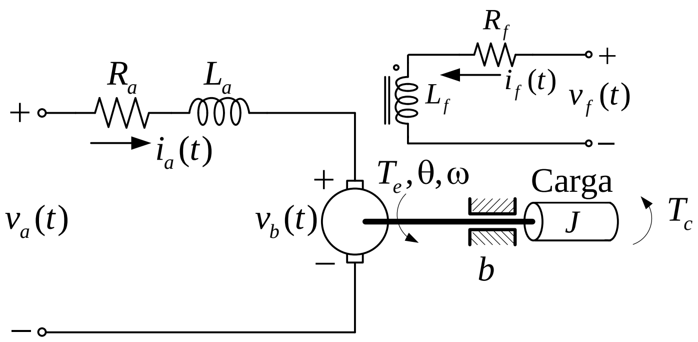

Figura 1. Motor CC con excitación independiente – Esquema eléctrico equivalente.

A continuación analizamos las ecuaciones matemáticas que modelan las dinámicas de este motor CC con excitación independiente:

El par electromagnético generado está dado por la siguiente relación:

$$T_e(t) = K i_f(t) i_a(t) \tag{1}$$

Considerando la corriente de campo constante, es decir:

$$i_f(t) = I_f = ctte \tag{2}$$

La ecuación (1), resulta:

$$T_e(t) = K_t i_a(t) \tag{3}$$

Haciendo la siguiente igualdad:

$$K I_f = K_t \tag{4}$$

En base a la segunda ley de Newton, se tiene la siguiente ecuación de equilibrio de par:

$$T_e(t) - T_c(t) - b\omega(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} \tag{5}$$

Aplicando la Ley de Kircchoff de tensiones al circuito de la armadura, se tiene la siguiente ecuación:

$$v_a(t) = i_a(t) R_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) \tag{6}$$

La tensión contraelectromotriz o tensión de velocidad, está dada por:

$$v_b(t) = K_b \omega(t) \tag{7}$$

Sustituyendo (7) en la (6) y reemplazando $v_a(t)$ por $u(t)$, se tiene:

$$u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_b \omega(t) \tag{8}$$

Reemplazando (3) en (5) y despejando $K_t i_a(t)$:

$$K_t i_a(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) + T_c(t) \tag{9}$$

Transformando al dominio de Laplace las ecuaciones (8) y (9):

$$U(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + K_b \Omega(s) \tag{10}$$

$$K_t I_a(s) = Js\Omega(s) + b\Omega(s) + T_c(s) \tag{11}$$

Aislando $I_a(s)$ de la (9):

$$I_a(s) = \frac{U(s) - K_b \Omega(s)}{R_a + sL_a} \tag{12}$$

Reemplazamos la ecuación (12) en la (11);

$$\frac{K_t U(s) - K_t K_b \Omega(s)}{R_a + sL_a} = (Js + b)\Omega(s) + T_c(s), \tag{13}$$

operando algebraicamente:

$$K_t U(s) - K_t K_b \Omega(s) = (R_a + sL_a)(sJ + b)\Omega(s) + (R_a + sL_a)T_c(s) \tag{14}$$

$$K_t U(s) = (R_a + sL_a)(sJ + b)\Omega(s) + K_t K_b \Omega(s) + (R_a + sL_a)T_c(s) \tag{15}$$

$$K_t U(s) = \left[s^2 JL_a + s(JR_a + bL_a) + bR_a + K_t K_b\right]\Omega(s) + (R_a + sL_a)T_c(s) \tag{16}$$

Despejamos $\Omega(s)$, la cual resulta en función de 2 términos:

$$\Omega(s) = \frac{K_t}{s^2 JL_a + s(JR_a + bL_a) + bR_a + K_t K_b} U(s) - \frac{R_a + sL_a}{s^2 JL_a + s(JR_a + bL_a) + bR_a + K_t K_b} T_c(s) \tag{17}$$

En la ecuación (17) se observan dos funciones de transferencias:

$$G_{1v}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_t}{s^2 JL_a + s(JR_a + bL_a) + (bR_a + K_t K_b)} \tag{18}$$

y

$$G_{2v}(s)=\frac{\Omega(s)}{T_c(s)}=\frac{-(R_a+sL_a)}{s^2JL_a+s(JR_a+bL_a)+(bR_a+K_tK_b)} \tag{19}$$

Entonces:

$$\Omega(s)=G_{1v}(s)U(s)+G_{2v}(s)T_c(s) \tag{20}$$

La ecuación (11) la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$K_tI_a(s)-T_c(s)=(sJ+b)\Omega(s) \tag{21}$$

Despejando $\Omega(s)$:

$$\Omega(s)=\frac{K_tI_a(s)-T_c(s)}{(sJ+b)}=\frac{T_e(s)-T_c(s)}{(sJ+b)} \tag{22}$$

Observando las ecuaciones (12) y (22) podemos dibujar el siguiente diagrama de bloques:

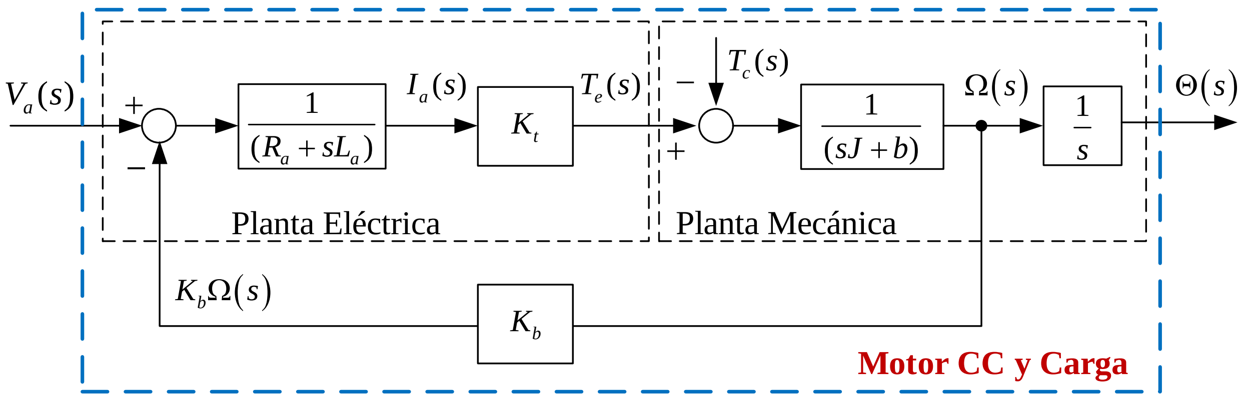

Figura 2: Motor CC con excitación independiente – Diagrama de bloques equivalente.

Analizando la función de transferencia $G_{1v}(s)$ podemos hacer el siguiente análisis:

Sabiendo que: $\theta(t)=\int_0^t \omega(t)\,dt+\theta(0)$ y transformando esta ecuación al dominio de Laplace, considerando la posición inicial $\theta(0)=0$, se tiene:

$$\Theta(s)=\frac{1}{s}\Omega(s)\Rightarrow\Omega(s)=s\Theta(s) \tag{23}$$

Reemplazando la anterior en la ecuación (18), se tiene:

$$G_{1p}(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{K_t}{s^3JL_a+s^2(JR_a+bL_a)+s(bR_a+K_tK_b)} \tag{24}$$

Si la $\tau_e << \tau_m \Rightarrow L_a \approx 0$, la (24) resulta:

$$G_{1_p}(s)=\frac{K_t}{s^2JR_a+s(bR_a+K_tK_b)} \tag{25}$$

Factorizando el denominador:

$$G_{1_p}(s)=\frac{K_t}{s\left(bR_a+K_tK_b\right)\left[s\frac{JR_a}{\left(bR_a+K_tK_b\right)}+1\right]} \tag{26}$$

Determinamos la constante de tiempo del motor como siendo:

$$\tau_m=\frac{JR_a}{bR_a+K_tK_b} \tag{27}$$

Y la constante del motor o ganancia estática, siendo:

$$K_m=\frac{K_t}{bR_a+K_tK_b} \tag{28}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (27) y (28), las ecuación (26) resulta:

$$G_{1_p}(s)=\frac{K_m}{s\left(s\tau_m+1\right)}=\frac{\Theta(s)}{U(s)} \tag{29}$$

A partir de la (23), también podemos escribir la siguiente igualdad:

$$G_{1_v}(s)=\frac{K_m}{s\tau_m+1}=\frac{\Omega(s)}{U(s)} \tag{30}$$

Los diagramas de bloques, relacionados con las funciones de transferencias (29) y (30) son los siguientes:

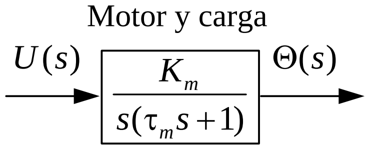

Figura 3: Modelo entrada-salida de posición.

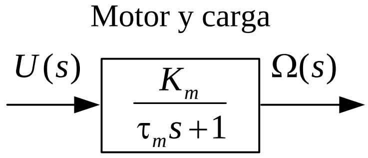

Figura 4: Modelo entrada-salida de velocidad.

Si es posible despreciar "*b*" que generalmente tiene un valor mucho menor que la inercia, la (26), (27) y (28), resultan:

$$G_{1_p}(s)=\frac{K_t}{s^2JR_a+sK_tK_b} \tag{31}$$

Dónde:

$$\tau_m=\frac{JR_a}{K_tK_b}\quad \text{y} \quad K_m=\frac{1}{K_b} \tag{32}$$

Motor de corriente continua (CC) con excitación independiente - Tren de engranajes

Puede ser usado, en el caso de accionamiento de una carga, para convertir velocidades altas y pares reducidos en bajas velocidades y pares elevados. El más popular es el engranaje de rueda dentada recta (dientes rectos).

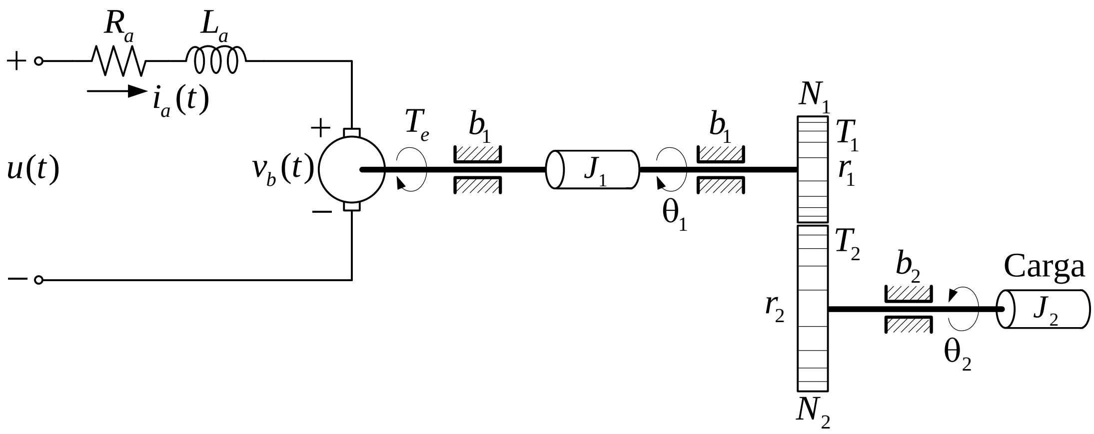

Figura 5: Motor CC con excitación independiente – Tren de engranajes - Esquema eléctrico equivalente.

Dónde:

r_i = Radio de los engranajes.

N_i = Numero de dientes.

θ_i = Desplazamientos angulares.

T_i = Respectivos pares.

El número de dientes en un engranaje es linealmente proporcional a su radio, o sea:

$$\frac{N_1}{r_1} = \frac{N_2}{r_2} \text{ o } \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{33}$$

La distancia recorrida por un punto en la superficie de ambos engranajes es la misma, por lo tanto:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \tag{34}$$

Las fuerzas lineales desarrolladas en el punto de contacto de ambos engranajes, son iguales en módulo, por lo tanto se tiene que:

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}\text{; Donde:} \quad \begin{cases} T_1 = F_1 r_1 \\ T_2 = F_2 r_2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} |F_1| = |F_2| \\ \text{Pero de sentido contrario.} \end{cases} \tag{35}$$

De (33), (34) y (35) resulta la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \tag{36}$$

De la Figura 5 se tiene:

J_1 : Momento de inercia del rotor, eje y engranaje 1.

b_1 : Coeficiente de fricción viscosa en el eje.

J_2 : Momento de inercia de la carga, eje de la carga y engranaje 2.

b_2 : Coeficiente de fricción viscosa en el eje de la carga.

Expresando la ecuación (9) en función del desplazamiento angular $\theta_1(t)$, y el torque T_2 en función $\theta_2(t)$:

$$T_e(t) = J_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + T_1 \tag{37}$$

$$T_2 = J_2 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + b_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} \tag{38}$$

De (36):

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{N_1}{N_2} \text{; o } \theta_2(t) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\theta_1(t) \tag{39}$$

Considerando la siguiente igualdad:

$$\frac{N_1}{N_2} = K_N \tag{40}$$

La ecuación (39), resulta:

$$\theta_2(t) = K_N \theta_1(t) \tag{41}$$

Sustituyendo (41) en la (38):

$$T_2 = J_2 K_N \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + b_2 K_N \frac{d\theta_1(t)}{dt} \tag{42}$$

Sabiendo que:

$$T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) T_2 = K_N T_2 \tag{43}$$

La (37) puede escribirse como:

$$T_e(t) = J_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + J_2 K_N^2 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + b_2 K_N^2 \frac{d\theta_1(t)}{dt} \tag{44}$$

Definiendo el momento de inercia y coeficiente de fricción equivalentes como:

$$\begin{cases} J_{eq} = J_1 + K_N^2 J_2 = J_1 + \left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2 J_2 \\ b_{eq} = b_1 + K_N^2 b_2 = b_1 + \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 \end{cases} \tag{45}$$

La ecuación (44), resulta:

$$T_e(t) = J_{eq}\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + b_{eq}\frac{d\theta_1(t)}{dt} \tag{46}$$

Como se observa, se transfieren el momento de inercia de la carga y el torque por fricción en el eje de la carga al eje del motor. De esta forma podemos ignorar el tren de engranajes y el eje de la carga.

Considerando la función de transferencia de posición en la cual se desprecia la inductancia de armadura $(L_a \cong 0)$, esta nos queda:

$$G_{1p}(s) = \frac{\Theta_1(s)}{U(s)} = \frac{K_m^*}{s\left(s\tau_m^* + 1\right)} \tag{47}$$

Dónde:

$$K_m^* = \frac{K_t}{b_{eq}R_a + K_t K_b} \text{ y } \tau_m^* = \frac{J_{eq}R_a}{b_{eq}R_a + K_t K_b} \tag{48}$$

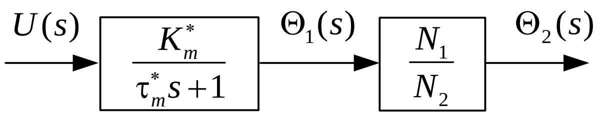

Figura 6: Diagramas de bloques: Tensión de armadura - posición de la carga.

Sistemas térmicos

Son sistemas que involucran transferencia de calor de una sustancia a otra.

Los sistemas térmicos pueden ser tratados utilizando símiles eléctricos tales como la resistencia y capacitor, aunque la resistencia y capacitancia térmica no pueden estrictamente considerarse o representarse en un modelo de parámetros concentrados, dado que estas se encuentran distribuidas a lo largo de la resistencia.

El calor fluye por los siguientes mecanismos:

1. Conducción.
2. Convección.
3. Radiación.

A continuación solo se tiene en cuenta los mecanismos 1 y 2, es decir la transferencia de calor por conducción y convección. En estos el flujo de calor se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$q = K\Delta\theta \tag{49}$$

Dónde:

q : Flujo de calor, $\left[\dfrac{\text{KCal}}{\text{seg}}\right]$

K : Coeficiente, $\left[\dfrac{\text{KCal}}{\text{seg}^{\text{o}}\text{C}}\right]$

$\Delta\theta$: Diferencia de temperatura, $\left[{}^{\text{o}}\text{C}\right]$

La constante K es función de las dimensiones y características del material.

Resistencia y capacitancia térmicas.

Resistencia térmica:

$$R = \frac{d\theta}{dq}, \left[\frac{{}^{\text{o}}\text{C}}{\text{KCal/seg}}\right], \text{ Donde: } R = \frac{1}{K} \tag{50}$$

Para los mecanismos de conducción y convección, se tiene que los coeficientes son constantes, es decir $R \cong \text{constante}$.

Capacitancia térmica:

$$\mathbb{C} = \frac{dQ}{d\theta}, \left[\frac{\text{KCal}}{{}^{\text{o}}\text{C}}\right] \tag{51}$$

Este indica la variación en el calor almacenado, es decir variación en la temperatura.

Otra forma de obtener la (51) es mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbb{C} = mc \tag{52}$$

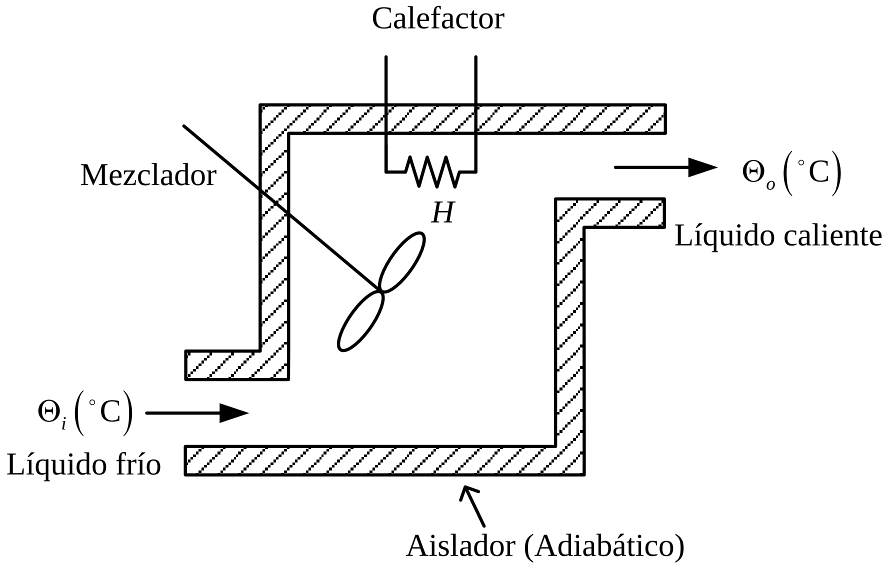

Figura 7: Esquema dinámico de un sistema térmico.

Dónde:

m: Masa de la sustancia, $\left[\mathrm{Kg}\right]$.

c: Calor especifico de la sustancia, $\left[\dfrac{\mathrm{KCal}}{\mathrm{Kg^oC}}\right]$.

Θ_i: Temperatura de régimen permanente del líquido que entra, $\left[{}^\mathrm{o}\mathrm{C}\right]$.

Θ_o: Temperatura de régimen permanente del líquido que sale, $\left[{}^\mathrm{o}\mathrm{C}\right]$.

$m =$ Masa del líquido, $\left[\mathrm{Kg}\right]$.

$G =$ Velocidad del líquido en régimen permanente, $\left[\dfrac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{seg}}\right]$.

$C =$ Calor especifico, $\left[\dfrac{\mathrm{KCal}}{\mathrm{Kg^oC}}\right]$.

$R =$ Resistencia térmica, $\left[\dfrac{\mathrm{^oCseg}}{\mathrm{KCal}}\right]$.

$\mathbb{C} =$ Capacitancia térmica, $\left[\dfrac{\mathrm{KCal}}{\mathrm{^oC}}\right]$.

$H =$ Flujo de calor que entra al sistema.

Supongamos que "h_i" representa una pequeña cantidad de variación de calor. En esta situación el calor de entrada cambia de H a $H+h_i$. El calor del flujo de salida cambiará gradualmente de H a $H+h_0 \left[\frac{\text{KCal}}{\text{seg}}\right]$ y la temperatura de Θ_o a $\Theta_o+\theta$.

A continuación se definen los parámetros relacionados con el sistema.

Cambio en el flujo calórico:

$$h_o = GC\theta\left[\frac{\text{Kg}}{\text{seg}}\times\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^{\text{o}}\text{C}}\times{}^{\text{o}}\text{C}\right] = GC\theta\left[\frac{\text{Kcal}}{\text{seg}}\right] \tag{53}$$

Capacitancia Térmica:

$$\mathbb{C} = mC \tag{54}$$

Resistencia Térmica:

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{GC} \tag{55}$$

La ecuación que gobierna este proceso es la siguiente:

$$h_i - h_o = \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow h_i = h_o + \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{56}$$

Sustituyendo la (53) en la (56):

$$h_i = GC\theta + \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{57}$$

Dividiendo ambos miembros por GC:

$$\frac{h_i}{GC} = \theta + \frac{\mathbb{C}}{GC}\frac{d\theta}{dt} \tag{58}$$

Sustituyendo la (55) en la (58):

$$Rh_i = \theta + R\mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{59}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$RH_i(s) = \Theta(s) + R\mathbb{C}s\Theta(s) = \Theta(s)(1+R\mathbb{C}s) \tag{60}$$

La función de transferencia de la entrada a la salida está dada por:

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{1+R\mathbb{C}s} = \frac{1/\mathbb{C}}{\left(s+\frac{1}{R\mathbb{C}}\right)} \tag{61}$$

Se observa que la constante de tiempo del sistema es $\tau = R\mathbb{C}$, es decir:

$$\tau = R\mathbb{C} = \left(\frac{1}{GC}\right)(mC) = \frac{m}{G},\left[\frac{\text{Kg}}{\text{Kg/seg}}\right] = \frac{m}{G},[\text{seg}] \tag{62}$$

La antitransformada de la función de transferencia, indicada en (61), resulta:

$$\theta(t) = L^{-1}\left[\frac{\Theta(s)}{H_i(s)}\right] = \frac{1}{C}e^{-t/RC} \tag{63}$$

El diagrama de bloques para este sistema de control, surge de analizar la (60):

$$RH_i(s) - \Theta(s) = R\mathbb{C}s\Theta(s) \Rightarrow \Theta(s) = \frac{RH_i(s) - \Theta(s)}{R\mathbb{C}s} \tag{64}$$

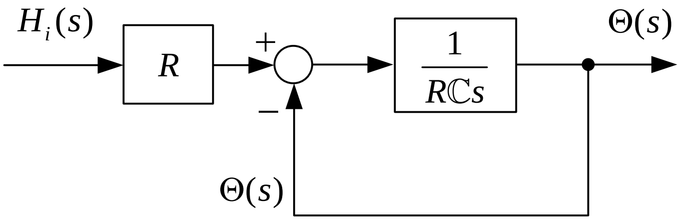

Figura 8: Diagrama de bloques del sistema de control analizado.

Análisis ante la variación de temperatura del líquido desde Θ_i a $\Theta_i + \theta_i$. En éste θ_i se consideran como perturbación del sistema.

Si Θ_i varía el control automático debe cambiar el calor entrante para que "Θ_o" se mantenga constante.

<u>Suponiendo que</u>:

Se tiene la siguiente variación de temperatura $\Theta_i \rightarrow \Theta_i + \theta_i$ y que el flujo de calor de entrada "H" y el flujo del líquido "G" se mantienen constantes. En esta situación el flujo de calor de salida variará de H a $H + h_o$ y la temperatura del líquido saliente variará desde Θ_o a $\Theta_o + \theta$. En función de esto, analizamos el sistema reescribiendo la (56):

$$h_i - h_o = \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow h_i = h_o + \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{65}$$

h_i varía debido a "θ_i":

$$h_i = GC\theta_i \tag{66}$$

Sustituyendo la (66) en la (65):

$$GC\theta_i - h_o = \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{67}$$

Sustituyendo h_o, por $GC\theta$, la (67) será:

$$GC\theta_i - GC\theta = \mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} \tag{68}$$

Dividiendo ambos miembros por GC:

$$\theta_i - \theta = \frac{\mathbb{C}}{GC}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta_i = \frac{\mathbb{C}}{GC}\frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{69}$$

Sustituyendo la (55) en la (69):

$$\theta_i = R\mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{70}$$

Aplicando la transformada de Laplace para hallar la función de transferencia:

$$\Theta_i(s) = R\mathbb{C}s\Theta(s) + \Theta(s) = (sR\mathbb{C}+1)\Theta(s) \tag{71}$$

La función de transferencia entre el disturbio y la salida es:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{sR\mathbb{C}+1} = \frac{1/R\mathbb{C}}{\left(s + \frac{1}{R\mathbb{C}}\right)} \tag{72}$$

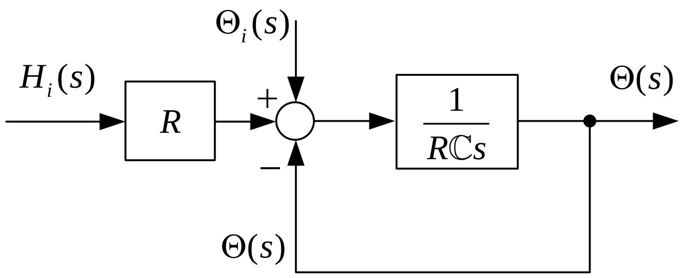

Figura 9: Diagrama de bloques del sistema de control térmico – Considerando el disturbio de entrada.

Si al cambio de la temperatura del líquido que entra se le suma el cambio en el flujo de calor de entrada h_i el sistema viene gobernado por:

$$R\mathbb{C}\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i \tag{73}$$

Aplicando la transformada de Laplace y trabajando algebraicamente:

$$R\mathbb{C}s\Theta(s) + \Theta(s) = \Theta_i(s) + RH_i(s) \tag{74}$$

$$\Theta(s)(sR\mathbb{C}+1) = \Theta_i(s) + RH_i(s) \tag{75}$$

De esta manera la función de transferencia, en la que se considera el cambio de temperatura y del flujo de calor del líquido entrante resulta:

$$\Theta(s) = \frac{\Theta_i(s)}{(sR\mathbb{C}+1)} + \frac{R}{(sR\mathbb{C}+1)}H_i(s) \tag{76}$$