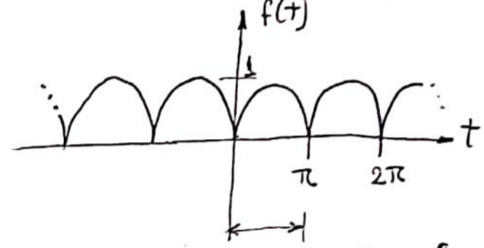
6) Obtener la SEF (serie exponencial de Fourier) de $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$

$$C_K = \frac{1}{T} \int_{<T>} f(t)\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\, e^{-jK\omega_0 t}\, dt$$



$T = \pi \Rightarrow \omega_0 = 2$

Evaluando la integral en la calculadora o por tablas ⇒

$$C_K = \frac{1}{\pi}\left[e^{-jK\omega_0 t} \left(\frac{-jK2\operatorname{sen}(t) - \cos(t)}{1-4K^2} \right) \right] \Bigg|_0^{\pi} \quad ; \text{ reemplazando } \omega_0 = 2$$

$$C_K = \frac{1}{\pi}\left[-e^{-jK2\pi} \left(\frac{-\cos(\pi)}{1-4K^2} + \frac{\cos(0)}{1-4K^2} \right) \right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-4K^2} + \frac{1}{1-4K^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_K = \frac{2}{\pi(1-4K^2)}}$$

⇝ Ahora resta expresar $f(t)$ mediante los C_K en la ecuación de síntesis.

La expresión general de síntesis implica una sumatoria de los C_K para $K=-\infty$ a $K=\infty$, es decir:

$$f(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K\, e^{+jK\omega_0 t}$$

Por lo que con los C_K calculados podemos escribir: $f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{K=-\infty \\ K\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4K^2)} e^{+jK\omega_0 t}$

Donde $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\cos(t)\Big|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$

* Vale notar que en este caso evaluar C_0 en la sumatoria no resulta en ninguna indeterminación, así que se puede calcular así mismo.

↳ Como el resultado de la guía está escrito en una sumatoria de $K=1$ a $K=\infty$, hay que analizar otra forma de escribir la ecuación de síntesis

SE PUEDE SEPARAR LA SUMATORIA INFINITA EN DOS, DESDE $-\infty$ A 1, DE 1 A ∞ Y, APARTE, EL TÉRMINO C_0; ES DECIR:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

→ SOLO SE SEPARÓ LA SUMATORIA.

AHORA, PARA PODER AGRUPAR TÉRMINOS EN UNA SOLA SUMATORIA, HAGO UNA CAMBIO DE VARIABLE EN $k=-k$ PARA LA SEGUNDA SUMATORIA, CAMBIANDO EL $C_k = C_{-k}$ =>

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

*ES IMPORTANTE ATENDER AL CAMBIO DE VARIABLE ENTRE $C_k \to C_{-k}$; QUE SOLO AFECTA A k, Y NO AL SIGNO COMPLETO DE C_k; ES DECIR, PARA EL C_k CALCULADO DEL EJERCICIO TENEMOS QUE:

$$C_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \Rightarrow C_{-k} = \frac{2}{\pi(1-4(-k)^2)} = C_k;$$

ES DECIR QUE $C_k = C_k$

ENTONCES:

$$f(t) = \cancel{\pi}\ \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{jk\omega_0 t} + \frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-4k^2)} \left(\underbrace{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}_{} \right) \right]$$

→ $2\cos(k\omega_0 t)$; COMO $\omega_0 = 2$
$= 2\cos(2kt)$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4k^2-1} \right) \cos(2kt) \right]}$$