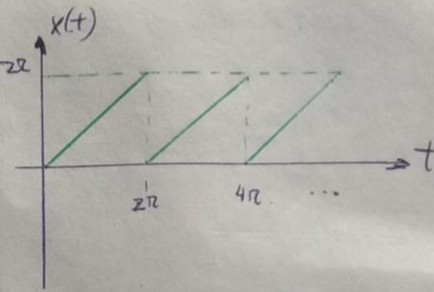
Ejemplo serie de Fourier exp. de tiempo continuo.



* Encontrar la representación o expanción en serie de x(t). Graficar su módulo y fase.

→ Una señal periódica se puede descomponer en armónicos elementales de la siguiente forma:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}}$$

Donde los coeficientes "C_k" se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{C_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt} \qquad \text{con } \omega_0 = \frac{1}{T}$$

Para este caso particular procedemos; en primer lugar calculando en coeficiente "C_0", o también conocido como "valor de continua"

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \boxed{\pi}$$

Los otros coeficientes son:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} t e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t e^{-jkt} dt$$

Aplicar integración por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

$T \to 2\pi$

$\Rightarrow \omega_0 = 1.$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t e^{-jkt}}{-jk} - \int \frac{e^{-jkt}}{-jk} 1\,dt\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$e^{\pm j2\pi k} = 1$$

$$= \frac{1}{(-jk)2\pi}\left[\frac{t e^{-jkt}}{\cancel{-jk}} - \frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{j}{\cancel{2\pi}k}\left[\cancel{2\pi} e^{-j2\pi k} + \underbrace{\left(e^{-j2\pi k} - 1\right)\Big/ jk}_{=0}\right]$$

$$\Rightarrow C_k = \frac{j}{k}(1) \Rightarrow \boxed{C_k = \frac{j}{k}} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{e^{j\pi/2}}{k}}$$

De esta forma la expanción de $x(t)$ por Fourier resulta en:

$$x(t) = C_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \pi + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{k} e^{jkt}$$

Esta sumatoria podemos separarla en dos, y teniendo en cuenta que para una señal real y periódica

$$\boxed{C_{-k} = C_k^*}$$

Tenemos:

$$x(t) = \overset{\pi}{C_0} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_{+k} e^{jkt} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jkt} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} e^{-jkt} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{+jk\omega_0}$$

Agrupando las sumatorias:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} e^{-jkt} + C_k e^{+jkt}$$

Como $C_k = \frac{j}{k}$; $C_{-k} = \frac{-j}{k}$ $\Rightarrow C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-j}{k} e^{-jkt} + \frac{j}{k} e^{jkt} \right)$

$$= \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+j}{k} \left(\underbrace{e^{jkt} - e^{-jkt}}_{2j\,\text{sen}(kt)} \right)$$

$$= \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(j)^2}{k} \text{sen}(kt) \; ; \; \text{como } j^2 = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \text{sen}(kt)}$$

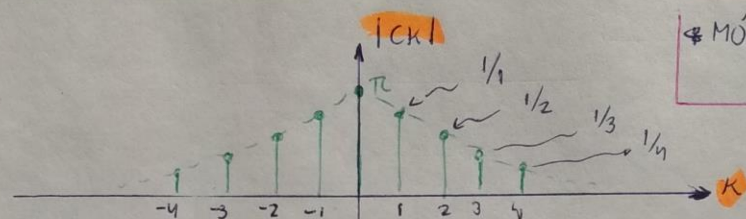
Los gráficos de módulo y fase en la siguiente página.

↓

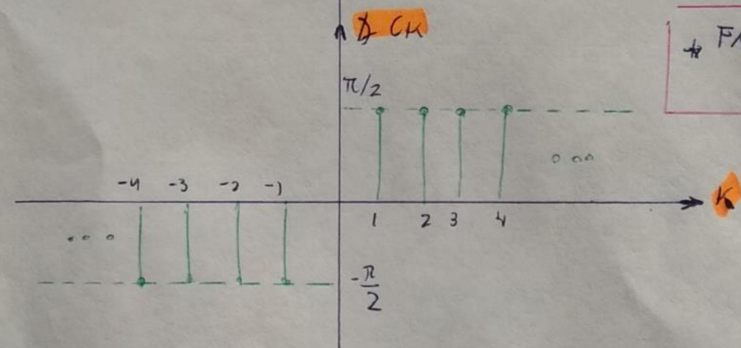
PARA GRAFICAR EL MÓDULO Y FASE DE LOS COEFICIENTES "C_K", HAY QUE SEPARAR SU EXPRESIÓN EN MODULO/FASE:

$$\boxed{C_K = \frac{j}{K}}$$ → PODEMOS ESCRIBIRLA EN FORMA POLAR COMO $\boxed{\left|\frac{1}{K}\right| e^{\pm j \pi/2}}$

CUYO MÓDULO EN $1/K$ Y SU FASE ES $\pm 90°$ O $\pm \pi/2$ RADIANES DEPENDIENDO EL SIGNO DE "K". GRAFICANDO ESTO ES:



* MÓDULO ⇒ GRÁFICA PAR.



* FASE ⇒ GRÁFICA IMPAR.

↳ $C_K^* = C_{-K}$