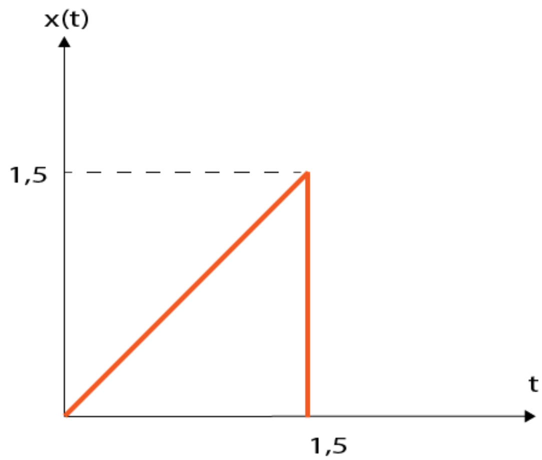
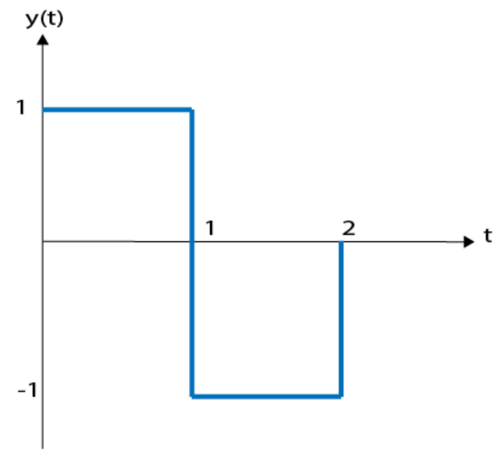
Ejemplo Convolución de señales continuas

Realizar la convolución entre las siguientes dos señales de tiempo continuo, **aclarando todos los pasos de manera analítica y gráficamente. Grafique el resultado.**



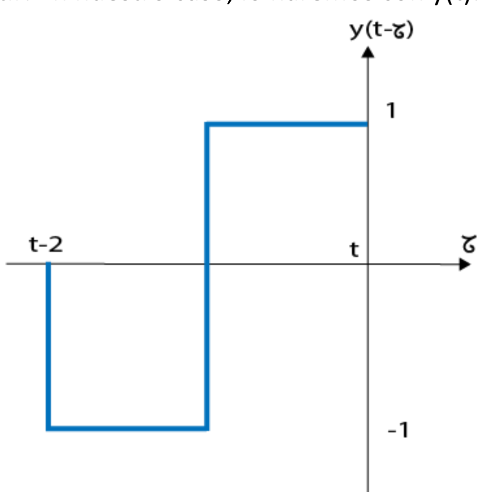


El primer paso consiste en definir por tramos ambas funciones, determinando correctamente su valor (función) para cada intervalo de tiempo.

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1{,}5 \\ 0 & \forall\, t \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

El siguiente paso consiste en realizar **un cambio de variable en ambas funciones y una inversión y desplazamiento de una de las dos funciones**. Generalmente se hace esto último a la más simple o "fácil" de invertir. En nuestro caso, lo haremos con y(t):



$$x(\tau) = \begin{cases} \tau & 0 < \tau \leq 1{,}5 \\ 0 & \forall\, \tau \end{cases}$$

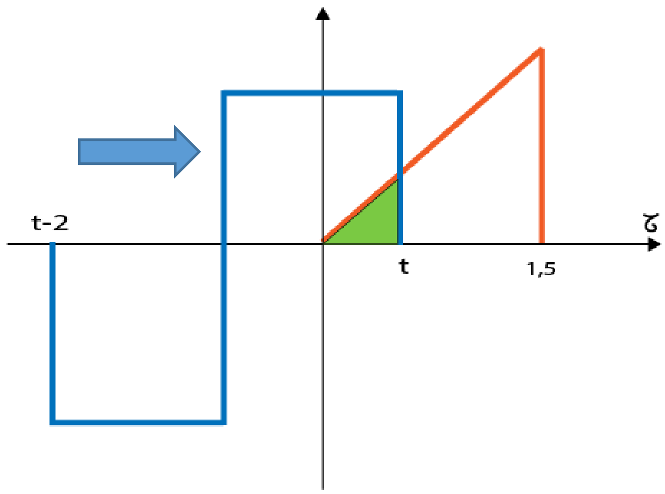
$$y(t-\tau) = \begin{cases} -1 & t-2 < \tau \leq t-1 \\ 1 & t-1 < \tau \leq t \end{cases}$$

¿Qué representa "t" en esta nueva función?

Una vez que tenemos las dos funciones (una con su nueva variable y desplazable), se debe comenzar a desplazar una sobre otra en intervalos que se definen de acuerdo a la superposición de las funciones a tramo. En la zona de superposición de ambas señales, se realiza la integral de convolución.

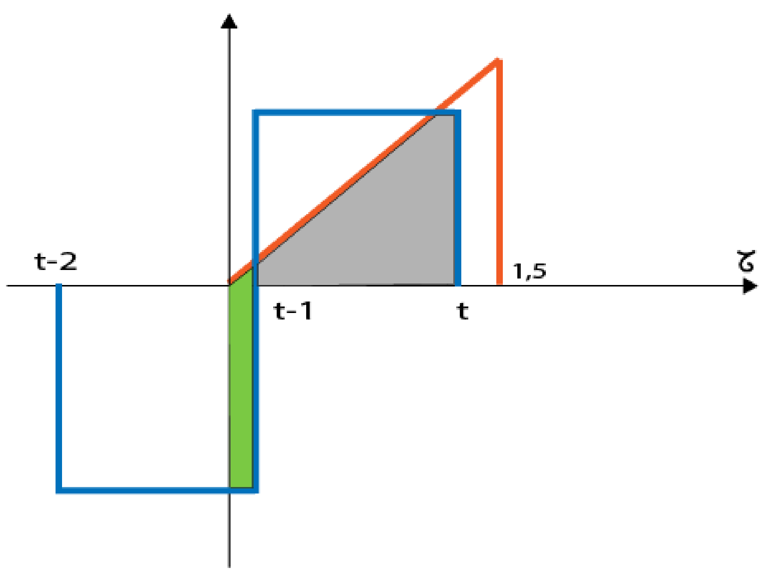
Primer intervalo:

$$c1(t) = \int_0^t (1 * \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} \qquad \mathbf{0 < t \leq 1}$$



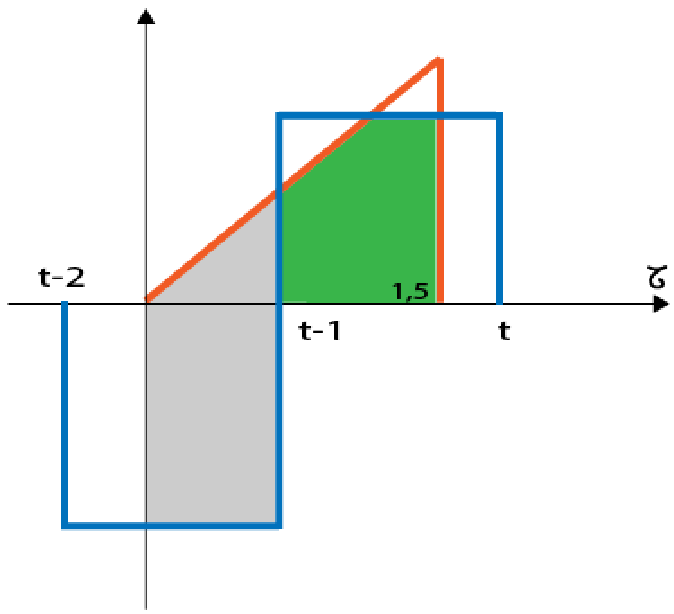
Segundo intervalo: Se mueve la función hasta que aparece una superposición de una nueva parte:

$$c2(t) = \int_0^{t-1} (-1 * \tau) d\tau + \int_{t-1}^{t} (1 * \tau) d\tau = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 \qquad \mathbf{1 < t \leq 1,5}$$



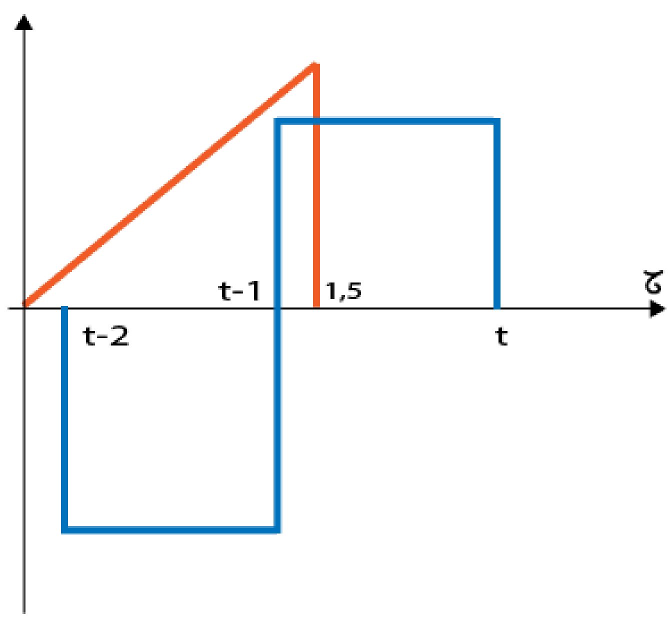
Tercer intervalo:

$$c3(t) = \int_{0}^{t-1} (-\tau)d\tau + \int_{t-1}^{1,5} (\tau)d\tau = -t^2 + 2t + 0.125 \quad \mathbf{1,5 < t \leq 2}$$



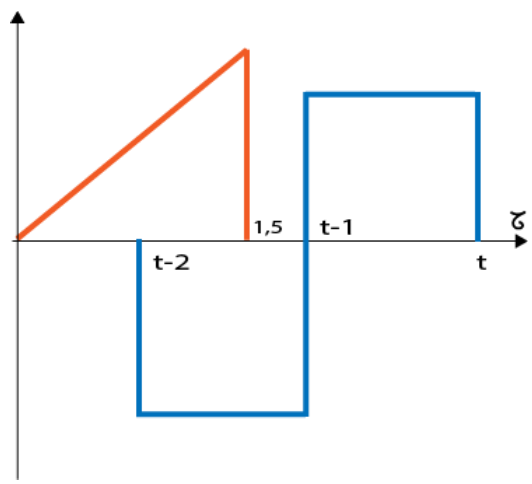
Cuarto intervalo:

$$c4(t) = \int_{t-2}^{t-1} (-\tau)d\tau + \int_{t-1}^{1,5} (\tau)d\tau = -\frac{t^2}{2} + 2.125 \quad \mathbf{2 < t \leq 2,5}$$



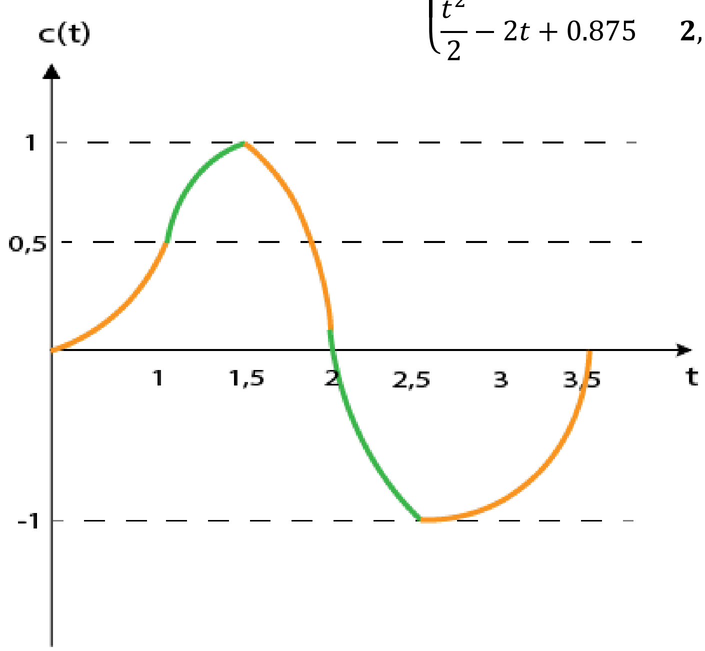
Quinto intervalo: Este es el último intervalo posible, pues las funciones superpuestas ya no vuelven a cambiar hasta que dejan de solaparse una con otra.

$$c5(t) = \int_{t-2}^{1,5} (-\tau) d\tau = \frac{t^2}{2} - 2t + 0.875 \qquad \mathbf{2,5 < \boldsymbol{t} \leq 3,5}$$



Resultado final: $c(t) = c1(t) + c2(t) + c3(t) + c4(t) + c5(t)$

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \mathbf{0 < \boldsymbol{t} \leq 1} \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2t - 1 & \mathbf{1 < \boldsymbol{t} \leq 1,5} \\ -t^2 + 2t + 0.125 & \mathbf{1,5 < \boldsymbol{t} \leq 2} \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2.125 & \mathbf{2 < \boldsymbol{t} \leq 2,5} \\ \dfrac{t^2}{2} - 2t + 0.875 & \mathbf{2,5 < \boldsymbol{t} \leq 3,5} \end{cases}$$



✓ Función continua
✓ Sin interrupciones