Capítulo XIII

El punto de equilibrio con multiproductos

Elba Font de Malugani
Domingo Macrini

Empresa: "La mejor decisión"
Lugar: sala de reuniones
Participantes: gerentes de área
Motivo: planificación

Comentarios y preguntas escuchadas al pasar:

Representante del área de:	
Ventas	"Perdimos ventas por acabar stock del Prod. I. No permitan que pase lo mismo el próximo año."
Producción	"No podíamos fabricar más por no disponer de materias primas."
Compras	"El presupuesto asignado no alcanzaba para todo. Debíamos decidir entre comprar más materia prima o contratar más mano de obra, que tampoco era suficiente."
Producción	"Hubiese sido preferible repartir el presupuesto en otra proporción, más materia prima, que además nos permitía fabricar más producto que no necesitaba tanta mano de obra."
Compras	"Al costo que se conseguía no resultaba conveniente."
Ventas	"La demanda permitía un aumento de precio. Se podía cubrir costo adicional. En cambio, del Producto II se podía haber fabricado menos, total, deja tan poca ganancia."
Finanzas	"No se disponía de fondos para solventar el desfasaje en el tiempo de costos adicionales."
Ventas	"Se podía haber pedido un crédito."
Finanzas	"En ese momento la tasa era alta."

A esta altura el Gerente General suspende la discusión y pide *información* que le permita evaluar si las decisiones tomadas fueron correctas, y si para el próximo periodo deben seguirse iguales criterios.

El presente capítulo intenta darnos la posibilidad de cumplir con éste y otros pedidos semejantes en una forma accesible en tiempo y complejidad.

1. ANALISIS DEL PROBLEMA

El empresario, a través de la información con la que cuenta en un tablero de comando, dispone de determinados indicadores, ratios o relaciones imprescindibles en la tarea de decidir.

Dentro de las herramientas fundamentales en la toma de decisiones se utiliza el denominado punto de equilibrio o de cobertura.

Como se sabe, "es el monto de ventas donde los ingresos se igualan a los costos". Este valor corresponde a la situación estática de una empresa bajo determinadas condiciones o, en otras palabras, a la fotografía de un ente en un momento dado.

Ya se ha visto en otros capítulos anteriores (XI y XII) la determinación del punto de equilibrio en un análisis individual por línea de producción.

También se describió como alternativa válida para un modelo multiproducto realizar el estudio a través de cifras globales trabajando en este caso con unidades monetarias que permitan la homogeneización de datos.

En general, no resulta sencillo el análisis del punto de equilibrio cuando el estudio debe realizarse en empresas multiproductoras, en especial, cuando existen condicionamientos técnicos, de fondos o de cualquier índole.

Es evidente la complejidad en el cálculo de la combinación o mezcla de los distintos productos que maximicen los beneficios.

Esto es así porque las empresas deben considerar los factores limitantes o los medios escasos con los que cuentan siendo, por consiguiente, que las distintas mezclas o combinaciones originarán distintos puntos de equilibrio.

En realidad lo que se busca es que la contribución marginal que se obtenga con la venta de todos los productos, cualquiera sea la combinación que se realice de ellos, resulte equivalente a la totalidad de los costos fijos de estructura más los costos fijos.

Una de las soluciones o alternativas extremas es la de alcanzar la totalidad de los costos operativos fijos a través de la venta de un solo artículo.

Si analizamos la contribución marginal unitaria de cada producto se debe establecer la denominada "relación de reemplazo"que se obtiene con el cociente entre las contribuciones marginales de dos o más productos.

Ejemplo:

Si la contribución marginal unitaria del producto I es igual a 3 y la del producto II es igual a 6 tendremos como consecuencia que:

— la relación de reemplazo del producto I es igual a 3/6, y
— la relación de reemplazo del producto II es igual a 6/3.

Es preciso recordar que según AMARO YARDIN (capítulo XII), la "relación de reemplazo de un producto es la cantidad del otro producto para reemplazar a una unidad de aquél a los efectos de mantener inalterables el total de las contribuciones marginales".

El criterio general según el enfoque de contribución marginal, brinda las herramientas necesarias para tomar una decisión apropiada en atención a aquel producto que "brinde" la mayor cantidad de utilidad.

Básicamente lo que se busca es maximizar las utilidades totales pero tratando de obtener el margen de contribución por unidad más alto del factor limitante o crítico.

En definitiva, la mezcla de productos elegidos no estará formada por aquellos que registren el mayor margen de contribución por unidad de producto o las mayores razones de margen de contribución por monto de ventas, sino por aquellos que maximizan las utilidades totales considerando el margen de contribución por unidad más alto del factor limitante (escaso o crítico).

Un enfoque de contribución

1) Función objetivo: maximizar las utilidades totales.
2) Factor limitante: horas hombre.
3) Cálculo de la solución ideal.

Datos:

	Prod. I	Prod. II
Precio venta unitario	20	30
Costos variables unitarios	16	21
Margen de contribución o contribución marg. unitaria	4	9
% margen de contribución	20 %	30 %
El producto I utiliza para una unidad: 1 hora hombre El producto II utiliza para una unidad: 4 horas hombre		

Considerando que el producto II tiene una contribución marginal unitaria mayor, se debe analizar según la restricción de horas de mano de obra cuál es el producto más conveniente, atento que se dispone solamente de 100 horas hombre.

	Prod. I	Prod. II
Contribución marginal unitaria	4	9
Producción por hora hombre	1	0,25
Margen de contribución por HH	4	2,25
Total contribución factor restrictivo	400	225

De acuerdo con este análisis, resulta conveniente fabricar el producto I en lugar del II, dado que, según el factor de restricción, es el que aporta mayor contribución.

2. DESARROLLO DEL MODELO

Si una empresa fabrica dos o más productos, debe establecer cuál es la mezcla de ventas que maximice los beneficios.

La realidad indica que además de la búsqueda de este objetivo, se debe considerar que existen aspectos tecnológicos, financieros o de recursos humanos, condiciones de mercado, etc., que limitan dicha mezcla.

Ejemplo 1: 2 productos - 1 factor limitante.

Si nos referimos al caso antes descripto, tenemos:

Factor limitante: 100 horas hombre.

Si definimos:

x_1: unidades fabricadas del P I
x_2: unidades fabricadas del P II
R_1: restricción Nº 1
HH: hora hombre

Resulta:

$1\ x_1$ cantidad de horas usadas para el producto I.
$4\ x_2$ cantidad de horas usadas para el producto II.

$1\ x_1 + 4\ x_2$ cantidad de HH para los dos productos.

Supuestos:

— Proporcionalidad
— Aditividad

— Certeza
— Divisibilidad

Si se considera como factor limitante 100 horas hombre disponibles tenemos:

$$1\ x_1 + 4\ x_2 \leq 100$$

Si consideramos que se consumen todas las disponibilidades del factor limitante (horas hombre) tendremos que la restricción (R_1) será

$$1\ x_1 + 4\ x_2 = 100$$

cuyas infinitas combinaciones posibles representan puntos sobre una recta (respetando $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$).

Es así que la graficación de 2 puntos cualesquiera resulta suficiente para determinar la función lineal (recta) correspondiente.

Si no se fabrica ningún producto II ($x_2 = 0$) entonces $x_1 = 100$ (recordar que x_1 consume 1 hora hombre).

Por lo tanto, el punto P1 es (100,0).

Si no se fabrica ningún producto I ($x_1 = 0$) tenemos que 4 x_2 = 100 por consiguiente x_2 = 25, el punto P2 es (0,25).

Cualquier otra combinación se obtiene asignando un valor arbitrario (pero posible) a una de las variables y despejando el de la otra.

Así queda:

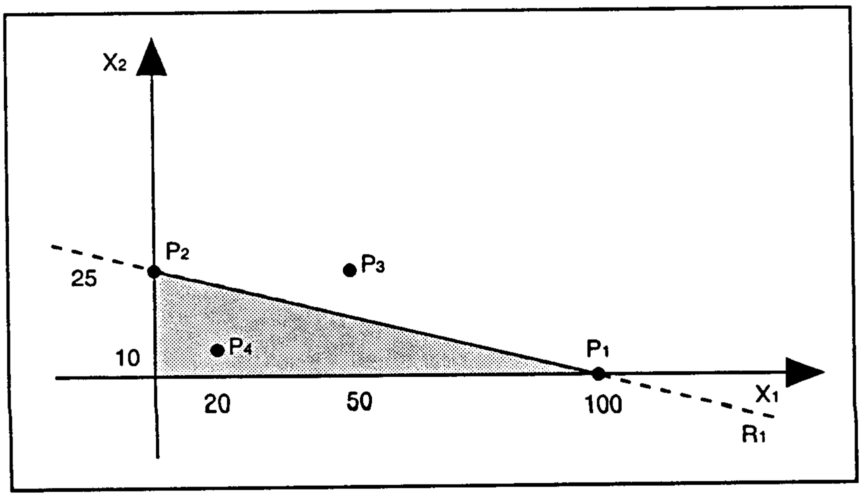


Gráfico 1. Posibilidades de producción con 100 HH disponibles

Todo punto sobre la recta tiene un excedente de 0, es decir, que se utilizan todas las horas hombre.

Si consideramos por ej. P3 estamos en el caso en que no nos alcanzarían las disponibilidades (factor limitante).

En cambio, en P4 tendríamos excedente. En caso de admitirlo, la zona sombreada corresponde a: $1X_1 + 4X_2 \leq 100$.

La situación planteada se puede solucionar agregando una variable a la ecuación.

S1: excedente horas hombre

por consiguiente:

$$S1 \geq 0$$

Así

$$1x_1 + 4\,x_2 + S1 = 100$$

resolviendo esta ecuación, se obtienen los valores de la tabla.

Puntos del gráfico 1	x_1	x_2	$S1 = 100 - x_1 - 4\,x_2$
P_1	100	0	0
P_2	0	25	0
P_3	50	25	-50 (no factible)
P_4	20	10	40 (excedente)

2,1. INTRODUCCION A LA PROGRAMACION LINEAL (PARA NO MATEMATICOS)

El ejemplo descripto permite establecer alternativas posibles pero no decide cuál es la más conveniente.

A tal efecto, incorporamos la función objetivo que describe el comportamiento de la contribución marginal bruta total a la que denominaremos Z, formada por:

Contribución producto I : $4\,x_1$

Contribución producto II : $9\,x_2$

Z : contribución total $= 4\,x_1 + 9\,x_2$ (utilidad)

Aquí asumimos que el excedente de horas hombre (S1) no influye en el resultado que se busca obtener, es decir que se incorpora con coeficientes 0 en la función objetivo (en adelante, F.O.), o sea:

$$Z = 4\ x_1 + 9\ x_2 + 0\ S_1$$

de donde la F.O. (Z), dependerá de la cantidad que se fabrica de ambos productos.

Se mantienen los supuestos anteriores.

2,1,1. Análisis gráfico de la solución

Si recordamos que el objetivo básico es "maximizar la utilidad" se fijarán niveles cada vez mayores analizando en cada caso si son alcanzables.

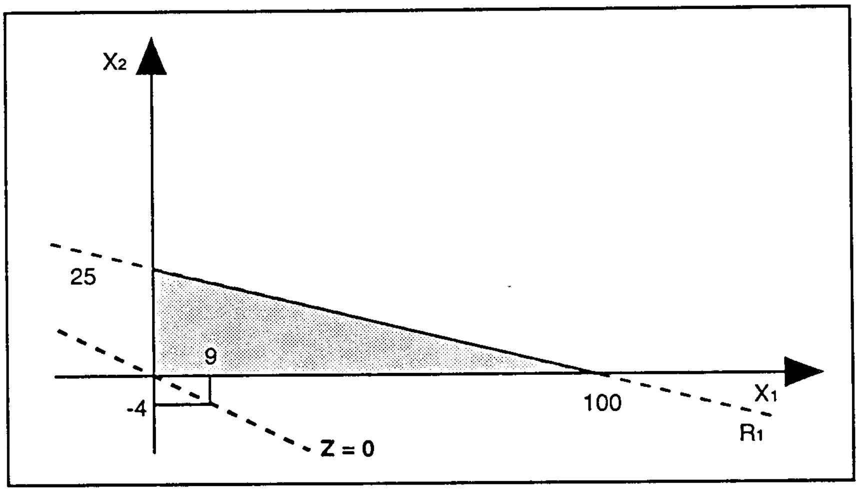


Gráfico 2. Niveles de utilidad y su factibilidad

Partiremos de

$$Z = 0$$

Así,

$$0 = 4\ x_1 + 9\ x_2$$

por consiguiente

$$x_2 = -4/9\ x_1$$

Esto indica cuál es la "relación de reemplazo" entre ambos productos para alcanzar igual utilidad (similar nivel de Z).

Si se aumentan las ventas en 9 unidades del producto I se puede dejar de vender 4 del producto II para que la utilidad no cambie. (Ver gráfico Nº 2.)

Sin embargo, en el caso descripto el único punto factible (por la condición de no negatividad de las variables) está en el origen de coordenadas (0,0), ya que si no se vende ningún producto, no se obtiene utilidad.

Es decir

$$Z = 0$$

Si buscamos mejorar el beneficio, por ej., si

$$Z = 225$$

resulta

$$225 = 4\,x_1 + 9\,x_2$$

por consiguiente

$$x_2 = -\,4/9\,x_1 + \frac{225}{9} = -\,4/9\,X_1 + 25$$

Lo que muestra que la relación de sustitución se mantiene constante (las rectas de "ISO-UTILIDAD" resultan paralelas).

Así resulta que:

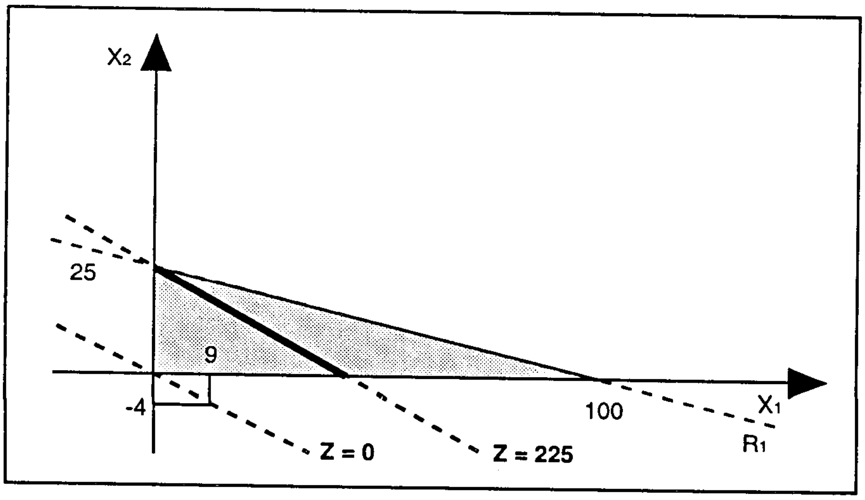


Gráfico 3. Distintos niveles de utilidad

x_1	x_2
0	225/9 = 25
225/4 = 56,25	0

Todas las alternativas existentes para obtener $ 225 quedan comprendidas en el segmento marcado en forma resaltada.

Se observa que a medida que se aumenta el valor de Z, la recta se desplaza en forma paralela.

Mientras la recta mantenga algún punto de contacto con la zona de soluciones posibles, cualquier combinación será viable.

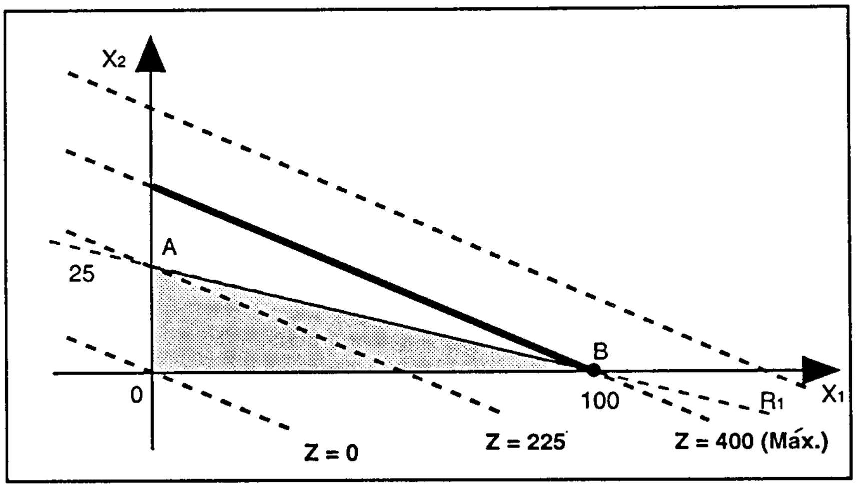


Gráfico 4. Máxima utilidad alcanzable

Vemos que al llegar a Z = 400 existe sólo un punto en común (B, solución óptima), y más allá de ese valor, ninguna solución resulta factible.

Si nuestro objetivo fuese sólo encontrar el nivel de producción mínimo para cubrir los costos, bastará con trazar la recta de ISO-UTILIDAD correspondiente a ese valor, la que nos permitirá visualizar las distintas combinaciones posibles, según su intersección con la zona de factibilidad.

Sin embargo, comúnmente se desea averiguar la alternativa que proporciona el máximo beneficio.

Puede demostrarse que el óptimo se alcanzará necesariamente en un vértice (o más) del polígono.

Por lo tanto, resultará suficiente "evaluar" cada uno de ellos para detectar la mejor alternativa. Así podemos completar el siguiente cuadro:

Variables \ Vértices	0	A	B	
x_1	0	0	100	
x_2	0	25	0	
S_1	100	0	0	Excedente: $100 - (x_1 + 4\,x_2)$
Z	0	225	400	Beneficio: $4\,x_1 + 9\,x_2$

Nótese que para posicionarnos en un vértice debemos asignar valor 0 a dos de las variables, ya sea de actividad o de excedente.

El problema expuesto puede sintetizarse como:

Función objetivo: Maximizar $Z = 4\,x_1 + 9\,x_2$
sujeto a:

Restricción de estructura: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 100$

Restricciones de no negatividad de variables: $x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

que conforma lo que básicamente se conoce como un "problema de programación lineal".

Dado que los modelos de este tipo que se refieran a más de dos productos (incorporen más de dos variables de actividad) no podrán ser resueltos "gráficamente", se intentará explicar desde este caso sencillo un procedimiento conocido como **Método Simplex** que resultará aplicable cualquiera sea el número de productos y de condiciones limitantes.

2,1,2. Uso del Método Simplex

Téngase presente que este desarrollo se hará al solo efecto de interpretar los resultados obtenidos, ya que el cálculo en sí mismo podrá llevarse a cabo con distintos software específicos o, simplemente, en una de las planillas de cálculo de uso estándar. Por tal motivo, se incorpora en esta edición un disquete que contiene:

- Programa de uso educativo que le permite ver paso a paso la tabla correspondiente al **Método Simplex**.
- Archivos con disposición adecuada para un rápido cálculo e interpretación de resultados a través de planillas de cálculo (QPRO, EXCEL, entre otras).

Comenzaremos por disponer en un cuadro los coeficientes asociados a cada variable en nuestra restricción:

recordemos: $1\ x_1 \quad + \quad 4\ x_2 \quad + \quad 1\ S_1 \quad = \quad 100$

luego:

x_1	x_2	S_1	B
1	4	1	100

Acostumbrémonos a "leer" la tabla.

Dado que corresponde a 1 ecuación con 3 incógnitas ($x_1 + 4\ x_2 + S_1 = 100$) debemos dar valor arbitrario a dos de ellas para obtener el de la restante. Comenzaremos así por x_1 y x_2 asignándoles valor 0 para, según se hizo notar anteriormente, asegurarnos de que nos posicionamos en uno de los vértices del polígono de soluciones factibles. Luego:

si

$$x_1 = x_2 = 0$$

resulta

$$1.0 + 4.0 + S_1 = 100 \implies S_1 = 100$$

Es decir, si no fabricamos ningún producto, nos "sobran" las 100 HH disponibles.

Convendremos en indicar expresamente en la tabla la variable que toma valor distinto de 0:

Variable ≠ de 0	x_1	x_2	S1	B
S1	1	4	1	100

obteniéndose:

$x_1 = \quad x_2 = 0$ (no figuran en tabla)

S1 = 100 (figura en tabla, y su valor se busca en la columna B)

Así como en el gráfico, una vez representada la condición limitante, se incorporó la "función objetivo", ahora calcularemos en la tabla el resultado asociado en cada paso. Para ello agregaremos como dato el coeficiente (utilidad) que acompaña a cada variable en dicha función:

Coeficientes de las variables en la F.O.

Cj.	4	9	0	
Variables ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
S_1	1	4	1	100

Para evaluar Z en el vértice correspondiente, será suficiente multiplicar solamente las variables distintas de 0 por su coeficiente en la F.O. y sumar (ya que los otros términos darían 0), por lo que incorporaremos dicho coeficiente acompañando a las variables ≠ de 0.

Coeficiente en la F.O.

	Cj.	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variables ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
0	S_1	1	4	1	100
Zo					0

Sin embargo, como en términos de decisión resulta conveniente analizar individualmente por línea de productos y por tipo de recurso cuál es y cuál podría ser su contribución al beneficio, repetiremos ese cálculo para cada columna.

	Cj.	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variables ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
0	S_1	1	4	1	100
Zo		0	0	0	0

Resulta evidente que, en este caso de beneficio nulo, ninguna variable está aportando nada a nuestro resultado. Pero ¿cuánto podría aportar? ¿en qué condiciones? Para responder en parte a estas preguntas compararemos lo que podría contribuir a nuestra ganancia por unidad mediante la diferencia del renglón de coef. en F.0. (Cj) menos lo que actualmente aporta (Zo):

	Cj.	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variables ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
0	S_1	1	4	1	100
Zo		0	0	0	0
Cj - Zo		4	9	0	

Nótese que los valores contenidos en esta tabla corresponden al vértice 0 de nuestro Polígono de soluciones factibles.

La última fila (Cj - Zo) nos muestra en cuánto se modificaría el resultado actual si aumentásemos en 1 unidad la cantidad fabricada de cada producto o la disponibilidad de insumos, así:

- si fabricamos 1 producto I el beneficio aumentará en $ 4;
- si fabricamos 1 producto II el beneficio aumentará en $ 9;
- si dispusiésemos de una HH más, nuestro beneficio no aumentaría ya que al no estar fabricando ningún producto, sólo se incrementaría nuestro excedente.

De aquí en adelante se eliminará la presentación del renglón intermedio Z, indicándose directamente Cj - Z.

Dado que queremos mejorar el resultado, nos vemos obligados a "comenzar" a fabricar uno de los productos; matemáticamente equivale a que x_1 o x_2 dejen de valer 0, y que S_1 pase a tomar ese valor. Gráficamente equivale a desplazarnos a un vértice contiguo.

Pero debemos decidir cuál será el producto que comencemos a fabricar (qué variable dejará de valer 0). Para ello observemos la tabla armada:

	Cj.	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variables ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
0	S_1	1	4	1	100 →
Cj - Zo		4	9 ↑	0	

Producto que se decide fabricar

Dado que x_2 aportaría $ 9 por unidad (el mayor valor de la fila Cj - Zo), probamos haciendo $x_2 \neq 0$ (fabrico producto II).

Sin embargo, no es suficiente decidir que una variable pase a valer distinto de 0, sino que para seguir estando en un vértice, otra deberá pasar a valer 0 (en este caso S_1, ya que es la única posibilidad).

En lugar de resolver analíticamente todos los cálculos necesarios para llegar a la nueva tabla, puede describirse una regla práctica ([1]), aunque en la realidad se utilizará un programa de computadora.

(1) Se selecciona como pivote el elemento que se encuentra en la intersección entre la columna del producto que se empieza a fabricar (variable que deja de valer 0) y la fila de la que pasa a valer 0 (4 en la tabla anterior).

- se dividen todos los elementos de la fila por el pivote;
- se recalcula la última fila en forma análoga a la de la tabla inicial.

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variab. ≠ 0	x_1	x_2	S_1	B
9	x_2	1/4	4/4	1/4	100/4
$Cj - Z_1$		$4 - 9.\frac{1}{4}$	$9 - 9.\frac{4}{4}$	$0 - 9.\frac{1}{4}$	$9.\frac{100}{4}$

Resulta:

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variab. ≠ 0	x_1	x_2	S_1	B
9	x_2	1/4	1	1/4	25
Cj - Zo		7/4	0	-9/4	225

Observamos que podríamos fabricar 25 unidades del producto II, ninguna del I, no nos sobraría ninguna HH y obtendríamos $ 225 (ver gráfico Nº 3). Sin embargo, la última fila nos permite decir, según lo visto, que:

Si fabricásemos una unidad más del PI el beneficio aumentaría en $ 7/4; por lo tanto, el resultado puede mejorarse (x_1 debe dejar de valer 0). Repetimos el procedimiento descripto anteriormente, obteniendo:

Tabla anterior:

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variab. ≠ 0	x_1	x_2	S_1	B
9	x_2	1/4	1	1/4	25
Cj - Zo		7/4	0	-9/4	225

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variab. ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
4	x_1	1	4	1	100
$Cj - Z_2$		0	-7	-4	400

En la que "leemos": Se fabrican 100 unidades del producto I, ninguna del producto II, no sobran HH, se obtienen $ 400 y se observa que no puede mejorarse dicho resultado, ya que todos los valores de la última fila son negativos.

Por lo tanto, este procedimiento nos permite desplazarnos de un vértice al otro del polígono detectando cuándo nos encontramos en el "óptimo". Su fundamental ventaja radica en que puede utilizarse sin limitaciones en cuanto al número de variables y de restricciones.

Posibilita además un importante análisis post óptimo, parte del cual se desarrollará a continuación.

2,2. ANALISIS POST OPTIMO PARA TOMA DE DECISIONES

2,2,1. Contribución marginal de los recursos

En el ejemplo analizado el empresario ve limitado su horizonte de ganancias por la disponibilidad de 100 HH. En tal situación, puede plantearse la conveniencia o no de ampliar este insumo. Para ello analizaremos qué cambios provocará en nuestra decisión el hecho de disponer de 1 HH adicional (o sea, 101 en total).

Gráficamente:

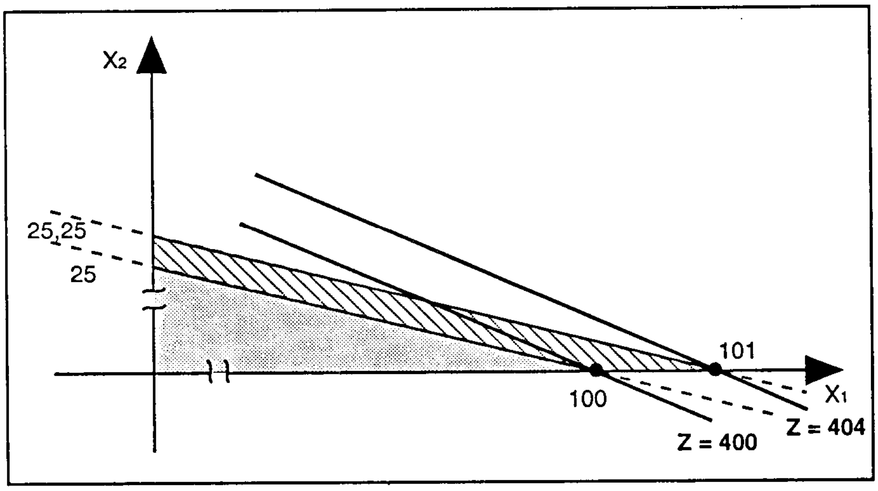


Gráfico 5. Cambio en la solución óptima ante una HH adicional

La recta representativa de la restricción se desplaza alejándose del origen, ampliando el polígono de soluciones factibles y permitiendo alcanzar una recta de ISO-UTILIDAD de un nivel mayor: Z = 404.

Variables	Disp. 100 HH	Disp. 101 HH	Variación
x_1	100	101	+1
x_2	0	0	-
S1	0	0	-
Z	400	404	+ 4 (*)

(*) Contribución marginal de la mano de obra.

Tabla óptima

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O. variables ≠ 0	variab. ≠ de 0	x_1	x_2	S_1	B
4	x_1	1	4	1	100
Cj - Z_2		0	-7	-4	400

(El valor de la última fila de la tabla debe ser considerado independientemente de su signo)

Nos muestra que una HH adicional convendrá dedicarla a fabricar una unidad más del producto I y aumentaría nuestro resultado en $ 4. Estos valores pueden observarse en la tabla base para el **Método Simplex** desarrollada anteriormente en la columna correspondiente a S_1, sin necesidad de calcular el cuadro anterior.

En cuanto a la ayuda de esta información para la toma de decisiones, puede interpretarse como el "precio máximo adicional" que se estará dispuesto a pagar por esa unidad agregada del recurso (precio sombra o *shadow-price*).

Por otra parte, conviene aclarar otra forma de interpretar la utilidad alcanzada:

a) ganancia por unidad x unidades de producto = 4 . 100 = $ 400 de utilidad;

b) contribución marginal del recurso x unidades disponibles = 4 . 100 = $ 400 de utilidad.

Téngase presente que la igualdad de los valores de ganancia por unidad y contribución marginal, unidades de producto y unidades disponibles es mera coincidencia.

2,2,2. Costo de oportunidad

En forma análoga al procedimiento anterior puede analizarse qué variaciones se producirán si, por distintos motivos, se decide mantener la producción del artículo II, aunque desde el punto de vista decisorio no conviene fabricarlo.

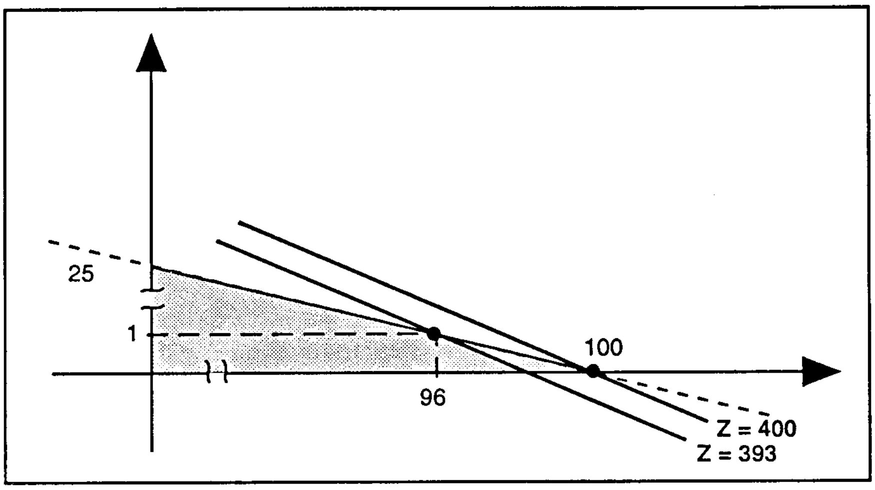


Gráfico 6. Cambio en la solución óptima ante la fabricación de una unidad de producto II

	Solución óptima	Si se fabrica 1 producto II	Variación
x1	100	96	-4
x2	0	1	+1
S1	0	0	0
B	400	393	-7(*)

(*) Costo de oportunidad del producto II

Tabla óptima

Coef. F.O. ≠ 0	variab. ≠ de 0	x_1 (4)	x_2 (9)	S_1 (0)	B
9	x_1	1	4	1	100
$Cj - Z_2$		0	-7	-4	400

(Los valores internos de la tabla deben interpretarse con signos cambiados en el caso de los "costos de oportunidad".)

Observemos que para poder fabricar una unidad del producto II debemos dejar de producir 4 unidades del producto I a fin de liberar las HH necesarias según los coeficientes técnicos que corresponden a cada producto. En consecuencia, la modificación en el beneficio a obtener surge de:

1 unidad más del prod. II	+ 9
4 unidades menos del prod. I	- 16
Variación utilidad	-7

Nuevamente las variaciones pueden interpretarse directamente en la tabla óptima.

2.3. GENERALIZACION DEL METODO SIMPLEX

Ejemplo 2: 2 productos - 2 factores limitantes.

Consideremos la siguiente matriz de coeficientes técnicos y disponibilidades:

Se agrega como un nuevo factor limitante el concepto horas máquina por un total de 140 hs.

Insumos	P I	P II	Disponibilidad
Mano obra	1	4	100 HH
Horas máquina	2	4	140 HM
Contrib. utilidad	4	9	

Según lo visto en el ejemplo 1, resulta:

F.O.: Maximizar $Z = 4x_1 + 9x_2$

Sujeto a: restricciones de estructura:

$x_1 + 4x_2 \leq 100$ (HH)
$2x_1 + 4x_2 \leq 140$ (HM)

Restricciones de no negatividad $X_j \geq 0$ con $j = 1,2$

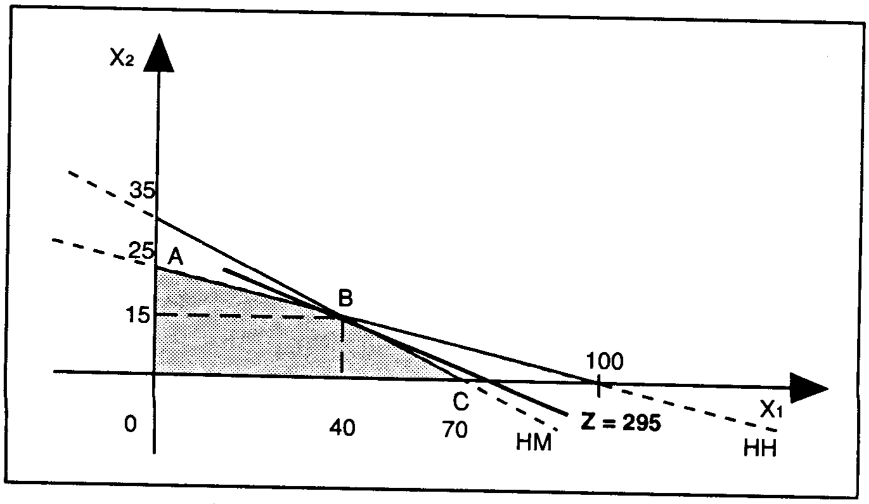


Gráfico 7. Solución óptima con dos factores limitantes

Si a las variables definidas en el ejemplo 1 agregamos:

S_2: excedente hs. máquina,

resulta:

Vértices / Variables	0	A	B	C
x_1	0	0	40	70
x_2	0	25	15	0
S_1	100	0	0	30
S_2	155	40	0	0
Z	0	225	295	280

Puede observarse que ante la nueva restricción:

— ya no es alcanzable al beneficio de $ 400;

— ya no conviene fabricar exclusivamente el producto I.

Aplicando **Método Simplex** resulta la siguiente tabla que puede obtenerse fácilmente utilizando el programa que se suministra en disquete adjunto a la presente publicación ([2]).

(2) Para el lector interesado en la forma de cálculo, digamos que se mantienen las reglas indicadas en el caso de 2 productos y 1 factor limitante (entra la variable con mayor valor en la fila [Cj - Z]), agregando:

a) Para decidir qué variable pasa a valer 0 (sale de la tabla) se calculan las dos posibilidades dividiendo los valores de la columna B por los de la columna del producto que se decide empezar a fabricar. Nótese que los valores obtenidos se corresponden con la intersección de las rectas de restricción con el eje que representa el producto II, indicando lo máximo que puede fabricarse de él según la disponibilidad de cada insumo. Por tal motivo, nos vemos obligados a elegir el de menor valor, ya que deben utilizarse ambos.

b) Se completa la columna del elemento señalado como pivote con ceros.

c) Se divide la fila del pivote por el pivote.

d) El resto de los elementos se transforman mediante la siguiente regla:

$$\text{elemento a transformar} - \frac{\text{elemento fila pivote y -columna elem. a transf.} \times \text{elemento columna pivote y fila element. a transformar}}{\text{pivote}} = \text{elemento transformado}$$

e) La fila CJ - Z puede calcularse en forma indistinta mediante esta última regla o como se indicó en el caso de 1 factor limitante.

Coef. F.O. Var. ≠ 0	Variables ≠ 0	Cj: 4 x_1	Cj: 9 x_2	Cj: 0 S1	Cj: 0 S2	B	Selección variable que pasa a valer 0
0	S1	1	4	1	0	100	100 / 4 = 25 →
0	S2	2	4	0	1	140	140 / 4= 35
(*) Cj - Zo		4	9 ↑	0	0	0	
9	x_2	1/4	1	1/4	0	25	25 ÷ 1/4 = 100
0	S2	1	0	-1	1	40	40/1 = 40 →
Cj - Z_1		7/4 ↑	0	-9/4	0	225	
9	x_2	0	1	1/2	-1/4	15	
4	x_1	1	0	-1	1	40	
Cj - Z_2		0	0	-1/2	-7/2	295	

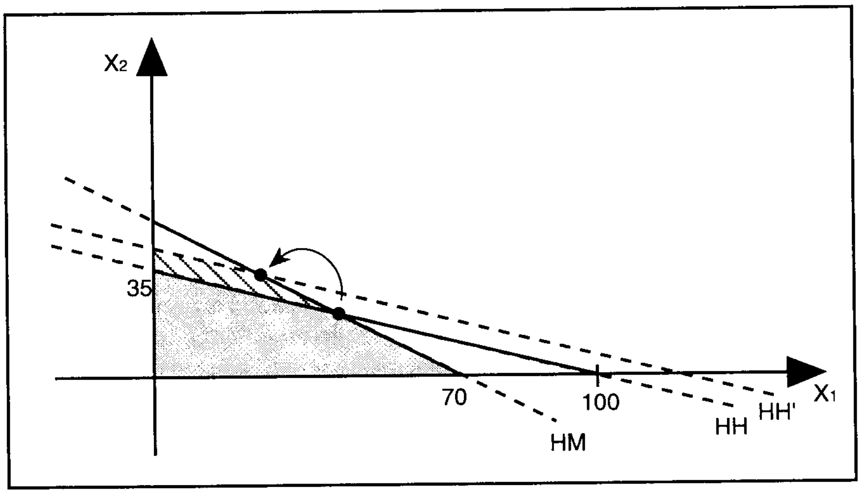
Costos de oportunidad (x_1, x_2) — Contribuciones marginales (S1, S2) — Solución óptima (B)

(*) **Importante:** el cálculo del reglón de comparación puede realizarse en forma indistinta como: "Cj - Zo" o "Zo - Cj", debiendo tenerse en cuenta solamente la diferencia en el signo del valor resultante. El programa adjunto toma esta última opción; de ahí la discrepancia que pueda observarse.

Analicemos ahora cómo puede "leerse" la tabla óptima obtenida.

Para la solución óptima se fabricarán 40 unidades del PI, 15 unidades del PII, dando como resultado una utilidad de $ 295. Para esta solución no habrá excedente ni de HH ni de HM.

Si existiera disponible 1 HH de más convendrá dedicarla a fabricar 1/2 unidad más del producto II, dejando de fabricar 1 unidad del producto I, logrando así aumentar la utilidad en $ 0,5 (1/2) (columna S_1).



Nota: para los desplazamientos se consideran escalas diferentes a fin de facilitar la visualización.

Gráfico 8. Una HH adicional convendría dedicarla a fabricar más producto II

En caso de disponer 1 HM más convendrá destinarla a fabricar una unidad más del Producto I y 1/4 menos del Producto II, mejorando nuestra utilidad en $ 3,5 (7/2) (columna S_2).

Nótese el cambio en el valor de la contribución marginal de las HH respecto del ejemplo anterior con un solo recurso limitante. (Ver gráfico 5.)

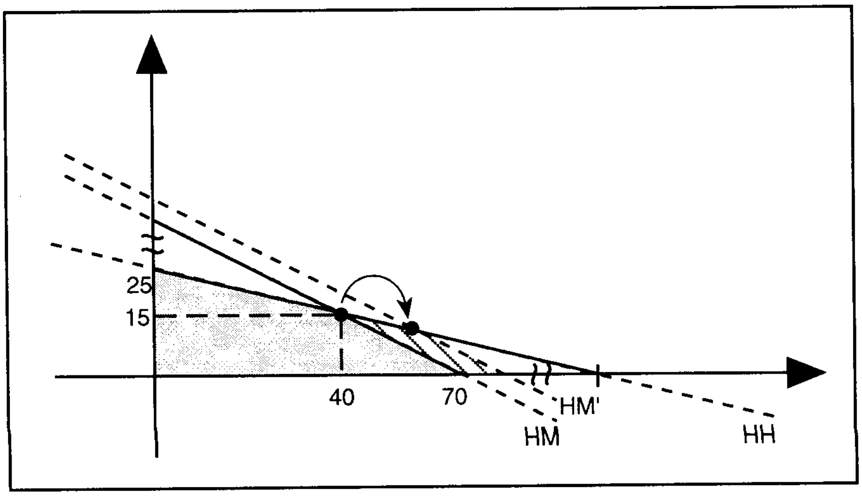


Gráfico 9. Una HM adicional convendría dedicarla a fabricar más producto I

Si entendimos la interpretación de esta tabla, estamos en condiciones de afrontar un problema de asignación de recursos escasos a actividades competitivas, cualquiera sea el número de productos y la cantidad de recursos limitantes. Dado que el uso de la computadora resultará prácticamente indispensable, pasaremos a describirlo.

2,4. SALIDAS POR COMPUTADORA UTILIZANDO DISTINTOS SOFTWARES

La información que se obtiene excede lo analizado hasta aquí, pero su interpretación se completará en el desarrollo del presente capítulo. Por ahora, y a efectos de ir familiarizándonos, se sugiere tratar de relacionar los valores obtenidos con los que aparecen en la impresión. Nótese, por ejemplo, que las variables duales y los "*red. cost*" se corresponden con las contribuciones marginales y los costos de oportunidad. Para el aprendizaje sobre forma de uso de cada programa, se recomienda utilizar disquete adjunto.

2,4,1. Soluciones del ejemplo Nº 2

***a) Utilizando programa educativo* "Simplex"**

FO = + (4) X1 + (9) X2 Maximizar

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
Lnd. 1:	1.00	4.00	1.00	0.00	100.00
Lnd. 2:	2.00	4.00	0.00	1.00	140.00
Zj - Cj	-4.00	-9.00	0.00	0.00	0.00

Variables de X1 hasta X2
Variables de holgura de Lnd. 1 hasta Lnd. 2

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
X2:	0.25	1.00	0.25	0.00	25.00
Lnd. 2:	1.00	0.00	-1.00	1.00	40.00
Zj - Cj	-1.75	0.00	2.25	0.00	225.00

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
X2:	0.00	1.00	0.50	-0.25	15.00
X1:	1.00	0.00	-1.00	1.00	40.00
Zj - Cj	0.00	0.00	0.50	1.75	295.00

La solución es:

```
Variables primales

Variables        valores
X1=                40
X2=                15

Variables duales

Variables        valores
Y1                .5
Y2                1.75
Lnd. dual 1 =     0
Lnd. dual 2 =     0

Valor de la F.O. = 295

                 Análisis de las variables básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X1:  2.25 ≤ C1 ≤ 4.5
Intervalo del coeficiente en F.O. de X2:  8 ≤ C2 ≤ 16

                 Análisis de las variables no básicas

No existentes en este cálculo.
```

Tabla 1

b) Utilizando software específico para programación lineal

Linear programming module

```
Title:
Number of variables     :    2
Number of constraints   :    2
Starting solution given :   YES
Objective function      :   MAX
```

	VAR1	VAR2	CONST. TYPE	RHS	RANGE
COST COEFF.	4.	9.	XXXX	XXXX	XXXX
CONSTR 1	1.	4.	< =	100.	Infinity
CONSTR 2	2.	4.	< =	140.	Infinity
VARBL TYPE	+	+	XXXX	XXXX	XXXX
LOWR BOUND	0.	0.	XXXX	XXXX	XXXX
UPPR BOUND	Infinity	Infinity	XXXX	XXXX	XXXX
INIT SOLN	0.	0.	XXXX	XXXX	XXXX

ITERATION 3 OPTIMAL SOLUTION
SUMMARY REPORT (Nonzero variables)

	Variable	Value	Cost
1	Var1	40	4
2	Var2	15	9

OBJECTIVE FUNCTION VALUE= 295.00000

ITERATION 3 OPTIMAL SOLUTION
DETAILED REPORT

	Variable	Value	Cost	Red. cost	Status
1	Var1	40	4	0	Basic
2	Var2	15	9	0	Basic
3	Slack 1	0	0	-0.5	Lower bound
4	Slack 2	0	0	-1.75	Lower bound

Contribuciones marginales y costos de oportunidad (último renglón de la tabla óptima)

ITERATION 3 OPTIMAL SOLUTION
DETAILED REPORT

	Constraint	Type	RHS	Slack	Shadow price
1	Constr. 1	< =	100	0	0.5
2	Constr. 2	< =	140	0	1.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE = 295.00000

Tabla 2

costosli

CONSTR. 1 HH:Parametric analysis of right hand side value

COEFFICIENT = 100 LOWER LIMIT = -INFINITY UPPER LIMIT = INFINITY

	---RHS RANGE---	Shad. pr.	Objective fnct. Range	Enter	Leave
Disponibilidad mayor a la actual	100 to 140	0.5	295 to 315	SLACK1	VAR1
	140 to infinity	0	315	-- No change --	
Disponibilidad menor a la actual	100 to 70	0.5	295 to 280	SLACK2	VAR2
	70 to 0	4	280 to 0		VAR1
	0 to -infinity	--Infeasible in this range--			

Rangos de validez (análisis de sensibilidad de las disponibilidades) — Contribuciones marginadas — Comportamiento de la F.O.

costosli

CONSTR. 2 HM:Parametric analysis of right hand side value

COEFFICIENT = 140 LOWER LIMIT = -INFINITY UPPER LIMIT = INFINITY

---RHS RANGE---	Shad. pr.	Objective fnct. Range	Enter	Leave
140 to 200	1.8	295 to 400	SLACK2	VAR2
200 to infinity	0	400	-- No change --	
140 to 100	1.8	295 to 225	SLACK1	VAR1
100 to 0	2.3	225 to 0		VAR2
0 to -infinity	--Infeasible in this range--			

costosli

SENSITIVITY ANALYSIS OF COST COEFFICIENTS

	Variable	**Current coeff.**	**Allowable minimum**	**Allowable maximum**
1	Var. 1	4	2.25	4.5
2	Var. 2	9	8	16

Rangos de validez para la contribución de cada producto

costosli

SENSITIVITY ANALYSIS OF RIGHT HAND SIDE VALUES

	Constraint	**Type**	**Current value**	**Allowable minimum**	**Allowable maximum**
1	Constr. 1	< =	100	70	140
2	Constr. 2	< =	140	100	200

Rangos de validez para las disponibilidades

Tabla 2. Cont.

c) *Utilizando planilla de cálculo (tipo Excel)*

	A	B	C	D	E
1	Datos				
2		1	4		100
3		2	4		140
4					
5		4	9		
6					
7	Variables				
8		X1			
9		X2			
10					
11	Restricciones				
12	HH	=1*C8+4*C9			
13	HM	=2*C8+4*C9			
14					
15	Función objetivo				
16		=4*C8+9*C9			

Microsoft Excel 4.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: EJEMPLO2.XLS
Informe creado: 7/3/...

Celdas objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$16		0	295

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$C$8	X1	0	40
$C$9	X2	0	15

Tabla 3

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$B$12	HH	100	$B$12<=$E$2	Obligatorio	0
$B$13	HM	140	$B$13<=$E$3	Obligatorio	0
$C$8	X1	40	$C$8>=0	Opcional	40
$C$9	X2	15	$C$9>=0	Opcional	15

Microsoft excel 4.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: EJEMPLO2.XLS
Informe creado: 7/3/...

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	X1	40	0	4	0.5	1.75
$C$9	X2	15	0	9	7	1

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Aumento permisible	Disminución permisible
$B$12	HH	100	0.5	100	40	30
$B$13	HM	140	1.75	140	60	40

Tabla 3. Cont.

2,4,2. Ejemplo 3: 3 productos - 3 factores limitantes

A simple título de ejemplo consideremos en el problema anterior la conveniencia o no de incorporar una nueva línea de producto (P III), agregando un tercer insumo compartido, para lo que ampliaremos nuestra matriz de coeficientes técnicos y disponibilidades

Producto / Insumo	P I	P II	P III	Disponibilidad
HH	1	4	5	100
HM	2	4	1	140
Mat. prima	2	1	3	60
Contrib. a la utilidad	4	9	7	

El análisis gráfico en dos dimensiones ya no resulta adecuado, por lo que trabajaremos directamente con las salidas de computadora.

a) Programa Simplex

Tabla inicial

F.O. = + (4) X1 + (7) X3 Maximizar

Xk:	X1	X2	X3	Lnd. 1	Lnd. 2
Lnd. 1:	1.00	4.00	5.00	1.00	0.00
Lnd. 2:	2.00	4.00	1.00	0.00	1.00
Lnd. 3:	2.00	1.00	3.00	0.00	0.00
Zj - Cj	-4.00	-9.00	-7.00	0.00	0.00

Xk:	Lnd. 3	Bi
Lnd. 1:	0.00	100.00
Lnd. 2:	0.00	140.00
Lnd. 3:	1.00	60.00
Zj - Cj	0.00	0.00

(Se distribuye en dos partes por limitación de espacio en pantalla)

Variables de X1 hasta X3
Variables de holgura de Lnd. 1 hasta Lnd. 3

Tabla óptima

Xk:	X1	X2	X3	Lnd. 1	Lnd. 2
X2:	0.00	1.00	1.00	0.29	0.00
Lnd. 2:	0.00	0.00	-5.00	-0.86	1.00
X1:	1.00	0.00	1.00	-0.14	0.00
Zj - Cj	0.00	0.00	6.00	2.00	0.00

Xk:	Lnd. 3	Bi
X2:	-0.14	20.00
Lnd. 2:	-0.57	20.00
X1:	0.57	20.00
Zj - Cj	1.00	260.00

LA SOLUCION ES:

Variables primales

Variables	valores
X1 =	20
X2 =	20
Lnd. 2 =	20

Variables duales

Variables	valores
Y1	2
Y2	0
Y3	1
Lnd. dual 1 =	0
Lnd. dual 2 =	0
Lnd. dual 3 =	6

Valor de la F.O.= 260

Análisis de las variables básicas
Intervalo del coeficiente en F.O. de X1:2.26 < = C1 < = 17.99
Intervalo del coeficiente en F.O. de X2:3 < = C2 < = 15.99

Tabla 4

b) Software específico para programación lineal

Linear programming module

Title: ejemplo 3
Number of variables : 3
Number of constraints : 3
Starting solution given : YES
Objective function : MAX

	VAR1	VAR2	VAR3	CONS.TYPE	RHS	RANGE
Cost coeff.	4.	9.	7.	XXXX	XXXX	XXXX
Constr. 1	1.	4.	5.	< =	100.	Infinity
Constr. 2	2.	4.	1.	< =	140.	Infinity
Constr. 3	2.	1.	3.	< =	60.	Infinity
Varbl. type	+	+	+	XXXX	XXXX	XXXX
Lowr. bound	0.	0.	0.	XXXX	XXXX	XXXX
Uppr. bound	Infinity	Infinity	Infinity	XXXX	XXXX	XXXX
Init. soln.	0.	0.	0.	XXXX	XXXX	XXXX

ITERATION 3 OPTIMAL SOLUTION
DETAILED REPORT

	Variable	Value	Cost	Red. cost	Status
1	Var. 1	20	4	0	Basic
2	Var. 2	20	9	0	Basic
3	Var. 3	0	7	-6	Lower bound
4	Slack 1	0	0	-2	Lower bound
5	Slack 2	20	0	0	Basic
6	Slack 3	0	0	-1	Lower bound

ITERATION 3 OPTIMAL SOLUTION
DETAILED REPORT

Constraint		Type	RHS	Slack	Shadow price
1	Constr. 1	< =	100	0	2
2	Constr. 2	< =	140	20	0
3	Constr. 3	< =	60	0	1

Objective function value = 260.00000

SENSITIVITY ANALYSIS OF COST COEFFICIENTS

Variable		Current Coeff.	Allowable Minimum	Allowable Maximum
1	Var. 1	4	2.25	18
2	Var. 2	9	3	16
3	Var. 3	7	-Infinity	13

SENSITIVITY ANALYSIS OF RIGHT HAND SIDE VALUES

Constraint		Type	Current Value	Allowable Minimum	Allowable Maximum
1	Constr. 1	< =	100	30	123.33333
2	Constr. 2	< =	140	120	Infinity
3	Constr. 3	< =	60	25	95

```
       CONSTR. 1: Parametric analysis of right hand side value
COEFFICIENT = 100   LOWER LIMIT = -INFINITY   UPPER LIMIT = INFINITY
  ---RHS RANGE---  Shad. pr.  Objective fnct. range  Enter   Leave

    100 to 123.33         2       260 to 306.67        VAR3   SLACK2
 123.33 to 176.36         1    306.67 to 358.18     SLACK1      VAR1
 176.36 to infinity       0    358.18               -- No change --

    100 to 30             2       260 to 120        SLACK3      VAR2
     30 to -1.91E-00      4       120 to 0                      VAR1
-1.91E-006 t -infinity      --Infeasible in this range--

         CONSTR. 2: Parametric analysis of right hand side value
COEFFICIENT = 140    LOWER LIMIT = -INFINITY   UPPER LIMIT = INFINITY
  ---RHS RANGE---  Shad. pr.  Objective fnct. range  Enter   Leave

    140 to infinity       0       260                -- No change --

    140 to 120            0       260 to 260           VAR3   SLACK2
    120 to 20           1.2       260 to 140         SLACK3     VAR2
     20 to 20           1.4       140 to 140         SLACK1     VAR1
     20 to -1.91E-00      7       140 to 0                      VAR3
-1.91E-006 t -infinity      --Infeasible in this range--

         CONSTR. 3: Parametric analysis of right hand side value
COEFFICIENT = 60    LOWER LIMIT = -INFINITY   UPPER LIMIT = INFINITY
  ---RHS RANGE---  Shad. pr.  Objective fnct. range  Enter   Leave

     60 to 95             1       260 to 295           VAR3   SLACK2
     95 to 153.33       0.3       295 to 313.33      SLACK3     VAR2
 153.33 to infinity       0    313.33                -- No change --

     60 to 25             1       260 to 225         SLACK1     VAR1
     25 to 0              9       225 to 0                      VAR2
      0 to -infinity     --Infeasible in this range--
```

Tabla 5

c) Planilla de cálculo (Excel)

Información de entrada

	A	B	C	D	E
1	Datos				
2		1	4	5	100
3		2	4	1	140
4		2	1	3	60
5		4	9	7	
6					
7	Variables				
8		X1			
9		X2			
10		X3			
11	Restricciones				
12	HH	=1*C8+4*C9+5*D10			
13	HM	=2*C8+4*C9+1*D10			
14	MP	=2*C8+1*C9+3*D10			
15	Función objetivo				
16		=4*C8+9*C9+7*D10			

Salida:

Microsoft Excel 4.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: EJEMPLO3.XLS
Informe creado: 7/3/...

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$16		0	260

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$C$8	X1	0	20
$C$9	X2	0	20
$C$10	X3	0	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$B$12	HH	100	$B$12<=$E$2	Obligatorio	0
$B$13	HM	120	$B$13<=$E$3	Opcional	20
$B$14	HP	60	$B$14<=$E$4	Obligatorio	0
$C$8	X1	20	$C$8>=0	Opcional	20
$C$9	X2	20	$C$9>=0	Opcional	20
$C$10	X3	0	$C$10>=0	Obligatorio	0

Microsoft Excel 4.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: EJEMPLO3.XLS
Informe creado: 7/3/…

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	X1	20	0	4	14	1.75
$C$9	X2	20	0	9	7	6
$C$10	X3	0	-6	7	6	1E + 30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Aumento permisible	Disminución permisible
$B$12	HH	100	2	100	23.33333333	70
$B$13	HM	120	0	140	1E + 30	20
$B$14	MP	60	1	60	35	35

Tabla 6

El beneficio máximo que puede obtenerse es de $ 260, fabricando 20 unidades del producto I y 20 unidades del producto II, quedando un excedente de 20 hs máquina. Los insumos saturados son las horas hombre y la materia prima, con una contribución marginal de $ 2 y $ 1 respectivamente. El producto III, que no conviene fabricar, presenta un costo de oportunidad de $ 6.

Pasaremos ahora a profundizar el uso de información para la toma de decisiones, que nos permitirá interpretar la totalidad de las distintas "salidas" por computadora que hemos obtenido.

2,5. INFLUENCIA DE VARIACIONES DE LAS CONTRIBUCIONES A LA UTILIDAD EN LA DECISION OPTIMA (ANALISIS DE SENSIBILIDAD)

A poco que pensemos qué factores pueden provocar variaciones en la contribución de cada producto, concluiremos en que los mismos son de distinta índole y que se producen habitualmente en el corto plazo, ya que tanto un cambio en el precio de venta como una modificación en el costo o un error en la estimación de cualquiera de los insumos acarrea esa consecuencia. Por ello, resulta válido preguntarnos si ante esa situación siempre es necesario plantear un nuevo modelo.

Resultará útil para quien tenga que decidir el plan de producción, disponer de información que le permita saber que mientras las variaciones permanezcan dentro de un cierto rango, no deberá cambiar su decisión acerca de cuánto fabricar de cada producto, ya que, aunque pueda modificarse, su utilidad será la máxima que pueda alcanzar.

Analizaremos cómo obtener esta información:

a) trabajando sobre la tabla Simplex;

b) utilizando software disponible.

Retomemos el primer ejemplo (2 productos - 1 factor limitante) con una F.O.:

$$Z = 4\,x_1 + 9\,x_2$$

	Cj	4	9	0	
Coef. F.O.	Var. ≠ 0	x_1	x_2	S1	B
4	x_1	1	4	1	100
Cj	- Zo	0	-7	-4	400

Costos de oportunidad — Contrib. marg. — Solución óptima

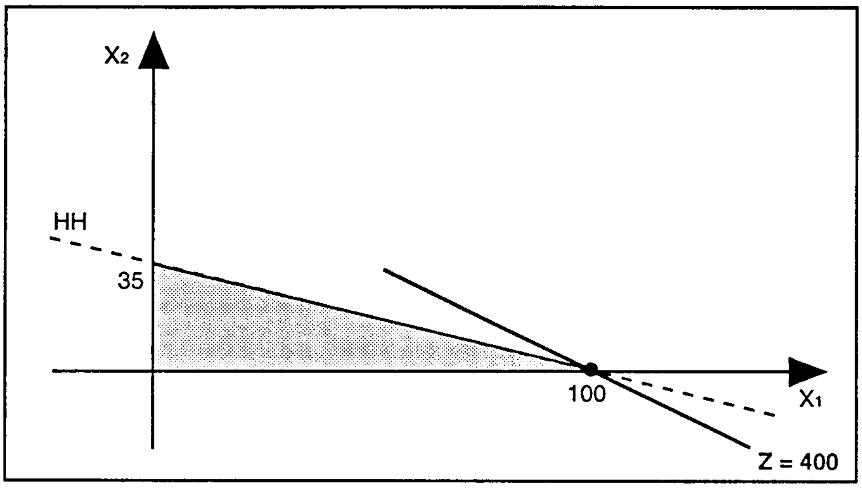


Gráfico 10. Solución óptima

¿Cómo influiría si x_1 dejase sólo \$ 3 por unidad?

$$Z = 3\ x_1 + 9\ x_2$$

	Cj	3	9	0	
Coef. F.O.	Var. ≠ 0	x_1	x_2	S1	B
3	x_1	1	4	1	100
Cj	-Zo	0	-3	-3	300

Costo de oportunidad — Contrib. marginal — Solución óptima

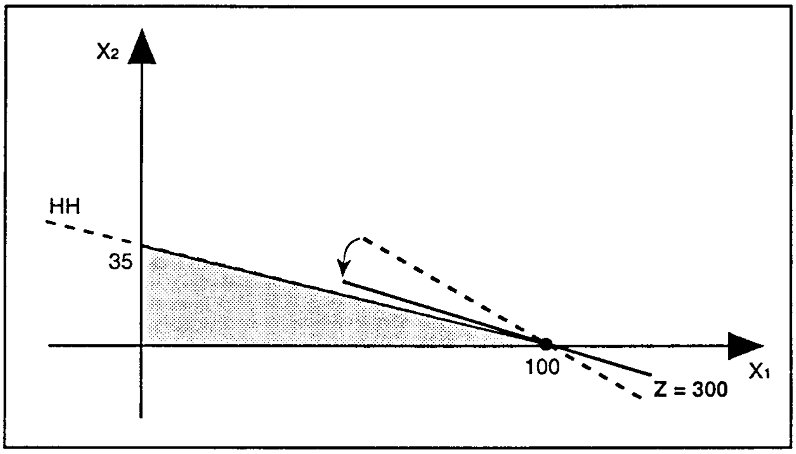


Gráfico 11. Modificación en la contribución unitaria del producto I

No cambia la cantidad óptima a fabricar ni los excedentes.

Sí cambian las contribuciones marginales, el costo de oportunidad y la utilidad.

Si bien se modifica la inclinación de la recta de "ISO-UTILIDAD", el punto óptimo se mantiene en el mismo vértice.

¿Hasta cuánto podrá disminuir la utilidad del Producto I sin que cambie esta situación?

Considerémoslo como una variable:

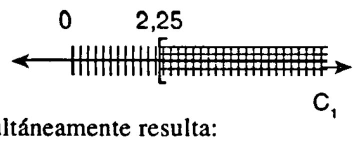
$$Z = \boxed{C_1}\, x_1 + 9\, x_2$$

Reemplacémoslo directamente en la tabla óptima:

		C_1	9	0	
Coef. F.O. Var. ≠ 0	Variables ≠ 0	x_1	x_2	S_1	B
C_1	x_1	1	4	1	100
$C_j - Z_o$		0	$9-4\,C_1$	$-C_1$	$100\,C_1$

Esta solución será válida mientras en la última fila no aparezcan valores positivos, o sea, si:

$$\begin{cases} 9 - 4\,C_1 \leq 0 \Rightarrow C_1 \geq 9/4 = C_1 \geq 2{,}25 \\ -C1 \leq 0 \Rightarrow C1 \geq 0 \end{cases}$$



Si deben satisfacerse ambas condiciones simultáneamente resulta:

$\boxed{C_1} \geq 2,25$

Esta información es suministrada directamente por el **Modelo Simplex** en su opción "ANALIZA" para cada uno de los coeficientes de la F.O. También puede obtenerse a través de los softwares específicos existentes y en alguna de las planillas de cálculo (por ej., EXCEL).

Es decir que mientras la utilidad del producto I no baje de $ 2,25/unidad, me conviene dedicarle todos mis recursos.

2,5,1. Interpretación gráfica del análisis de sensibilidad

Según lo resuelto en el punto anterior:

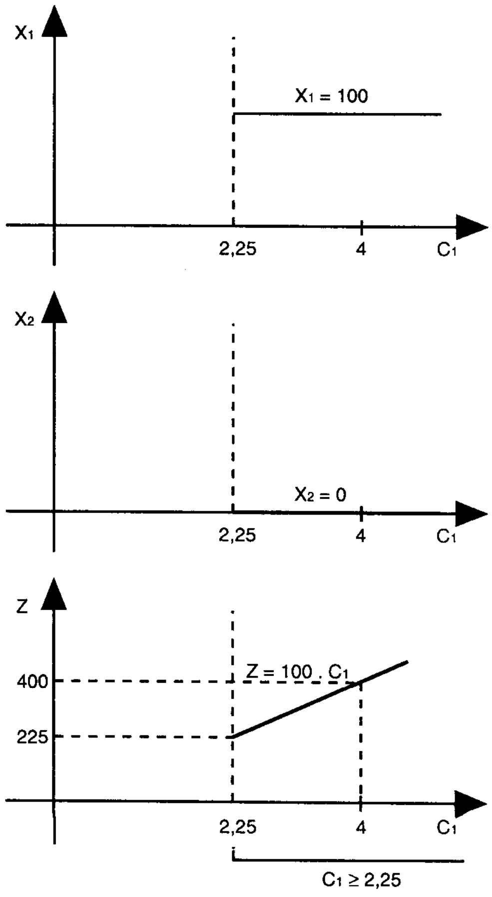


***Gráfico 12.** Niveles óptimos de producción para valores de $C_1 \geq 2,25$ y su influencia en el resultado (C_1: contribución unitaria del producto I)*

Ahora bien, ¿qué sucedería si C1 valiese exactamente 2,25?

$$C1 = 2,25$$

	Cj	2,25	9	0	
Coef. F.O. VAR. ≠ 0	Variable ≠ 0	X_1	X_2	S_1	B
2,25	X_1	1	4	1	100
Cj - Z		0	0	-2,25	2,25

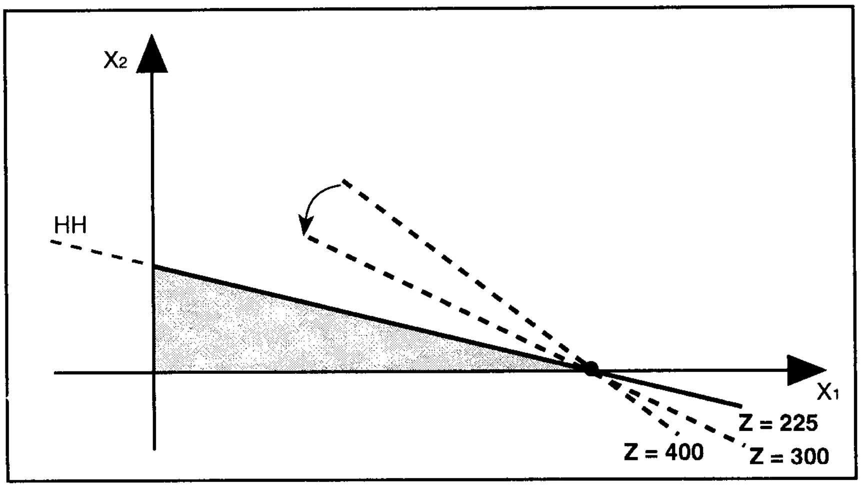


Gráfico 13. Superposición de la recta de isoutilidad con la restricción limitante: soluciones alternativas

La recta de "ISO-UTILIDAD" cambió su inclinación hasta coincidir con la restricción que limita nuestro polígono de soluciones factibles. Cualquier combinación de productos que se encuentre sobre dicho segmento nos proporciona una utilidad de $ 225. Pero si nuestra "variable C_1" toma un valor inferior a 2,25, la situación cambia:

Por ejemplo:

$$Z = 1\ x_1 + 9\ x_2$$

	Cj	1	9	0	
Coef. Var. ≠ 0	Var. ≠ 0	X_1	X_2	S_1	B
1	X_1	1	4	1	100
Cj - Z		0	5	-1	100

Esta tabla ya no es óptima.

Deberíamos hacer un paso adicional comenzando a fabricar producto II, obteniéndose:

	Cj	1	9	0	
Coef. FO Var. ≠ 0	Var. ≠ 0	X_1	X_2	S_1	B
9	X_2	1/4	1	1/4	25
Cj - Z		-5/4	0	-9/4	225

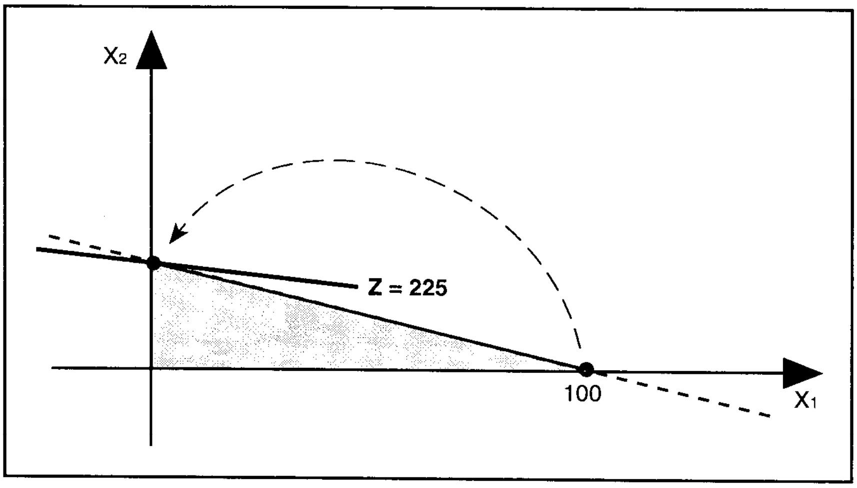


Gráfico 14. Cambio en los niveles de producción óptimos del ejemplo 1 como consecuencia de la disminución de la contribución unitaria del producto I

En este caso, vemos que el óptimo se ubica en el vértice A, indicándonos que ahora lo más conveniente es fabricar 25 unidades del producto II, obteniéndose $ 225 de utilidad.

Si en estas condiciones repitiésemos el análisis de sensibilidad:

		C_1	9	0	
Coef. FO Var. ≠ 0	Variables ≠ 0	x_1	x_2	S_1	B
9	x_2	1/4	1	1/4	25
Cj - Z		Cj-9/4	0	-9/4	225

Esta tabla resulta óptima si:

$$C_1 - 9/4 \leq 0 \quad => \quad C_1 \leq 9/4 \quad => \quad C_1 \leq 2{,}25,$$

que es coherente con el resultado anterior.

Si en estas condiciones, completamos nuestro gráfico 12:

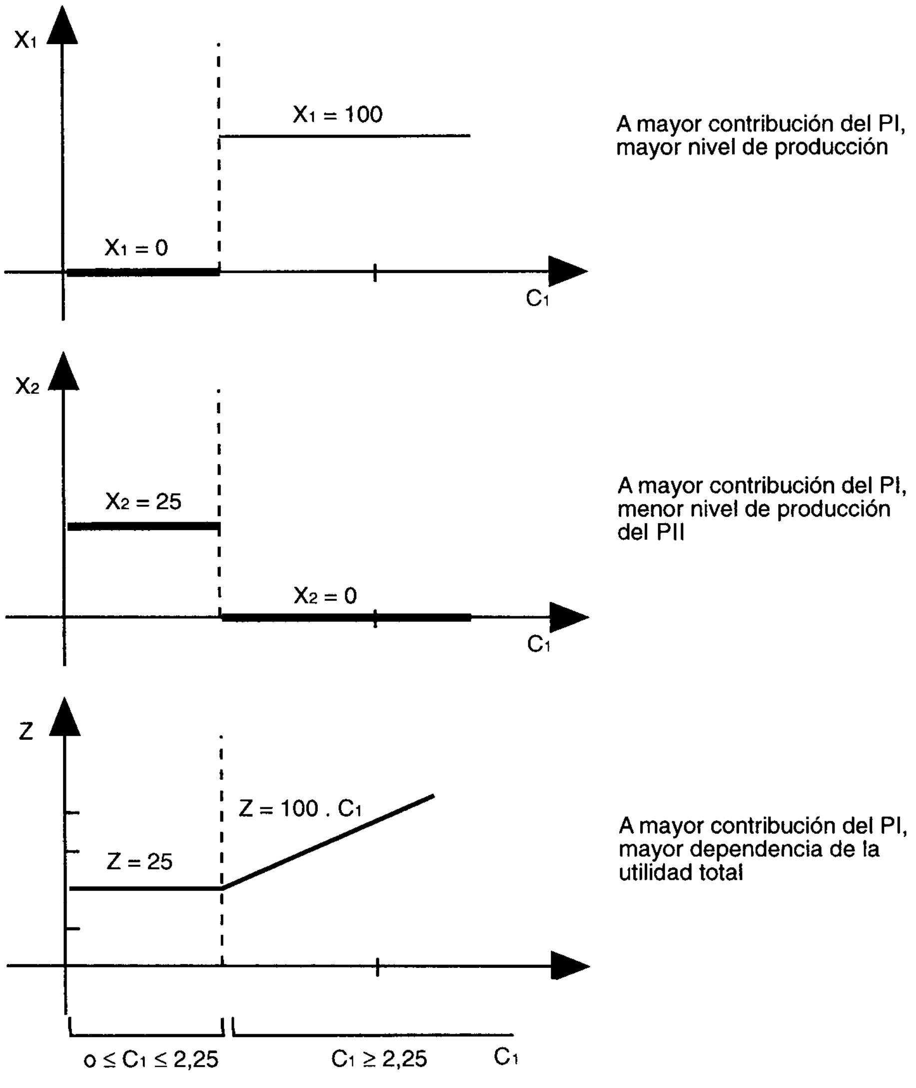


Gráfico 15. Solución óptima según la contribución unitaria del producto I en el ejemplo 1

El comportamiento de la Utilidad, mientras C_1 es inferior a 2,25, resulta independiente de su valor (es constante), ya que no conviene fabricar el producto I.

Sólo a partir de una contribución de más de 2,25, conviene fabricarlo (valor mínimo para que se ofrezca).

2,5,2. Curva de oferta del producto

Cabe aclarar que considerando más de un recurso limitante, generalmente resultan situaciones intermedias en las que conviene fabricar distintas combinaciones de productos, obteniéndose varios rangos de análisis.

Apliquémoslo al ejemplo 2 (2 productos - 2 factores limitantes):

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar:} & Z = & 4X_1 + 9X_2 \\ \text{Sujeto a:} & & X_1 + 4X_2 \leq 100 \\ & & 2X_1 + 4X_2 \leq 140 \\ \text{Con:} & & X_1 \geq 0 \\ & & X_2 \geq 0 \end{array}$$

Realicemos nuevamente el análisis de sensibilidad para variaciones en la contribución del producto I (puede utilizarse la opción "MODIFICA" del **Modelo Simplex**).

Tabla óptima si:

a) $C1 \leq 2{,}25$

Ej: $C_1 = 1$

Variables de X1 hasta X2
Variables de holgura de Lnd. 1 hasta Lnd. 2

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd.2	Bi
X2:	0.25	1.00	0.25	0.00	25.00
Lnd. 2:	1.00	0.00	-1.00	1.00	40.00
Zj - Cj	1.25	0.00	2.25	0.00	225.00

Tabla 6

```
La solución es:

Variables primales

Variables         valores

x2 =              25
Lnd. 2 =          40

Variables duales

Variables         valores

Y1                2.25
Y2                0
Lnd. dual 1 =     1.25
Lnd. dual 2 =     0
```

```
Valor de la F.O. = 225

               Análisis de las variables básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X2: 4 <= C2 <= + infinito

               Análisis de las variables no básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X1: -0.25(*) <= C1 <= 2.25
```

(*) La validez de los resultados obtenidos utilizando el **Modelo Simplex** se limita a los valores positivos. Considérese: $0 \leq C_1 \leq 2.25$

Tabla 6. Cont.

b) $2,25 \leq C1 \leq 4,5$
Ejemplo: C1 = 4

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
X2:	0.00	1.00	0.50	-0.25	15.00
X1:	1.00	0.00	-1.00	1.00	40.00
Zj - Cj	0.00	0.00	0.50	1.75	295.00

Tabla 7

La solución es:

```
Variables primales

Variables      valores

X1 =            40
X2 =            15

Variables duales

Variables      valores

Y1              .5
Y2              1.75
Lnd. dual 1 =   0
Lnd. dual 2 =   0

Valor de la F.O. = 295

            Análisis de las variables básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X1:  2.25 < = C1 < = 4.5
Intervalo del coeficiente en F.O. de X2 8 < = C2 < = 16

           Análisis de las variables no básicas

No existentes en este cálculo.
```

Tabla 7. Cont.

c) $C1 \geq 4{,}5$

Ejemplo: $C_1 = 5$

Xk:	x1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
Lnd. 1:	0.00	2.00	1.00	-0.50	30.00
X1:	1.00	2.00	0.00	0.50	70.00
Zj -Cj	0.00	1.00	0.00	2.50	350.00

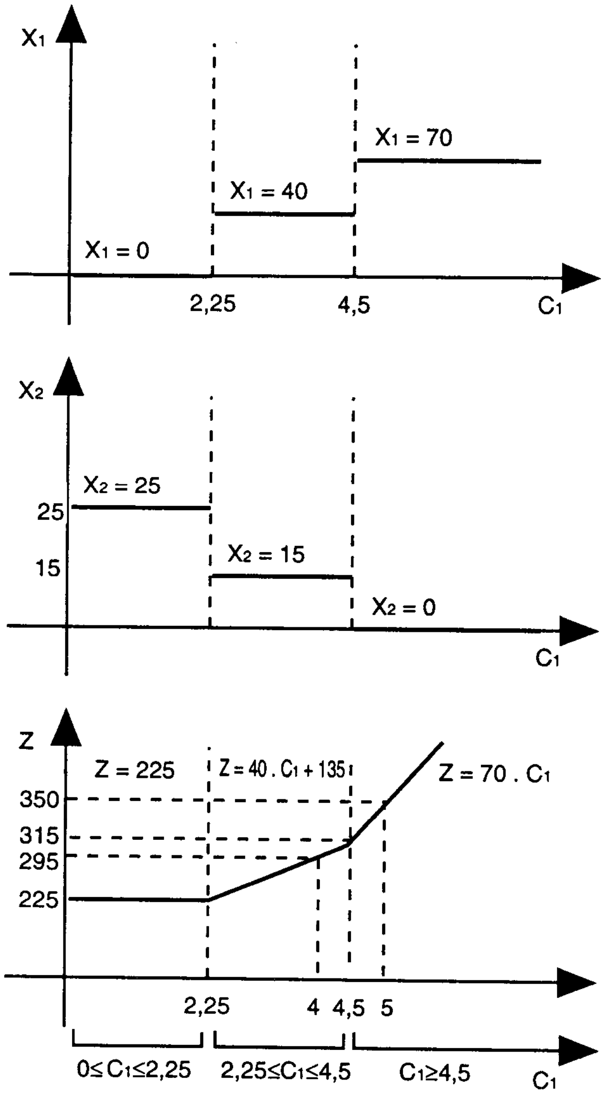
Tabla 8

La solución es:

```
Variables primales

Variables        valores

X1 =              70
Lnd. 1 =          30

Variables duales:

Variables        valores

Y1                0
Y2                2.5
Lnd. dual 1 =     0
Lnd. dual 2 =     1

Valor de la F.O. = 350

              Análisis de las variables básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X1: 4.5 <= C1 <= + infinit

              Análisis de las variables no básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X2:  8.00 <= C2 <= 10.00
```

Tabla 8. Cont.

La representación gráfica de este análisis de sensibilidad nos da:



Nótese: Pendiente de la función de utilidad: unidades fabricadas del producto I
Término independiente: utilidad proveniente de la venta del producto II

Gráfico 16. Solución óptima según la contribución unitaria del producto I en el ejemplo 2

A partir del gráfico que vincula cantidad de producto I en relación con su contribución puede deducirse fácilmente la tradicional curva de oferta del productor. Para adecuarla a la presentación habitual, cambiaremos la ubicación de las variables en los ejes:

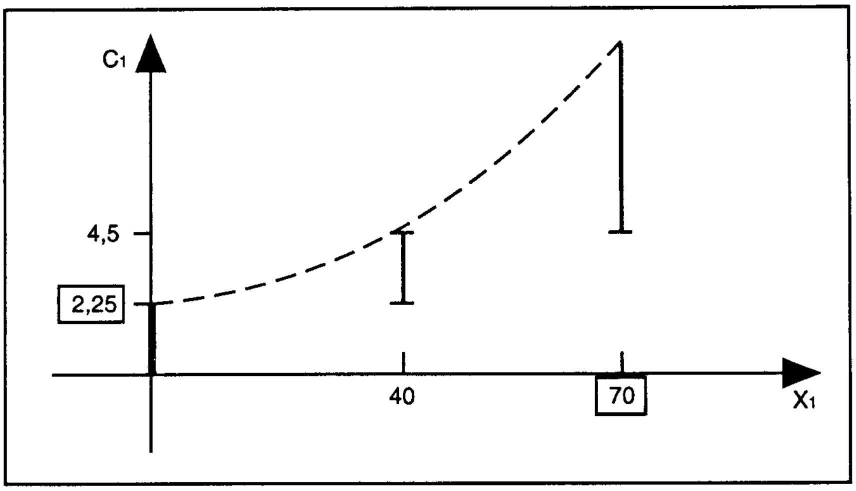


Gráfico 17. Curva de oferta del producto I según su contribución

destacándose los valores señalados como:

2,25: Contribución mínima para que se ofrezca.

70: Capacidad máxima de fabricación del producto II con los recursos dados

2,6. DECISIONES SOBRE INCREMENTO DE LAS DISPONIBILIDADES (PROBLEMA DUAL PARA NO MATEMATICOS)

Si bien aparentemente hemos suministrado información para decidir qué recursos conviene incrementar y a qué precio (a través de los "precios sombra"), en la práctica ello no resulta suficiente, ya que difícilmente la incorporación adicional del recurso se decida por una unidad a la vez.

¿Será válido pensar que la contribución marginal del recurso se mantiene constante, independientemente de las unidades agregadas?

Veamos nuevamente el caso de nuestro ejemplo 2.

TABLA INICIAL

	Cj	4	9	0	0	
Coef. FO Var ≠ 0	Var ≠ 0	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	1	4	1	0	100
0	S_2	2	4	0	1	140
Cj -Zo		-4	-9	0	0	0

TABLA OPTIMA

	Cj	4	9	0	0	
Coef. FO Var. ≠ 0	Variables ≠ 0	X_1	X_2	S_1	S_2	B
9	X_2	0	1	0,5	-0,25	15
4	X_1	1	0	-1	1	40
Cj -Z		0	0	0,50	1,75	295

Costos de oportunidad (X_1, X_2) — Contribuciones marginales (S_1, S_2) — Solución óptima (B)

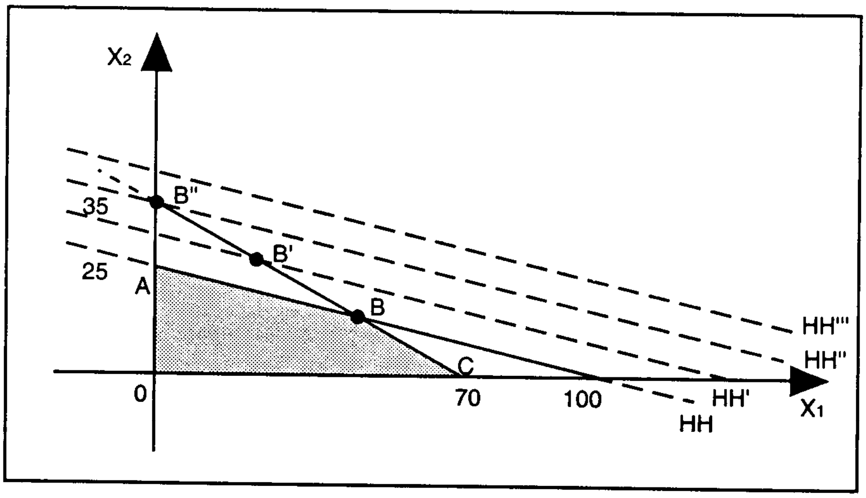


Gráfico 18. Cambios en la solución óptima ante aumentos en la disponibilidad de las HH

Ya habíamos visto que si dispusiésemos de una unidad adicional de la HH (101 HH) nuestra utilidad se incrementaría en $ 0,5, consecuencia de fabricar más producto II y menos producto I (veáse corrimiento del vértice óptimo en el gráfico).

Sin embargo, recordando que gráficamente eso provocaba desplazar nuestra recta limitante alejándose del origen, cuando su intersección con el eje *y* supere el valor de 35 correspondiente al otro recurso, agregar más HH no modificará nuestro polígono de soluciones factibles y, en consecuencia, no mejorará nuestra utilidad (por lo tanto, su contribución marginal será nula).

Cabe aclarar que para hacerlo más evidente, se tomó este ej. en el que la contribución marginal tuvo solamente dos opciones en cuanto al valor posible (0,5 y 0), pero, cuando trabajemos con varios factores limitantes, presentará distintas situaciones intermedias aunque siempre cumpliendo la ley de los "rendimientos marginales decrecientes". Así resultará un comportamiento general que puede describirse mediante el siguiente gráfico:

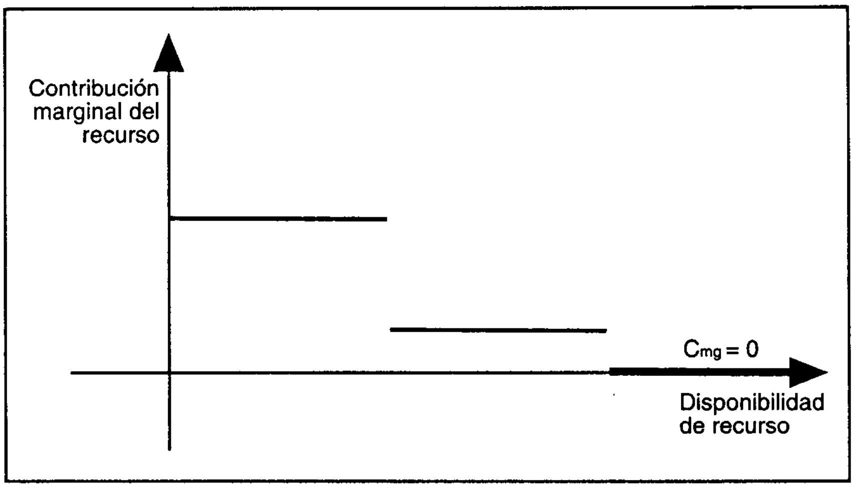


Gráfico 19. La contribución marginal de un recurso disminuye a medida que aumenta su disponibilidad

La contribución marginal del recurso decrece a medida que aumenta su disponibilidad, hasta llegar a cero cuando comienza a existir excedente de él, consecuencia de la escasez de los otros insumos.

Ello pone en evidencia la necesidad de conocer dentro de qué rangos la contribución marginal de cada insumo se mantiene constante, para que dentro de él pueda considerarse proporcional el rendimiento de las unidades adicionales.

En definitiva, no es otra cosa que el "análisis de sensibilidad" de las disponibilidades (parámetro que también resulta fácilmente modificable en el corto plazo, interesando por lo tanto disponer de esa información sin necesidad de un replanteo del problema).

Algunos de los softwares específicos de programación lineal suministran directamente esta información (ver punto 2,4, Salidas por computadora). Cuando no se disponga de ellos, deberemos recurrir a lo que se concoce como el "problema dual". No nos referiremos a él desde el punto de vista conceptual sino que simplemente indicaremos una "receta", a fin de que pueda obtenerse la información deseada. Sugerimos al lector interesado en el tema recurrir a bibliografía específica.

Retomemos el ejemplo 2 (2 productos - 2 factores limitantes):

Problema original:

$$\begin{array}{lclcl}
R_1: & \boxed{1}\, x_1 & + & \boxed{4}\, x_2 & \leq \boxed{100} \\
R_2: & \boxed{2}\, x_1 & + & \boxed{4}\, x_2 & \leq \boxed{140} \quad \text{con } x\,j \geq 0 \\
Z= & \boxed{4}\, x_1 & + & \boxed{9}\, x_2 & \text{(maximizar)}
\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}
 & \boxed{1\, y_1 + 2\, y_2 \geq 4} \\
 & \boxed{4\, y_1 + 4\, y_2 \geq 9} \quad \text{con } y_1 > 0 \\
W= & \boxed{100\, y_1 + 140\, y_2} \quad \text{(minimizar)}
\end{array}$$

A fin de obtener el problema dual se procedió a:

— transponer los coeficientes (de filas a columnas; obsérvese señalización);

— utilizar nuevas variables (*y*);

— siguiendo la disposición vertical señalada en el problema original, se utilizaron los coeficientes de la función objetivo como términos independientes y las disponibilidades como coeficientes de la nueva función objetivo (W);

— se cambiaron las condiciones de ≤ por ≥ y la de maximizar por minimizar;

— se mantiene la condición de no negatividad de las variables.

A partir de aquí, puede resolverse utilizando los mismos elementos que hasta ahora (**Simplex**, planilla de cálculo, u otros softwares específicos) teniendo en cuenta que:

— las variables "*y*" del problema corresponden a la contribución marginal de los insumos;

— las variables que se "incorporan" en cada restricción, para transformarlas en igualdades, representan el costo de oportunidad de los productos (con coeficiente negativo);

— el valor de la función objetivo coincidirá con el anterior.

Por lo tanto, todos los valores que se obtienen hasta aquí ya eran conocidos por nosotros.

Tabla óptima problema original

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
X2:	0.00	1.00	0.50	-0.25	15.00
X1:	1.00	0.00	-1.00	1.00	40.00
Zj - Cj	0.00	0.00	0.50	1.75	295.00

La solución es:

```
Variables primales

Variables        valores
X1 =                40
X2=                 15

Variables duales

Variables        valores
Y1                 .5
Y2                 1.75
Lnd. dual 1 =      0
Lnd. dual 2 =      0

Valor de la F.O. = 295
```

Análisis de las variables básicas

```
Intervalo del coeficiente en F.O. de X1:  2.25 < = C1 < = 4.5
Intervalo del coeficiente en F.O. de X2:  8 < = C2 < = 16
```

Análisis de las variables no básicas

No existentes en este cálculo.

Tabla 9

Tabla óptima problema dual

F.O. = (100) X1 + (140) X2 Minimizar

Xk:	X1	X2	Lnd. 1	Lnd. 2	Bi
X1:	1.00	0.00	1.00	-0.50	0.50
X2:	0.00	1.00	-1.00	0.25	1.75
Zj - Cj	0.00	0.00	-40.00	-15.00	295.00
	Excedentes de recurso		Unidades de producto		Solución óptima

Análisis de las variables básicas

Intervalo del coeficiente en F.O. de X1: 70 < = C1 < = 140
Intervalo del coeficiente en F.O. de X2: 100 < = C2 < = 200

Análisis de las variables no básicas

No existentes en este cálculo.

Nótese que, si bien se mantiene la denominación de *X* para las variables, corresponden a las *Y* del problema dual.

Tabla 10

Podríamos pensar entonces que no resulta necesario el problema dual, por no agregar información a la ya disponible. Sin embargo, es conveniente que tratemos de interpretar el significado del análisis de sensibilidad para los coeficientes de la F.O. dual.

Si, según dijimos, nos indica en qué rango pueden variar sin que la tabla deje de ser óptima, en este caso corresponderá a "en qué rango pueden variar las disponibilidades sin que se modifiquen las contribuciones marginales y los costos de oportunidad". Por lo tanto, podremos evaluar fácilmente el resultado de incorporar más de una unidad adicional de insumo.

En el ejemplo que veníamos desarrollando resulta, utilizando el software **Simplex**, que :

70 < disponibilidad HH < 140

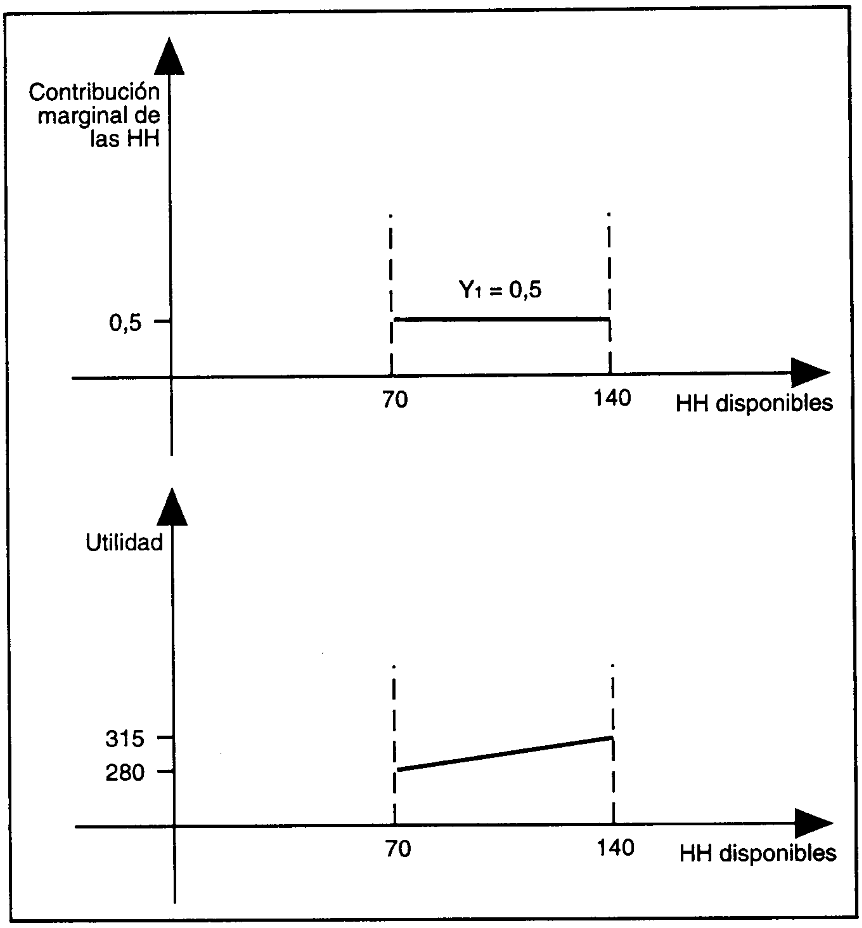


Gráfico 20

O sea que hasta 40 unidades adicionales, el incremento en la utilidad puede calcularse como el producto entre la contribución marginal de las HH y las HH agregadas, lo que nos permitirá evaluar la conveniencia o no de acuerdo a su costo.

Así como se analizaron todos los rangos posibles en el estudio de variaciones en las contribuciones de cada producto a la utilidad, lo mismo puede hacerse en cuanto a la disponibilidad de los recursos. (Véase el punto 2,4,2, Salidas por computadora, utilización de software específico. Utilícese el programa **Simplex** y resuélvase para valores convenientes, según análisis de sensibilidad dual.)

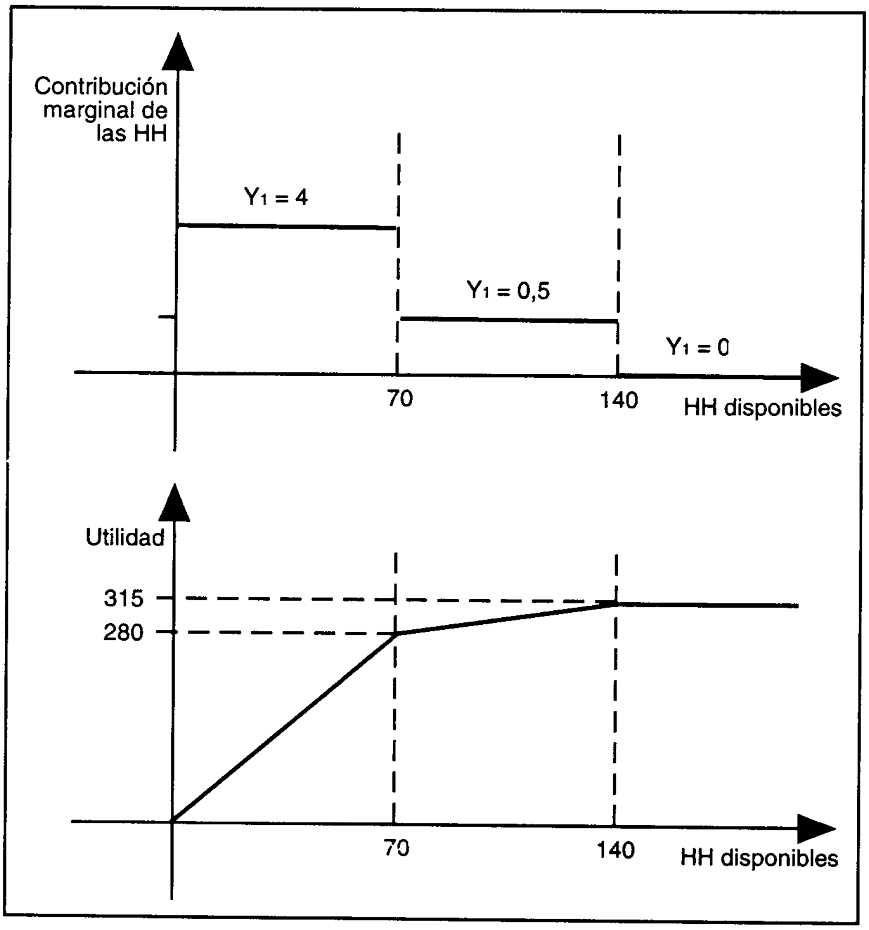


Gráfico 21. Influencia de las HH disponibles en su contribución marginal y en la utilidad

3. CONCLUSIONES

Son evidentes las dificultades que se originan para el que decide establecer la mezcla o contribución óptima de productos a fabricar en empresas con multiproductos.

Esto es así por la existencia de medios o recursos escasos o críticos (factores limitantes) que condicionan los distintos puntos de equilibrio para todas las soluciones posibles.

El análisis de la contribución marginal unitaria por línea de producto está ligado, además, a la óptima utilización de los recursos escasos.

El modelo desarrollado en el presente capítulo brinda el aprovechamiento de herramientas tales como la programación lineal y la aplicación del **Método Simplex** como soluciones concretas y prácticas en el cálculo del punto de equilibrio con multiproductos.

El objetivo de los autores es mostrar, más allá del desarrollo práctico de casos y de procedimientos y cálculos matemáticos, la interpretación de los resultados que de ellos surge, incorporando, además de la solución óptima, un nuevo horizonte de decisiones a través del análisis de sensibilidad, del costo de oportunidad por línea de producto y/o de las contribuciones marginales.

Por último, es necesario remarcar que a través de simples planillas de cálculo (QPRO, EXCEL, etc.), se puede desarrollar la solución a muchos de los interrogantes planteados, sin la utilización de procesos matemáticos largos o complicados.

Así pues, adelante en la tarea de decidir.