

## **CAPÍTULO I.**

# **ACCIONES DE CONTROL.**

### **1.1 Introducción.**

Los sistemas controlados han estado evolucionando de forma acelerada en los últimos días y hoy en día pasan desapercibidos para mucha gente pues presentan pocos o ningún problema, las técnicas de control se han mejorado a través de los años, sin embargo es muy importante que se conozca la teoría básica de control. El trabajo pretende formar parte de la educación del alumno en la teoría básica de control siendo una herramienta que puede facilitar el estudio en el laboratorio.

El control automático desempeña una función vital en el avance de la ingeniería y la ciencia, ya que el control automático se ha vuelto una parte importante e integral de los procesos modernos industriales y de manufactura. Por lo cuál la teoría de control es un tema de interés para muchos científicos e ingenieros que desean dar nuevas ideas para obtener un desempeño óptimo de los sistemas dinámicos y disminuir tareas manuales o repetitivas.

---

Las definiciones básicas de los sistemas de control son el punto de partida para comprender el estudio. Estas definiciones surgieron usando como base las ideas de la autora Katsuhiko Ogata en su libro “Ingeniería de Control Moderna”.

**Variable controlada y variable manipulada.** La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla. La variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. El objetivo del control es medir el valor de la variable controlada del sistema para aplicar correcciones a través de la variable manipulada para obtener un valor deseado.

**Planta.** La planta normalmente es un conjunto de partes que trabajan juntas con el objetivo de realizar una operación en particular. Se le llama planta a cualquier sistema físico que se desea controlar.

**Proceso.** El proceso es cualquier operación que va a ser controlada.

**Sistema.** Un sistema es un conjunto de componentes que se interrelacionan y trabajan juntos para realizar un objetivo determinado.

**Perturbación.** Una perturbación es una señal que normalmente afecta a la variable controlada del sistema. Las perturbaciones pueden ser internas cuando surgen dentro del sistema, o externas porque se produce fuera del sistema y actúan como otra entrada.

**Control realimentado.** El control realimentado es un sistema que mantiene una comparación entre la entrada de referencia y la salida deseada, el resultado de la comparación es utilizado para controlar.

**Sistema de control en lazo cerrado.** Los sistemas de control en lazo cerrado alimentan al controlador la señal de error de actuación que es la diferencia entre la señal de

entrada y la señal de realimentación, a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control de lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema; es por eso que el término control de lazo realimentado y de lazo cerrado se usan indistintamente.

**Sistemas de control en lazo abierto.** En estos sistemas la salida no afecta la acción de control. Es decir que en este tipo de control no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Por lo tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; lo que obliga a que la precisión del sistema sea dependiente de la calibración del mismo.

## **1.2 Función de Transferencia.**

El aspecto más importante dentro de los sistemas de control es la estabilidad del sistema. Un sistema es estable si en ausencia de alguna perturbación la salida permanece en el mismo estado. En un sistema de control se busca que a pesar de las perturbaciones o entradas el sistema vuelva a un estado de equilibrio. Para este motivo es necesario conocer las características del sistema a través de su función de transferencia.

Los sistemas de control actuales generalmente son no lineales, sin embargo es posible aproximarlos a través de medios matemáticos; es por eso que analizar la respuesta transitoria de la planta es el primer paso a tomar en cuenta para poder implementar las acciones de control. El análisis de la respuesta transitoria nos da como resultado la “Función de Transferencia” que nos representará la planta que se va a controlar.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia determina cual de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso sería la mejor. Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

La mayor parte de los sistemas a controlar tiene funciones de transferencia de segundo orden. Utilizando una entrada escalón los sistemas de segundo orden muestran la función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde,

$\omega_n$ : frecuencia natural no amortiguada.

$\zeta$ : factor de amortiguamiento relativo del sistema.

El sistema tiene dos polos en:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Para:

$|\zeta| > 1$  Dos polos reales diferentes. "Caso sobre amortiguado".

$|\zeta| = 1$  Dos polos reales e iguales. "Caso críticamente amortiguado".

$0 < \zeta < 1$  Dos polos complejos conjugados. "Caso subamortiguado".

$\zeta = 0$  Dos polos complejos conjugados puros. "Caso oscilador".

La siguiente figura muestra la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  y el factor de amortiguamiento  $\zeta$  en el plano imaginario.

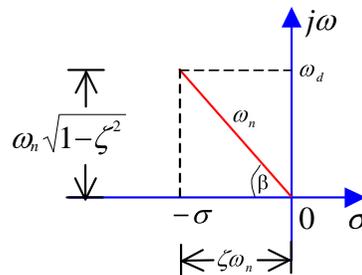


Figura 1.1 Definición del Ángulo  $\beta$ .

Por trigonometría:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\sigma = \omega_n \zeta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \zeta$$

donde,

$\omega_d$ : frecuencia natural amortiguada.

$\sigma$ : coeficiente de atenuación.

En la figura siguiente se muestran diferentes gráficos para los factores de amortiguamiento descritos anteriormente para una entrada escalón unitario, ya que normalmente las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón

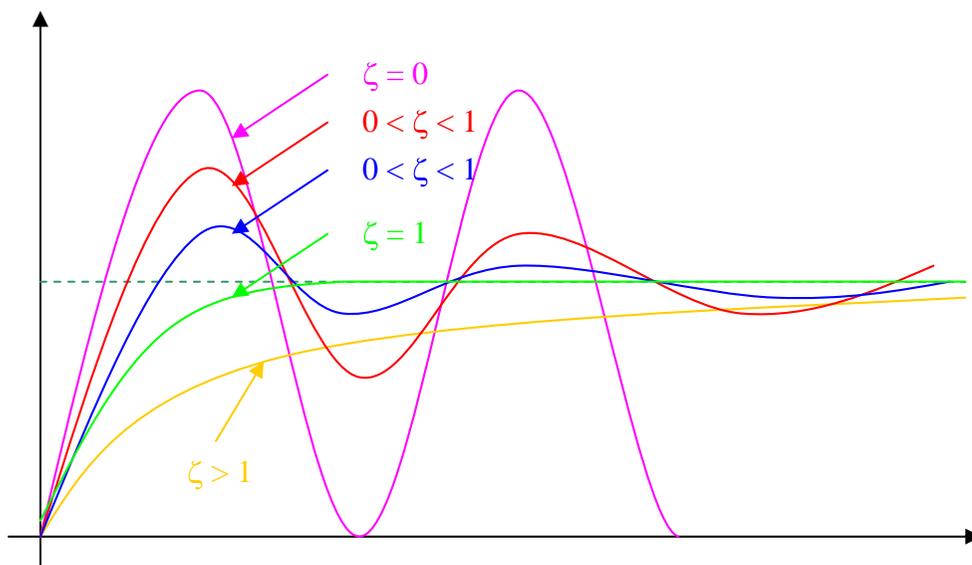


Figura 1.2 Curvas de Respuesta al Escalón Unitario de Sistemas de Segundo Orden.

La respuesta transitoria para una entrada escalón unitario de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Estas especificaciones se definen a continuación y aparecen en forma gráfica en la respuesta transitoria de un sistema en la figura siguiente:

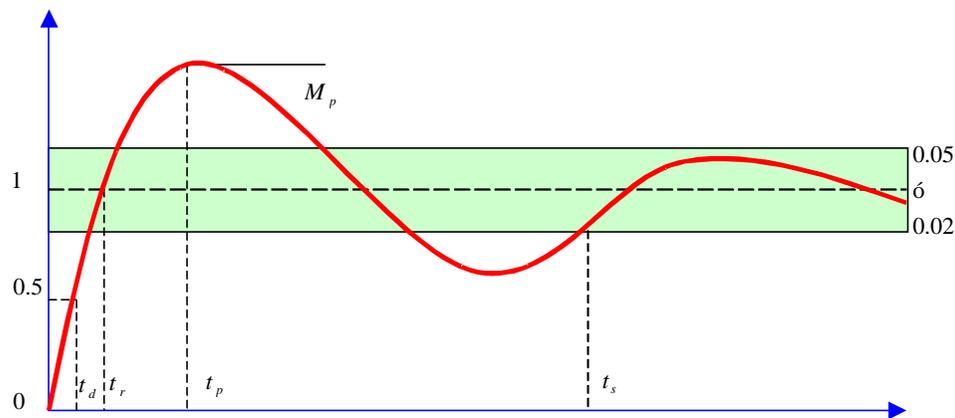


Figura 1.3 Especificaciones de la Respuesta Transitoria.

1. Tiempo de retardo,  $t_d$ : Es el tiempo para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
2. Tiempo de levantamiento,  $t_r$ : Tiempo para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% ó del 0 al 100% de su valor final.
3. Tiempo pico,  $t_p$ . Tiempo en el cual la respuesta alcanza el primer pico del sobrepaso (máximo sobreimpulso). El tiempo pico es inversamente proporcional a la frecuencia natural amortiguada.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

4. Máximo sobreimpulso,  $M_p$ : Es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. El máximo sobreimpulso normalmente se indica en porcentaje. La cantidad de sobrepaso máximo indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

5. Tiempo de asentamiento,  $t_s$ : Tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezca dentro de él. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control.

$$t_s = \frac{C}{\zeta\omega_n}$$

donde C es 4 para un criterio de 2% o 3 para un criterio de 5%.

### 1.3 Acciones de Control.

La forma en la cual el controlador automático produce la señal de control se llama “acción de control”. Los controladores automáticos comparan el valor real de la salida de la planta con la entrada de referencia, lo cual determina la desviación con la que el controlador debe producir una señal de control que reduzca la desviación.

El siguiente diagrama a bloques muestra un sistema de control automático general formado por un controlador, un actuador, una planta y un sensor.

En el diagrama siguiente el controlador detecta la señal de error, el controlador amplifica la señal y la envía al actuador que produce la entrada a la planta; la salida de la planta es medida por un sensor que transforma la señal y la envía al controlador para que pueda ser comparada con la señal de referencia.

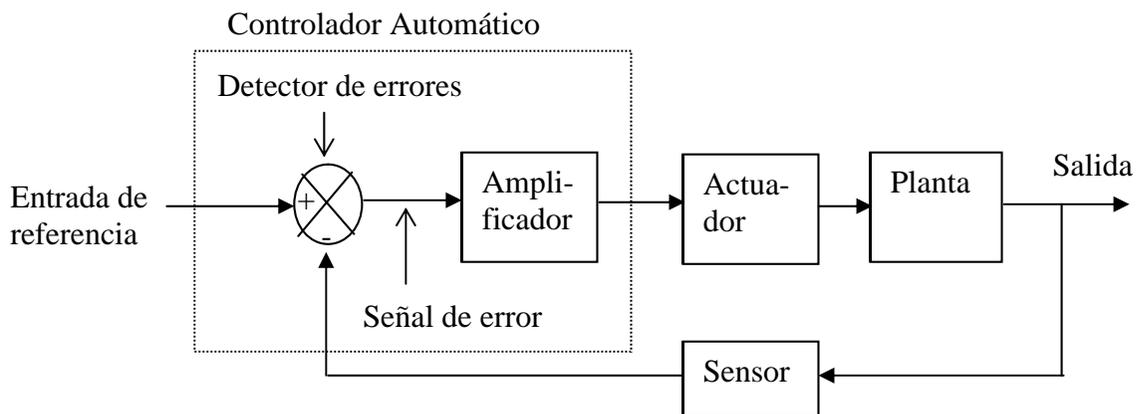


Figura 1.4 Diagrama a Bloques General de un Control Automático.

En las siguientes secciones se analizan algunos detalles de las acciones básicas de control.

### 1.3.1 Acción de Control Encendido-Apagado.

La acción de control Encendido-Apagado es también muy conocida por su nombre en inglés *On-Off*. Para esta acción de control el elemento de actuación sólo tiene dos posiciones fijas que en la mayoría de los casos son apagado y encendido. Este control es relativamente simple y barato, por lo cual su uso es muy extendido en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

Si tenemos una señal de salida del controlador  $u(t)$  y una señal de error  $e(t)$ , en el control de dos posiciones, la señal  $u(t)$  permanece en un valor ya sea máximo o mínimo, dependiendo de si la señal de error es positiva o negativa. De este modo,

$$u(t) = U_1, \quad \text{para } e(t) > 0$$

$$u(t) = U_2, \quad \text{para } e(t) < 0$$

en donde  $U_1$  y  $U_2$  son constantes. Por lo general, el valor mínimo de  $U_2$  es cero o menos  $U_1$ .

La siguiente figura muestra el diagrama a bloques de un controlador Encendido-Apagado.

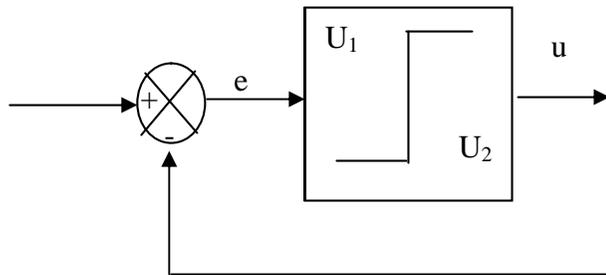


Figura 1.5 Diagrama a Bloques que Representa el Control Encendido-Apagado.

### 1.3.2 Acción de Control Encendido-Apagado con Banda Muerta.

La brecha diferencial o banda muerta es el rango en el que debe moverse la señal de error antes de que ocurra la conmutación. La banda provoca que la salida del controlador  $u(t)$  conserve su valor presente hasta que la señal de error se haya desplazado ligeramente más allá de cero.

La banda muerta en el control Encendido-Apagado es usada con frecuencia para evitar una operación demasiado frecuente del mecanismo de encendido y apagado.

Para una acción de control Encendido-Apagado con Banda Muerta la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es:

$$u(t) = U_1, \quad \text{para } e(t) + B/2 > 0$$

$$u(t) = U_2, \quad \text{para } e(t) - B/2 < 0$$

donde B es la brecha diferencial.

La magnitud de la banda muerta debe determinarse a partir de consideraciones tales como la precisión requerida y la vida del componente, ya que la reducción de la banda diferencial aumenta la cantidad de conmutaciones de encendido y apagado por minuto y reduce la vida útil del componente.

La siguiente figura muestra el diagrama a bloques de un controlador Encendido-Apagado con Banda Muerta.

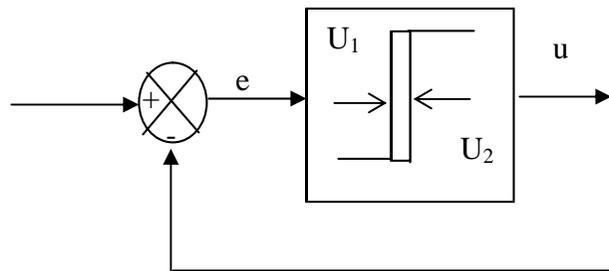


Figura 1.6 Diagrama a Bloques que Representa el Control Encendido-Apagado con Banda Muerta.

### 1.3.3 Acción de Control Proporcional.

El controlador Proporcional es en realidad un amplificador con ganancia ajustable. Este control reduce el tiempo de subida, incrementa el sobretiro y reduce el error de estado estable.

Para una acción de control Proporcional la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es:

$$u(t) = K_p e(t)$$

donde  $K_p$  es la ganancia proporcional.

Si se aplica la transformada de Laplace se obtiene:

$$U(s) = K_p E(s)$$
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Si se aplica la transformada Z se obtiene:

$$U(z) = K_p E(z)$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p$$

### 1.3.4 Acción de Control Integral.

La acción de control Integral se denomina control de reajuste (*reset*). En un controlador integral la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$
$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

donde  $K_i$  es una constante ajustable.

Si se duplica el valor de  $e(t)$ , el valor de  $u(t)$  varía dos veces más rápido. Para un error de cero, el valor de  $u(t)$  permanece estacionario.

Si se aplica la transformada de Laplace se obtiene:

$$U(s) = \frac{K_i}{s} E(s)$$
$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Como se puede ver en la formula anterior el control Integral añade un polo en el origen, con lo cual el sistema se vuelve menos estable.

Si se aplica la transformada Z se obtiene:

$$U(z) = -\frac{T}{2T_i} \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})} E(z)$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = -\frac{T}{2T_i} \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}$$

### 1.3.5 Acción de Control Proporcional Integral.

El control Proporcional Integral decrementa el tiempo de subida, incrementa el sobre impulso y el tiempo de estabilización, y tiene el efecto de eliminar el error de estado estable pero empeorará la respuesta transiente.

La acción de control Proporcional Integral se define mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

en donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  se denomina tiempo integral.

El tiempo integral ajusta la acción del control, mientras que un cambio en el valor de  $K_p$  afecta las partes integral y proporcional de la acción de control. El inverso del tiempo integral  $T_i$  se denomina velocidad de reajuste. La velocidad de reajuste es la cantidad de

veces por minuto que se duplica la parte proporcional de la acción de control. La velocidad de reajuste se mide en términos de las repeticiones por minuto.

Si se aplica la transformada de Laplace se obtiene:

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s)$$
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_i} \right)$$

Si se aplica la transformada Z se obtiene:

$$U(z) = K_p E(z) - \frac{T}{2T_i} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) E(z)$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p - \frac{T}{2T_i} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left( 1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T}{T_i} \frac{1}{(1-z^{-1})} \right)$$

### 1.3.6 Acción de Control Proporcional Derivativo.

El control Proporcional Derivativo reduce el sobre impulso y el tiempo de estabilización, por lo cual tendrá el efecto de incrementar la estabilidad del sistema mejorando la respuesta del sistema. La relación de un controlador Proporcional Derivativo entre la salida  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  está dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

en donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_d$  es una constante denominada tiempo Derivativo.

La acción de control Derivativo, en ocasiones llamada control de velocidad, ocurre donde la magnitud de la salida del controlador es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error. El tiempo Derivativo  $T_d$  es el intervalo de tiempo durante el cual la acción de la velocidad hace avanzar el efecto de la acción proporcional. La acción de control Derivativo tiene un carácter de previsión. Sin embargo, es obvio que una acción de control Derivativo nunca prevé una acción que nunca ha ocurrido.

Aunque la acción de control Derivativo tiene la ventaja de ser de previsión, tiene las desventajas de que amplifica las señales de ruido y puede provocar un efecto de saturación en el actuador.

Si se aplica la transformada de Laplace se obtiene:

$$U(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s)$$
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + s T_d)$$

Si se aplica la transformada Z se obtiene:

$$U(z) = K_p E(z) + K_p \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) E(z)$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_p T_d}{T} (1 - z^{-1})$$
$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T} - \frac{T_d}{T} z^{-1} \right)$$

### 1.3.7 Acción de Control Proporcional Integral Derivativo.

La combinación de una acción de control Proporcional, una acción de control Integral y una acción de control Derivativo se denomina acción de control Proporcional Integral

Derivativo. Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales.

La siguiente tabla resume las características de los controles mencionados.

<b>Tipo de Control</b>	<b>Tiempo de subida</b>	<b>Sobre impulso</b>	<b>Tiempo de estabilización</b>	<b>Error en estado estable</b>
Proporcional	Decrece	Crece	Cambio menor	Decrece
P. Integral	Decrece	Crece	Crece	Se elimina
P. Derivativa	Cambio menor	Decrece	Decrece	Cambio menor

Tabla 1.1 Resumen de Características de Acciones de Control.

Las correlaciones de la tabla mostrada no son muy precisas, porque  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son dependientes entre sí, por lo cuál esta tabla sólo debe ser tomada como una referencia.

La relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  de la acción de control Proporcional Integral Derivativo está dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

en donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  es el tiempo integral y  $T_d$  es el tiempo Derivativo.

Si se aplica la transformada de Laplace se obtiene:

$$U(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Si se aplica la transformada Z se obtiene:

$$U(z) = K_p E(z) + \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) E(z) - \frac{T}{2T_i} \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})} E(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) - \frac{T}{2T_i} \frac{(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left( 1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T} - \frac{T_d}{T} z^{-1} + \frac{T}{T_i} \frac{1}{(1 - z^{-1})} \right)$$

## 1.4 Realización de Controladores.

La realización de controladores digitales implica la determinación de la configuración física apropiada para la realización de las operaciones aritméticas y de almacenamiento. Existen diferentes tipos de programación de los controladores digitales que aumentan o disminuyen las operaciones aritméticas y de almacenamiento.

La forma general de la función de transferencia pulso entre la salida  $Y(z)$  y la entrada  $X(z)$  está dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad n \geq m$$

**Programación directa.** En la programación directa los retrasos del numerador y del denominador se hacen por separado, por lo que el número total de elementos de retraso utilizado es la suma de  $m$  y  $n$ .

**Programación estándar.** Para reducir el número de retrasos la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)} \frac{H(z)}{X(z)}$$

donde,

$$\frac{Y(z)}{H(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad \text{y} \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

De esta forma al redibujar el diagrama a bloques el número de retrasos se reduce a  $n$ , lo que produce un ahorro real en memoria, además de reducir el número de sumas.

**Errores que afectan las acciones de control.** Durante la realización de controladores hay tres errores por el número de *bits* que representan la función de transferencia y sus coeficientes. Los errores que afectan al control son: error por cuantificación, error por acumulación de redondeos, y error por cuantificación de coeficientes.

Para reducir el tercer tipo de error se puede utilizar: la programación en serie, la programación en paralelo o la programación en escalera.

**Programación serial.** Ésta consiste en implantar una función de transferencia pulso  $G(z)$  como una conexión en serie de funciones de transferencia pulso de primero y segundo orden.

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)\dots G_p(z) = \prod_{i=1}^j \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^p \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$

Este caso es una conexión de  $p$  componentes en serie que nos dan como resultado  $G(z)$ .

**Programación en paralelo.** Ésta radica en expandir la función de transferencia pulso  $G(z)$  en fracciones parciales de modo que

$$G(z) = A + G_1(z) + G_2(z) \dots G_q(z) = A + \sum_{i=1}^j G_i(z) + \sum_{q=j+1}^q G_i(z)$$

$$= A + \sum_{i=1}^j \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum_{i=j+1}^q \frac{b_i + f_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}}$$

Para este caso el diagrama a bloques es una conexión en paralelo de  $q+1$  funciones de transferencia.

**Programación en escalera.** En este caso la función de transferencia pulso  $G(z)$  se decompone en una fracción continuada como la siguiente:

$$G(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{A_{n-1} + \frac{1}{B_n z + \frac{1}{A_n}}}}}}}$$

donde,

$$G_i^{(B)}(z) = \frac{1}{B_i z + G_i^{(A)}(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$G_i^{(A)}(z) = \frac{1}{A_i z + G_{i+1}^{(B)}(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$G_n^{(B)}(z) = \frac{1}{B_n z + \frac{1}{A_n}}$$

Los controles basados en la programación en escalera tienen ventajas respecto a la sensibilidad y exactitud de los coeficientes, además de que es posible disminuir significativamente el número de retardos empleados.

La expansión de fracciones continuadas alrededor del origen no es la única forma de realizarlo, esto también se puede hacer alrededor del origen en términos  $z^{-1}$ .

Para la implementación de la acción de control Proporcional Integral Derivativo y para el Compensador Adelanto-Atraso se decidió utilizar la programación en escalera. En este caso la función pulso  $G(z)$  es de segundo orden:

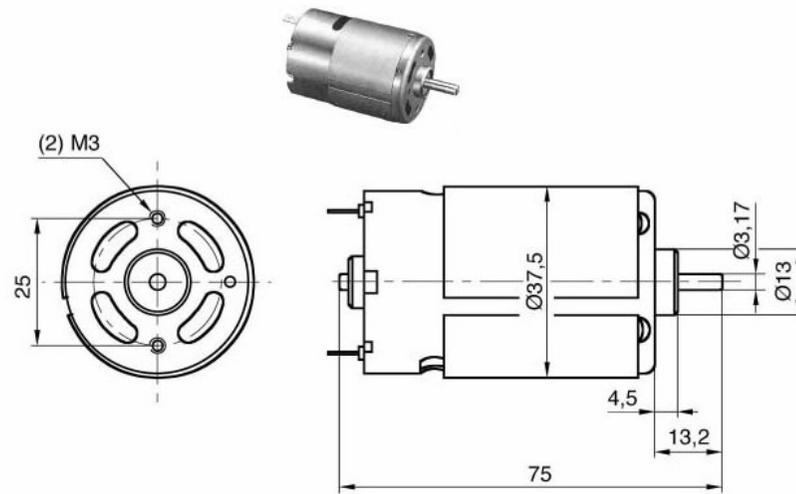
$$G(z) = \frac{A_0 z^2 + A_1 z + A_2}{z^2 + B_0 z + B_1} = A + \frac{1}{\frac{z}{B} + \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{\frac{z}{D} + E}}}$$

Por fracciones parciales se obtiene los coeficientes:

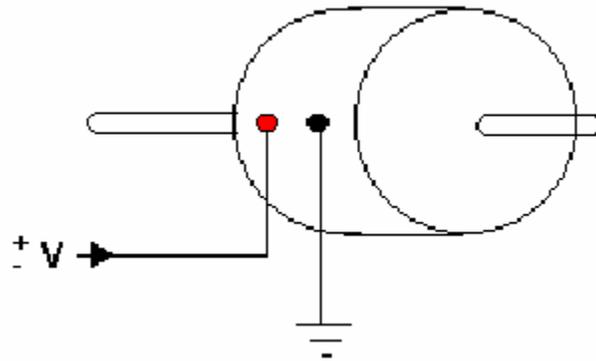
$$\begin{aligned} a &= A_0 \\ b &= A_1 - A_0 \cdot B_0 \\ c &= A_2 - A_0 \cdot B_1 \end{aligned}$$



## 1.5 Modelado del Motor de CD.



Especificaciones del motor:



### Valores nominales

Velocidad de giro	r.p.m	3,680	3,430
Voltaje	V	12	24
Corriente	A	11.75-1	0.91 0.43
Potencia	W	6.7	7.2 6.7
Torque	mNm	19.1	19.0

### Valores en vacío

Velocidad de giro r.p.m 4,150 3,750

### Valores Estáticos

Coefficiente  $M=4.05$

Máxima eficiencia  $\eta_{\max}=0.604=60.4\%$

Corriente  $I^*=3.68\text{ A}$

Velocidad de rotación  $\Omega^*=2.98\text{ r.p.m.}$

Poder de entrada  $P_{in}^*=44.22\text{ W}$

Poder de salida  $P_{out}^*=26.71\text{ W}$

Torque  $T^*=0.08\text{ Nm}$

### Motor de corriente directa de imán permanente.

Los motores de cd de imán permanente tienen, en teoría, un comportamiento lineal, es decir que la velocidad desarrollada será proporcional al voltaje aplicado lo cual no es completamente cierto en todo el rango de voltajes. Por ejemplo, si el motor que se empleará en esta experiencia gira a 500 r.p.m. cuando se le aplican 5 voltios muy posiblemente girará a 250 r.p.m. si se le aplican 2.5 voltios. Pero, si se le aplican 0.5 voltios seguramente ni siquiera alcanzaría a arrancar (debido a que con ese voltaje no logra vencer la inercia) cuando debería girar a 50 r.p.m., aplicando el principio de Superposición, si fuese lineal en todo su rango.

Es recomendable que se verifique el rango de voltajes en que el motor tiene un comportamiento lineal aplicándole voltajes (con el potenciómetro desacoplado) desde 0 voltios y midiendo la velocidad desarrollada para cada voltaje. Si no dispone de medidores para sensor la velocidad del motor puede solamente medir la magnitud del voltaje mínimo que necesita para arrancar el motor en ambos sentidos y asumir que a partir de ahí su comportamiento es lineal. Esta asunción es válida teniendo en cuenta que perseguimos un fin netamente académico.

### **Modelamiento matemático**

Para obtener un buen modelo matemático empleando técnicas de identificación, se debe alimentar el sistema con una señal de entrada de frecuencia variable que lo excite en su ancho de banda y, posteriormente, con la ayuda de herramientas computacionales (por ejemplo: LabVIEW), se procesan las señales de entrada y salida hasta obtener el modelo que represente en mejor forma la dinámica del sistema.

Sin embargo, no siempre el interesado dispone de las herramientas computacionales ni de tarjetas de adquisición de datos indispensable para la toma de las variables de entrada y salida, por lo que recurriremos a formas manuales no muy precisas pero válidas para lograr un modelo aceptable.

La función de transferencia de un sistema se define como la relación entre la salida y la entrada del sistema en el dominio de Laplace asumiendo condiciones iniciales nulas. Basándonos en la definición de la función de transferencia, aplicaremos una señal escalón al sistema, graficaremos la salida, hallaremos las ecuaciones de cada variable en el dominio

del tiempo, las llevamos al dominio de Laplace, y la relación salida-entrada será el modelo matemático del mismo.

La señal de salida corresponderá a una señal rampa con pendiente **m**

$$y \approx m \times t$$

cuya transformada de Laplace será

$$Y\langle s \rangle \approx \frac{m}{s^2}$$

La señal de entrada corresponde a una señal escalón de amplitud igual a la del voltaje de cd aplicado

$$u\langle t \rangle \approx V$$

cuya transformada de Laplace es

$$U\langle s \rangle \approx \frac{V}{s}$$

El modelo matemático será la función de transferencia del sistema, es decir:

$$G\langle s \rangle \approx \frac{Y\langle s \rangle}{U\langle s \rangle} \approx \frac{m/V}{s}$$

Realice la prueba con diferentes voltajes aplicados al motor, para un mismo tiempo de duración de la experiencia, y verifique que la relación  $m/V$  permanezca aproximadamente constante.

### **Modelado matemático del motor**

Se analizará la dinámica de los motores de Corriente Directa (cd) de magneto permanente, que son los más utilizados como actuadores, los motores de cd pueden ser clasificados de acuerdo a la forma en la que el campo magnético es producido y por el diseño de la armadura.

La ecuación diferencial para la corriente de armadura está dada por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_{in} - V_{fce}$$

### **Modelado matemático del motor**

La ecuación de la parte mecánica del motor es:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \tau - r\tau_l$$

El par desarrollado por el motor es:

$$\tau_m = k_m i_a$$

Donde la relación de engranes está dada por:

$$\tau = k_g \tau_m$$

La fuerza contraelectromotriz está dada por:

$$V_{fce} = k_b \omega_m = k_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

Sustituyendo

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

Sustituyendo y  $\tau_l = 0$ , es decir, no se considera el par de carga y la relación de engranes se obtiene:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = k_g k_m i_a$$

Despejando  $i_a$  de (3.6) y haciendo  $L_a = 0$ , debido a que la constante de tiempo eléctrica  $L_a/R_a$  es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica  $J_m/B_m$ , permite reducir el orden del modelo en la dinámica del actuador.

$$i_a = \frac{(V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt})}{R_a}$$

Sustituyendo

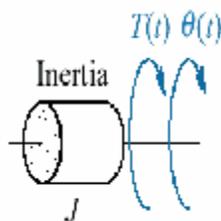
$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{k_g k_m}{R_a} \left( V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt} \right)$$

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{k_g k_m k_b}{R_a} \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{k_g k_m}{R_a} V_{in}$$

$$\frac{R_a}{k_g k_m} \left( J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{k_g k_m k_b}{R_a} \frac{d\theta_m}{dt} \right) = V_{in}$$

$$\left( \frac{R_a J_m}{k_g k_m} \right) \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + \left( \frac{R_a B_m}{k_g k_m} + k_b \right) \frac{d\theta_m}{dt} = V_{in}$$

Component	Torque- angular velocity	Torque- angular displacement	Impedance $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
-----------	--------------------------------	------------------------------------	--



$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$T(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$

$$Js^2$$

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.