



ELEMENTOS DE MÁQUINAS

AÑO 2026

BIBLIOGRAFÍA

- Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett.- *“DISEÑO EN INGENIERÍA MECÁNICA”*- Ed. Mc-Graw hill. Octava edición 2010
- SHIGLEY- MISCKE.- *“DISEÑO EN INGENIERÍA MECÁNICA”*- Ed. Mc-Graw hill.
- MOTT, Robert L.- *“DISEÑO DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS”*.- Ed. Prentice-Hall.
- JUVINALL, Robert C. *“FUNDAMENTOS DE DISEÑO PARA INGENIERÍA MECÁNICA”*. -Ed. LIMUSA.

Flecha-Árboles y ejes

Definiciones:

Que es una flecha?





Es un elemento de máquina rotatorio, por lo general, de sección transversal circular (maciza o hueca), que se emplea para transmitir potencia y/o movimiento.

Flecha-Árboles y ejes

Anatomía del Soporte: **Árbol vs. Eje**







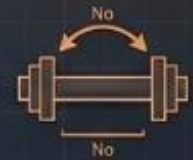
Árboles (Shafts)

- **Naturaleza:** Dinámica (Rotatoria). 
- **Misión:** Transmitir potencia y torque. 
- **Cargas Dominantes:** Torsión combinada con Flexión. 
- **Riesgo Principal:** Fatiga flexo-torsional por ciclos reversibles. 



Ejes (Axles)

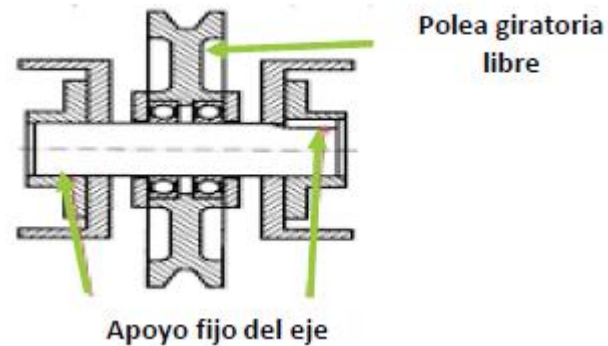
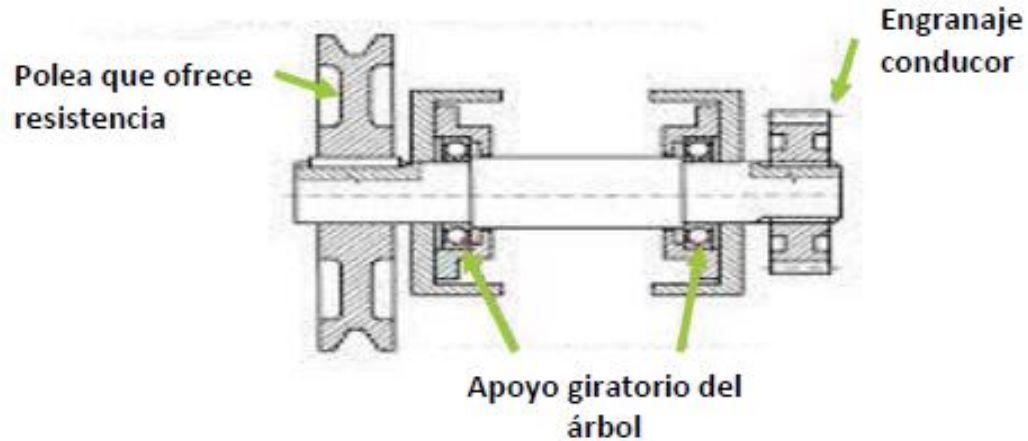
- **Naturaleza:** Pasiva (Estática o soporte libre). 
- **Misión:** Sostener elementos rotatorios (ruedas, poleas). 
- **Cargas Dominantes:** Flexión pura (el momento torsor es cero). 
- **Riesgo Principal:** Deformación estática y colapso por flexión. 



Flecha-Árboles y ejes

Un **eje** puede tener sección transversal que no sea circular, y no necesariamente debe girar. Puede ser estacionario y servir de apoyo a un elemento giratorio, como los ejes cortos (también llamados **husillos**).

Los ejes que soportan elementos, y transmiten **par torsor** se Denominan **árboles**.



Flecha-Árboles y ejes

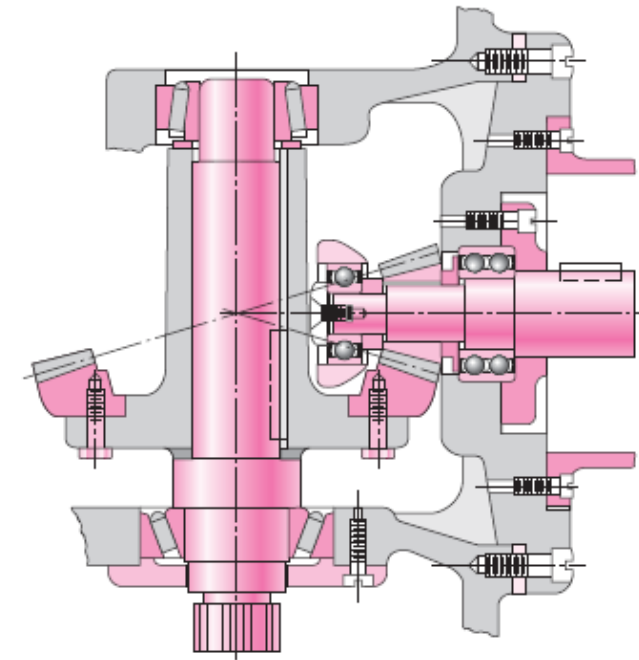
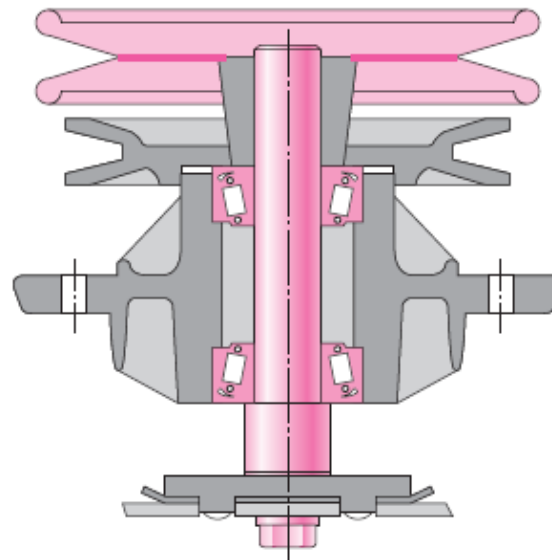
Para el diseño de una Flecha en general se consideraran las siguientes secuencia:

- Predimensionado desde el enfoque de resistencia del material:
 - Estado de carga.
 - Selección del material.
 - Configuración geométrica.
- Verificación de la rigidez (lateral o torsional)
- Ver Pendiente de los cojinetes y elementos soportados
- Verificación de la velocidad crítica.

Tipos de cargas

Tipos de cargas que actúan en la flechas solas o combinadas:

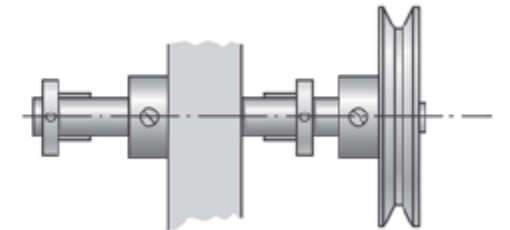
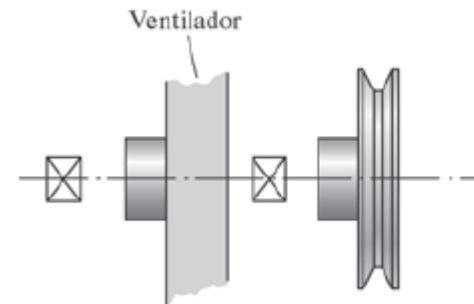
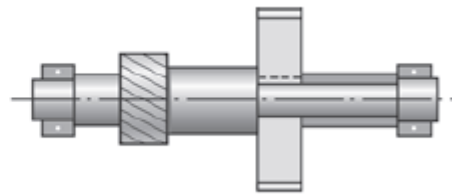
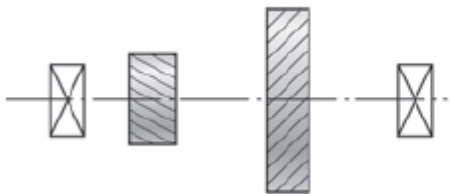
- Cargas que originan flexión.
- Cargas que originan Torsión
- Cargas axiales.

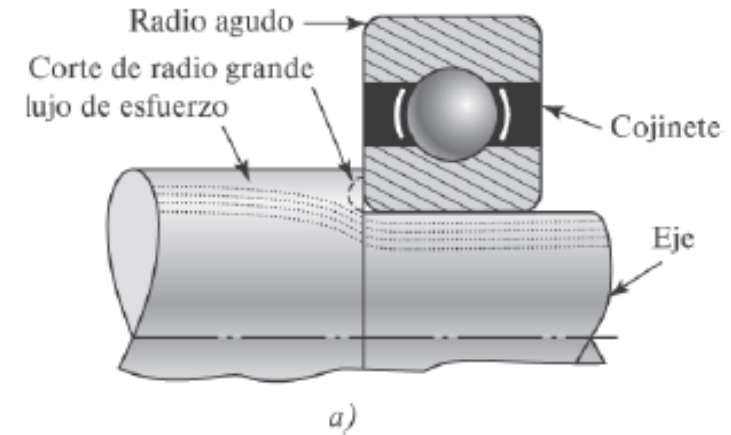
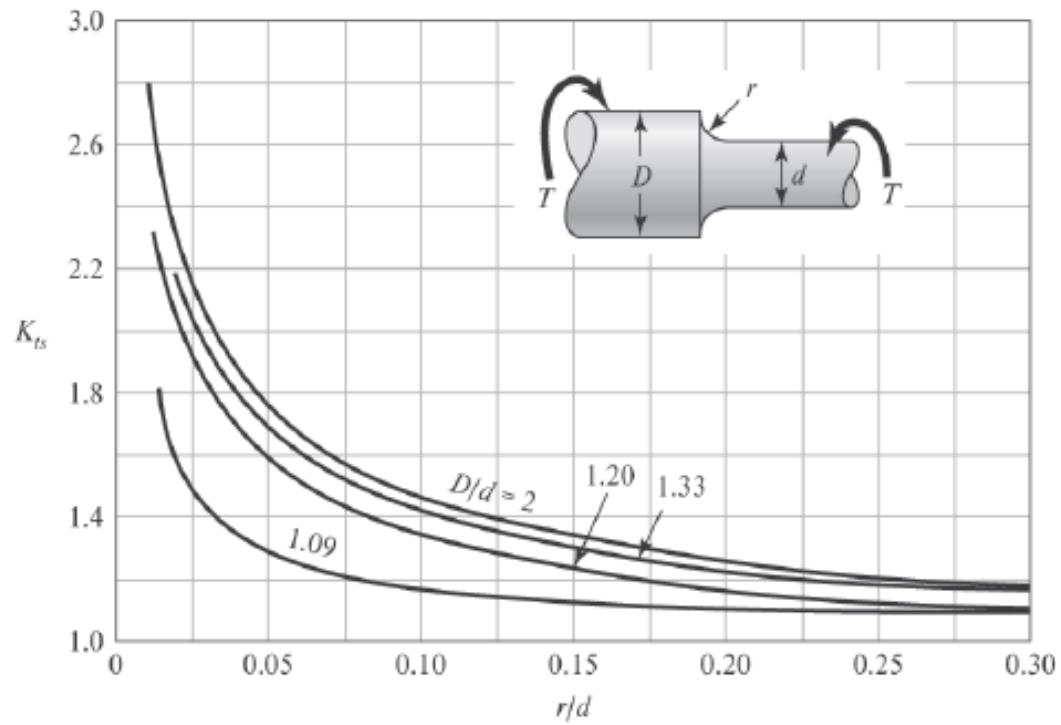


Elementos acoplados

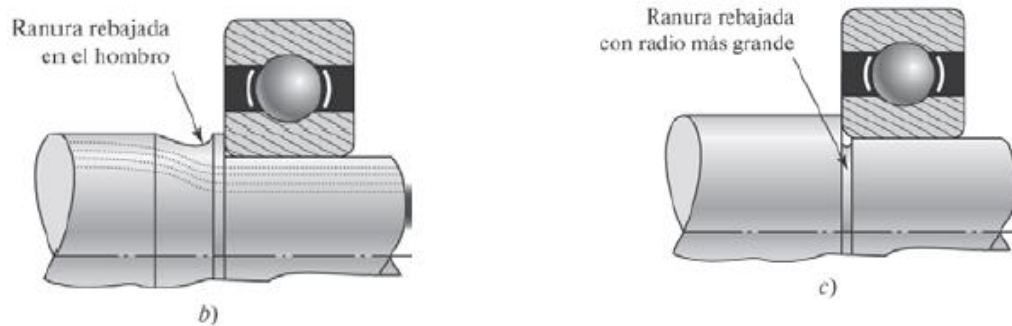
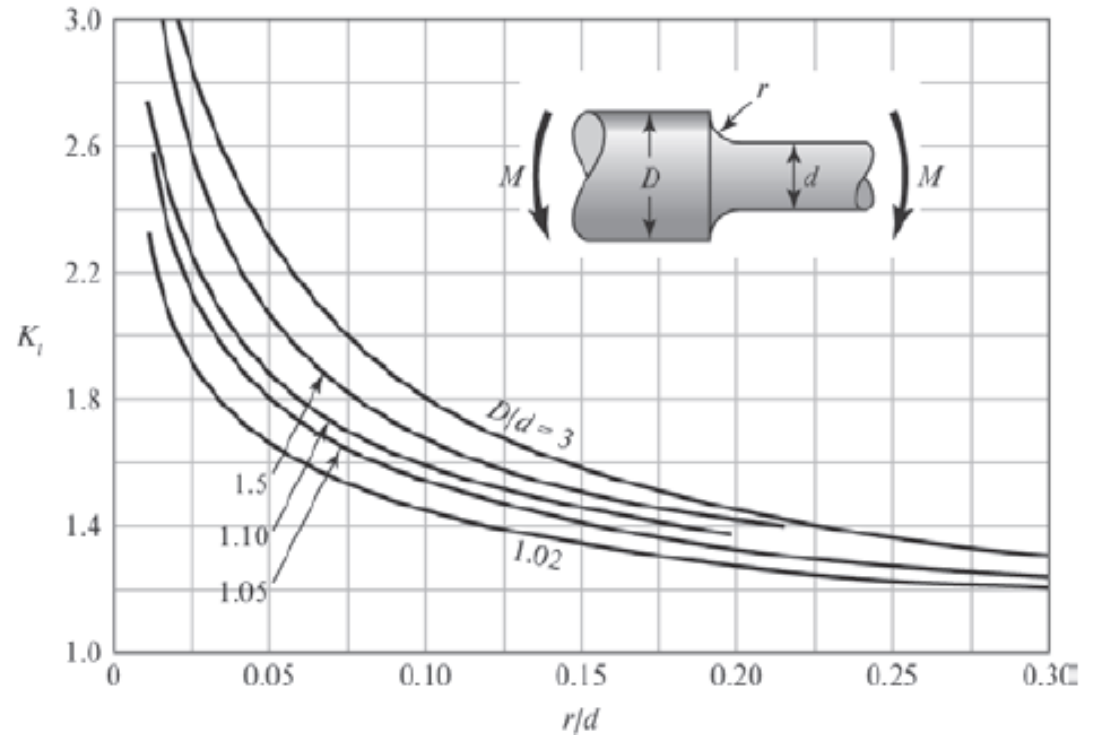
Los elementos que introducen estos tipos de cargas son:

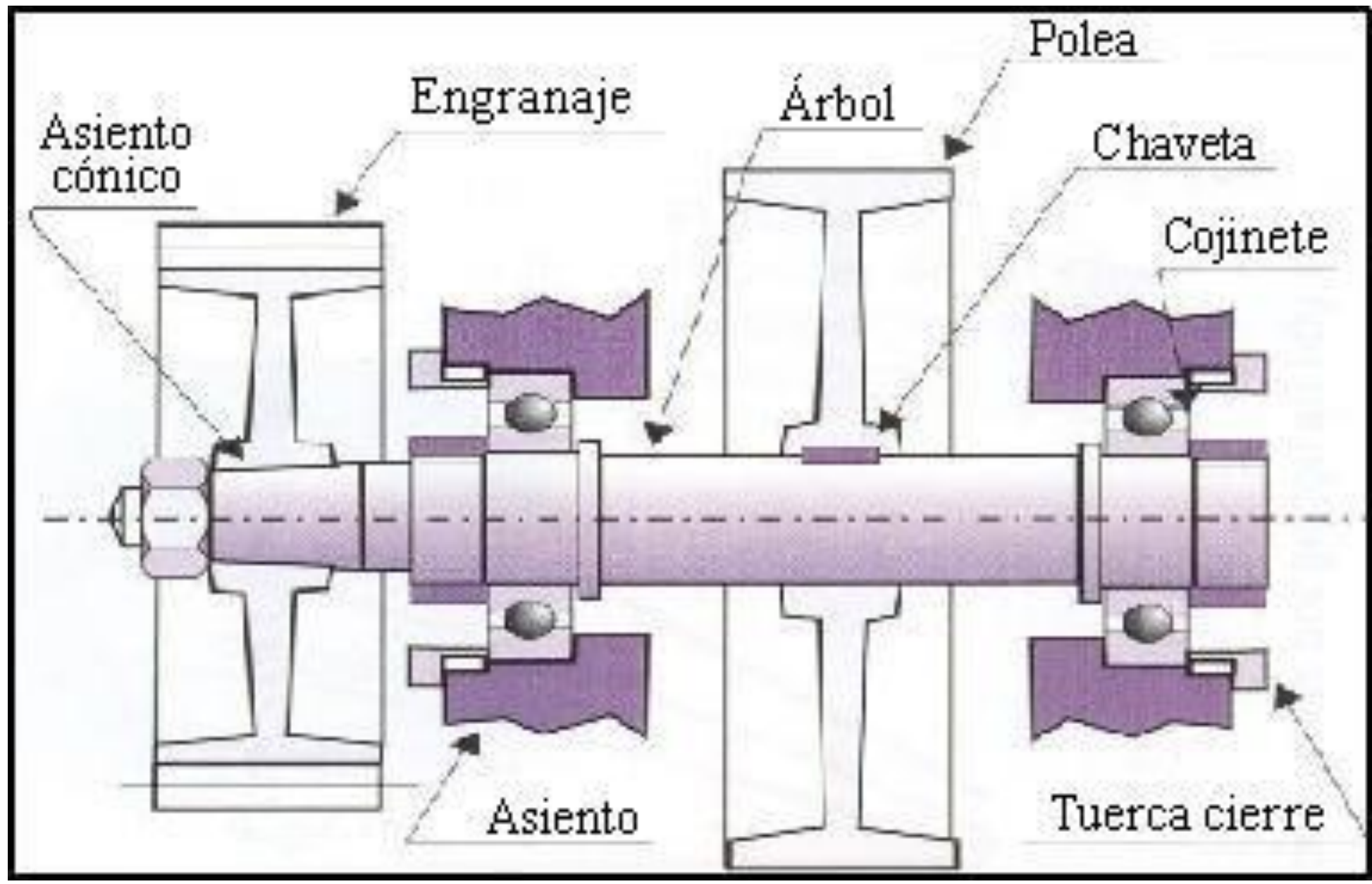
- Poleas para correas: Trapeciales y planas
- Ruedas dentadas: dientes rectos, dientes helicoidales y ruedas cónicas.
- Ruedas dentadas para cadenas
- Cojinetes.





Un cojinete típico necesita que la relación D/d esté entre 1.2 y 1.5
 r/d de 0.02 a 0.06

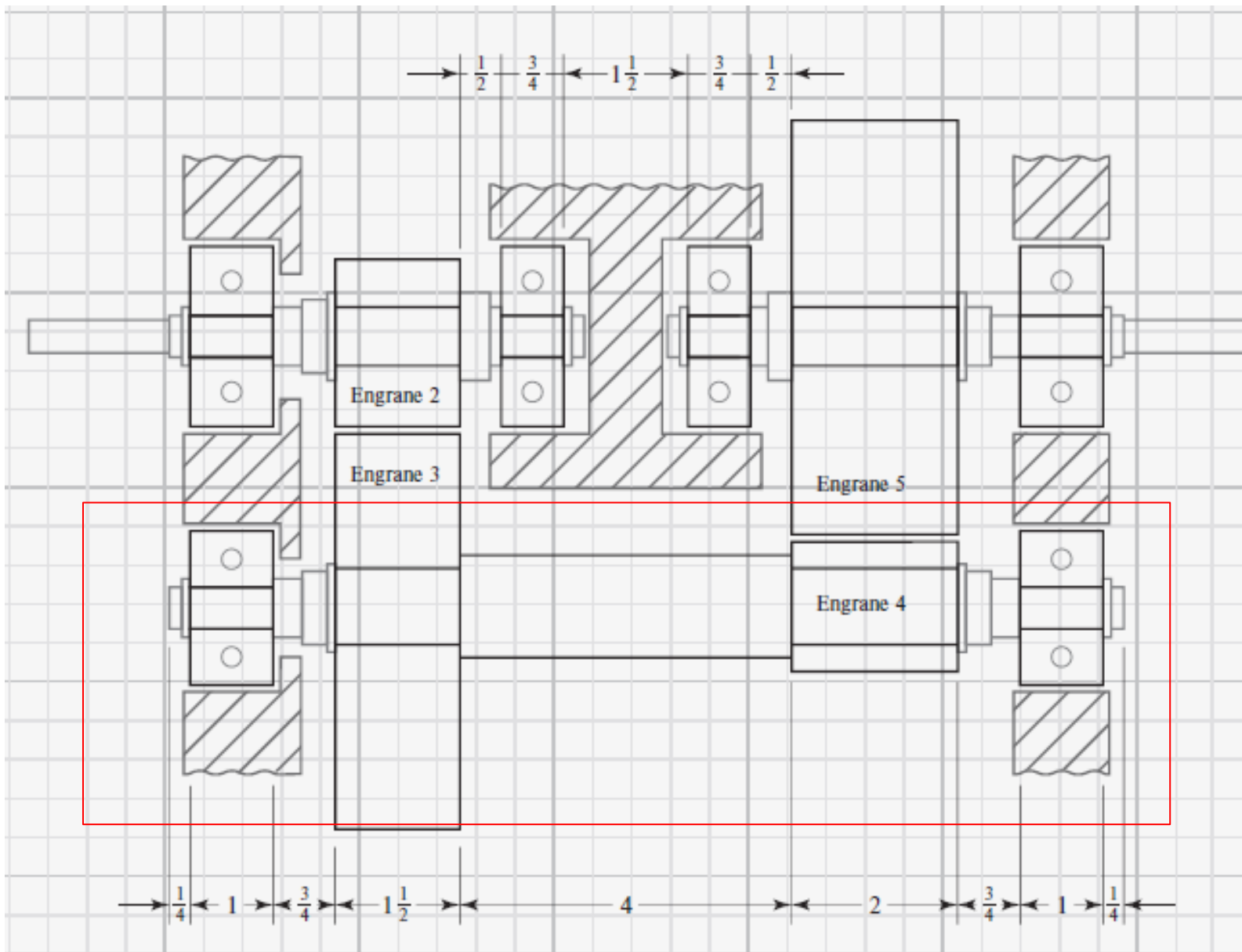


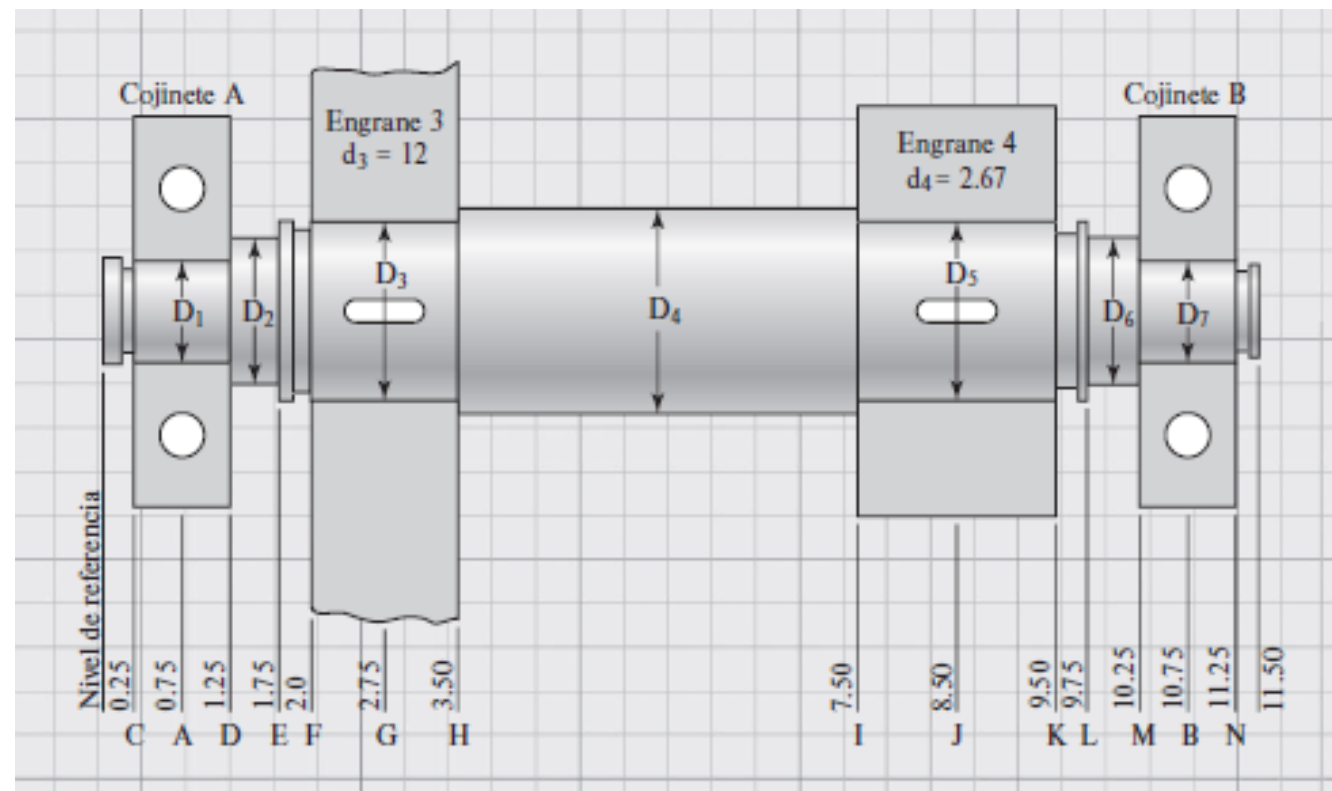


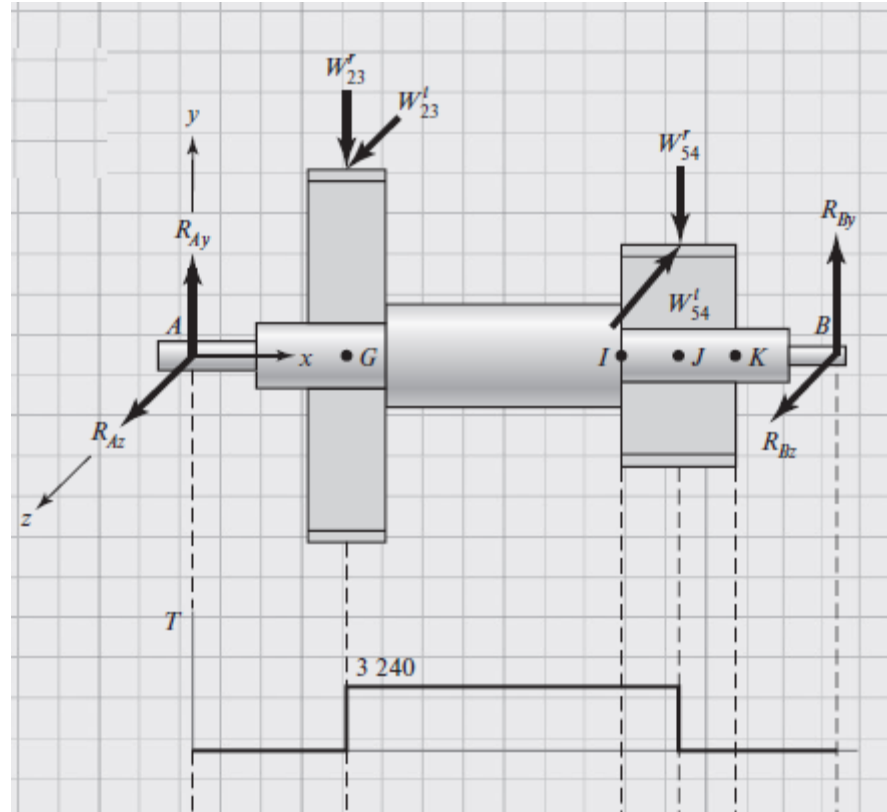
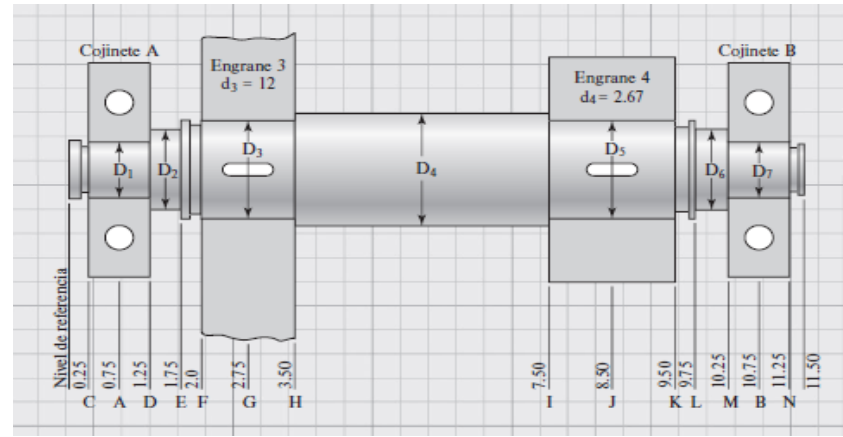




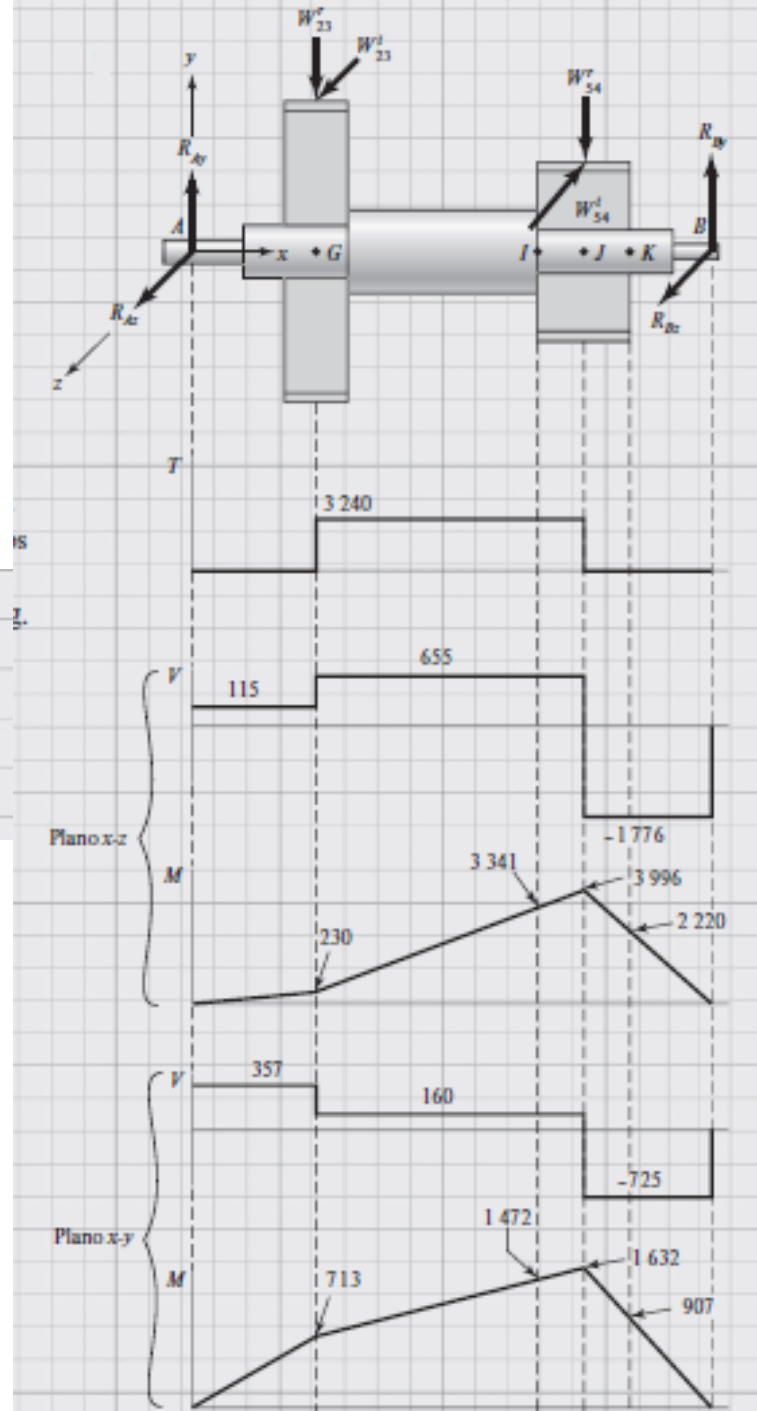




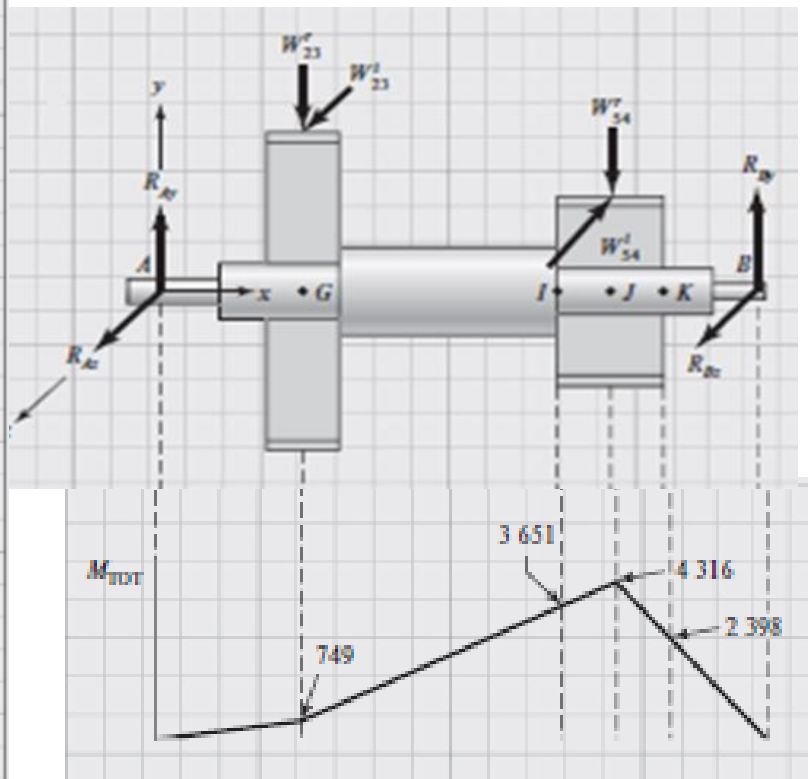




A partir de $\sum M_x$, encuentre el par de torsión en el eje entre los engranes, $T = W_{23}^l(d_3/2) = 540(12/2) = 3\,240 \text{ lbf} \cdot \text{pulg.}$



Combine los planos ortogonales como vectores para obtener momentos totales, por ejemplo, en J , $\sqrt{3\,996^2 + 1\,632^2} = 4\,316 \text{ lbf} \cdot \text{pulg.}$



$$d = \left\{ \frac{16n}{\pi} \left(\frac{2(K_f M_a)}{S_e} + \frac{[3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2}}{S_{ut}} \right) \right\}^{1/3}$$

$$d = \left\{ \frac{16(1.5)}{\pi} \left(\frac{2(1.7)(3\,651)}{27\,000} + \frac{[3[(1.5)(3\,240)]^2]^{1/2}}{68\,000} \right) \right\}^{1/3}$$

$d = 1.65 \text{ pulg}$

Árboles y ejes

La ecuación del Código ASME para un eje hueco combina Torsión, Flexión y Carga axial, aplicando la ecuación del esfuerzo cortante máximo modificada mediante introducción de factores de choque, fatiga y columna:

$$d_o^3 = \frac{16}{\pi S_s (1 - K^4)} \sqrt{\left[K_b M_b + \frac{\alpha F_a d_o (1 + K^2)}{8} \right]^2 + (K_t M_t)^2}$$

Siendo:

$$K = \frac{d_i}{d_o}$$

d_i : diámetro interior del eje y

d_o : el diámetro exterior del eje, ambos medidos en unidad de longitud.

Si el eje es macizo $K=0$

Árboles y ejes

$$d_o^3 = \frac{16}{\pi S_s (1 - K^4)} \sqrt{\left[K_b M_b + \frac{\alpha F_a d_o (1 + K^2)}{8} \right]^2 + (K_t M_t)^2} \quad K = \frac{d_i}{d_o}$$

K_b y K_t : factor combinado de choque y fatiga, aplicado al momento flector y torsor y

S_s (permisible)= 30% del límite elástico sin sobrepasar del 18% del esfuerzo último en tracción, para ejes sin cuñero. Estos valores deben reducirse en 25% si existen cuñeros



Expresiones analíticas de los esfuerzos

Teoría de la Energía de Distorsión

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a c}{I}$$

$$\sigma_a = K_f \frac{32M_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_a = K_{fs} \frac{T_a c}{J}$$

$$\tau_a = K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}$$

$$\sigma_m = K_f \frac{M_m c}{I}$$

$$\sigma_m = K_f \frac{32M_m}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_{fs} \frac{T_m c}{J}$$

$$\tau_m = K_{fs} \frac{16T_m}{\pi d^3}$$

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Expresiones analíticas de los esfuerzos

Teoría de la Energía de Distorsión

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{S_e} \left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} \left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$d = \left(\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} \left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} \left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

Tabla 7-1

Estimaciones de primera iteración de los factores de concentración del esfuerzo K_t y K_{ts} . *Advertencia:* Estos factores solo son estimaciones que pueden usarse cuando las dimensiones reales aún no se determinan. *No* utilice estos valores cuando ya cuente con las dimensiones reales.

	Flexión	Torsión	Axial
Filete de hombro: agudo ($r/d = 0.02$)	2.7	2.2	3.0
Filete de hombro: bien redondeado ($r/d = 0.1$)	1.7	1.5	1.9
Cuñero fresado ($r/d = 0.02$)	2.14	3.0	—
Cuñero de patín o trapezoidal	1.7	—	—
Ranura para anillo de retención	5.0	3.0	5.0

Los valores faltantes en la tabla no pueden obtenerse con facilidad.

Ecuaciones que dan el lugar geométrico de fallas

Soderberg	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_y} = 1$
Goodman	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} = 1$
Gerber	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$
ASME elíptico	$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1$
Bagci	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^4 = 1$
Cedencia (Langer)	$\frac{n}{S_y}(\sigma_a + \sigma_m) = 1$

ED-Goodman

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\}$$

$$d = \left(\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

$$\sigma'_{\text{máx}} = [(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3(\tau_m + \tau_a)^2]^{1/2} \quad n_y = \frac{S_y}{\sigma'_{\text{máx}}} \quad \text{Verificar Fluencia según teoría de falla por fatiga}$$

ED-Soderberg

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{yt}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\}$$

$$d = \left(\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{yt}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

En el caso de un eje giratorio con flexión y torsión constantes, el esfuerzo flexionante es completamente reversible y la torsión es constante.

Pueden simplificarse al igualar M_m y T_a a 0,

Velocidades críticas de ejes

Cuando la geometría es simple, como la de un eje de diámetro uniforme, simplemente apoyado

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}}$$

donde m es la masa por unidad de longitud, A el área de la sección transversal y γ el peso específico.

En el caso de un ensamble de elementos, el método de Rayleigh para masas concentradas establece

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2}}$$

Diámetro sección constante

$$\omega_s = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}}$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Deflexión - Flecha

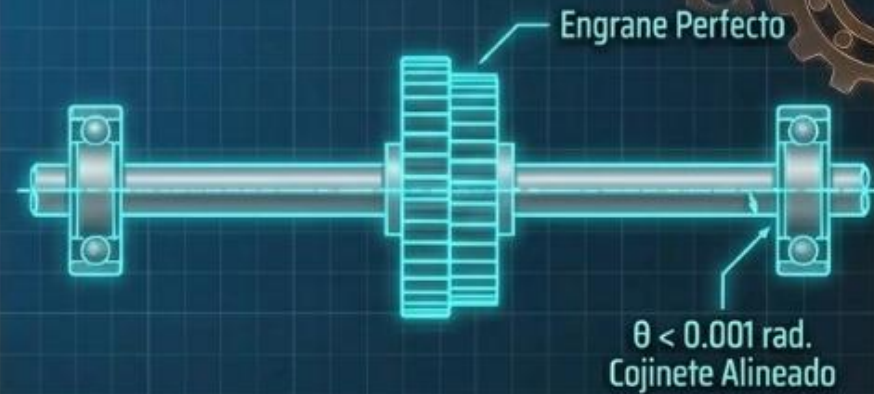
Un árbol puede tener un factor de seguridad infinito contra la rotura y aún así ser inútil.
La rigidez dicta la vida útil del sistema.

- Cojinetes: Si la pendiente (θ) en el soporte excede los 0.001 radianes, el cojinete se destruye prematuramente.
- Engranajes: Una flecha (y) excesiva separa los dientes, concentrando la carga en los bordes y causando astillamiento.

FALLA POR DEFLEXIÓN (Rigidez Insuficiente)

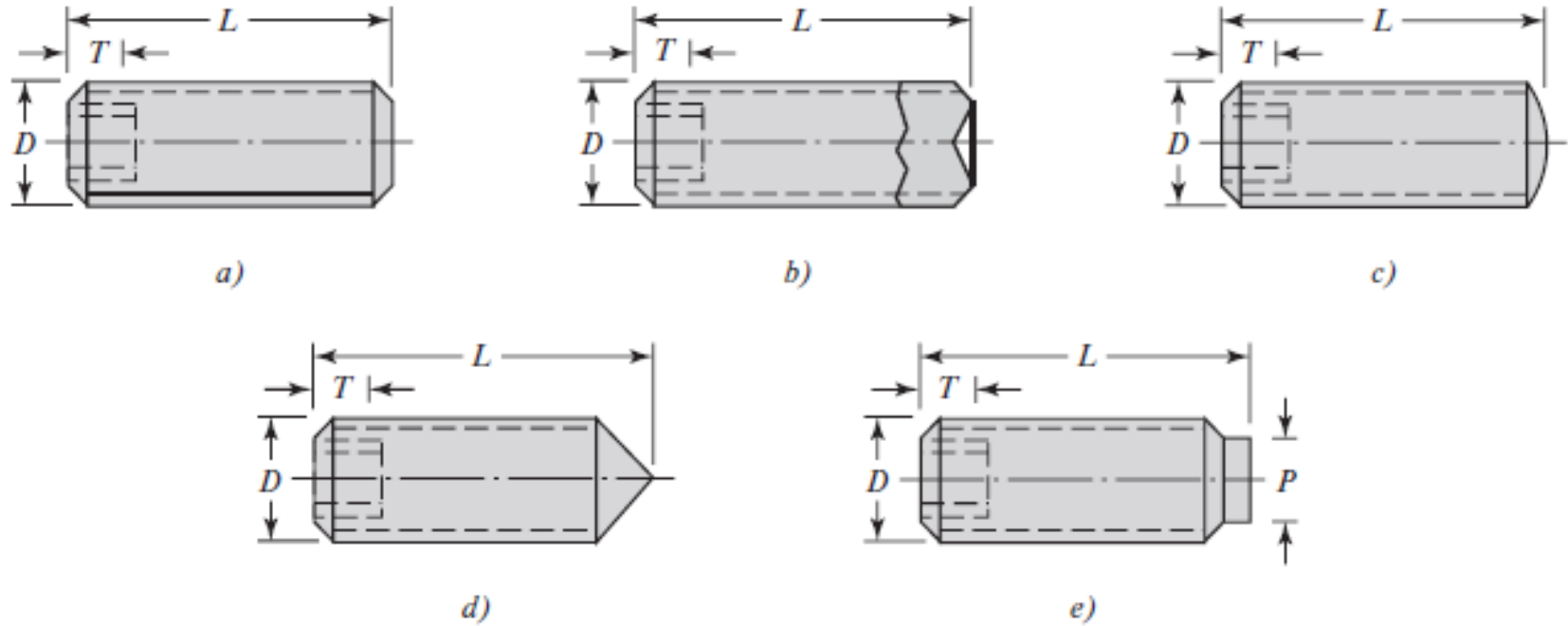


CORRECTO FUNCIONAMIENTO (Rigidez Adecuada)



Componentes diversos de los ejes

Tornillos de fijación



Tornillos de sujeción de cabeza hueca: a) punta plana; b) punta ahuecada; c) punta ovalada; d) punta cónica; e) punta de macho corto.

Tabla 7-4

Potencia (fuerza) de sujeción típica de tornillos de presión de cabeza hueca*

(Fuente: Unbrako Division, SPS Technologies, Jenkintown, Pa.)

Tamaño, pulg	Par de torsión del asiento, lbf · pulg	Potencia de sujeción, lbf
#0	1.0	50
#1	1.8	65
#2	1.8	85
#3	5	120
#4	5	160
#5	10	200
#6	10	250
#8	20	385
#10	36	540
$\frac{1}{4}$	87	1 000
$\frac{5}{16}$	165	1 500
$\frac{3}{8}$	290	2 000
$\frac{7}{16}$	430	2 500
$\frac{1}{2}$	620	3 000
$\frac{9}{16}$	620	3 500
$\frac{5}{8}$	1 325	4 000

Componentes diversos de los ejes

Cuñas y pasadores

Las **cuñas** se emplean para permitir la transmisión del par de torsión del eje al elemento que soportaje

Los **pasadores** se usan para posicionar axialmente y para transferir el par de torsión o empuje, o ambos

- a) Cuña cuadrada;
- b) cuña redonda;
- c) y d) pasadores redondos;
- e) pasador ahusado;
- f) Pasador elástico tubular hendido.

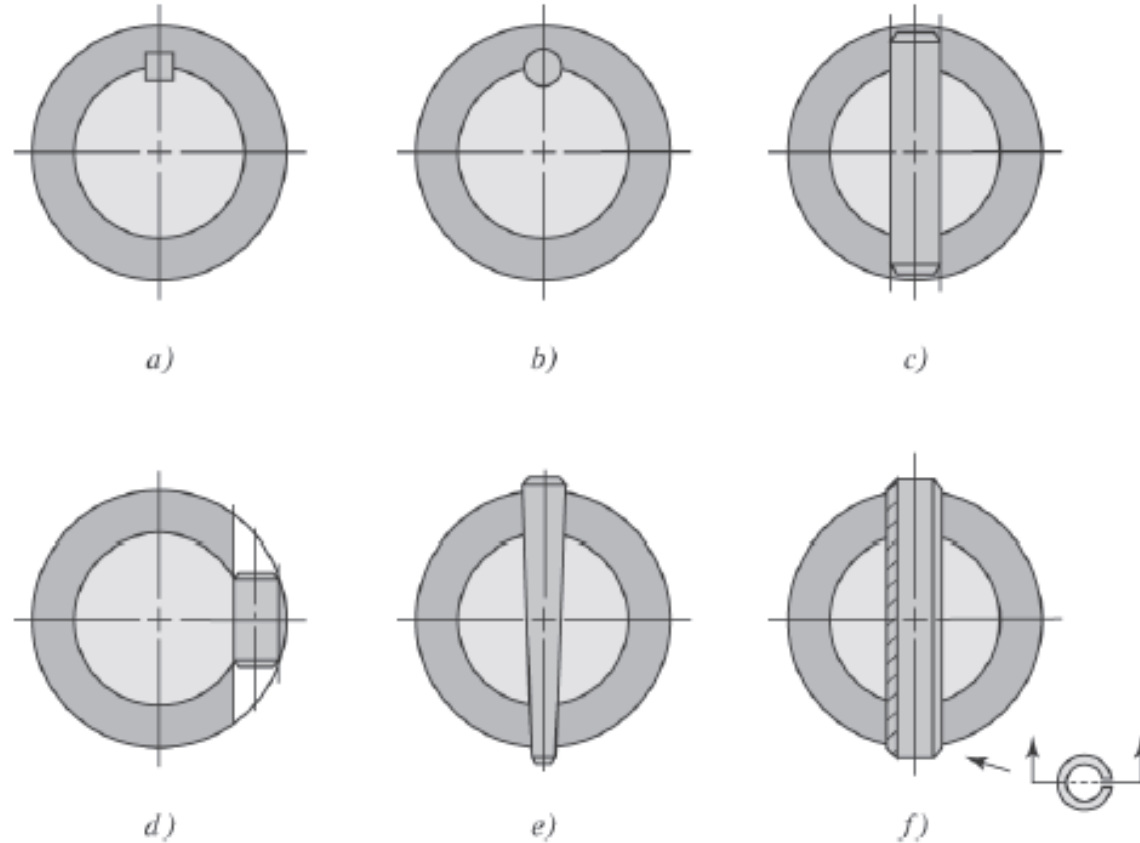
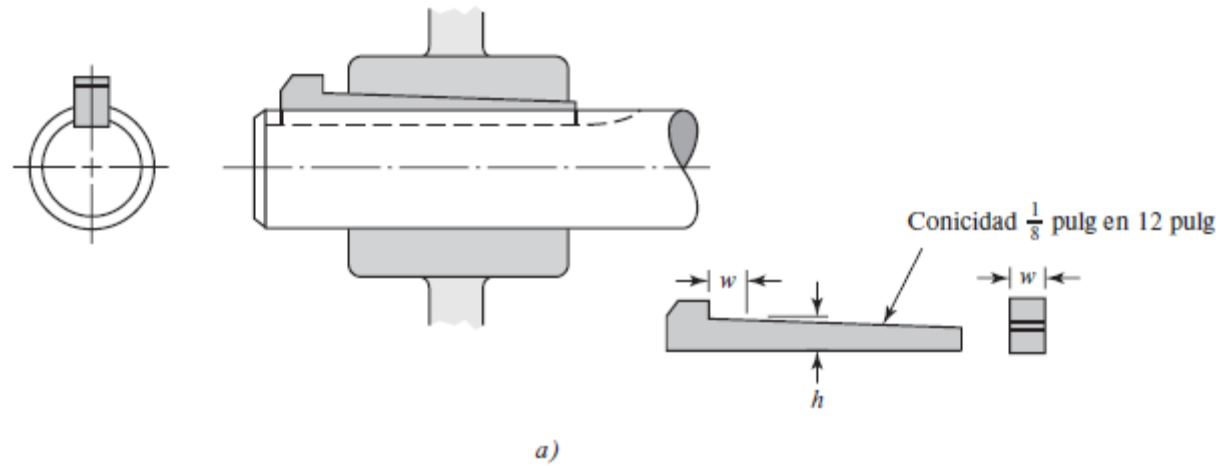


Tabla 7-5

Dimensiones del extremo grande de algunos pasadores ahusados estándar: serie en pulgadas

Tamaño	Comercial		Precisión	
	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
4/0	0.1103	0.1083	0.1100	0.1090
2/0	0.1423	0.1403	0.1420	0.1410
0	0.1573	0.1553	0.1570	0.1560
2	0.1943	0.1923	0.1940	0.1930
4	0.2513	0.2493	0.2510	0.2500
6	0.3423	0.3403	0.3420	0.3410
8	0.4933	0.4913	0.4930	0.4920

- La cuña con cabeza previene el movimiento axial relativo



- La cuña Woodruff

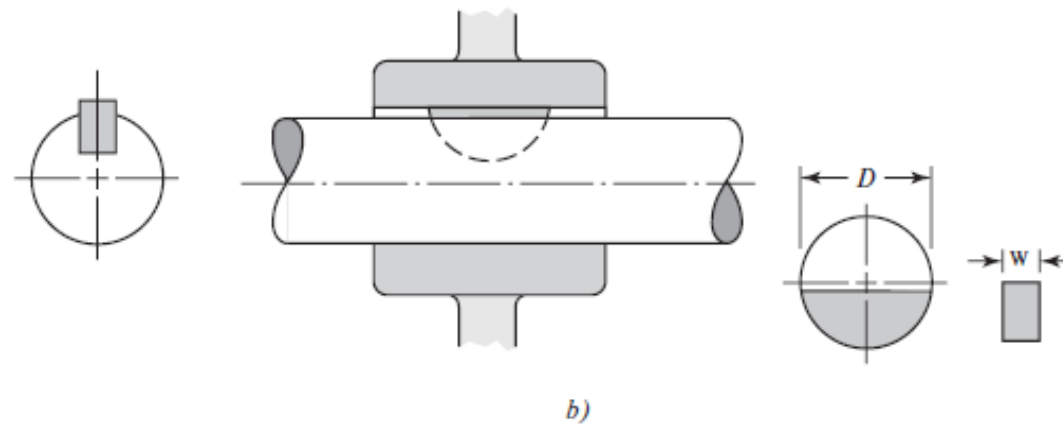


Tabla 7-6

Dimensiones en pulgadas de algunas aplicaciones de cuñas cuadradas y rectangulares estándar

[Fuente: Joseph E. Shigley, "Unthreaded Fasteners", capítulo 24, en Joseph E. Shigley, Charles R. Mischke y Thomas H. Brown Jr. (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004.]

Diámetro del eje		Tamaño de la cuña		Profundidad del cuñero
Más de	Hasta (inclusive)	w	h	
$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$
$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
		$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$
$\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
		$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$
$1\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{32}$
		$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

Tabla 7-8

Tamaños de cuñas Woodruff adecuados para varios diámetros de eje

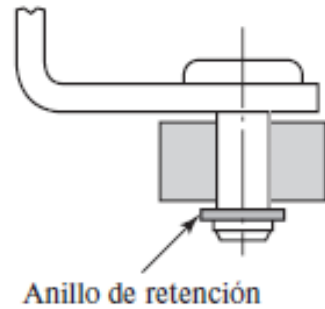
Ancho de la ranura, pulg	Diámetro del eje, pulg	
	De	Hasta (inclusive)
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	$2\frac{1}{4}$
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$	1	$2\frac{5}{8}$

Anillos de retención

Internos y externos



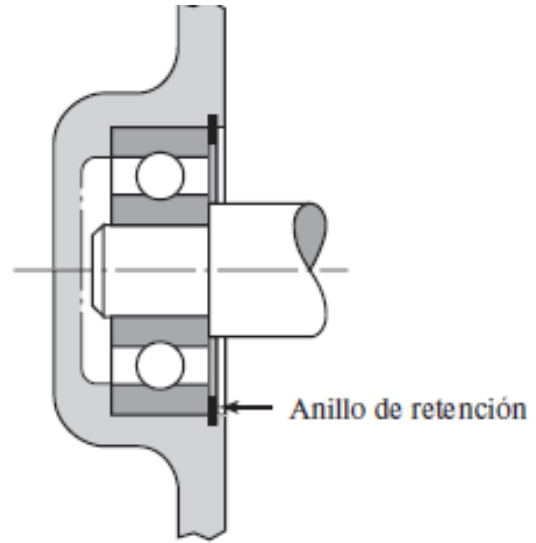
a)



b)

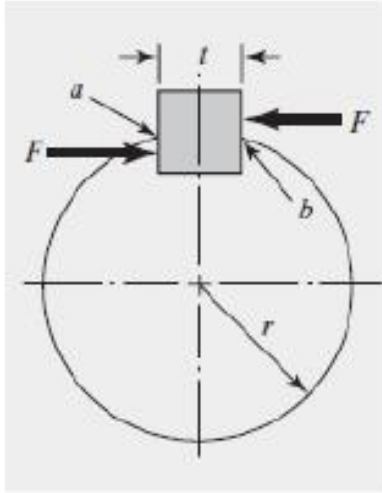


c)



d)

Cálculo de Chavetas



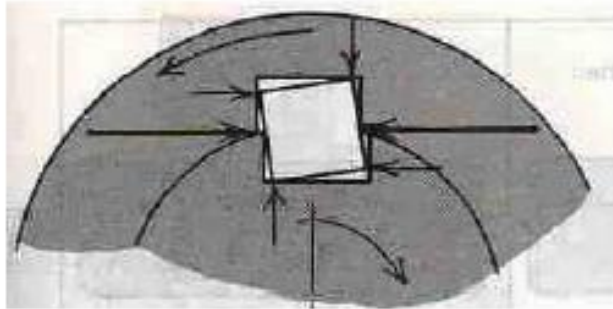
Al corte

$$\frac{S_{sy}}{n} = \frac{F}{tl}$$

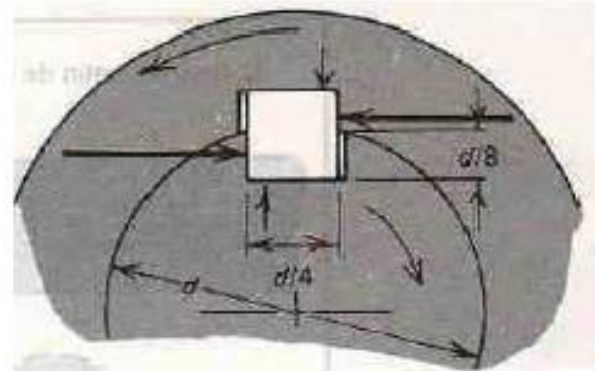
$$S_{sy} = 0.577 S_y$$

Al aplastamiento

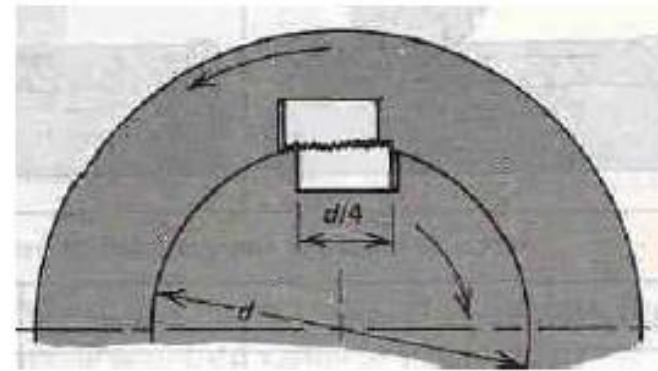
$$\frac{S_y}{n} = \frac{F}{tl/2}$$



Cuña con ajuste flojo



Cuña con ajuste forzado, arriba y abajo

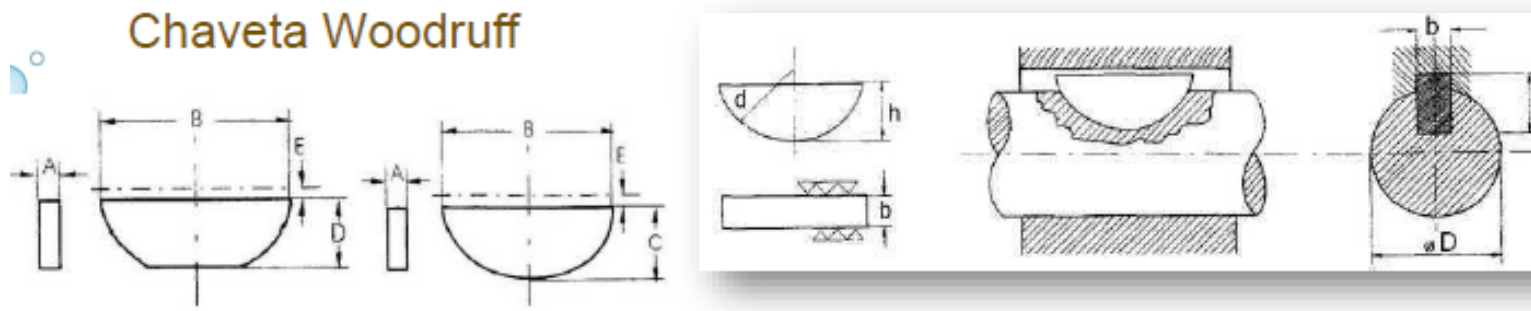


Falla por cortante de una cuña con ajuste forzado

Anillos y Chavetas

Chavetas Medialuna - DIN 6888

Chaveta Woodruff



Tamaño nom. AxB	Ancho	Diám.	Altura		
	0,025	-0,254	C - 0.127	D - 0.006	E
1/16 x 1/4	0,0625	0,25	0,109	-	1/64
1/16 x 5/16	0,0625	0,312	0,14	-	1/64
1/16 x 3/8	0,0625	0,375	0,172	-	1/64
1/16 x 1/2	0,0625	0,5	0,203	0,194	3/64
3/32 x 5/16	0,0938	0,312	0,14	-	1/64
3/32 x 3/8	0,0938	0,375	0,172	-	1/64
3/32 x 1/2	0,0938	0,5	0,203	0,194	3/64
3/32 x 5/8	0,0938	0,625	0,25	-	1/16
1/8 x 3/8	0,125	0,375	0,172	-	1/64
1/8 x 1/2	0,125	0,5	0,203	0,194	3/64
1/8 x 5/8	0,125	0,625	0,25	0,24	1/16
1/8 x 3/4	0,125	0,75	0,313	-	1/16
5/32 x 5/8	0,1563	0,625	0,25	0,194	1/16



Tamaños cuña Woodruff adecuadas para varios diámetros de ejes

Ancho de la ranura, pulg	Diámetro del eje, pulg	
	De	Hasta (inclusive)
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	$2\frac{1}{4}$
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$	1	$2\frac{5}{8}$

Dimensiones cuña Woodruff

Tamaño de la cuña		Altura <i>b</i>	Corrimiento <i>e</i>	Profundidad de la ranura	
<i>w</i>	<i>D</i>			Eje	Maza
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0.109	$\frac{1}{64}$	0.0728	0.0372
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	0.172	$\frac{1}{64}$	0.1358	0.0372
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	0.172	$\frac{1}{64}$	0.1202	0.0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{2}$	0.203	$\frac{3}{64}$	0.1511	0.0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1981	0.0529
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0.203	$\frac{3}{64}$	0.1355	0.0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1825	0.0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2455	0.0685
$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1669	0.0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2299	0.0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2919	0.0841
$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2143	0.0997
$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2763	0.0997
$\frac{3}{16}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.3393	0.0997
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2450	0.1310
$\frac{1}{4}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.3080	0.1310
$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.4170	0.1310
$\frac{5}{16}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.2768	0.1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.3858	0.1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{2}$	0.641	$\frac{7}{64}$	0.4798	0.1622
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.3545	0.1935
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	0.641	$\frac{7}{64}$	0.4485	0.1935