6-1. Vectores en el plano y en el espacio

Continuamos definiendo, caracterizando, y utilizando los vectores geométricos y algebraicos. Presta mucha atención sobretodo a la descomposición normal.

Nos ocupamos aquí de vectores que pueden representarse como segmentos orientados en el plano y en el espacio. Estas formas de «ver» los vectores en el plano([1]) $\mathbb{R}^2$ —mediante un sistema de referencias XY o X_1X_2— o en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ —mediante un sistema de referencias XYZ o $X_1X_2X_3$— permite aplicaciones como por ejemplo en la obtención de ecuaciones de rectas en el plano o en el espacio, referidas a los sistemas de coordenadas que correspondan en cada caso.

Las operaciones con vectores definidas en el capítulo anterior tienen plena validez para los vectores que tratamos ahora.

[1] La notación $\mathbb{R}^2$ deviene de una simplificación del producto cartesiano de dos conjuntos de reales, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cada conjunto real está referenciado por un eje (X o X_1) y (Y o X_2)

6-1.1. Componentes

6-1.1.1. Visualización de las componentes del vector suma

Para los vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ el vector suma $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ tiene componentes $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

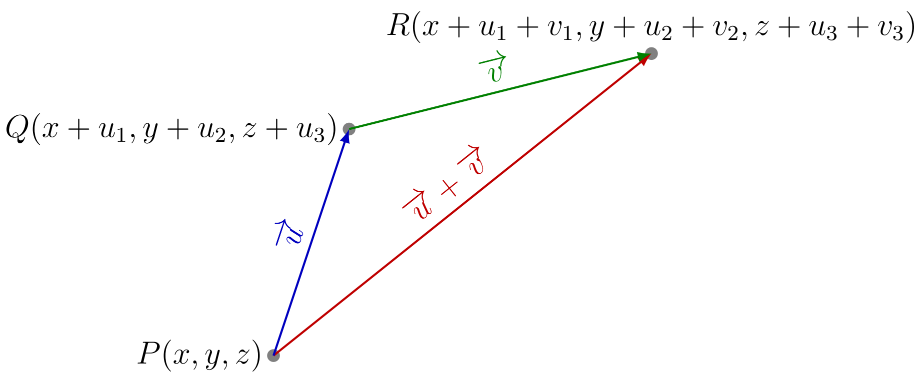


Figura 6.1 Suma por componentes

En efecto; para dibujar la poligonal, tomando como origen del representante de $\overrightarrow{u}$ el punto $P\,(x, y, z)$, y el origen de $\overrightarrow{v}$ en el extremo de $\overrightarrow{u}$, las componentes serán $(u_1 + x, u_2 + y, u_3 + z)$ y $(u_1 + x + v_1, u_2 + y + v_2, u_3 + z + v_3)$ respectivamente, y claramente ves que $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ son las componentes del vector suma.

6-1.1.2. Componentes de un vector escalado

Dado $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \theta$ y $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, el vector escalado

$$\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\lambda u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \tag{6.1}$$

tiene la misma dirección que $\overrightarrow{u}$. Si $\lambda > 0$ tiene también el mismo sentido, y si $\lambda < 0$ tiene sentido opuesto. En la figura se aprecia el efecto para $\lambda_1 = \pm 2$ y $\lambda_1 = \pm 0.5$

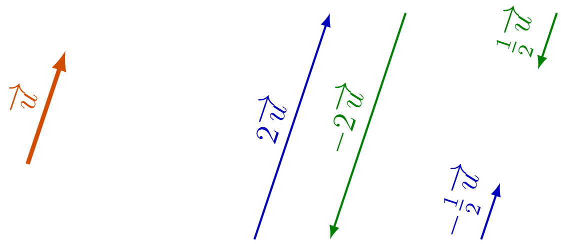


Figura 6.2 Vector escalado

Es evidente que si $\lambda = 0$ el vector resultante es el nulo θ.

El módulo de $\overrightarrow{\lambda u}$ es $|\lambda|\,|\overrightarrow{u}|$. Es decir

$$|\lambda\overrightarrow{u}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{u}|$$

Lo pruebas de la misma forma que en la proposición 3.6, pág.70

Demuestra que el escalado de un vector ya escalado puede escribirse

$$\lambda_1 (\lambda_2 \overrightarrow{u}) = (\lambda_1 \lambda_2) \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\lambda_1 \lambda_2 u} \tag{6.2}$$

6-1.2. Vector Unitario

Es un vector cuyo módulo es igual a 1 —$|\overrightarrow{u}| = 1$—,

Prueba

por ejemplo $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} , -\frac{1}{\sqrt{2}} , 0 \right)$ es un versor, lo cual puedes verificarlo ya que $|\vec{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$;
por otro lado el vector $\overrightarrow{v} = (1 , 1 , 0)$ **no** es un versor.

Para cualquier vector $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \theta$, puedes hallar un versor con la misma dirección y sentido[2] que $\overrightarrow{u}$, simplemente escalando el mismo por el recíproco del módulo

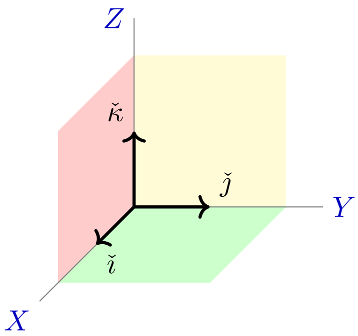
$$\breve{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u} = \left(\frac{u_1}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_2}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_3}{|\overrightarrow{u}|} \right) \tag{6.3}$$

A continuación vemos cuestiones solamente específicas para vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

6-1.3. Vectores fundamentales en el espacio

Algunos vectores particulares son muy interesantes, por lo que recibirán un nombre especial, estos son:

$$\begin{aligned} \breve{\imath} &= (1, 0, 0) \\ \breve{\jmath} &= (0, 1, 0) \\ \breve{\kappa} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \tag{6.4}$$



tomando sus representantes en el origen, estos vectores fundamentales tienen sus direcciones y sentidos coincidentes con los semiejes positivos; como se aprecia en la figura.

La importancia de estos vectores fundamentales –versores– radica en que...

6-1.4. Descomposición canónica

...cualquier vector del espacio puede escribirse de una única manera como combinación lineal de ellos, en otras palabras

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= u_1 (1, 0, 0) + u_2 (0, 1, 0) + u_3 (0, 0, 1) \\ &= u_1 \, \breve{\imath} + u_2 \, \breve{\jmath} + u_3 \, \breve{\kappa} \end{aligned} \tag{6.5}$$

y esto se llama **descomposición canónica de un vector.** Tal como se visualiza en

[2]Ciertas traducciones de libros originales en inglés, como "Algebra Lineal" de Stanley Grossman usan el término *dirección* para especificar ambos, dirección y sentido.

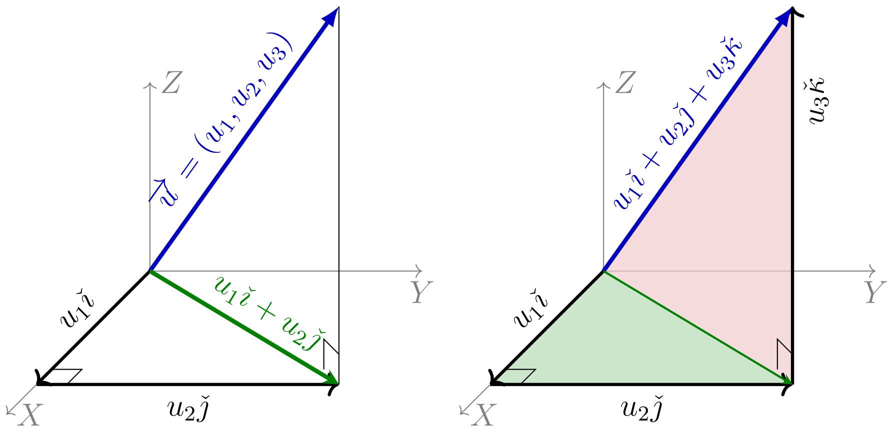


Figura 6.3 Descomposición canónica

la figura 6.3, donde el vector se ha descompuesto en la combinación lineal de los vectores fundamentales (o versores).

6-1.5. Ángulo formado por dos vectores

Para dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el ángulo $0 \leq \theta \leq 180°$ que forman los segmentos orientados[3] se define como el ángulo entre ellos. Como los vectores son libres el ángulo puede verse con representantes en un origen común P

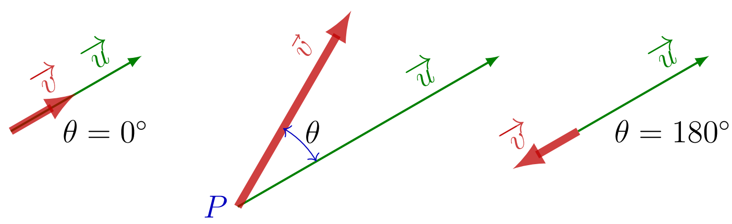


Figura 6.4 ángulo entre vectores $0 \leq \theta \leq \pi$

A la izquierda: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coinciden en dirección y sentido, $\theta = 0°$.

El ángulo entre dos vectores puede deducirse del producto escalar entre ellos $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$, de donde:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \breve{u} \cdot \breve{v} \tag{6.6}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \arccos(\breve{u} \cdot \breve{v}) \tag{6.7}$$

Ejemplo 6.1

Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ *,* $\vec{v} = (-1, -2)$*,* $\vec{w} = (2, 4)$ *y* $\vec{x} = (-2, 1)$*. Calcula los ángulos del primero con cada uno de los otros.*

[3] Otros autores prefieren «el ángulo menor» entre las dos rectas que definen los vectores.

Aplicando la (6.6) o (6.7) para cada caso tenemos

$$\theta_{u-v} = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -1\right) = 180^o$$
$$\theta_{u-w} = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = 1\right) = 0^o$$
$$\theta_{u-x} = \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\right) = 90^o$$

6-1.5.1. Vectores Ortogonales

Aplicando la (6.6) para el caso en que el el producto escalar de dos vectores no nulos fuera cero, $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \breve{u}\cdot\breve{v} = 0$ arroja que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, es decir que los vectores son normales ssi[4] su producto escalar es nulo.

6-1.6. Ángulos directores de un vector

Para un vector no nulo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ se llaman ángulos directores de $\vec{u}$ a los ángulos α_1, α_2 y α_3 (o también α, β y γ) a los ángulos que forma $\vec{u}$ con los versores fundamentales $\breve{\imath}, \breve{\jmath}$ y $\breve{\kappa}$ respectivamente.

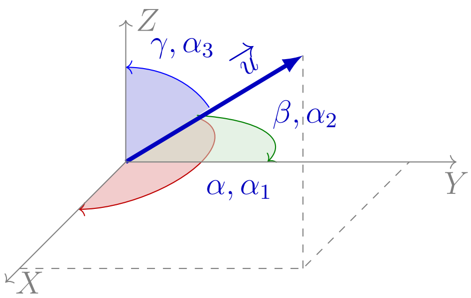


Figura 6.5 ángulos directores

Aplicando la (6.7), y haciendo $\breve{u} = \left(\frac{u_1}{|\vec{u}|}, \frac{u_2}{|\vec{u}|}, \frac{u_3}{|\vec{u}|}\right)$ tenemos que

$$\alpha_1 = \arccos(\breve{u}\cdot\breve{\imath}) = \arccos\left(\frac{u_1}{|\vec{u}|}\right) = \alpha$$
$$\alpha_2 = \arccos(\breve{u}\cdot\breve{\jmath}) = \arccos\left(\frac{u_2}{|\vec{u}|}\right) = \beta$$
$$\alpha_3 = \arccos(\breve{u}\cdot\breve{\kappa}) = \qquad = \gamma$$

α_1, α_2 y α_3 se llaman *ángulos directores*, y sus cosenos; los cosenos directores

$$\cos\alpha_1 = \frac{u_1}{|\vec{u}|} = \cos\alpha, \quad \cos\alpha_2 = \frac{u_2}{|\vec{u}|} = \cos\beta, \quad \cos\alpha_3 = \frac{u_3}{|\vec{u}|} = \cos\gamma \tag{6.8}$$

[4] ssi es una abreviatura para decir «si y sólo si»(doble implicación o equivalencia lógica) $\Leftrightarrow$

de modo que cualquier vector $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\
&= |\overrightarrow{u}| \left(\frac{u_1}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_2}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_3}{|\overrightarrow{u}|} \right) \\
&= |\overrightarrow{u}| (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3) \\
&= |\overrightarrow{u}| \ \breve{u}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

en otras palabras: un vector puede describirse por una parte que le da el módulo, y otra parte que le otorga la dirección y el sentido.

Como $\breve{u} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3) = \left(\frac{u_1}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_2}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_3}{|\overrightarrow{u}|} \right)$ es versor, su módulo:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \tag{6.10}$$

esto significa que no cualquier realización de ángulos pueden ser directores de un vector, ya que ellos quedan vinculados por la (6.10), que se llama **relación fundamental.**

Ejemplo 6.2

¿Puede un vector tener ángulos directores $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$; $\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$ *?*

Como

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \neq 1$$

no pueden ser directores de un vector.

Ejemplo 6.3

Para un vector unitario $(\pi/4, \pi/3, \gamma)$*, calcula* γ*.*

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\alpha_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\alpha_3 = 1$$

de donde

$$\cos^2\alpha_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

y

$$\cos\alpha_3 = \pm\frac{1}{2}$$

de donde dos vectores fundamentales son posibles:

$$\breve{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad , \quad \breve{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

y con ello las familias de vectores que tienen ángulos directores $\big((\pi/4, \pi/3, \pi/3) \big)$ y la familia con ángulos directores $\big((\pi/4, \pi/3, 2\pi/3) \big)$. [a]

[a] Podemos escribirlos a todos esos vectores con la expresión $\{ \, k \, (\sqrt{2}, 1, \pm 1) \, \}$.

6-1.6.1. Observaciones

- Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector determinan dirección y sentido de un vector. En este sentido terminamos la discusión que nos quedaba en la última parte de la sección §3-2.3.1, (pág. 63)
- Si α_1, α_2 y α_3 son directores, $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2$ y $\pi - \alpha_3$ son directores del vector opuesto a aquel.
- Si $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, como $|\overrightarrow{u}| = |-\overrightarrow{u}|$ y como $\cos(\pi - \alpha_i) = \underbrace{\cos\pi}_{-1} \cos\alpha_i + \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0} \operatorname{sen}\alpha_i = -\cos\alpha_i$,

  deduce el coseno de la resta en E-4, pág.241

  se comprueba que las componentes de $-\overrightarrow{u}$ son $(-u_1, -u_2, -u_3)$
- *Las componentes de un versor son sus cosenos directores.*

Un vector puede describirse **unívocamente** mediante
su **módulo** y sus **cosenos directores**

Cada vector puede **descomponerse canónicamente**de una **única** manera

El coseno del **ángulo** entre vectores no nulos
puede calcularse mediante el **producto escalar**

Una **realización**[5]de ángulos directores sólo es posible
si cumplen con la relación fundamental

Podemos decir entonces que dos vectores tienen *igual dirección y sentido* si sus ángulos (cosenos) directores coinciden homólogamente; y tienen *igual dirección pero sentido opuesto* si sus cosenos directores son opuestos (sus ángulos directores son suplementarios).

6-1.7. Propiedades del producto escalar

Recordemos que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3 = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos\theta$. (3.8) y (3.9), pág. 75

6-1.7.1. Distributividad del producto escalar en la suma

Probaremos que el producto escalar es distributivo respecto de la suma simplemente aplicando las operaciones para vectores en el espacio. Aunque los resultados que obtendremos valdrán para cualesquiera tres *n*-vectores

Prueba

Hagamos la cuenta desde un lado y tratemos de llegar al otro

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u} \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\ &= u_1\,(v_1 + w_1) \;+\; u_2\,(v_2 + w_2) \;+\; u_3\,(v_3 + w_3) \end{aligned}$$

[5]Una realización en este contexto, es un conjunto de ángulos $((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$ que cumplen con la ecuación (6.10) en el espacio, o $((\alpha_1, \alpha_2))$ que cumplen con $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha 2 = 1$ en el plano

ahora cada sumando es real, y la distributividad del producto en la suma está garantizada, por eso podemos hacer

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = u_1v_1 + u_1w_1 \;+\; u_2v_2 + u_2w_2 \;+\; u_3v_3 + u_3w_3$$

como cada sumando es real, y hay asociatividad para la suma en los reales, podemos agrupar convenientemente

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (u_1v_1 \;+\; u_2v_2 +\; u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 \;+ u_3w_3)$$

y aplicando la definición de suma, podemos pensar que las anteriores proceden de

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{u}\cdot\vec{w})$$

e identificando por el producto escalar respectivo tenemos que

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \tag{6.11}$$

y ya está.

Cabe decir que la (6.11) vale para más vectores sumandos.

Es evidente que los resultados

$$\begin{aligned} (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} &= \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} && (6.12)\\ (\vec{u_1}+\vec{u_2})\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= (\vec{u_1}+\vec{u_2})\cdot\vec{v} + (\vec{u_1}+\vec{u_2})\cdot\vec{w} \\ &= \vec{u_1}\cdot\vec{v} + \vec{u_2}\cdot\vec{v} + \vec{u_1}\cdot\vec{w} + \vec{u_2}\cdot\vec{w} && (6.13) \end{aligned}$$

son correctos, ya que la (6.12) se basa en la conmutavidad del producto escalar y la (6.11); y claramente puede obtenerse la 6.13, a partir de las (6.11) y (6.12).

Actividad 6.1

Halla $(\vec{u}+\vec{v})^2$*, lo cual representa el producto escalar* $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

6-1.7.2. Producto escalar de vectores escalados

Asimismo, claramente podemos ver que ($k, m, u_i, v_i \in \mathbb{R}$)

$$k\vec{u}\cdot m\vec{v} = (k\,m)\;\vec{u}\cdot\vec{v} \tag{6.14}$$

Prueba

Definamos $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$

$$\begin{aligned} k\,\vec{u}\cdot m\,\vec{v} &= (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)\cdot(mv_1, mv_2, \cdots, mv_n) \\ &= ku_1\,mv_1 + ku_2\,mv_2 + \cdots + ku_2\,mv_2 && \text{producto escalar} \\ &= kmu_1\,v_1 + kmu_2\,v_2 + \cdots + kmu_2\,v_2 && \text{asociatividad en } \mathbb{R} \\ &= (km)(u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + \cdots + u_2\,v_2) && \text{prod. escalar reversa} \\ &= (km)\,\vec{u}\cdot\vec{v} && \text{identificación} \end{aligned}$$

y ya está.

6-1.7.3. Producto escalar y descomposición canónica

Puedes expresar el producto escalar de dos vectores a través de su descomposición canónica. Para los vectores fundamentales los posibles productos escalares son

$$\begin{aligned} \breve{\imath}\cdot\breve{\jmath} = \breve{\imath}\cdot\breve{\kappa} = \breve{\jmath}\cdot\breve{\kappa} = 0 \\ \breve{\imath}\cdot\breve{\imath} = \breve{\jmath}\cdot\breve{\kappa} = \breve{\kappa}\cdot\breve{\kappa} = 1 \end{aligned} \tag{6.15}$$

lo puedes verificar muy sencillamente haciendo las cuentas,

por ejemplo $\breve{\imath}\cdot\breve{\jmath} = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0$.

En otras palabras: versor fundamental por sí mismo, 1; por otro, 0.

Aprovechando las (6.5) —pág.158— y (6.13) podemos expresar

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= (u_1\,\breve{\imath} + u_2\,\breve{\jmath} + u_3\,\breve{\kappa})\cdot(v_1\,\breve{\imath} + v_2\,\breve{\jmath} + v_3\,\breve{\kappa}) \\ &= (u_1\,\breve{\imath}\cdot v_1\,\breve{\imath} + u_1\,\breve{\imath}\cdot v_2\,\breve{\jmath} + u_1\,\breve{\imath}\cdot v_3\,\breve{\kappa}) + (u_2\,\breve{\jmath}\cdot v_1\,\breve{\imath} + u_2\,\breve{\jmath}\cdot v_2\,\breve{\jmath} + u_2\,\breve{\jmath}\cdot v_3\,\breve{\kappa}) + \\ &\quad + (u_3\,\breve{\kappa}\cdot v_1\,\breve{\imath} + u_3\,\breve{\kappa}\cdot v_2\,\breve{\jmath} + u_3\,\breve{\kappa}\cdot v_3\,\breve{\kappa}) \\ &\qquad\qquad \text{por lo que hemos visto en (6.14) y (6.15),} \\ &= u_1v_1\,\breve{\imath}\cdot\breve{\imath} + u_1v_2\,\breve{\imath}\cdot\breve{\jmath} + u_1v_3\,\breve{\imath}\cdot\breve{\kappa} + u_2\,v_1\breve{\jmath}\cdot\breve{\imath} + u_2v_2\,\breve{\jmath}\cdot\breve{\jmath} + u_2v_3\,\breve{\jmath}\cdot\breve{\kappa} + \\ &\quad + u_3v_1\,\breve{\kappa}\cdot\breve{\imath} + u_3\,v_2\breve{\kappa}\cdot\breve{\jmath} + u_3\,v_3\breve{\kappa}\cdot\breve{\kappa} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3\,v_3 \end{aligned}$$

¡como era de esperarse!

6-1.8. Descomposición normal

Ya hemos visto la descomposición canónica de un vector 6-1.4, pág.158), ahora podemos descomponer un vector $\overrightarrow{u}$ la suma de un vector en la dirección de otro $\overrightarrow{v}$, más un vector perpendicular a ese otro. Veamos la figura 6.6, ya sea en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, en ella hemos descompuesto el vector $\overrightarrow{u}$ en la suma de dos vectores:

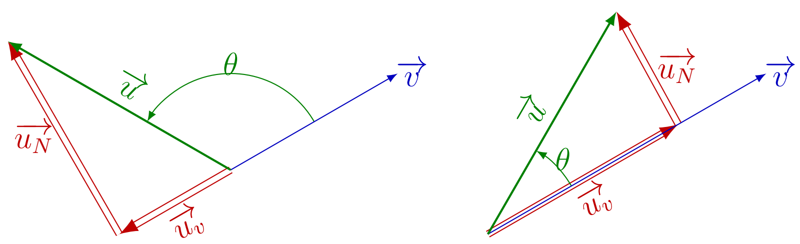


Figura 6.6 Descomposición en una dirección y su normal

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_v} + \overrightarrow{u_N} \tag{6.16}$$

$\overrightarrow{u_v}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$ (paralela), y $\overrightarrow{u_N}$ en la dirección normal a $\overrightarrow{v}$.

La magnitud (no el módulo, porque cuando $90^o < \theta < 180^o$ el signo de coseno es negativo) del vector $\overrightarrow{u_v}$ proyección de $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$ es (por trigonometría) :

$$\text{Proy}_v\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}| \cdot \cos\theta \qquad \text{(Proyeccion escalar)}$$

La **proyección $\overrightarrow{u_v}$ de $\overrightarrow{u}$ sobre la dirección de $\overrightarrow{v}$** —que es otro vector— es

$$\overrightarrow{u_v} = |\overrightarrow{u}|\cos\theta \cdot \breve{v} = \text{Proy}_v\overrightarrow{u}\ \breve{v} \qquad \text{(Proyeccion)}$$

$\breve{v}$ nos da la dirección de $\overrightarrow{u_v}$, y $\text{Proy}_v\overrightarrow{u}$ nos da el módulo y el sentido.

$$\text{Proy}_v\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} \tag{6.17}$$

así como la proyección —vector proyección—

$$\overrightarrow{u_v} = |\overrightarrow{u}|\cos\theta \cdot \breve{v} = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v}$$

$\text{Proy}_v\overrightarrow{u}$ notan otros libros[6] como «la componente de $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$» . Sin embargo este último concepto está mejor expresado como

$$\text{Comp}_v\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \frac{|\overrightarrow{u}|\cos\theta}{|\overrightarrow{v}|} \qquad \text{(Componente)}$$

Las proyecciones escalares de un vector $\overrightarrow{u}$ sobre los ejes son sus componentes

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\text{Proy}_i\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\cdot\breve{\imath} = u_1 \ , \ \text{Proy}_j\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\cdot\breve{\jmath} = u_2 \ , \ \text{Proy}_k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\cdot\breve{\kappa} = u_3$$

por estar referidas a los vectores fundamentales.

La otra proyección —en la dirección normal a $\overrightarrow{v}$— en la (6.16) figura 6.6...

$$\overrightarrow{u_v} = (\overrightarrow{u}\cdot\breve{v})\ \breve{v} \tag{6.18}$$
$$\overrightarrow{u_N} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_v} \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.4

Descompone el vector $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$ en la combinación lineal de un vector paralelo a $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$, más otro perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

De acuerdo con lo que hemos visto arriba, la proyección buscada es

$$\overrightarrow{u_v} = \frac{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v}\ \overrightarrow{v}}\ \overrightarrow{v} = \frac{(1,2,3)\ (1,0,-1)}{(1,0,-1)\ (1,0,-1)}\ (1,0,-1) = (-1,0,1)$$

Asimismo $\overrightarrow{u_N} = (1,2,3) - (-1,0,1) = (2,2,2)$ y

$$(1,2,3) = (-1,0,1) + (2,2,2)$$

es la respuesta pedida

Resumiendo:

[6]Si fuera tratado como la componente en la dirección dada por el **versor** $\breve{v}$, ambas definiciones coincidirían. Nosotros preferimos la otra, ya que el sentido de componente es cuántos de $\overrightarrow{v}$ es la proyección de $\overrightarrow{u}$ sobre la dirección de $\overrightarrow{v}$. En otras palabras: *componente de* $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{v}$ es el escalar que debes multiplicar $\overrightarrow{v}$ para obtener el vector proyección $\overrightarrow{u_v}$

Proyección escalar número	**Proyección escalar** vector	**Componente** número
$\text{Proy}_v\vec{u} = \vec{u} \cdot \check{v}$	$\vec{u_v} = \vec{u} \cdot \check{v} \cdot \check{v}$	$\text{Comp}_v\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \check{v}}{\|\vec{v}\|}$

$\vec{u_v}$: vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$

$\text{Proy}_v\vec{u}$: escalar que representa la magnitud (con signo) del vector proyección respecto del versor de $\vec{v}$

$\text{Comp}_v\vec{u}$: escalar que representa la magnitud (con signo) del vector proyección respecto del vector $\vec{v}$

6-2. Producto vectorial (producto cruz)

El producto cruz tiene infinidades de aplicaciones en las distintas ramas de la ingeniería.

El producto vectorial[7] se define como la cuenta

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{bmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{\kappa} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \right| \tag{6.20}$$

A partir de la misma podemos ver que el producto vectorial de dos vectores...

1. es otro vector.
   Desarrollando (6.20) tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \left| \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \right| \check{\imath} - \left| \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} \right| \check{\jmath} + \left| \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \check{\kappa} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\,\check{\imath} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\check{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\check{\kappa} \\ &= \left(\; u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \; \right) \\ &= \vec{w} \end{aligned}$$

2. es un vector normal a ambos.

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = 0$$

   y

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = 0$$

[7]Este producto es válido sólo para los vectores de $\mathbb{R}^3$. Y la definición no es exactamente esta.

3. es opuesto si se permutan los vectores

$$\vec{v} \times \vec{u} = \left| \begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{\kappa} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \right| = -\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = -\vec{w}$$

 por propiedad de determinantes

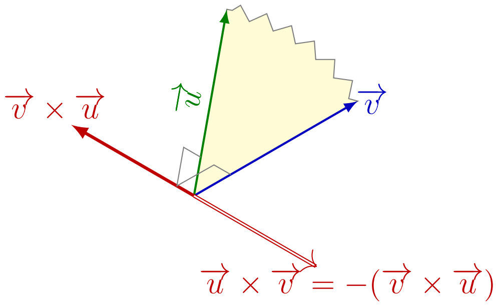


Figura 6.7 Normalidad y no conmutatividad del producto vectorial

4. es distributivo respecto de la suma

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{e}) &= \left| \begin{bmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{\kappa} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + e_1 & v_2 + e_2 & v_3 + e_3 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{pmatrix} u_2\,(v_3 + e_3) - u_3\,(v_2 + e_2) \\ u_3\,(v_1 + e_1) - u_1\,(v_3 + e_3) \\ u_1\,(v_2 + e_2) - u_2\,(v_1 + e_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 e_3 - u_3 e_2 \\ u_3 e_1 - u_1 e_3 \\ u_1 e_2 - u_2 e_1 \end{pmatrix} \\ &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{e} \end{aligned}$$

6-2.1. Propiedades del Producto Vectorial

1. El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de ellos.
   $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad , \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

2. Escalar uno u otro vector antes del producto vectorial es lo mismo que escalarlo después.
   $k\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times k\vec{v} = k\ (\vec{u} \times \vec{v})$

3. El producto vectorial de dos vectores colineales es el vector nulo
   $\vec{u} \times \overrightarrow{ku} = \theta$

4. La conmutación del producto vectorial produce el vector opuesto
   $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$

5. El módulo del producto vectorial es la superficie del paralelogramo definido por los vectores
   $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\operatorname{sen}\theta| = Area_{u-v}$
    ya que $|\vec{u}|\,|\operatorname{sen}\theta|$ representa la altura del paralelogramo y $|\vec{v}|$ la base.
   Puedes revisar la figura 6.8 (Vé a la §A-2.4, pág.207 para segir la deducción de la misma.)

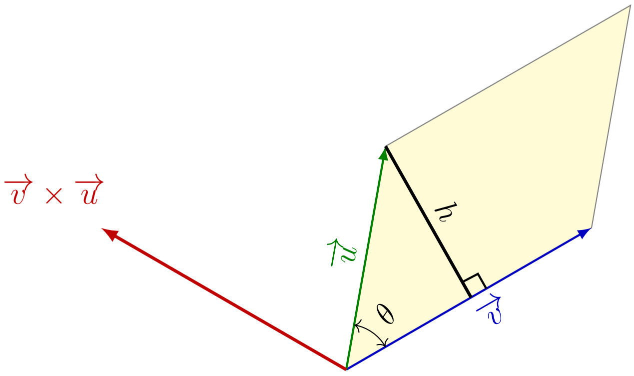


Figura 6.8 Área y producto vectorial

6. El sentido del producto vectorial puede entenderse con la regla de la palma de la mano derecha. Se explica en la §6-2.1.2

7. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma
$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$

6-2.1.1. Producto cruz en forma canónica

Apliquemos esta definición a los versores fundamentales (6.4), por ejemplo $\breve{\imath} \times \breve{\jmath}$

$$\breve{\imath} \times \breve{\jmath} = \left| \begin{bmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{\kappa} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \breve{\kappa}$$

como resumen tenemos que:

$$\begin{aligned} \breve{\imath} \times \breve{\jmath} = \breve{\kappa} \quad &, \quad \breve{\jmath} \times \breve{\imath} = -\breve{\kappa} \\ \breve{\jmath} \times \breve{\kappa} = \breve{\imath} \quad &, \quad \breve{\kappa} \times \breve{\jmath} = -\breve{\imath} \\ \breve{\kappa} \times \breve{\imath} = \breve{\jmath} \quad &, \quad \breve{\imath} \times \breve{\kappa} = -\breve{\jmath} \end{aligned}$$

y finalmente $\breve{\imath} \times \breve{\imath} = \breve{\jmath} \times \breve{\jmath} = \breve{\kappa} \times \breve{\kappa} = \theta$

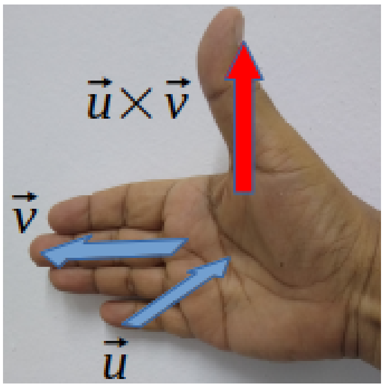
Mnemotécnicamente, podemos alinear los tres versores

$$\breve{\imath} \rightharpoonup \breve{\jmath} \rightharpoonup \breve{\kappa} \rightharpoonup \breve{\imath} \rightharpoonup \breve{\jmath}$$

donde el producto de dos consecutivos hacia la derecha es el tercero, y el producto de dos consecutivos hacia la izquierda es el opuesto del tercero. Una terna de coordenadas cartesianas ortogonales es «a derechas» cuando esto se cumple.

6-2.1.2. Regla de la palma de la mano derecha

En las carreras de ingeniería hay una regla mnemotécnica para saber la dirección y sentido del producto vectorial: es la regla de la palma de la mano derecha, que se ilustra en la figura siguiente.



Extiende tu mano derecha con el pulgar a 90°con los otros dedos, de manera que el primer vector del producto «ingrese» por la palma; haz que los cuatro dedos apunten al otro vector. El pulgar te indicará la dirección y el sentido del producto vectorial.

6-3. Producto mixto

> Completamos las operaciones básicas de los vectores en su versión más recortada: vector geométrico y vector algebraico. A partir del libro 3, tendremos una visión más completa de los vectores.

Combina el producto escalar con el producto vectorial. Es el número real

$$m = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} \tag{6.21}$$

(primero debe hacerse el producto vectorial, de lo contrario el resultado no será un número). Alternativamente puede calcularse

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \left| \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| \tag{6.22}$$

lo verificas muy sencillamente.

6-3.1. Interpretación geométrica

Referido a la figura 6.9 y,

de la definición de producto escalar, podemos escribir

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\cos\theta|$$

$|\vec{v} \times \vec{w}|$ es el área de la base en la figura, como hemos visto en §6-2.1 poco atrás.
$|\vec{u}| \cdot |\cos\theta|$ no es otra cosa que el valor absoluto de la proyección escalar de $\vec{u}$ en la dirección $\vec{v} \times \vec{w}$, es decir la altura del paralelepípedo.
Por tanto $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ representa el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

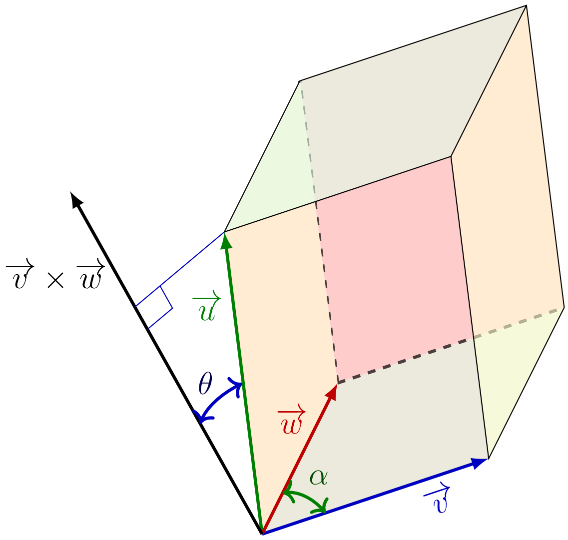


Figura 6.9 Volumen con producto mixto $|\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|$

6-3.2. Propiedades del producto mixto

Claramente (Verifica de acuerdo con la matriz de permutación) puedes ver que una permutación en el producto mixto, sólo cambiarán el signo del resultado numérico,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$$

Y que dos permutaciones no cambian nada (orden: uvwuv)

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

1. Es resistente a la permutacón cíclica
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \vec{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} \times \vec{v}$

2. Arrastra la conmutatividad del producto vectorial
   $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \vec{w})$

3. El valor absoluto es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores
   $Vol_{u-v-w} = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|$

4. Tres vectores son coplanares si el producto mixto es cero

Esta tercera propiedad es sencilla de demostrar: siempre que tres vectores estén todos en un plano, el volumen es cero. En otras palabras el tercer vector está siempre en el plano de los otros dos, porque también es normal al producto vectorial de los otros dos, y por tanto; el producto escalar es nulo.