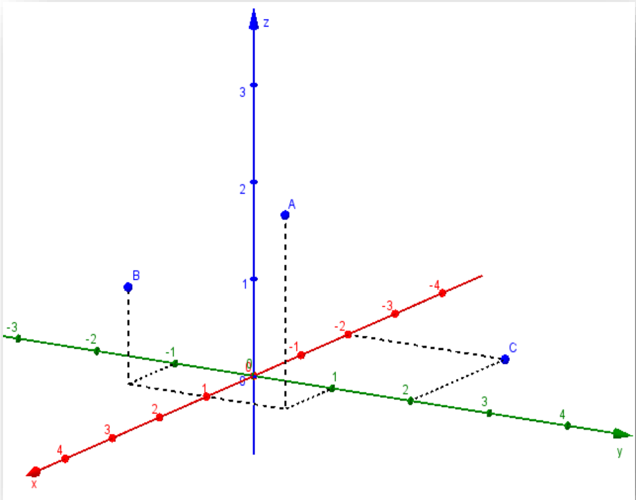
VECTORES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO R³

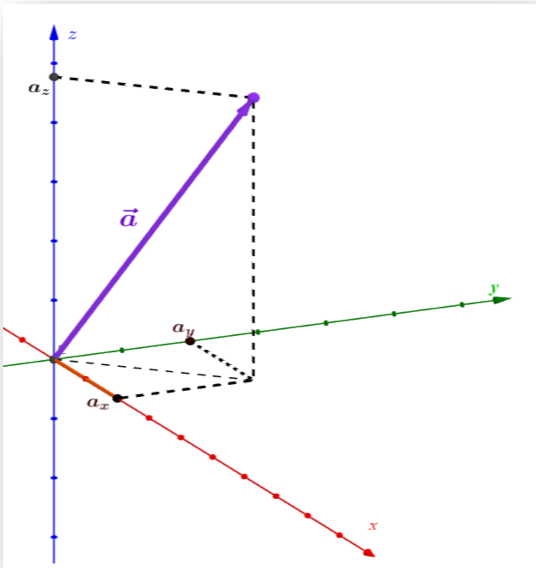
Designamos con R^3 a los vectores geométricos en el espacio y haremos a continuación un estudio analítico de los mismos.

Así como en el plano hemos visto que un punto puede ser representado conociendo un par ordenado (x, y), en el espacio, un punto se representa mediante una terna ordenada (x,y,z) en relación a tres ejes perpendiculares entre sí.

Representa gráficamente los puntos

A (1, 1, 2); B (1, −1, 1); C (−2, 2, 0)





MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ el módulo o longitud de $\vec{a}$, será:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

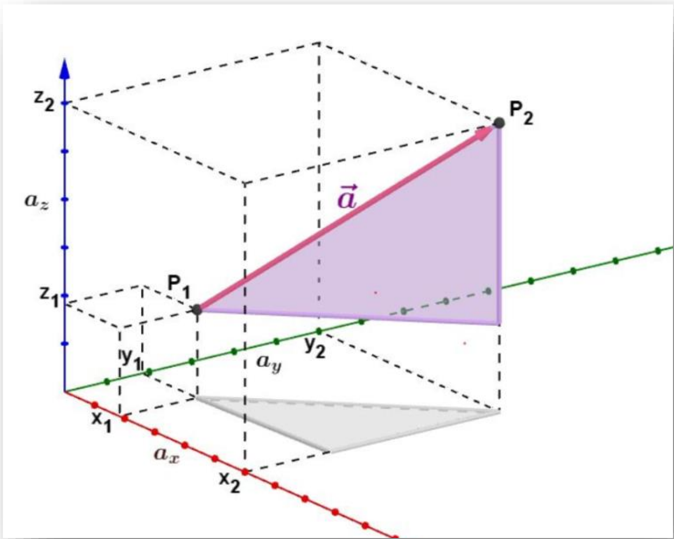
es decir; el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector.

COMPONENTES DE UN VECTOR

Dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ las componentes del vector $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ serán las proyecciones escalares del vector sobre los ejes coordenados

$$a_x = Proy_{OX}\, \overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1$$
$$a_y = Proy_{OY}\, \overrightarrow{P_1P_2} = y_2 - y_1$$
$$a_z = Proy_{OZ}\, \overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$$

$$\vec{a} = (a_x\,, a_y\,, a_z)$$



Sea $\vec{a}$ un vector que tiene a $\overrightarrow{P_1P_2}$ como representante, siendo P_1 $(2, 1, 3)$ y P_2 $(4,5,5)$

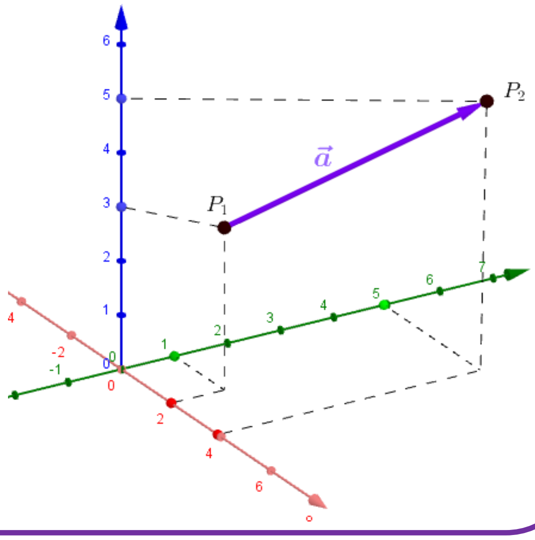
tendremos que:

$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1)$ $\vec{a} =$ $(4-2; 5-1; 5-3)$

$\vec{a} = (2,4,2)$

El módulo de $\vec{a}$ es:

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$



Si Q (6, −5, 7) es el origen del vector $\vec{a} = \overrightarrow{QP} = (-5, 4, 3)$ ¿Cuál es el punto final de ese representante?

Solución:

$\vec{a} = \overrightarrow{QP} \rightarrow \vec{a} = P - Q$ *(Coordenadas del Punto Final – coordenadas del Punto Inicial)*

$(-5\ ,4, 3) = (x_P, y_P, z_P) - (6, -5, 7)$ →*Igualando las componentes homólogas*

$-5 = x_P - 6 \quad \rightarrow \quad x_P = -5 + 6 = 1$

$4 = y_P + 5 \quad \rightarrow \quad y_P = 4 - 5 = -1$

$3 = z_P - 7 \quad \rightarrow \quad z_P = 3 + 7 = 10$

Las coordenadas del punto final son P(1, −1, 10)

Ejercitación 1

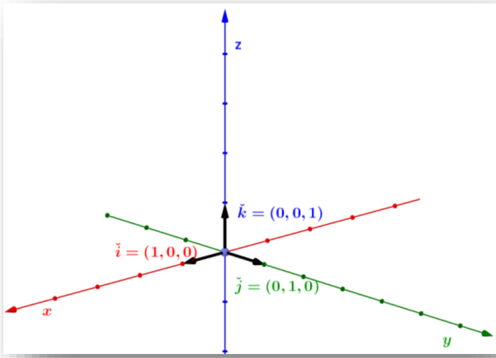
1. El representante de $\vec{b}$ en el origen tiene por extremo al punto M (−5, 4, 3) ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{b}$?

2. Dado $\vec{a} = (3, -3, -7)$
   a) Hallar el extremo o punto final del representante en Q (−3, 2, 5)
   b) Hallar el origen del representante, cuyo extremo es P (2, −5, 6)
   c) Hallar componentes de $-\vec{a}$

Observación: no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

VERSORES EN EL ESPACIO

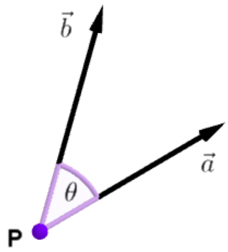
Recordemos que un versor es un vector cuyo módulo es igual a 1. $|\breve{v}| = 1$. En el caso de tratarse de un vector unitario, lo indicamos con un arco en vez de una flecha ($\breve{v}$).
Los versores en R^3 son los vectores:
$\breve{\imath} = (1, 0, 0)$; $\breve{\jmath} = (0, 1, 0)$; $\breve{k} = (0, 0, 1)$; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente



ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES

Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con representantes en un origen común P y no pertenecientes a una misma recta, el ángulo θ de medida positiva y menor que 180°, que forman, es por definición el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

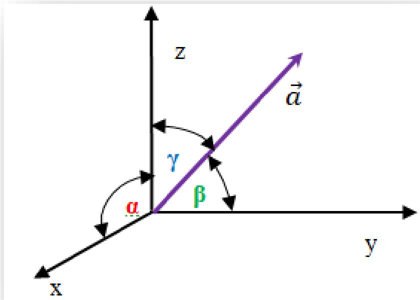
$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



*Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera θ = 0º
*Si tienen dirección opuesta, se considera θ = π = 180º

ÁNGULOS DIRECTORES Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Dado un vector no nulo $\vec{a}$, se llaman ángulos directores de $\vec{a}$, a los ángulos α, β, γ que forma $\vec{a}$ con los versores $\breve{\imath}, \breve{\jmath}, \breve{k}$ respectivamente.



Tomando el representante en el origen de coordenadas, se tiene:
$0 \le \alpha \le \pi$; $0 \le \beta \le \pi$; $0 \le \gamma \le \pi$

¿Cómo es $\vec{a}$ si α = 0? , ¿Si α = π?
¿Cómo es $\vec{a}$ si β = 0? , ¿Si β = π?
¿Cómo es $\vec{a}$ si γ = 0? , ¿Si β = π?
Se llaman cosenos directores de $\vec{a}$, a los cosenos de sus ángulos directores.
Siendo $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y α, β, γ sus ángulos directores se tiene:
$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$; $a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$; $a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$; de donde:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Luego: $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$ (1)
Esto significa que no cualquier terna de ángulos puede ser una terna de ángulos directores de un vector $\vec{a}$, ya que los tres ángulos directores quedan vinculados por medio de la ecuación (1) que es llamada relación fundamental.

*¿Pueden $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$ ser cosenos directores?

Solución: $cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{3} + cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq 1$

Luego, NO pueden ser ángulos directores de ningún vector.

*Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; determinar γ

Solución: aplicando la relación fundamental y despejando γ

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - cos^2\frac{\pi}{4} - cos^2\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = 60°$$

Verificación: $cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{3} + cos^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Observaciones:

**Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo.*

**Si α, β, γ son ángulos directores de $\vec{a}$, π−α, π−β, π −γ son ángulos directores de $-\vec{a}$*

**Si $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, como $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ y*

cos (π – α) = – cos α ; cos (π – β) = – cos β ; cos (π – γ) = – cos γ ; se comprueba que las componentes de $-\vec{a}$ son: $(-a_x, -a_y, -a_z)$.

Podemos precisar entonces el concepto de igual dirección para dos vectores, diciendo que tienen los mismos ángulos (cosenos) directores.

Ejercitación 2

1. Dado $\vec{a}$, tal que $|\vec{a}| = 2$ y sus ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{2\pi}{3}$; determinar sus componentes.
   1.1. Halla el extremo de su representante en $A\ (-1, 3, 2)$
   1.2 Halla el origen del representante, cuyo extremo es $B\ (7, -6, 1)$
   1.3. Halla los ángulos directores y componentes de un vector de dirección opuesto a $\vec{a}$
2. Calcula los cosenos directores del vector $\vec{b} = (\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$
3. ¿Puede un vector tener los siguientes ángulos directores?:
   a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{3\pi}{4}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$
4. ¿Puede un vector formar con dos ejes coordenados los siguientes ángulos?:
   a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$
   b) $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$
   c) En caso afirmativo, ¿cuál es el tercer ángulo?
5. Un vector $\vec{a}$ forma con los ejes x e y, respectivamente, ángulos $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Calcula sus componentes sabiendo que $|\vec{a}| = 2$.
6. Halla las coordenadas de un punto M, que es extremo de $\overrightarrow{OM}$, forma ángulos iguales con los tres ejes, y su módulo es 3.
7. Si $|\vec{a}| = 50$ y dos de sus componentes son $a_x = 3$, $a_y = 4$. ¿Cuál es la tercera componente?
8. Halla los cosenos directores de vectores paralelos a los planos coordenados y de vectores paralelos a los ejes coordenados.

COMPONENTES DEL VECTOR SUMA O DIFERENCIA

Dados $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$; el vector suma $\vec{a} \pm \vec{b}$, tiene por componentes

$(a_x \pm b_x;\ a_y \pm b_y;\ \ a_z \pm b_z)$

*Si $\vec{a} = (1, -3,2)$ y $\vec{b} = (3, -5, 4)$ $\rightarrow$ $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, -3 - 5,2 + 4) = (4, -8, 6)$

*Si $\vec{a} = (1, -3,2)$ y $\vec{c} = (7, -5, 3)$ $\rightarrow$ $\vec{a} - \vec{c} = (1 - 7, -3 + 5,2 - 3) = (-6,2, -1)$

COMPONENTES DEL VECTOR $\lambda\vec{a}$

Dado $\vec{a} \neq 0\ y\ \lambda\ \in$ R, $\lambda\vec{a}$ tiene:

- la misma dirección de $\vec{a}$, si $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si $\lambda < 0$
- el vector nulo si $\lambda = 0$

El módulo de $\lambda\ \vec{a}$ es el módulo de $\vec{a}$ multiplicado por el valor absoluto de λ.

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

$|\overrightarrow{\lambda a}| = \sqrt{\lambda^2\ {a_1}^2 + \lambda^2 {a_2}^2 + \lambda^2 {a_3}^2} = \sqrt{\lambda^2\ ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)} =$

$\lambda\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)} = \lambda|\vec{a}|$

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector $\vec{v}$en la misma dirección de $\vec{a}$ pero de módulo 2

Solución: *si $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son colineales, entonces $\vec{v}$ es múltiplo de $\vec{a}$ o decimos que $\vec{v}$ es el escalado de $\vec{a}$, se escribe $\vec{v} = \lambda\vec{a}$*

$(v_1, v_2, v_3) = \lambda(-3, 2, 6)$ *resolviendo componente a componente tendremos*

$$\begin{cases} v_1 = -3\,\lambda \\ v_2 = 2\,\lambda \quad ① \\ v_3 = 6\,\lambda \end{cases}$$

La segunda condición dice que

$|\vec{v}| = 2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$ *sustituyendo ①en ②*

$2 = \sqrt{(-3\,\lambda)^2 + (2\,\lambda)^2 + (6\,\lambda)^2} =$

$2 = \sqrt{\lambda^2(9 + 4 + 36)}$

$2 = \lambda\sqrt{49} \rightarrow 2 = \lambda\,7 \rightarrow \ \lambda = \frac{2}{7}$ sustituyendo el valor de λ en ① $\vec{v} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$

Verificación: $|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2} = 2$

VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado $\vec{a} \neq \vec{0}$ para hallar un vector unitario $(\breve{a})$ que tengan igual dirección que $\vec{a}$, $\lambda > 0$, basta hallar un vector unitario tal que $\breve{a} = \lambda\,\vec{a}$ y $|\lambda\,\vec{a}| = 1$

Como $|\lambda\,\vec{a}| = |\lambda\,||\vec{a}|$, entonces $|\lambda\,\vec{a}| = 1 \leftrightarrow |\lambda\,| = \frac{1}{|\vec{a}|}$ por lo tanto:

$$\boxed{\breve{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}}$$

Observaciones: si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{a}|}$ se obtiene $-\breve{a}$ (versor con dirección opuesta a la de $\vec{a}$)

Importante: las componentes de un versor (vector unitario) son sus cosenos directores.

a. Encuentra un vector de módulo 1 en la misma dirección que el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$
b. Comprueba que coincide con sus cosenos directores

Solución: $|\vec{v}\,| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2 \quad \Rightarrow \breve{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$

$\breve{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ ***Verificación:*** $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$=1

$b.\ \ cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}; \cos\gamma = 0$

El ejercicio resuelto en la página anterior se puede resolver aplicando el concepto de vector unitario

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector $\overrightarrow{v}$ en la misma dirección de $\vec{a}$ pero de módulo 2

Solución: datos $\vec{a} = (-3, 2, 6)$ y $|\overrightarrow{v}| = 2$

Calculamos $\breve{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ siendo $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7 \rightarrow \breve{a} = \left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$

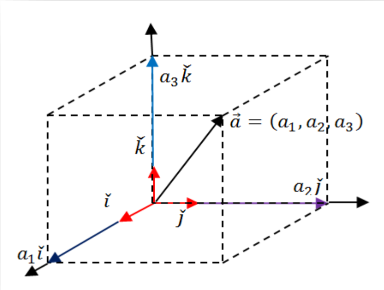
$\overrightarrow{v}$ está en la misma dirección tanto de $\vec{a}$ como también de su versor $\breve{a}$, por lo podemos escribir

$$\overrightarrow{v} = \lambda\breve{a}$$

$|\overrightarrow{v}| = \lambda|\breve{a}| \rightarrow$ sustituyendo los datos $2 = \lambda|1| \rightarrow \lambda = 2$

Por lo tanto $\overrightarrow{v} = 2\left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) = 2\breve{a}$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR



Todo vector del espacio, es una ***Combinación Lineal*** única de los vectores $\breve{\imath}, \breve{j}, \breve{k}$.

Sea $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $se\ tiene\ entonces$:

$\vec{a} = (a_x, 0,0) + (0, a_y, 0) + (0,0, a_z)$

$\vec{a} = a_x(1,0,0) + a_y(0,1,0) + a_z(0,0,1)$

$\vec{a} = a_x\breve{\imath} + a_y\,\breve{j} + a_z\breve{k}$

Dados $\vec{a} = -3\breve{\imath} + \breve{j} + 2\breve{k}$ y $\vec{b} = 6\,\breve{\imath} - 3\breve{j} + \breve{k}$, realiza:

*) $\vec{a} + \vec{b}$ (se obtiene sumando las respectivas componentes)

$\vec{a} + \vec{b} = (-3+6)\breve{\imath} + (1-3)\breve{j} + (2+1)\breve{k} = 3\breve{\imath} - 2\breve{j} + 3\breve{k}$

**) $2\vec{a} + 4\vec{b}$ (se aplica primero propiedad distributiva y luego se realiza la suma

$2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(-3\breve{\imath} + \breve{j} + 2\breve{k}) + 4\,(6\,\breve{\imath} - 3\breve{j} + \breve{k})$

$2\vec{a} + 4\vec{b} = (-6\breve{\imath} + 2\breve{j} + 4\breve{k}) + (24\,\breve{\imath} - 12\breve{j} + 4\breve{k}) = 18\breve{\imath} - 10\breve{j} + 8\breve{k}$

PRODUCTO ESCALAR

Dados $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ no nulos, se define producto escalar de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ a un número real (**escalar**)

$$\boldsymbol{\vec{a}\,.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta}$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

El producto escalar entre los vectores que forman la terna fundamental $\breve{\imath}, \breve{j}, \breve{k}$, teniendo en cuenta que son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es $\frac{\pi}{2}$, resulta:

$\breve{\imath}.\breve{j} = 0$	$\breve{\imath}.\breve{k} = 0$	$\breve{k}.\breve{j} = 0$
$\breve{\imath}.\breve{\imath} = 1$	$\breve{j}.\breve{j} = 1$	$\breve{k}.\breve{k} = 1$

Expresando $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ en función de las componentes.

$\vec{a}\,.\vec{b} = (a_x\breve{\imath} + a_y\,\breve{j} + a_z\breve{k}).(b_x\breve{\imath} + b_y\,\breve{j} + b_z\breve{k})$

$\vec{a}\,.\vec{b} = a_xb_x.(\breve{\imath}.\breve{\imath}) + \cancel{a_xb_y(\breve{\imath}.\breve{j})} + \cancel{a_xb_z(\breve{\imath}.\breve{k})} + \cancel{a_yb_x(\breve{j}.\breve{\imath})} + a_yb_y(\breve{j}.\breve{j}) + \cancel{a_yb_z(\breve{j}.\breve{k})} + \cancel{a_zb_x(\breve{k}.\breve{\imath})} + \cancel{a_zb_y(\breve{k}.\breve{j})} + a_zb_z(\breve{k}.\breve{k})$

$\vec{a}\,.\vec{b} = a_xb_x(\breve{\imath}.\breve{\imath}) + a_2b_2(\breve{j}.\breve{j}) + a_3b_3(\breve{k}.\breve{k})$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Dados $\vec{a} = (-1\,,2\,,3)$ $\vec{b} = (6\,,-2\,,5)$, $\vec{c} = (0\,,4\,,1)$, calcula el producto escalar

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)\cdot 6 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 5 = -6 - 4 + 15 =$ **5**

$\vec{a}\cdot\vec{c} = (-1)\cdot 0 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 = 8 + 3 =$ **11**

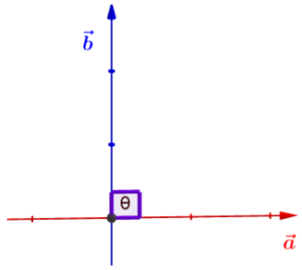
$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ ¿será un escalar?

ESCALAR

VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores no nulos, $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ son ortogonales si el ángulo θ que forman es $\theta = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$



Demostración:

Si $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ son ortogonales $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ya que $cos\frac{\pi}{2} = 0$

Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Ejercitación 4

1. Los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, calcula:

   a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $|\vec{a}+\vec{b}|^2$; $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\vec{b})$
2. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$ determinar α tal que $\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$ y $\vec{a} - \alpha\,\vec{b}$ sean ortogonales.
3. Halla el vector $\vec{x}$, colineal con $\vec{a} = 3\breve{\imath} + 2\breve{\jmath} + 2\breve{k}$ que satisface la condición $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$
4. Halla el vector $\vec{x}$ que es ortogonal con $\vec{a} = 2\breve{\imath} + 3\breve{\jmath} - \breve{k}$ y $\vec{b} = \breve{\imath} - 2\breve{\jmath} + 3\breve{k}$. Satisfaciendo además la condición $\vec{x}\cdot\vec{c} = -6$, siendo $\vec{c} = 2\breve{\imath} - \breve{\jmath} + \breve{k}$.

PROYECCION ESCALAR – PROYECCIÓN VECTORIAL

Éste tema está desarrollado en vectores en R^2 pág. 12-13

Dados dos vectores no nulos $\vec{a}\ y\ \vec{b}$, <u>la proyección escalar</u> de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ se define como el producto de modulo de $\vec{b}$ por el coseno del ángulo θ que forman $\vec{a}\ y\ \vec{b}$.

$proy_{\,\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|.\cos\theta$ (1)

Como $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, reemplazando (1) la componente escalar de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$ será:

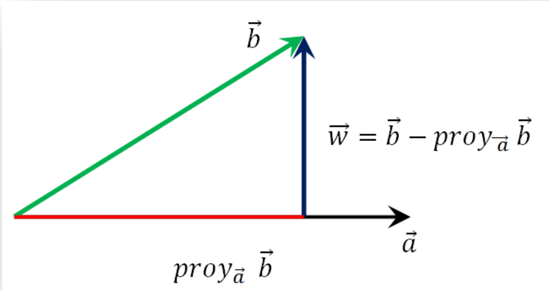
$$proy_{\,\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Siendo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \breve{a}$ el versor con la dirección de $\vec{a}$

$$proy_{\,\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{b}.\breve{a}$$

Si $\vec{b} = proy_{\,\vec{a}}\,\vec{b} + \vec{w}$ entonces $\vec{w} = \vec{b} - proy_{\,\vec{a}}\,\vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$

Se suele también decir que $proy_{\vec{a}}\vec{b}$, es “la componente de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$"



Observación

- Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow proy_{\vec{a}}\vec{b} > 0$
- Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow proy_{\vec{a}}\vec{b} = 0$
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow proy_{\vec{a}}\vec{b} < 0$

Las componentes de un vector $\vec{a}$, son las proyecciones de $\vec{a}$ en las dirección de $\check{\imath}, \check{\jmath}$ y $\check{k}$ respectivamente

$\vec{a}.\check{\imath} = a_x = proy_{\check{\imath}}\vec{a}$ $\quad$ $\vec{a}.\check{\jmath} = a_y = proy_{\check{\jmath}}\vec{a}$ $\quad$ $\vec{a}.\check{k} = a_z = proy_{\check{k}}\vec{a}$

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$ y $\vec{b} = (6, -1, 1)$.Calcula la componente de $\vec{a}$ sobre $\vec{\imath}$ (proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{\imath}$) y la proyección vectorial

Solución:

$$proy_{\check{\imath}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = \vec{a}.\check{\imath} = (3, -1, 1)\cdot(1, 0, 0) = 3$$

- Calcula la proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{\imath}$ (proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{\imath}$)

$$\overrightarrow{proy_{\check{\imath}}\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|}\cdot\frac{\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = 3.\check{\imath} = 3.(1,0,0) = (3,0,0)$$

- Calcula la proyección escalar o componente escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$$proy_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6, -1, 1)\cdot(3, -1, 1)}{\sqrt{3^2+1+1}} = \frac{18-1+1}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}}$$

- Calcula la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$$\overrightarrow{proy_{\vec{a}}\vec{b}} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\check{a} = \frac{(6, -1, 1)\cdot(3, -1, 1)}{\sqrt{3^2+1+1}}\cdot\frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}}\cdot\frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}}$$
$$= \frac{16}{11}(3, -1, 1)$$

Ejercitación 5

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$; $\vec{b} = (6, -1, 1)$ y $\vec{c} = (2, -1, 6)$;

Calcula las proyecciones escalares, vectoriales y normales

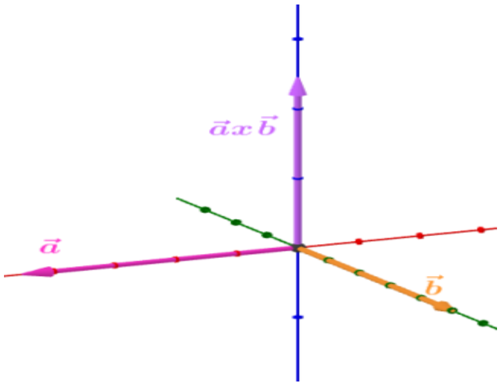
1) $proy_{\vec{b}}\,\vec{a}$ $\quad$ 2) $proy_{\vec{b}}\,\vec{c}$

3) $proy_{\vec{b}}\,(\vec{a} + \vec{c})$ $\quad$ 4) $proy_{\vec{b}}\,(\vec{a} + \vec{c} + \vec{b})$

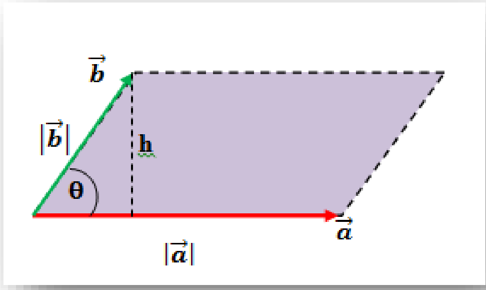
PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

Llamamos producto vectorial o producto cruz a la operación que se asocia por las condiciones.

1) Si $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ son ambos no nulos y no colineales, $\vec{a} x \vec{b}$ es ortogonal con $\vec{a}\ y\ con\ \vec{b}$, de forma tal que la terna $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} x \vec{b}\}$ es una terna directa (Igualmente orientada que la terna $\{\check{\imath}, \check{\jmath}, \check{k}\}$



2) $|\vec{a} x \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\vec{a}\ y\ \vec{b}$



* La primera condición indica que el producto vectorial es otro vector que define la dirección perpendicular al plano determinado por los vectores no colineales $\vec{a}\ y\ \vec{b}$

* La segunda condición indica que el módulo del producto vectorial: $|\vec{a} x \vec{b}|$ representa el área del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ como lados concurrentes.

* $\vec{a} x \vec{b} = -(\vec{b} x \vec{a})$ es conmutativo $\vec{a}\ x\ \vec{b}$ y $\vec{b}\ x\ \vec{a}$ tienen direcciones opuestas pero el mismo módulo

* $\vec{a}\ x\ \vec{b} = \vec{0}$ si $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ son colineales ($\vec{a} = \lambda \vec{b}$). En consecuencia:

* $\vec{a}\ x\ \vec{a} = \vec{0}$ $\forall\ \vec{a}$

* $\vec{0}\ x\ \vec{b} = \vec{0}$ $\forall\ \vec{b}$ si uno de los vectores es el vector nulo, el producto vectorial resulta el vector nulo.

* $\lambda\,\vec{a}\ x\ \vec{b} = \vec{a}\ x\ \lambda\vec{b} = \lambda\ (\vec{a}\ x\ \vec{b})$

* $\vec{a}\ x\ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\ x\ \vec{b} + \vec{a}\ x\ \vec{c}$ (Prop. dist. del producto vectorial con respecto a la suma

* $|\vec{a}\ x\ \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

Por lo tanto aplicando las propiedades los productos vectoriales entre los pares de vectores que forman la terna fundamental $\{\check{\imath}, \check{\jmath}, \check{k}\}$, arrojan los siguientes resultados:

$$\check{\imath}\ x\ \check{\jmath} = \check{k} \qquad \check{\jmath}\ x\ \check{\imath} = -\check{k} \qquad \check{\imath}\ x\ \check{\imath} = 0$$
$$\check{\jmath}\ x\ \check{k} = \check{\imath} \qquad \check{k}\ x\ \check{\jmath} = -\check{\imath} \qquad \check{\jmath}\ x\ \check{\jmath} = 0$$
$$\check{k}\ x\ \check{\imath} = \check{\jmath} \qquad \check{\imath}\ x\ \check{k} = -\check{\jmath} \qquad \check{k}\ x\ \check{k} = 0$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES DADOS POR SUS COMPONENTES:

Si $\vec{a} = a_x\check{\imath} + a_y\check{\jmath} + a_z\check{k}$ y $\vec{b} = b_x\check{\imath} + b_y\check{\jmath} + b_z\check{k}$, entonces:

$\vec{a}\ x\ \vec{b} = (a_x\check{\imath} + a_y\check{\jmath} + a_z\check{k})\ x\ (b_x\check{\imath} + b_y\check{\jmath} + b_z\check{k})$ →aplicando propiedad distributiva

$\vec{a}\,x\,\vec{b} = a_x b_x \cancel{\breve{\imath}x\breve{\imath}} + a_x b_y \breve{\imath}x\breve{\jmath} + a_x b_z \breve{\imath}x\breve{k} + a_y b_x \breve{\jmath}x\breve{\imath} + a_y b_y \cancel{\breve{\jmath}x\breve{\jmath}} + a_y b_z \breve{\jmath}x\breve{k} + a_z b_x \breve{k}x\breve{\imath} + a_z b_y \breve{k}x\breve{\jmath} + a_z b_z \cancel{\breve{k}x\breve{k}}$

$\vec{a}\,x\,\vec{b} = a_x b_y\, \breve{k} + a_x b_z\,(-\breve{\jmath}) + a_y b_x(-\breve{k}) + a_y b_z\, \breve{\imath} + a_z b_x\, \breve{\jmath} + a_z b_y(-\breve{\imath})$

$\vec{a}\,x\,\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\breve{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\breve{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\breve{k}$

Las componentes de $\vec{a}x\vec{b}$ se recuerdan fácilmente desarrollando: $\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Que solo tiene significado mnemotécnico, ya que no se disponen determinantes de matrices cuyo elemento son vectores.

Halla el área del paralelogramo que tiene por lados adyacentes a los vectores

$\vec{a} = (\,2, -1\,, 3\,)$ y $\vec{b} = (-1\,, 2\,, 6\,)$

Solución: para calcular el área debemos calcular el módulo del producto vectorial de los vectores

$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \breve{\imath}(-6-6) - \breve{\jmath}(12+3) + \breve{k}(4-1) \Longrightarrow \vec{a}\,x\,\vec{b} = (-12, -15, 3)$

$|\vec{a}\,x\,\vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2 + (3)^2} = \sqrt{378}$

Dados $\vec{a} = \breve{\imath} + \breve{\jmath}$ y $\vec{b} = 2\breve{\imath} + 3\breve{\jmath} + \breve{k}$; ¿es lo mismo $\vec{a}\,x\,\vec{b}$ y $\vec{b}\,x\,\vec{a}$? ¿cómo son estos vectores?

Halla vectores unitarios ortogonales a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Solución:

$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \breve{\imath}(1-0) - \breve{\jmath}(1-0) + \breve{k}(3-2) \Longrightarrow \vec{a}\,x\,\vec{b} = (1, -1, 1)$

$\vec{b}\,x\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \breve{\imath}(0-1) - \breve{\jmath}(0-1) + \breve{k}(2-3) \Longrightarrow \vec{b}\,x\,\vec{a} = (-1,1,-1)$

Estos vectores son iguales y opuestos

Un vector unitario ortogonal simultáneamente a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sería $\breve{u} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$

PRODUCTO MIXTO

Combina el producto vectorial con el producto escalar. Es el número real que se obtiene de la siguiente operación: $\vec{a}\,.\vec{b}\,x\,\vec{c}$. Se suele indicar por: $(\vec{a}\,.\,\vec{b}\,.\,\vec{c})$

$(\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}) = (a_1, a_2, a_3)\,.\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (verificarlo) *intercambiando dos filas entre si cambiando el signo del determinante. Por lo tanto:

$$(\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}) = -(\vec{b}.\vec{a}.\vec{c})$$

*intercambiando dos veces se conserva el signo: $(\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}) = (\vec{b}.\vec{c}.\vec{a})$

*como el producto escalar es conmutativo, se tiene además. $\vec{a}\ x(\vec{b}.\vec{c}) = (\vec{a}\ x\ \vec{b}).\vec{c}$

INTERPRETACION GEOMETRICA

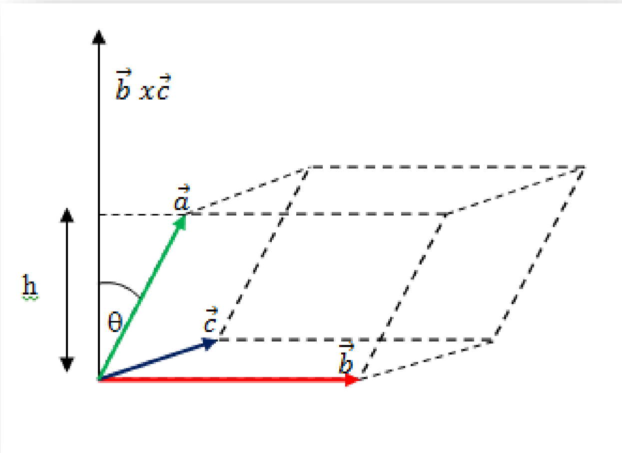
El valor absoluto del producto mixto, representa el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como aristas concurrentes.

(Suponiendo que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares)

$Vol = base\ x\ altura = |\vec{b}x\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\theta;$ donde $\cos\theta = \frac{\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c})}{|\vec{a}||\vec{b}x\vec{c}|}$

$$Vol = \cancel{|\vec{b}x\vec{c}|}\ \cancel{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c})}{\cancel{|\vec{a}|}\cancel{|\vec{b}x\vec{c}|}}$$

$$V = \vec{a}.(\vec{b}x\vec{c})$$



Ejercitación 8

Hallar el volumen del tetraedro que tiene como arista concurrentes a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ donde $\vec{a} = \check{\imath} + 2\check{k}$; $\vec{b} = 4\check{\imath} + 6\check{\jmath} + 2\check{k}$, $\vec{c} = 3\check{\imath} + 3\check{\jmath} - 6\check{k}$.

Observación: el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo.

VECTORES COPLANARES

Tres vectores no nulos son coplanares, si uno de ellos es combinación lineal de los otros dos. Supongamos que $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$. En este caso, se anula el producto mixto.

Resumiendo: tres vectores no nulos son coplanares sí y solo sí su producto mixto se anula. A partir de la interpretación geométrica, podemos decir que si los vectores son coplanares cumple que el volumen es cero.