```
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v');
text(v(1),v(2),'2')
text(P(1)/2,P(2)/2,'\bf P');
text(P(1),P(2),'3')
a=axis;
axis([min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1,...
    min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1])
axis square
grid on
title('P es la proyeccion de u en v')
xlabel('u termina en 1, v termina en 2, P termina en 3')
```

Una vez que se ha escrito la función en un archivo con nombre prjtn dé el comando `doc prjtn` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Para los pares de vectores **u** y **v** dados en seguida:

a) Introduzca **u** y **v** como matrices de 2×1 y calcule **p** = proyección de **u** sobre **v**.
b) Dé el comando `prjtn(u, v)` (este archivo despliega **u** y **v** en la pantalla de gráficas. Oprima cualquier tecla y bajará una perpendicular del punto terminal de **u** hasta la recta determinada por **v**. Oprima cualquier tecla y se indicará el vector proyección).
c) Mientras observa las gráficas en la pantalla, verifique que el vector **p** graficado sea el vector calculado en *a*). Localice el vector (paralelo a) **u** − **p**. ¿Cuál es la relación geométrica entre **u** − **p** y **v**?

i) **u** = [2; 1] **v** = [3; 0]   ii) **u** = [2; 3] **v** = [−3; 0]

iii) **u** = [2; 1] **v** = [−1; 2]   iv) **u** = [2; 3] **v** = [−1; −2]

v) Elija sus propios vectores **u** y **v** (al menos tres pares).

4.3 Vectores en el espacio

Terna ordenada

Se ha visto que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se puede representar por una **terna ordenada** de números reales

$$(a, b, c) \tag{4.3.1}$$

$\mathbb{R}^3$
Origen
eje *x*
eje *y*
eje *z*

Los vectores de la forma (4.3.1) constituyen el espacio $\mathbb{R}^3$. Para representar un punto en el espacio, se comienza por elegir un punto en $\mathbb{R}^3$. A este punto se le denomina el **origen**, denotado por 0. Después se dibujan tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se llama el **eje *x***, el **eje *y*** y el **eje *z***. Dichos ejes se pueden seleccionar de diferentes formas, pero la más común tiene los ejes *x* y *y* horizontales y el eje *z* vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.

Sistema derecho
Sistema izquierdo

Los dos sistemas básicos para dibujar estos ejes se describen en la figura 4.18. Si los ejes se colocan como en la figura 4.18*a*), entonces el sistema se denomina **sistema derecho**; si se colocan como en la figura 4.18*b*), se trata de un **sistema izquierdo**. En las figuras, las flechas indican la dirección positiva de los ejes. La razón para la elección de estos términos es la siguiente: en un sistema derecho, si coloca su mano derecha de manera que el dedo índice señale en la dirección positiva del eje *x* mientras que el medio apunta en la dirección positiva del eje *y*, entonces su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje *z*. Este concepto se ilustra en la figura 4.19. La misma regla funciona para el sistema izquierdo con los dedos de la mano izquierda. En el resto de este libro se seguirá la práctica común de describir los ejes de coordenadas usando un sistema derecho.

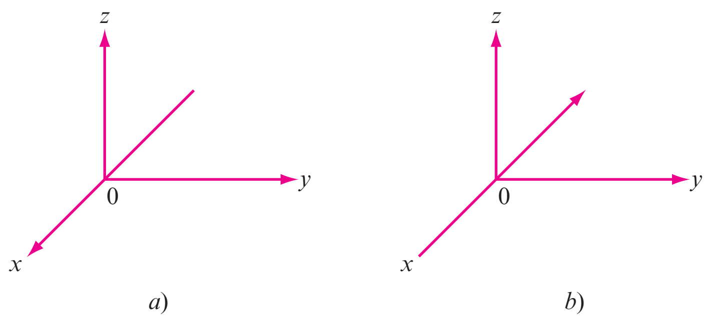


Figura 4.18
a) Un sistema derecho;
b) Un sistema izquierdo.

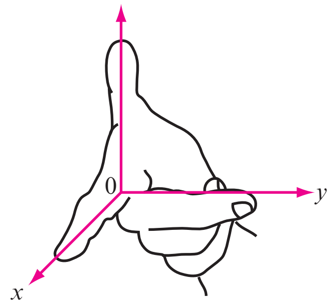


Figura 4.19
La mano derecha indica las direcciones de un sistema derecho.

Planos coordenados

Los tres ejes en nuestro sistema determinan tres **planos coordenados**, que se denominan plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contiene los ejes x y y y es simplemente el plano con el que se ha venido trabajando hasta ahora en la mayor parte del libro. Se puede pensar en los planos xz y yz de modo similar.

Al tener nuestra estructura construida de ejes coordenados y planos, podemos describir cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ de una sola manera:

$$\boxed{P = (x, y, z)} \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

en donde la primera coordenada x es la distancia dirigida del plano yz a P (medida en la dirección positiva del eje x a lo largo de una recta paralela al eje x), la segunda coordenada y es la distancia dirigida desde el plano xz hasta P (medida en la dirección positiva del eje y y a lo largo de una recta paralela al eje y), y la tercera coordenada z es la distancia dirigida desde el plano xy hasta P (medida en la dirección positiva del eje z y a lo largo de una recta paralela al eje z).

En este sistema, los tres planos coordenados dividen al espacio $\mathbb{R}^3$ en ocho **octantes**, de la misma forma que en $\mathbb{R}^2$ los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se selecciona como el primero.

Sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema le resulte familiar, pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

Teorema 4.3.1

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q está dada por

$$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \qquad \textbf{(4.3.3)}$$

Se pide al lector que pruebe este resultado en el problema 49.

EJEMPLO 4.3.1 Cálculo de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$

Calcule la distancia entre los puntos (3, −1, 6) y (−2, 3, 5).

Solución $\overline{PQ} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-1-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{42}$

En las secciones 4.1 y 4.2 se desarrollaron las propiedades geométricas de los vectores en el plano. Dada la similitud entre los sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, no es una sorpresa que los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tengan estructuras muy similares. Ahora se desarrollará el concepto de un vector en el espacio. El desarrollo seguirá de cerca los avances de las últimas dos secciones y, por lo tanto, se omitirán algunos detalles.

Segmento de recta dirigido

Vector en $\mathbb{R}^3$

Representación de un vector

Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Entonces el **segmento de recta dirigido** $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que se extiende de P a Q. Dos segmentos de recta dirigidos son **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección. Un **vector en** $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama una **representación** del vector.

Hasta aquí las definiciones son idénticas. Por conveniencia, se elige P en el origen para poder describir el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{0Q}$ mediante las coordenadas (x, y, z) del punto Q.

Magnitud de un vector

Entonces la **magnitud** de $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (del teorema 4.3.1).

EJEMPLO 4.3.2 Cálculo de la magnitud de un vector en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Encuentre $|\mathbf{v}|$.

Solución $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

Definición 4.3.1

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores, y sea α un número real (escalar). Entonces se define

Suma de vectores y multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

y

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Ésta es la misma definición de suma de vectores y multiplicación por un escalar que se tenía; se ilustra en la figura 4.20.

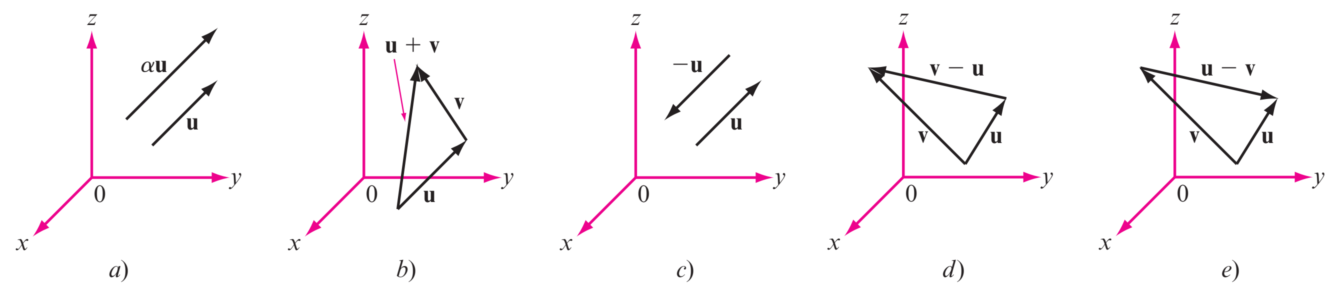


Figura 4.20
Ilustración de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$.

Vector unitario

Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ es un vector con magnitud 1. Si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero, entonces $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4.3.3 Cálculo de un vector unitario en $\mathbb{R}^3$

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{v} = (2, 4, -3)$.

Solución Como $\mathbf{v} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$ se tiene

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$$

Ahora se puede definir formalmente la dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$. No se puede definir como el ángulo θ que forma el vector con el eje x positivo ya que, por ejemplo, si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo que existe un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con el lado positivo del eje x, y estos vectores juntos forman un cono (vea la figura 4.21).

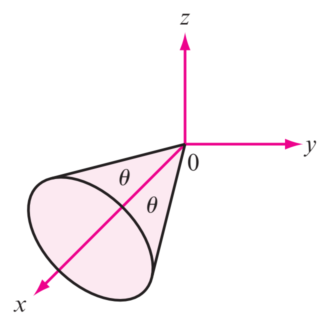


Figura 4.21
Todos los vectores que están en este cono forman un ángulo θ con la parte positiva del eje x.

D Definición 4.3.2

Dirección en $\mathbb{R}^3$

La **dirección** de un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

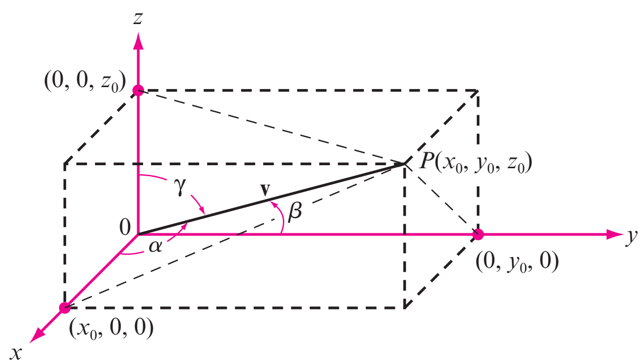


Figura 4.22
El vector $\mathbf{v}$ forma un ángulo α con el lado positivo del eje x, β con el lado positivo del eje y y γ con el eje positivo del eje z.

Observación

Se pudo haber definido la dirección de un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ de esta manera, ya que si $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, entonces $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.

Es conveniente definir la dirección de un vector $\mathbf{v}$ en términos de algunos ángulos. Sea $\mathbf{v}$ el vector $\overrightarrow{0P}$ descrito en la figura 4.22. Definimos α como el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje x positivo, β el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje y positivo, y γ el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje z positivo. Los ángulos α, β y γ se denominan **ángulos directores** del vector $\mathbf{v}$. Entonces, de la figura 4.22,

Ángulos directores

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_0}{|\mathbf{v}|}} \tag{4.3.4}$$

Si $\mathbf{v}$ es un vector unitario, entonces $|\mathbf{v}| = 1$ y

$$\boxed{\cos\alpha = x_0, \qquad \cos\beta = y_0, \qquad \cos\gamma = z_0} \tag{4.3.5}$$

Cosenos directores

Por definición, cada uno de estos tres ángulos cae en el intervalo de $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos se denominan **cosenos directores** del vector **v**. Observe, de la ecuación (4.3.4), que

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1} \tag{4.3.6}$$

Si α, β y γ son tres números cualesquiera entre cero y π tales que satisfacen la condición (4.3.6), entonces determinan de manera única un vector unitario dado por $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Números directores

Observación. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $|\mathbf{v}| \neq 1$, entonces los números a, b y c se llaman **números directores** del vector **v**.

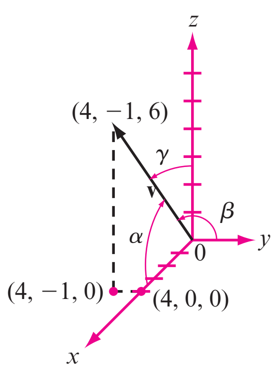


Figura 4.23

Los cosenos directores de $(4, -1, 6)$ son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$.

EJEMPLO 4.3.4 Cálculo de los cosenos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$

Encuentre los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (4, -1, 6)$.

Solución La dirección de **v** es $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{53}} = \left(\frac{4}{\sqrt{53}} - \frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}\right)$. Entonces $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}} \approx 0.5494$, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}} \approx -0.1374$ y $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}} \approx 0.8242$. Con estos valores se usan tablas o una calculadora para obtener $\alpha \approx 56.7° \approx 0.989$ rad, $\beta \approx 97.9° \approx 1.71$ rad y $\gamma = 34.5° \approx 0.602$ rad. En la figura 4.23 se presenta un esbozo del vector, junto con los ángulos α, β y γ.

EJEMPLO 4.3.5 Cálculo de un vector en $\mathbb{R}^3$ dados su magnitud y cosenos directores

Encuentre un vector **v** de magnitud 7 cuyos cosenos directores son $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución Sea $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces **u** es un vector unitario ya que $|\mathbf{u}| = 1$. Así, la dirección de **v** está dada por **u** y $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = \left(\frac{7}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$.

Nota. Este problema se puede resolver porque $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

Es interesante observar que si **v** en $\mathbb{R}^2$ es un vector unitario, se puede escribir $\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}$, donde θ es la dirección de **v**, y entonces $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ son los cosenos directores de **v**. En este caso, $\alpha = \theta$ y se define β como el ángulo que forma **v** con el eje y (vea la figura 4.24). Por lo tanto, $\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha$, de manera que $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2-\alpha}\right) = \text{sen}\,\alpha$ y **v** se puede escribir en la forma de "cosenos directores"

$$\mathbf{v} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$$

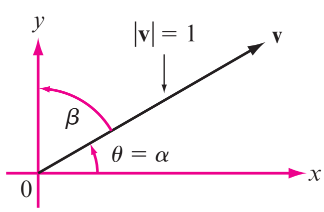


Figura 4.24

Si $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y **v** es un vector unitario, entonces $v = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$.

En la sección 4.1 se observó que cualquier vector en el plano se puede escribir en términos de los vectores base **i** y **j**. Para extender esta idea a $\mathbb{R}^3$ se define

$$\boxed{\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)} \tag{4.3.7}$$

Aquí, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. El vector **i** está sobre el eje x, **j** sobre el eje y y **k** sobre el eje z. En la figura 4.25 se puede ver un bosquejo. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esto es, *cualquier vector* **v** *en* $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir de manera única en términos de los vectores* **i**, **j** *y* **k**.

La definición de producto escalar en $\mathbb{R}^3$ es la definición que se presentó en la sección 2.2. Observe que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$.

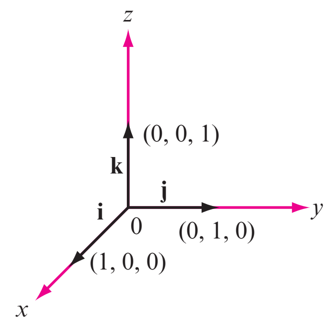


Figura 4.25

Los vectores base **i**, **j** y **k** en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.3.2

Si φ denota el ángulo positivo más pequeño entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, se tiene

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}} \qquad \textbf{(4.3.8)}$$

Demostración

La prueba es casi idéntica a la prueba del teorema 4.2.2 de la página 248 y se deja al lector como ejercicio (vea el problema 53 de esta sección).

EJEMPLO 4.3.6 **Cálculo del coseno del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$**

Calcule el coseno del ángulo entre $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, por lo que $\cos\varphi\ \frac{7}{\sqrt{(14)(26)}} = \frac{7}{\sqrt{364}} \approx 0.3669$ y $\varphi \approx 68.5° \approx 1.2$ rad.

Definición 4.3.3

Vectores paralelos y ortogonales

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son:

i) **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π.

ii) **Ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.3.3

i) Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.

ii) Si **u** y **v** son diferentes de cero, entonces **u** y **v** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Demostración

De nuevo la prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 54).

Ahora se dará la definición de la proyección de un vector sobre otro. Primero se establece el teorema análogo al teorema 4.2.5 (y cuya demostración es idéntica).

Teorema 4.3.4

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces, para cualquier otro vector $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Definición 4.3.4

Proyección

Proyección de u sobre v

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, está definida por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}} \qquad \textbf{(4.3.9)}$$

Componente

La **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ está dada por $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. **(4.3.10)**

EJEMPLO 4.3.7 Cálculo de una proyección en $\mathbb{R}^3$

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso, $\dfrac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} = \dfrac{2}{41}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \dfrac{2}{41}\mathbf{i} + \dfrac{4}{41}\mathbf{j} - \dfrac{12}{41}\mathbf{k}$. La componente de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es $\dfrac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{41}}$.

Observe que, igual que en el plano, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y la dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

Resumen 4.3

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^3$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q. (p. 260)
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección. (p. 260)

- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$. (p. 260)

- ***Definición algebraica de un vector***

  El **vector cero** es el vector (0, 0). En $\mathbb{R}^3$, un vector $\mathbf{v}$ es una **terna ordenada** de números reales (a, b, c); los números a, b y c son las componentes del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** en $\mathbb{R}^3$ es el vector (0, 0, 0). (p. 252)

- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^3$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b, c)$.

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces la magnitud de $\mathbf{v}$ está dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (p. 252)

- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

- En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se puede escribir como

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. (p. 261)

  Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. (p. 264)

- Dos vectores $\mathbb{R}^3$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. (p. 264)

- Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$. La **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es un vector, denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que está definido por (p. 264)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

  El escalar $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

- $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. (p. 264)

- La **dirección** de un vector $\mathbf{v}$ $\mathbb{R}^3$ es el vector unitario (p. 261)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces $\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}$, $\cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}$ y $\cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$ se llaman **cosenos directores** de $\mathbf{v}$. (p. 262)

AUTOEVALUACIÓN 4.3

I) Responda si la afirmación siguiente es falsa o verdadera. La práctica común seguida en este libro es desplegar los ejes *xyz* para $\mathbb{R}^3$ como un sistema derecho.

Respuesta: ____________________

II) La distancia entre los puntos (1, 2, 3) y (3, 5, −1) es ______.

a) $\sqrt{(1+2+3)^2+(3+5-1)^2}$ *b)* $\sqrt{2^2+3^2+2^2}$

c) $\sqrt{2^2+3^2+4^2}$ *d)* $\sqrt{4^2+7^2+2^2}$

III) El punto (0.3, 0.5, 0.2) está ______ la esfera unitaria.

a) en la tangente a *b)* sobre

c) dentro de *d)* fuera de

IV) $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=81$ es la ecuación de la esfera con __________.

a) centro 81 y radio (−3, 5, 0) *b)* radio 81 y centro (−3, 5, 0)

c) radio −9 y centro (3, −5, 0) *d)* radio 9 y centro (3, −5, 0)

V) $\mathbf{j}-(4\mathbf{k}-3\mathbf{i})=$ _______.

a) (1, −4, −3) *b)* (1, −4, 3)

c) (−3, 1, −4) *d)* (3, 1, −4)

VI) $(\mathbf{i}+3\mathbf{k}-\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}-4\mathbf{j}+2\mathbf{i})=$ ________.

a) $2+4+3=9$ *b)* $(1+3-1)(1-4+2)=-3$

c) $1+12-2=-13$ *d)* $2-4-3=-5$

VII) El vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{i}+3\mathbf{k}-\mathbf{j}$ es ____________.

a) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *b)* $\frac{1}{5}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

c) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ *d)* $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

VIII) El componente de **u** en la dirección **w** es

a) $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|\ |\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ \mathbf{u}}{|\mathbf{w}|\ |\mathbf{u}|}$

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** *c)* **III)** *c)* **IV)** *d)*
V) *d)* **VI)** *a)* **VII)** *c)* **VIII)** *a)*

MANEJO DE LA CALCULADORA 4.3

Las instrucciones para calculadora presentadas en las secciones 4.1 y 4.2 para vectores en $\mathbb{R}^2$ se extienden a $\mathbb{R}^3$, con la observación que ahora se tienen coordenadas esféricas además de cilíndricas y cartesianas para representar vectores.

Problemas 4.3

De los problemas 1 al 6 encuentre la distancia entre los puntos:

1. $(3, -4, 7)$; $(3, -4, 9)$
2. $(3, -4, 1)$; $(3, -4, 4)$
3. $(-2, 1, 3)$; $(4, 1, 3)$
4. $P=\begin{pmatrix}7\\9\\-8\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}9\\3\\-8\end{pmatrix}$
5. $P=\begin{pmatrix}-5\\1\\10\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}10\\-7\\10\end{pmatrix}$
6. $P=\begin{pmatrix}10\\0\\6\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}-8\\-2\\9\end{pmatrix}$

En los problemas 7 al 26 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

7. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
8. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
10. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$
11. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
13. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
14. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
19. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
20. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
21. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
22. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
23. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
24. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
25. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
26. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
27. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el vector?
28. Encuentre un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del problema 27.
29. Demuestre que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$.
30. Sea $P = (-2, 1, 4)$ y $Q = (3, 5, -8)$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$.
31. Sea $P = (3, 1, -3)$ y $Q = (3, 6, -3)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección es opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$.
32. Utilizando P y Q del problema 31, encuentre todos los puntos R tales que $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$.

*33. Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen la condición del problema 32 y la condición $|\overrightarrow{P}| = 1$ forman un círculo.

34. **Desigualdad del triángulo** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Desigualdad del triángulo

35. ¿Bajo qué circunstancias puede sustituirse la desigualdad en el problema 34 por un signo de igualdad?

En los problemas 36 al 51, sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

36. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

37. Calcule $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

38. Calcule $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

39. Calcule $\mathbf{t} + 3\mathbf{w} - \mathbf{v}$

40. Calcule $2\mathbf{u} + 7\mathbf{w} + 5\mathbf{v}$

41. Calcule $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

42. Calcule $2\mathbf{v} + 7\mathbf{t} - \mathbf{w}$

43. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

44. Calcule $(3\mathbf{t} - 2\mathbf{u}) \cdot (5\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$

45. Calcule $|\mathbf{w}|$

46. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$

47. Calcule el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$

48. Calcule el ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{w}$

49. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$

50. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{w}$

51. Calcule $\mathbf{w} \cdot \text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v}$

52. Pruebe el teorema 4.3.1. [***Sugerencia:*** Utilice el teorema de Pitágoras dos veces en la figura 4.26.]

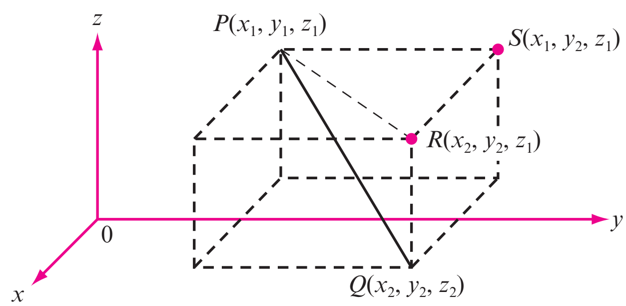


Figura 4.26

53. Pruebe el teorema 4.3.2.

54. Pruebe el teorema 4.3.3.

55. Pruebe el teorema 4.3.4.

Resuelva los siguientes problemas en una calculadora.

En los problemas 56 al 59 encuentre la magnitud y dirección de cada vector.

56. $(0.2316, 0.4179, -0.5213)$

57. $(1.0933, 1.1093, -0.8637)$

58. $(17.3, 78.4, 28.6)$

59. $(0.0136, -0.0217, -0.0448)$

En los problemas 60 al 63 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

60. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

61. $\mathbf{u} = (0.3192, 0.3129, -0.8649)$; $\mathbf{v} = (-0.0301, -0.1649, 0.6277)$

62. $\mathbf{u} = (5\,241, -3\,199, 2\,386)$; $\mathbf{v} = (1\,742, 8\,233, 9\,416)$

63. $\mathbf{u} = (0.24, 0.036, 0.055)$; $\mathbf{v} = (0.088, -0.064, 0.037)$

4.4 El producto cruz de dos vectores

Hasta el momento el único producto de vectores que se ha considerado ha sido el producto escalar o producto punto. Ahora se define un nuevo producto, llamado *producto cruz* (o *producto vectorial*), que está definido *sólo* en $\mathbb{R}^3$.

Nota histórica

El producto cruz fue definido por Hamilton en uno de una serie de artículos publicados en *Philosophical Magazine* entre 1844 y 1850.

Definición 4.4.1

Producto cruz

Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz (cruz vectorial)** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un nuevo vector definido por

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}} \qquad (4.4.1)$$

Aquí el producto cruz parece estar definido de manera arbitraria. Es evidente que existen muchas maneras de definir un producto vectorial. ¿Por qué se escogió esta definición? La respuesta a esta pregunta se da en la presente sección demostrando algunas propiedades del producto cruz e ilustrando algunas de sus aplicaciones.

Nota

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.

EJEMPLO 4.4.1 **Cálculo del producto cruz de dos vectores**

Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Solución Usando la fórmula (4.4.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [(-1)(-4) - (2)(3)]\mathbf{i} + [(2)(2) - (1)(-4)]\mathbf{j} + [(1)(3) - (-1)(2)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Nota. En este ejemplo, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = -2 - 8 + 10 = 0$. De manera similar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Como se verá en breve, el producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Antes de continuar el estudio de las aplicaciones del producto cruz se observa que existe una forma sencilla de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ usando determinantes.

Teorema 4.4.1

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Nota

En realidad no se tiene un determinante porque **i**, **j** y **k** no son números. Sin embargo, al usar la notación de determinantes, el teorema 4.4.1 ayuda a recordar cómo calcular un producto cruz.

Demostración

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

que es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ según la definición 4.4.1.

EJEMPLO 4.4.2 **Uso del teorema 4.4.1 para calcular un producto cruz**

Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10)\mathbf{i} - (2-15)\mathbf{j} + (-4+12)\mathbf{k}$$
$$= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades del producto cruz. Su demostración se deja como ejercicio (vea los problemas 41 al 44 de esta sección).

Teorema 4.4.2

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto escalar** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$).

vii) Si $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El inciso vi) del teorema 4.4.2 es el que se usa con más frecuencia. Se vuelve a establecer como sigue:

> El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

Vector normal

Regla de la mano derecha

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, pero siempre habrá *dos* vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (vea la figura 4.27). Los vectores $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ por la letra inicial de **normal**) son ambos ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Cuál tiene la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta está dada por la **regla de la mano derecha**. Si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de $\mathbf{u}$ y el dedo medio en la dirección de $\mathbf{v}$, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la figura 4.28).

Una vez que se ha estudiado la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, la atención se dirige a su magnitud.

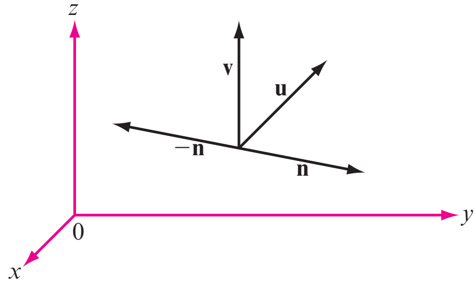


Figura 4.27

Existen exactamente dos vectores, $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$, ortogonales a dos vectores no paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$.

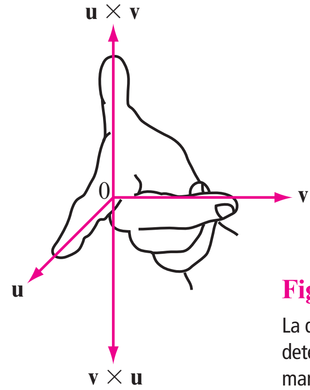


Figura 4.28

La dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede determinar usando la regla de la mano derecha.

Teorema 4.4.3

Si φ es un ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi} \tag{4.4.2}$$

Demostración

No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (vea el problema 40). Entonces, como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi$ (del teorema 4.3.2, página 263),

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,(1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que sen $\varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Existe una interpretación geométrica interesante del teorema 4.4.3. Los vectores **u** y **v** están dibujados en la figura 4.29 y se puede pensar que son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Entonces de la geometría elemental se ve que

El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ **(4.4.3)**

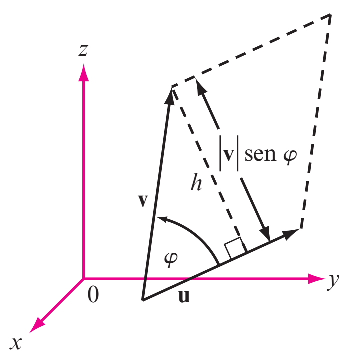


Figura 4.29

φ es el ángulo entre **u** y **v**. $\dfrac{h}{|\mathbf{v}|} = \operatorname{sen} \varphi$, de manera que $h = |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi$.

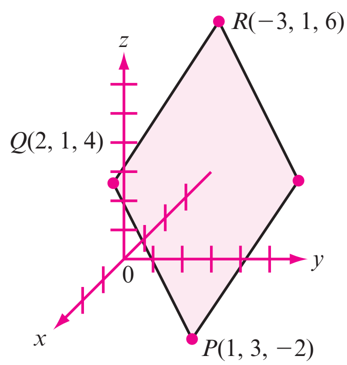


Figura 4.30

Un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.4.3 Cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$

Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ y $R = (-3, 1, 6)$ (vea la figura 4.30).

Solución El paralelogramo.

$$\text{Área} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \left|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{matrix}\right| = |-4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1\,140} \text{ unidades cuadradas.}$$

Interpretación geométrica de los determinantes de 2 × 2 (otra vez)

En la sección 3.1 se estudió el significado geométrico de un determinante de 2 × 2 (página 183). Ahora se observará el mismo problema. Haciendo uso del producto cruz se obtiene el resultado de la sección 3.1 en forma más sencilla. Sea A una matriz de 2 × 2 y sean **u** y **v** dos vectores de dos componentes. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Estos vectores están dados en la figura 4.31.

Área generada

El **área generada** por **u** y **v** se define como el área del paralelogramo dado en la figura. Se puede pensar que **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano xy. Entonces $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y

$$\text{área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= |(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}| = |u_1v_2 - u_2v_1|^{\dagger}$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$ y

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}.$$

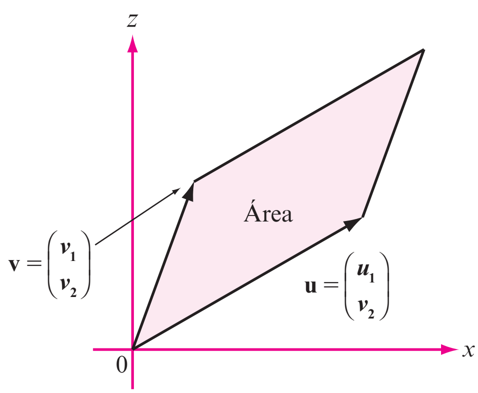


Figura 4.31

El área de la región sombreada es el área generada por **u** y **v**.

¿Cuál es el área generada por $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}'$? Se calcula siguiendo los pasos anteriores.

† Observe que este es el valor absoluto de det $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & u_2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Área generada por } \mathbf{u}' \text{ y } \mathbf{v}' = |\mathbf{u}' \text{ y } \mathbf{v}'| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & 0 \\ a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= |(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) - (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)(a_{11}v_1 - a_{12}v_2)|$$

La manipulación algebraica verifica que la última expresión es igual a

$$|(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(u_1v_2 - u_2v_1)| = \pm\det A \text{ (área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$$

Entonces (en este contexto): *el determinante tiene el efecto de multiplicar el área.* En el problema 48 se pide al lector que demuestre que de cierta forma un determinante de 3×3 tiene el efecto de multiplicar el volumen.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores que no están en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio (vea la figura 4.32). Calculemos su volumen. La base del paralelepípedo es un paralelogramo. Su área, de (3), es igual a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

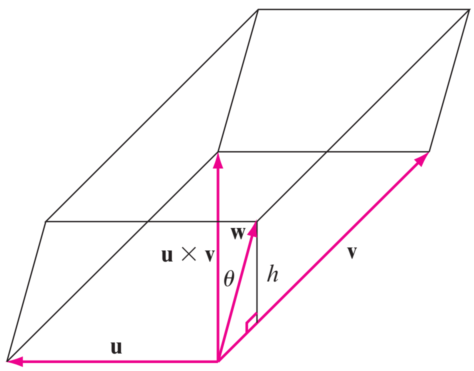


Figura 4.32

Tres vectores **u**, **v** y **w**, que no están en el mismo plano, determinarán un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**, y por ello es ortogonal al paralelogramo determinado por **u** y **v**. La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogramo.

Del análisis de la proyección en la página 251, se ve que h es el valor absoluto de la componente de **w** en la dirección (ortogonal) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así, de la ecuación (4.3.10) en la página 264:

$$h = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ en la dirección } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left| \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right|$$

Entonces

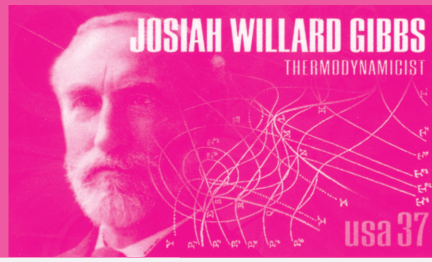
$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área de base} \times \text{altura}$$

$$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \left[\frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right] = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$$

Es decir,

El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores **u**, **v** y **w** es igual a $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$. Dicho de otro modo, valor absoluto del triple producto escalar de **u**, **v** y **w**. **(4.4.4)**

Semblanza de...



Josiah Willard Gibbs
(*The Granger Collection, Nueva York*)

Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial (1839-1903)

Como se ha observado anteriormente, el estudio de los vectores se originó con la invención de los cuaterniones de Hamilton. Hamilton y otros desarrollaron los cuaterniones como herramientas matemáticas para la exploración del espacio físico. Pero los resultados fueron decepcionantes porque vieron que los cuaterniones eran demasiado complicados para entenderlos con rapidez y aplicarlos fácilmente. Los científicos se dieron cuenta de que muchos problemas se podían manejar considerando la parte vectorial por separado y de este modo comenzó el análisis vectorial.

Este trabajo se debe principalmente al físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Como nativo de New Haven, Connecticut, Gibbs estudió matemáticas y física en la Universidad de Yale y recibió el grado de doctor en 1863. Posteriormente estudió matemáticas y física en París, Berlín y Heidelberg. En 1871, fue nombrado profesor de física en Yale. Era un físico original que realizó muchas publicaciones en el área fisicomatemática. El libro de Gibbs *Vector Analysis* apareció en 1881 y de nuevo en 1884. En 1902 publicó *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. Los estudiantes de matemáticas aplicadas se encontraron con el singular **fenómeno de Gibbs** en las series de Fourier.

El libro pionero de Gibbs, *Vector Analysis* era en realidad un panfleto pequeño impreso para la distribución privada—en principio para que sus estudiantes lo usaran—. De cualquier forma, creó un gran entusiasmo entre aquellos que veían una alternativa a los cuaterniones, por lo que pronto el libro fue ampliamente difundido. Finalmente, el material se convirtió en un libro formal escrito por E. B. Wilson. El libro *Vector Analysis* de Gibbs y Wilson se basaba en la cátedra de Gibbs, y se publicó en 1901.

Todos los estudiantes de física elemental se encuentran con el trabajo de Gibbs. En la introducción a la física, un espacio vectorial se ve como un segmento de recta dirigido, o flecha. Gibbs dio definiciones de igualdad, suma y multiplicación de vectores; éstas son esencialmente las definiciones dadas en este capítulo. En particular, la parte vectorial de un cuaternión se escribía como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, y ésta es la forma en que ahora se describen los vectores en $\mathbb{R}^3$.

Gibbs definió el producto escalar, inicialmente sólo para los vectores **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Siguió a esto la definición más general. Gibbs aplicó el producto escalar en problemas referentes a la fuerza (recuerde, primero era físico). Si **F** es un vector de fuerza de magnitud $|F|$ que actúa en la dirección del segmento $\overrightarrow{0Q}$ (vea la figura 4.33), entonces, la efectividad de esta fuerza al empujar un objeto a lo largo del segmento $\overrightarrow{0P}$ (es decir, a lo largo del vector **u**) está dada por $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$.

Si $|\mathbf{u}| = 1$, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ es la componente de **F** en la dirección de **u**. También el producto cruz tiene un significado físico.

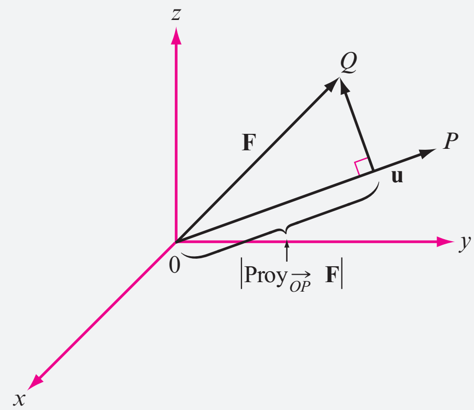


Figura 4.33

La efectividad de **F** en la dirección de $\overrightarrow{0P}$ es la componente de **F** en la dirección de $\overrightarrow{0P}$ (= **u**) si **u** = 1.

Suponga que un vector de fuerza **F** actúa en un punto P en el espacio en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$. Si **u** es el vector representado por $\overrightarrow{0P}$, entonces el momento de fuerza ejercido por **F** alrededor del origen es el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{F}$ (vea la figura 4.34).

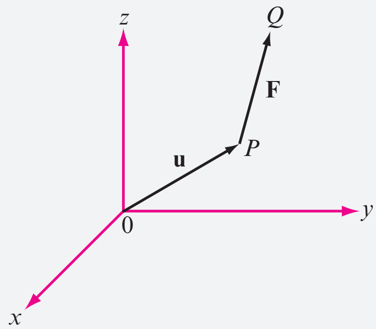


Figura 4.34

El vector $\mathbf{u}\times\mathbf{F}$ es el momento de la fuerza alrededor del origen.

Tanto el producto escalar como el producto cruz entre vectores aparecen frecuentemente en las aplicaciones físicas que involucran el cálculo de varias variables. Éstas incluyen las famosas ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo.

Al estudiar matemáticas al final del siglo XX, no debemos perder de vista el hecho de que la mayor parte de las matemáticas modernas se desarrollaron para resolver problemas del mundo real. Los vectores fueron desarrollados por Gibbs y otros para facilitar el análisis de los fenómenos físicos. En ese sentido tuvieron un gran éxito.

Resumen 4.4

- Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz** o **producto vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, está dado por (p. 269)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- ***Propiedades del producto cruz*** (p. 270)
  - **i)** $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  - **ii)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
  - **iii)** $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
  - **iv)** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
  - **v)** $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (el **triple producto escalar**).
  - **vi)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.
  - **vii)** Si $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Si φ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ sen φ = área del paralelogramo con lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. (p. 271)

Autoevaluación 4.4

I) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{i} =$ _____.

a) 0 *b)* $\mathbf{j}$ *c)* $2\mathbf{j}$ *d)* $-2\mathbf{j}$

II) $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

III) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* no está definido

IV) $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$ _______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

V) El seno del ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ es _______.

a) $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}$

c) $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}$ *d)* $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|$

VI) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} =$ _______.

a) $|\mathbf{u}|^2$ *b)* $\mathbf{1}$ *c)* 0 *d)* $\mathbf{0}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *c*) **III)** *b*) = vector cero [**Nota.** $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ *está* definido porque $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{i} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{k}]$)]

IV) *d*) **V)** *a*) **VI)** *c*) = vector cero

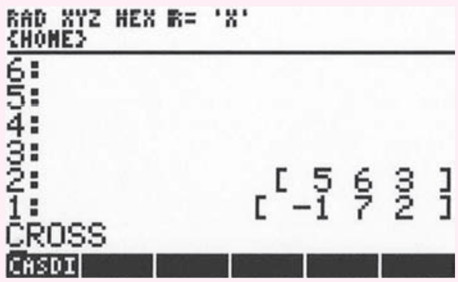
MANEJO DE LA CALCULADORA 4.4

El producto cruz de dos vectores se puede encontrar directamente utilizando el comando CROSS; esto es, encuentre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} = (5, 6, 3)$ y $\mathbf{v} = (-1, 7, 2)$

← [] 5 SPC 6 SPC 3 ENTER

← [] 1 +/– SPC 7 SPC 2 ENTER

ALPHA ALPHA C R O S S



que da por resultado $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-9, -13, 41)$.

Problemas 4.4

En los problemas 1 al 27 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$
8. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$
13. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
17. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
19. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
20. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
21. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
23. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$
24. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$
25. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
26. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
27. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

28. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

29. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

30. Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo φ entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

31. Utilice el producto escalar para calcular el coseno del ángulo φ entre los vectores del problema 30. Después demuestre que para los valores calculados, $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

En los problemas 32 al 39 encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados.

32. $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 4, 0)$

33. $(-8, 0, 10)$, $(-3, 2, -6)$, $(5, -5, 0)$

34. $(-2, 1, 0)$; $(1, 4, 2)$; $(-3, 1, 5)$

35. $(7, -2, -3)$; $(-4, 1, 6)$; $(5, -2, 3)$

36. $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$

37. $(a, b, 0)$; $(a, 0, b)$; $(0, a, b)$

38. $(4, 8, 10)$; $(1, -8, -7)$; $(-5, 7, -5)$

39. $(7, -5, 9)$; $(-3, -6, -5)$; $(2, -1, -3)$

40. Demuestre que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. [***Sugerencia:*** Escríbalo en términos de componentes.]

41. Utilice las propiedades 3.2.1, 3.2.4, 3.2.2 y 3.2.3 (en ese orden) para probar los incisos i), ii), iii) y iv) del teorema 4.4.2.

42. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso v) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

43. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vi). [***Sugerencia:*** Utilice los incisos ii) y v) y la propiedad de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.]

44. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vii). [***Sugerencia:*** Use el teorema 4.3.3, página 263, la propiedad 3.2.6, página 199, y la ecuación (4.4.2).]

45. Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

46. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

47. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (2, 1, -1)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.

48. El **volumen generado por tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ está definido como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (como en la figura 4.32). Sea A una matriz de 3×3 y sean $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}$. Demuestre que

Volumen generado

Volumen generado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 = (\det A)$(volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$).

Esto muestra que el determinante de una matriz de 2×2 multiplica el área; el determinante de una matriz de 3×3 multiplica el volumen.

49. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el volumen generado por **u**, **v** y **w**.
b) Calcule el volumen generado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$.
c) Calcule det A.
d) Demuestre que [volumen en el inciso *b*)] = ($\pm$det A) $\times$ [volumen en el inciso *a*)].

Triple producto cruz

50. El **triple producto cruz** de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ está definido como el vector $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

En los problemas 51 al 54 calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ con calculadora.

51. $\mathbf{u} = (-0.346, -0.517, -0.824)$; $\mathbf{v} = (-0.517, 0.811, 0.723)$

52. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

53. $\mathbf{u} = (1.4193, 0.2916, 0.1978)$; $\mathbf{v} = (1.5877, -0.8045, 0.6966)$

54. $\mathbf{u} = (5\,241, -3\,199, 2\,386)$; $\mathbf{v} = (1\,742, 8\,233, 9\,416)$

EJERCICIOS CON MATLAB 4.4

1. Utilice MATLAB para calcular el producto cruz de los vectores dados en los problemas 1, 2, 3, 4 y 10 de esta sección. Verifique sus respuestas calculando los productos escalares de los resultados con los vectores individuales (¿qué valor deben tener estos productos escalares?). El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido como un vector de 3×1 dado por

```
[u(2)*v(3)-u(3)*v(2); -u(1)*v(3)+u(3)*v(1);
          u(1)*v(2)-v(1)*u(2)].
```

También puede utilizar el comando `cross`. Para más información utilice `doc cross` desde la pantalla de comandos de MATLAB.

2. *a*) Dé tres vectores aleatorios de 3×1, **u**, **v** y **w** (use `2*rand(3,1)-1`). Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, el producto escalar de **u** con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (esto es `u'*cross(v,w)`). Sea B = [u v w]. Encuentre det(B). Compare det(B) con el producto escalar. Haga lo mismo para varios juegos de **u**, **v** y **w**. Formule una conclusión y después pruébela (lápiz y papel).

b) Sean **u**, **v** y **w** tres vectores aleatorios de 3×1 y sea A una matriz aleatoria de 3×3. Sea `A = round(10*(2*rand(3)-1))`. Calcule $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, $|A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})|$ y $|\det(A)|$. (En MATLAB, `abs(a)` dé $|\mathbf{a}|$.) Haga esto para varias matrices A hasta que pueda formular una conclusión respecto a las tres cantidades calculadas. Pruebe sus conclusiones para otras matrices aleatorias A.

Según sus conclusiones, ¿qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

c) (*Lápiz y papel*) Usando *a*) demuestre que $A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det([A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}])$, donde A es una matriz de 3×3. Argumente por qué $[A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}] = AB$, donde $B = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$.

Ahora pruebe la conclusión obtenida en el inciso *b*).