

▲ Los vectores en dos y tres dimensiones se emplean en todos los ámbitos de la física para representar diversos fenómenos en disciplinas como mecánica, electricidad y magnetismo, óptica y mecánica de fluidos, sólo por mencionar algunas.

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Conocerá las propiedades principales de los vectores en dos dimensiones (sección 4.1).
- Aprenderá, utilizando el producto escalar entre vectores, a definir el concepto de ortogonalidad y la operación de proyección (sección 4.2).
- Identificará las principales propiedades de los vectores en tres dimensiones (sección 4.3).
- Estudiará una nueva operación binaria junto con sus propiedades, un producto entre vectores que da como resultado un vector (sección 4.4).
- Se familiarizará con las descripciones y propiedades de las rectas y los planos en el espacio haciendo uso de las herramientas definidas en las secciones anteriores (sección 4.5).

En la sección 2.1 se definieron los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En el siguiente capítulo se definirán otros tipos de conjuntos de vectores, denominados *espacios vectoriales*.

En principio, el estudio de los espacios vectoriales arbitrarios es un tema abstracto. Por esta razón es útil poder contar con un grupo de vectores que se pueden visualizar fácilmente para usarlos como ejemplos.

En el presente capítulo se discutirán las propiedades básicas de los vectores en el plano xy y en el espacio real de tres dimensiones. Los estudiantes que conocen el cálculo de varias variables ya están familiarizados con este material, en cuyo caso se podrá cubrir rápidamente, a manera de repaso. Para los que no, el estudio de este capítulo proporcionará ejemplos que harán mucho más comprensible el material de los capítulos 5, 6 y 7.

4.1 Vectores en el plano

Como se definió en la sección 2.1, \mathbb{R}^2 es el conjunto de vectores (x_1, x_2) con x_1 y x_2 números reales. Como cualquier punto en el plano se puede escribir en la forma (x, y) , es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector en \mathbb{R}^2 , y viceversa. De este modo, los términos “el plano” y “ \mathbb{R}^2 ” con frecuencia son intercambiables. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene “longitud” y “dirección”. Ahora se verá cómo se lleva a cabo esto.

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q , denotado por \vec{PQ} , es el segmento de recta que va de P a Q (vea la figura 4.1a). Observe que los segmentos de recta dirigidos \vec{PQ} y \vec{QP} son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (figura 4.1b).

Segmento de
recta dirigido

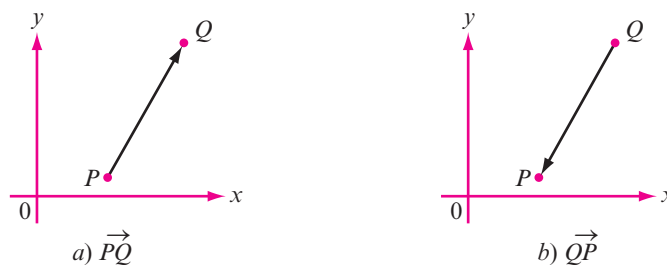


Figura 4.1

Los segmentos de recta dirigidos \vec{PQ} y \vec{QP} apuntan hacia direcciones opuestas.

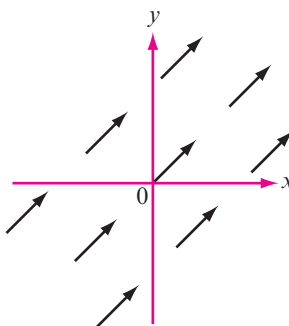


Figura 4.2

Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

Punto inicial

Punto terminal

El punto P en el segmento de recta dirigido \vec{PQ} se denomina **punto inicial** del segmento y el punto Q se denomina **punto terminal**. Las dos propiedades más importantes de un segmento

de recta dirigido son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos \vec{PQ} y \vec{RS} tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura 4.2 son todos equivalentes.

D Definición 4.1.1

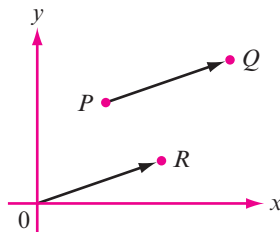
Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

De la definición 4.1.1 se observa que un vector dado \mathbf{v} se puede representar de múltiples formas. Observe la figura 4.3: sea \vec{PQ} una representación de \mathbf{v} ; entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover \vec{PQ} en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido \vec{OR} , que es otra representación del vector \mathbf{v} . Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b) . Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido \vec{OR} por las coordenadas (a, b) . Es decir, \vec{OR} es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b) . Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector \mathbf{v} como (a, b) .

Figura 4.3

Se puede mover \vec{PQ} para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que \vec{OR} y \vec{PQ} son paralelos y tienen la misma longitud.



D Definición 4.1.2

Definición algebraica de un vector

Un **vector \mathbf{v}** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector \mathbf{v} . El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud de un vector** como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación \vec{OR} y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se define a

$$|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.1.1)$$



Observación

Los segmentos de recta dirigidos en la figura 4.2 son todos representaciones del mismo vector.

Segmentos de recta dirigidos equivalentes

Vector

Representación del vector



Nota

La forma de la definición geométrica de un vector presenta la noción de una clase de equivalencias, la cual es útil para dividir conjuntos en subconjuntos ajenos. Además, es suficiente elegir un elemento de cada subconjunto para representar a todos los otros elementos.



Observación

Con la definición 4.1.2 es posible pensar en un punto en el plano xy con coordenadas (a, b) como un vector que comienza en el origen y termina en (a, b) .



Observación

El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección*.



Observación

Se hace hincapié en que las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 describen, precisamente, los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 4.1.2 es la definición de un vector de dimensión 2 que se ha estado utilizando.

Magnitud o longitud de un vector

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 4.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar a la magnitud de \mathbf{v} . Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar*.

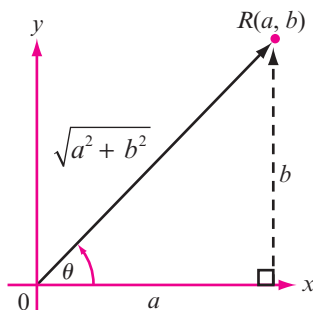


Figura 4.4

La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

EJEMPLO 4.1.1 Cálculo de la magnitud de seis vectores

Calcule las magnitudes de los vectores i) $\mathbf{v} = (2, 2)$; ii) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; iii) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; iv) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; v) $\mathbf{v} = (6, -6)$; vi) $\mathbf{v} = (0, 3)$.

▲▲▲ **Solución** i) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

iii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

iv) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v) $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi) $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

Se define la **dirección del vector** $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ , medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x . Por convención, se escoge θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura 4.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

Nota

$\tan \theta$ es periódica con periodo π . Entonces, si $a \neq 0$, siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$, tales que $\tan \theta = \frac{b}{a}$. Por ejemplo,

$$\tan \frac{\pi}{4} = \tan \frac{5\pi}{4} = 1. \text{ Para determinar } \theta$$

de manera única es necesario determinar el cuadrante de \mathbf{v} , como se apreciará en el siguiente ejemplo.

Dirección de un vector

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

(4.1.2)

EJEMPLO 4.1.2 Cálculo de las direcciones de seis vectores

Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 4.1.1.

▲▲▲ **Solución** Estos seis vectores están dibujados en la figura 4.5.

a) \mathbf{v} se encuentra en el primer cuadrante y como $\tan \theta = \frac{2}{2} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\theta = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{2} = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ya que \mathbf{v} está en el primer cuadrante).

c) \mathbf{v} está en el segundo cuadrante y como $\tan^{-1} \frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, y de la figura 4.5c que $\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

d) \mathbf{v} está en el tercer cuadrante, y como $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$, se encuentra que $\theta = \pi + \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

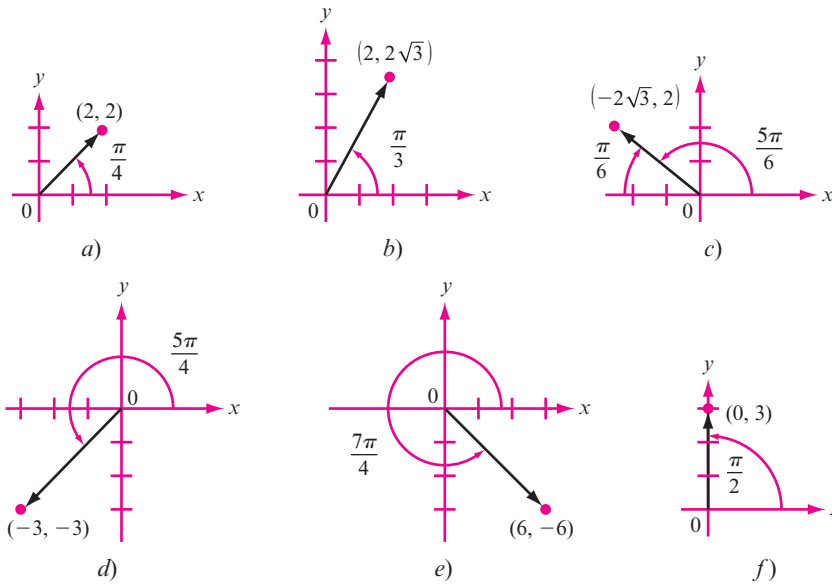


Figura 4.5

Direcciones de seis vectores.

- e) Como \mathbf{v} está en el cuarto cuadrante y $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, se obtiene $\theta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4}$.
- f) No se puede usar la ecuación (4.1.2) porque $\frac{b}{a}$ no está definido. No obstante, en la figura 4.5 f) se ve que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En general, si $b > 0$

$$\text{Dirección de } (0, b) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{dirección de } (0, -b) = \frac{3\pi}{2} \quad b > 0$$

En la sección 2.1 se definió la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. ¿Qué significan en términos geométricos estos conceptos? Se comienza con la multiplicación por un escalar. Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces $\alpha\mathbf{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Se encuentra que

$$|\alpha\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} = |\alpha| \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha| |\mathbf{v}| \quad (4.1.3)$$

es decir,

Magnitud de $\alpha\mathbf{v}$

Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Más aún, si $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ está en el mismo cuadrante que \mathbf{v} y, por lo tanto, la dirección de $\alpha\mathbf{v}$ es la *misma* que la dirección de \mathbf{v} ya que $\tan^{-1}\left(\frac{\alpha b}{\alpha a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la de \mathbf{v} . En otras palabras,

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$

Dirección de $\alpha\mathbf{v} =$ dirección de \mathbf{v} , si $\alpha > 0$
 Dirección de $\alpha\mathbf{v} =$ (dirección de \mathbf{v}) + π si $\alpha < 0$

(4.1.4)

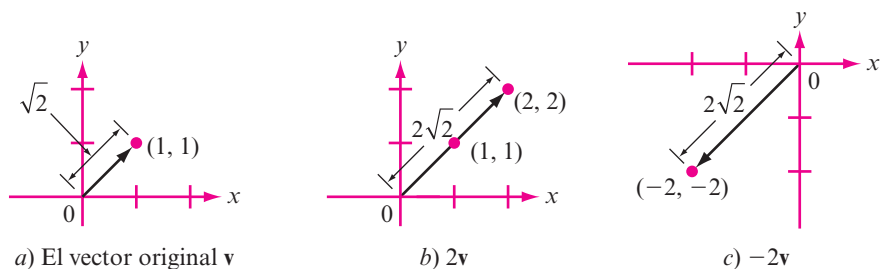


Figura 4.6

El vector $2\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que \mathbf{v} y el doble de su magnitud. El vector $-2\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a \mathbf{v} y el doble de su magnitud.

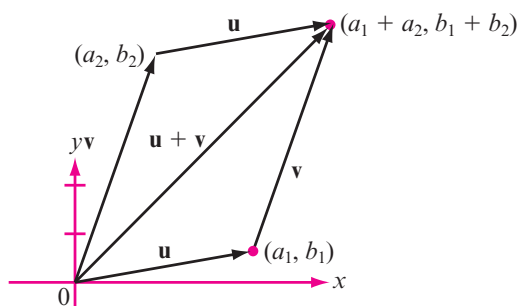


Figura 4.7

La regla del paralelogramo para sumar vectores.

EJEMPLO 4.1.3 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $\mathbf{v} = (1, 1)$. Entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y $|2\mathbf{v}| = |(2, 2)| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Todavía más, $|-2\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Así, la dirección de $2\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$, mientras que la dirección de $-2\mathbf{v}$ es $\frac{5\pi}{4}$ (vea la figura 4.6).

Ahora suponga que se suman dos vectores: $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ como en la figura 4.7. De la figura se puede apreciar que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se puede obtener trasladando la representación del vector \mathbf{v} de manera que su punto inicial coincida con el punto terminal (a_1, b_1) del vector \mathbf{u} . Por lo tanto, se puede obtener el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados \mathbf{u} y \mathbf{v} . Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que va del origen a lo largo de la diagonal del paralelogramo.

Nota. Al igual que un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, se deduce de inmediato, de la figura 4.7, que

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

(4.1.5)

Desigualdad del triángulo

Por razones que resultan obvias en la figura 4.7, la desigualdad (4.1.5) se denomina **desigualdad del triángulo**.

También se puede utilizar la figura 4.7 para obtener una representación geométrica del vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Como $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que se debe sumar a \mathbf{v} para obtener \mathbf{u} . Este hecho se ilustra en la figura 4.8a. Un hecho similar se ilustra en la figura 4.8b.

Existen dos vectores especiales en \mathbb{R}^2 que nos permiten representar a cualquier otro vector en el plano de una forma conveniente. Se denota el vector $(1, 0)$ por el símbolo \mathbf{i} y el vector $(0, 1)$ por el símbolo \mathbf{j} (vea la figura 4.9). Si $\mathbf{v} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, se puede escribir

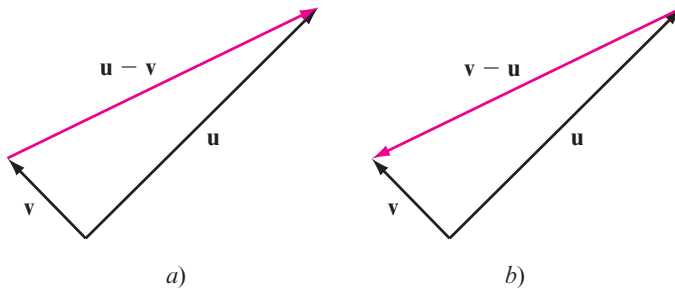


Figura 4.8

Los vectores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

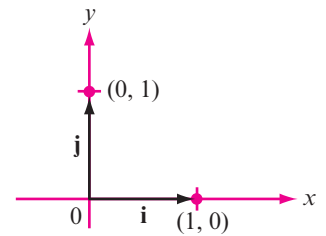


Figura 4.9

Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} .

$$\mathbf{v} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad (4.1.6)$$

Con esta representación se dice que \mathbf{v} está *expresado en sus componentes horizontal y vertical*. Los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} tienen dos propiedades:

- i) Ninguno de ellos es múltiplo del otro. (En la terminología del capítulo 5, son *linealmente independientes*.)
- ii) Cualquier vector \mathbf{v} se puede escribir en términos de \mathbf{i} y \mathbf{j} como en la ecuación (4.1.6).[†]

Bajo estas dos condiciones se dice que \mathbf{i} y \mathbf{j} forman una **base** en \mathbb{R}^2 . En el capítulo 5 se estudiarán las bases en espacios vectoriales arbitrarios.

Ahora se definirá un tipo de vector que es muy útil en ciertas aplicaciones.



Nota histórica

Hamilton utilizó por primera vez los símbolos \mathbf{i} y \mathbf{j} . Definió su cuaternión como una cantidad de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, donde a es la "parte escalar" y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la "parte vectorial". En la sección 4.3 se escribirán los vectores en el espacio en la forma $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Base

D Definición 4.1.3

Vector unitario

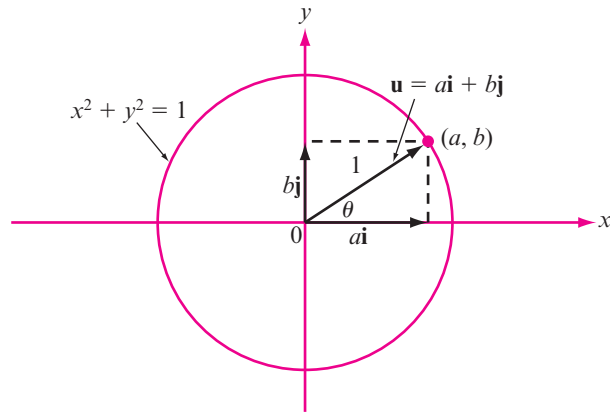
Un **vector unitario** es un vector con longitud 1.

EJEMPLO 4.1.4 Un vector unitario

El vector $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

[†] En la ecuación (4.1.6) se dice que \mathbf{v} se puede escribir como una *combinación lineal* de \mathbf{i} y \mathbf{j} . Se estudiará el concepto de combinación lineal en la sección 5.5.

**Figura 4.10**

El punto terminal de un vector unitario que tiene su punto inicial en el origen se encuentra sobre el círculo unitario (círculo centrado en el origen con radio 1).

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de manera que $a^2 + b^2 = 1$ y \mathbf{u} se puede representar por un punto en el círculo unitario (vea la figura 4.10). Si θ es la dirección de \mathbf{u} , es claro que $a = \cos \theta$ y $b = \sin \theta$. De este modo, cualquier vector unitario \mathbf{u} se puede escribir en la forma

Representación de un vector unitario

$$\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$$

(4.1.7)

donde θ es la dirección de \mathbf{u} .

EJEMPLO 4.1.5 Cómo escribir un vector unitario como $(\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$

El vector unitario $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ del ejemplo 4.1.4 se puede escribir en la forma de (4.1.7) con $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

También se tiene (vea el problema 4.1.26).

Sea \mathbf{v} un vector diferente de cero. Entonces $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que \mathbf{v} .

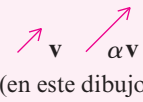

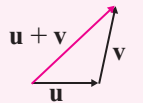
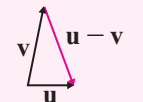
EJEMPLO 4.1.6 Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado diferente de cero

Encuentre un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

▲▲ Solución Aquí $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo que $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{j}$ es el vector que se busca.

Se concluye esta sección con un resumen de las propiedades de los vectores.

Tabla 4.1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector \mathbf{v}	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$ \mathbf{v} $	Magnitud (o longitud) de \mathbf{v}	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	 (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$		$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$		$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$		$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Resumen 4.1

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en \mathbb{R}^2 denotado por \overrightarrow{PQ} es el segmento de recta que va de P a Q . (p. 232)
- Dos segmentos de recta dirigidos en \mathbb{R}^2 son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección. (p. 233)
- **Definición geométrica de un vector**
Un vector en \mathbb{R}^2 es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en \mathbb{R}^2 equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por \overrightarrow{OR} . (p. 233)
- **Definición algebraica de un vector**
Un vector \mathbf{v} en el plano xy (\mathbb{R}^2) es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se llaman **componentes** del vector \mathbf{v} . El **vector cero** es el vector $(0, 0)$. (p. 233)
- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en \mathbb{R}^2 se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces una representación de \mathbf{v} es \overrightarrow{OR} , donde $R = (a, b)$. (p. 233)
- Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces la **magnitud de \mathbf{v}** , denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (p. 233)
- Si \mathbf{v} es un vector en \mathbb{R}^2 , entonces la **dirección de \mathbf{v}** es el ángulo en $[0, 2\pi]$ que forma cualquier representación de \mathbf{v} con el lado positivo del eje x . (p. 234)

• **Desigualdad del triángulo**

En \mathbb{R}^2

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \quad (\text{p. 236})$$

• En \mathbb{R}^2 sean $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b)$ se puede escribir como $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. (p. 237)

• Un **vector unitario** \mathbf{u} en \mathbb{R}^2 es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. En \mathbb{R}^2 un vector unitario se puede escribir como

$$\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j} \quad (\text{p. 238})$$

donde θ es la dirección de \mathbf{u} .



AUTOEVALUACIÓN 4.1

I) Un *vector* es _____.

- a) dos puntos en el plano xy .
- b) un segmento de recta entre dos puntos.
- c) un segmento de recta dirigido de un punto a otro.
- d) una colección de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

II) Si $P = (3, -4)$ y $Q = (8, 6)$, el vector \vec{PQ} tiene longitud _____.

- a) $|3| + |-4|$
- b) $(3)^2 + (-4)^2$
- c) $(3 - 8)^2 + (-4 - 6)^2$
- d) $\sqrt{(8 - 3)^2 + (6 - (-4))^2}$

III) La dirección del vector $(4, 8)$ es _____.

- a) π
- b) $\tan^{-1}(8 - 4)$
- c) $\left(\frac{8}{4}\right)\pi$
- d) $\tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right)$

IV) Si $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 8)$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ _____.

- a) $(7, 13)$
- b) $(8, 12)$
- c) $(2, 4)$
- d) $(15, 32)$

V) Si $\mathbf{u} = (4, 3)$, entonces el vector unitario con la misma dirección que \mathbf{u} es _____.

- a) $(0.4, 0.3)$
- b) $(0.8, 0.6)$
- c) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
- d) $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$



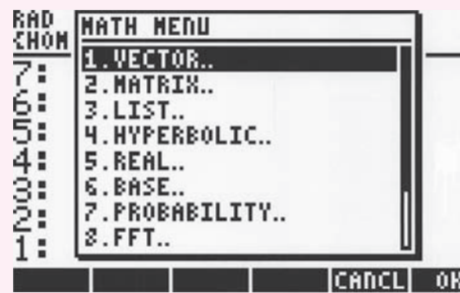
Respuestas a la autoevaluación

- I) d) II) d) III) d) IV) b) V) b = c



MANEJO DE LA CALCULADORA 4.1

Se puede trabajar con vectores en la calculadora HP50g. Primero seleccionamos el modo de coordenadas rectangulares para la representación de vectores, con la bandera 177 del sistema en la posición de elección, y al oprimir \leftarrow \overline{MTH} se presenta la siguiente ventana:



El menú de VECTOR contiene las siguientes funciones:

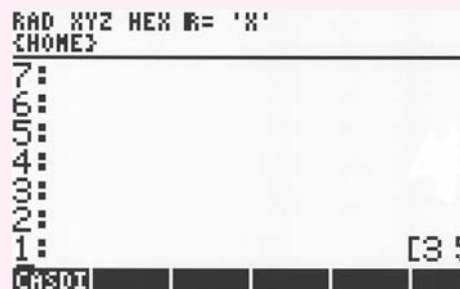


Y hay que asegurarse que la opción 7 esté seleccionada (esto se verá como texto blanco sobre fondo negro).

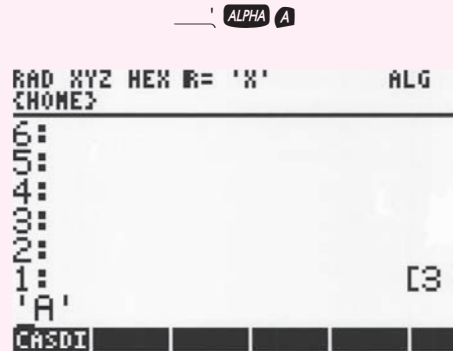


Se pueden escribir vectores directamente en la pila utilizando la secuencia $\leftarrow \underline{\underline{[]}}$ y escribiendo los números separados por comas o espacios, finalizando con la tecla ENTER , por ejemplo el vector (3, 5).

$\leftarrow \underline{\underline{[]}}$ 3 SPC 5 ENTER



Se pueden guardar en memoria vectores como cualquier otro objeto utilizando el comando **STO**, esto es, se escribe el vector a guardar en la pila, se escribe el nombre de la variable donde se quiere guardar el vector,



y por último se oprime **STO**.



Observe que ahora se tiene una nueva variable con etiqueta A.

Para obtener la magnitud de un vector se utiliza el comando **ABS**; por ejemplo, encontrar la magnitud del vector guardado en A, **FI ALPHA ALPHA A B S ENTER**, se obtiene:



Si se quiere expresar un vector en forma de magnitud y ángulo, se tiene que cambiar el sistema de coordenadas de la calculadora; esto se puede hacer siguiendo los pasos mostrados al inicio de esta sección, pero eligiendo la opción 8 en la figura 2 de la página anterior. [**Observación:** Asegúrese de incluir un punto decimal en las cantidades de los vectores, de lo contrario la conversión no se efectuará en forma automática.]

También se pueden describir vectores en forma polar y la calculadora hará la conversión adecuada con respecto al sistema de coordenadas que se esté utilizando. Para especificar un vector en forma de magnitud-ángulo se abren corchetes con **[]** seguido de la magnitud y el símbolo de ángulo **ALPHA → 6** seguido del ángulo, es decir,

Si queremos escribir un vector con magnitud 5 y ángulo de 3 radianes, la secuencia de teclas es la siguiente:



La suma entre vectores y la multiplicación por un escalar se realiza de modo transparente para el usuario siempre y cuando las dimensiones sean compatibles. En los problemas 59 al 71 utilice la calculadora para encontrar la magnitud y dirección (en radianes y grados) de cada vector en \mathbb{R}^2 .



Problemas 4.1

De los problemas 1 al 19 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (-4, 4)$
2. $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$
3. $\mathbf{v} = (7, 9)$
4. $\mathbf{v} = (-4, -4)$
5. $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, -2)$
6. $\mathbf{v} = (-8, 9)$
7. $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$
8. $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3})$
9. $\mathbf{v} = (3, -8)$
10. $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$
11. $\mathbf{v} = (3, 2)$
12. $\mathbf{v} = (-5, 1)$
13. $\mathbf{v} = (1, 2)$
14. $\mathbf{v} = (-5, 8)$
15. $\mathbf{v} = (10, 10)$
16. $\mathbf{v} = (-7, 10)$
17. $\mathbf{v} = (10, 0)$
18. $\mathbf{v} = (6, -8)$
19. $\mathbf{v} = (-2, 9)$
20. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre: a) $3\mathbf{u}$; b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; c) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; d) $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.
21. Sea $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre: a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; c) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; d) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; e) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; f) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.
22. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre: a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; c) $3\mathbf{u}$; d) $-7\mathbf{v}$; e) $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; f) $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.
23. Demuestre que el vector $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ es un vector unitario.
24. Muestre que los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios.
25. Demuestre que el vector $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{j}$ es un vector unitario.
26. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que \mathbf{v} .

De los problemas 27 al 34 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

27. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

28. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

29. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

30. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

31. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

32. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}; a \neq 0$

33. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

34. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

35. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, demuestre que $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ y $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$, donde θ es la dirección de \mathbf{v} .

36. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, encuentre $\sin \theta$ y $\cos \theta$.

37. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentre $\sin \theta$ y $\cos \theta$.

Un vector \mathbf{v} tiene dirección opuesta a la del vector \mathbf{u} si la dirección de \mathbf{v} es igual a la dirección de \mathbf{u} más π radianes. De los problemas 38 al 45 encuentre un vector unitario \mathbf{v} que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado \mathbf{u} .

38. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

39. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

40. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

41. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

42. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

43. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

44. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

45. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

46. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; c) $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.

47. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de \vec{PQ} es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

48. Demuestre que la dirección de \vec{PQ} en el problema 47 es la misma que la dirección del vector (a, b) . [*Sugerencia:* Si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta que pasa por los puntos O y R .]

De los problemas 49 al 56 encuentre un vector \mathbf{v} que tenga la magnitud y dirección dadas.

49. $|\mathbf{v}| = 3, \theta = \frac{\pi}{6}$

50. $|\mathbf{v}| = 1, \theta = -\frac{\pi}{3}$

51. $|\mathbf{v}| = 8, \theta = \frac{\pi}{3}$

52. $|\mathbf{v}| = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$

53. $|\mathbf{v}| = 9, \theta = \frac{2\pi}{3}$

54. $|\mathbf{v}| = 6, \theta = \frac{2\pi}{3}$

55. $|\mathbf{v}| = 7, \theta = -\frac{2\pi}{3}$

56. $|\mathbf{v}| = 3, \theta = -\frac{5\pi}{4}$

*57. Demuestre de manera algebraica (es decir, estrictamente de las definiciones de suma y magnitud de vectores) que para cualesquiera dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

58. Demuestre que si \mathbf{u} y \mathbf{v} son diferentes del vector cero, entonces $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si \mathbf{u} es un múltiplo escalar positivo de \mathbf{v} .



En los problemas 59 al 71 utilice la calculadora para encontrar la magnitud y dirección (en radianes y grados) de cada vector en \mathbb{R}^2 .

59. (1.735, 2.437)

60. (0.9502, 0.0344)

61. (-1.735, 2.437)

62. (-1.735, -2.437)

63. (0.4387, 0.3861)

64. (-58, -99)

65. (58, 99)

66. (0.3192, 0.3129)

67. (0.01468, -0.08517)

68. (0.01468, 0.08517)

69. (-0.8649, -0.0301)

70. (-0.01468, 0.08517)

71. (-0.1649, 0.6277)



EJERCICIOS CON MATLAB 4.1

Información de MATLAB

Introduzca un vector como una matriz de 2×1 o de 3×1 . La suma y multiplicación por un escalar es la misma que para las matrices.

Producto escalar de u y v : $u' * v$

Magnitud (longitud) de v : $\text{sqrt}(v' * v)$ o $\text{norm}(v)$

Dirección de v : vea el ejemplo 4.1.2 y use el hecho de que $\tan^{-1}(c)$ se encuentra con $\text{atan}(c)$. También se puede utilizar el comando $\text{atan2}(x, y)$ (ver `doc atan2`)

Gráficas: varios problemas utilizan gráficas. Se proporcionan instrucciones específicas en cada problema.

1. *a)* Utilice MATLAB para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel para la magnitud y dirección de los vectores de los problemas impares 1 al 12 de esta sección.

Nota. $\sqrt{3}$ se encuentra con `sqrt(3)`.

- b)* Utilice MATLAB para encontrar la magnitud y dirección de los vectores en los problemas pares 38 al 48 en esta sección.
2. Las combinaciones lineales de vectores serán importantes en el trabajo futuro. Este problema describe una manera de visualizar las combinaciones lineales de vectores en el plano (vea también el problema 3 siguiente).

- a)* Se quieren graficar varias combinaciones lineales de dos vectores dados en el mismo conjunto de ejes. Cada vector será representado por un recta de $(0, 0)$ al punto terminal del vector. Sean u y v dos matrices (vectores) de 2×1 dadas. Se quieren graficar varios vectores z , donde $z = au + bv$ con $-1 \leq a, b \leq 1$ para ayudar a la comprensión de la geometría de una combinación lineal. Lea la nota sobre *gráficas* que se presentó antes de estos problemas de MATLAB.

Introduzca u y v como vectores columna, elegidos por usted tales que no sean paralelos. Dé lo siguiente:

```
w=u+v;ww=u-v;aa=[u',v',w',ww'];M=max(abs(aa))
axis('square');axis([-M M -M M])
plot([0 v(1)], [0,v(2)], [0,u(1)], [0,u(2)])
hold on
grid
```

Con esto verá u y v graficados. Los siguientes comandos de MATLAB grafican la combinación lineal entre los vectores u y v

```
a=1; b=1;
z=a*u+b*v;
plot([0 z(1)], [0 z(2)], 'c', 'linewidth', 5)
```

Repita cinco veces los tres renglones de comandos anteriores, pero modifique la elección de a y b con $0 \leq a, b \leq 1$ (recuerde que puede usar las flechas hacia arriba). Observe la geometría de cada combinación lineal conforme obtenga cada una de las gráficas.

¿Cómo se verá la pantalla de gráficas si se grafican múltiples casos de a y b ?

Repita seis veces los últimos tres renglones de comandos con los siguientes cambios: cambie 'c' a 'r' y elija al menos otras seis a y b para $0 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 0$. Sea $a = 1$ y $b = -1$ la primera elección. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita los últimos tres renglones de comandos seis veces con los siguientes movimientos: cambie 'c' a 'm' y elija por lo menos otras seis a y b para $-1 \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = 1$ los primeros valores. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita seis veces más los últimos tres renglones de comandos con los siguientes movimientos: cambie 'c' a 'k' y elija por lo menos otros seis valores de a y b para $-1 \leq a, b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = -1$ los primeros valores. Observe la geometría y responda la pregunta, igual que antes.

¿Cómo se vería la pantalla de gráficas si se graficaran cada vez más combinaciones lineales?

Al terminar este problema dé el comando `hold off`.

- b) Siguiendo las instrucciones anteriores, explore lo que ocurre si comienza con u y v paralelos.

Al terminar este problema, dé el comando `hold off`.

3. (Este problema usa el archivo `lincomb.m`) Dados dos vectores no paralelos en el plano, se puede escribir otro vector en el plano como una combinación lineal de estos dos vectores. El archivo `lincomb.m` se presenta a continuación.

M

```
function lincomb(u,v,w
% LINCOMB función que grafica los vectores u,v,w y
% se expresa w como la combinacion lineal
% del u,v es decir
% w = a u + b v, con a,b reales
%
% u: vector de 2x1
% v: vector de 2x1
% w: vector de 2x1
% define el origen
origen=[0;0];
% se encuentran los valores de las constantes
% de la combinacion lineal
A=[u,v];
xx=A\w;
Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
Ow=[origen,w];
PP1=[origen,xx(1)*u,xx(1)*u+xx(2)*v,xx(2)*v,origen];
%Grafica de vectores
plot(Ou(1,:),Ou(2:,:), '-*b',Ov(1,:),Ov(2:,:), '-*b',...
      Ow(1,:),Ow(2:,:), '-*g')
text(u(1)/2,u(2)/2, '\bf u')
text(v(1)/2,v(2)/2, '\bf v')
text(w(1)/2,w(2)/2, '\bf w')
hold on
plot(PP1(1,:),PP1(2:,:), ':r')
grid on
%
title(['u=[',num2str(u(1)),';',num2str(u(2)),'], ',...
      'v=[',num2str(v(1)),';',num2str(v(2)),'], ',...
      'w=[',num2str(w(1)),';',num2str(w(2)),']'])
xlabel(['w = (',num2str(xx(1),2),...
      ') u + (',num2str(xx(2),2),') v'])
%
axis square
a=axis;
```

```
axis([min(a([1,3])),max(a([2,4])),min(a([1,3])),max(a([2,4]))])
%
hold off
```

Una vez que se haya escrito la función en un archivo con nombre *lincomb.m*, dé el comando `doc lincomb` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores de 2×1 que no son paralelos. Sea $\mathbf{w} = 5 * (2 * \text{rand}(2, 1) - 1)$. Dé `lincomb(u, v, w)`. Primero verá graficados \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Oprima cualquier tecla y aparecerá la geometría de \mathbf{w} escrita como una combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} . Repita para diferentes vectores \mathbf{w} , \mathbf{u} y \mathbf{v} .

4.2 El producto escalar y las proyecciones en \mathbb{R}^2

En la sección 2.2 se definió el producto escalar de dos vectores. Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 \quad (4.2.1)$$

Ahora se verá la interpretación geométrica del producto escalar.

D Definición 4.2.1

Ángulo entre vectores

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo φ entre \mathbf{u} y \mathbf{v}** está definido como el ángulo no negativo más pequeño[†] entre las representaciones de \mathbf{u} y \mathbf{v} que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ para algún escalar α , entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Esta definición se ilustra en la figura 4.11. Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$.

T Teorema 4.2.1 La magnitud de un vector en términos del producto escalar



Demostración

Sea \mathbf{v} un vector. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (4.2.2)$$



Demostración

Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

[†] Este ángulo estará en el intervalo $[0, \pi]$.

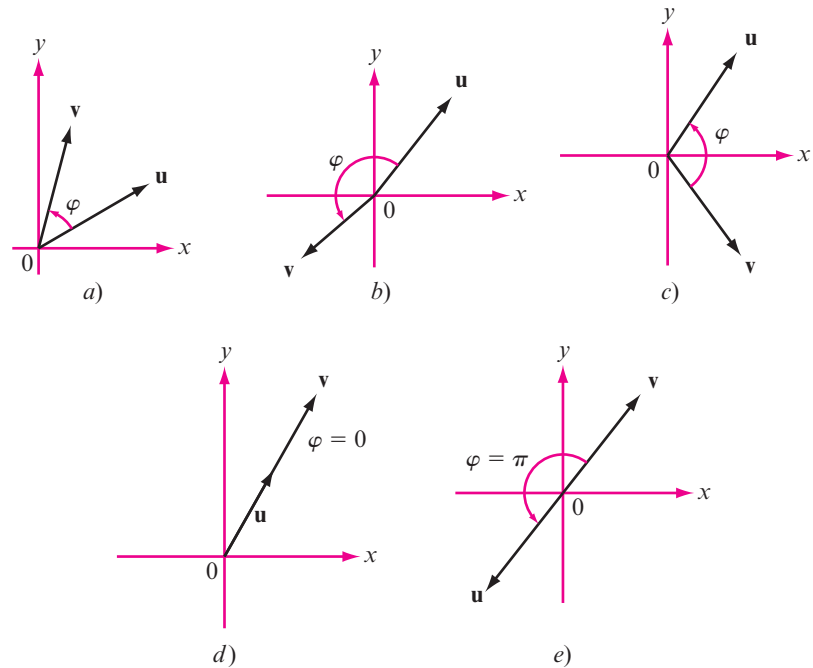


Figura 4.11
Ángulo φ entre dos vectores.

T Teorema 4.2.2

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \tag{4.2.3}$$

Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10, página 223) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

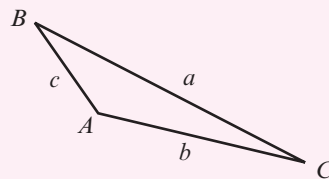


Figura 4.12
Triángulo con lados a, b y c .

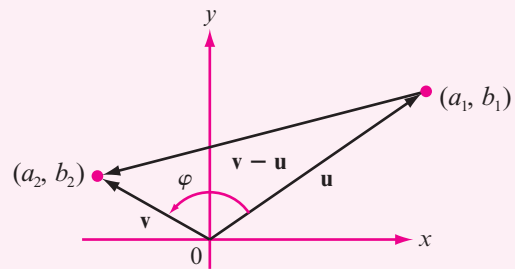


Figura 4.13
Triángulo con lados $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de \mathbf{u} y \mathbf{v} con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$. Pero

de (4.2.2) teorema 2.2.1 iii), página 64

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2 \end{aligned}$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Haciendo uso del teorema 4.2.1 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$$

EJEMPLO 4.2.1 Cálculo del ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

▲▲▲ Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$. Así,

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \approx -0.431455497^\dagger$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \approx 2.0169^\ddagger (\approx 115.6^\circ)$$

Nota. Como $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\cos^{-1}(\cos \varphi) = \varphi$.

D Definición 4.2.2

Vectores paralelos

Dos vectores diferentes de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π . Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

EJEMPLO 4.2.2 Dos vectores paralelos

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

▲▲▲ Solución $\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{-8 - 18}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = \frac{-26}{\sqrt{13}(2\sqrt{13})} = \frac{-26}{2(13)} = -1$.

Por lo tanto, $\varphi = \pi$ (de manera que \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen direcciones opuestas).

T Teorema 4.2.3

Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$ para alguna constante α si y sólo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos.



Demostración

La prueba se deja como ejercicio (vea el problema 42 de esta sección).

[†] Estas cifras, al igual que otras en el libro, se obtuvieron con una calculadora.

[‡] Al hacer este cálculo, asegúrese de que su calculadora esté en modo de radianes.

D Definición 4.2.3

Vectores ortogonales

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 4.2.3 Dos vectores ortogonales

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

▲▲ Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)} = 0$, y como φ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

T Teorema 4.2.4

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración

Esta prueba también se deja como ejercicio (vea el problema 43 de esta sección).

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto se demuestra el siguiente teorema.

T Teorema 4.2.5

Sea \mathbf{v} un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector \mathbf{u} el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

es ortogonal a \mathbf{v} .

Demostración

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

Los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} se ilustran en la figura 4.14.

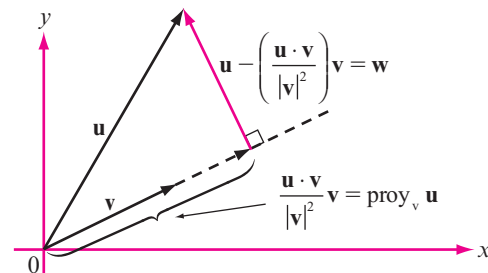


Figura 4.14

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$ es ortogonal a \mathbf{v} .

D Definición 4.2.4

Proyección

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es un vector denotado por $\text{proy}_v \mathbf{u}$, que se define por

$$\text{proy}_v \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad (4.2.4)$$

$$\text{La componente de } \mathbf{u} \text{ en la dirección de } \mathbf{v} \text{ es } \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \text{ y es un escalar.} \quad (4.2.5)$$

Observe que $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

Observación 1. De las figuras 4.14 y 4.15 y del hecho de que $\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ se deduce que

\mathbf{v} y $\text{proy}_v \mathbf{u}$ tienen:

- i) la misma dirección si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ y
- ii) direcciones opuestas si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.

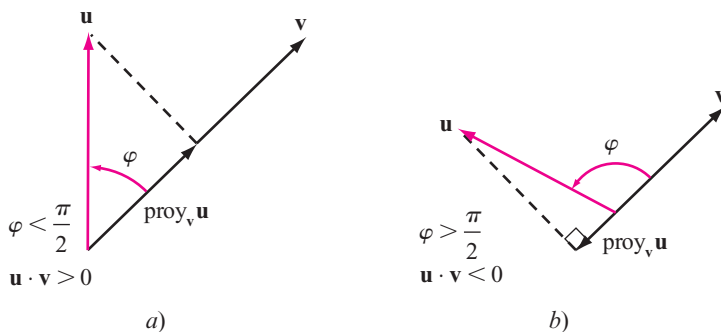


Figura 4.15

- a) \mathbf{v} y $\text{proy}_v \mathbf{u}$ tienen la misma dirección si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$,
- b) \mathbf{v} y $\text{proy}_v \mathbf{u}$ tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.

Observación 2. Se puede pensar en la $\text{proy}_v \mathbf{u}$ como la componente de \mathbf{v} del vector \mathbf{u} .

Observación 3. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, de manera que $\text{proy}_v \mathbf{u} = 0$.

Observación 4. Una definición alternativa de la proyección es: si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores diferentes de cero, entonces $\text{proy}_v \mathbf{u}$ es el único vector con las siguientes propiedades:

- i) $\text{proy}_v \mathbf{u}$ es paralelo a \mathbf{v} .
- ii) $\mathbf{u} - \text{proy}_v \mathbf{u}$ es ortogonal a \mathbf{v} .

EJEMPLO 4.2.4 Cálculo de una proyección

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_v \mathbf{u}$.

▲▲ Solución $\text{Proy}_v \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \left[\frac{5}{(\sqrt{2})^2} \right] \mathbf{v} = \left(\frac{5}{2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{5}{2} \right) \mathbf{j}$ (vea la figura 4.16).

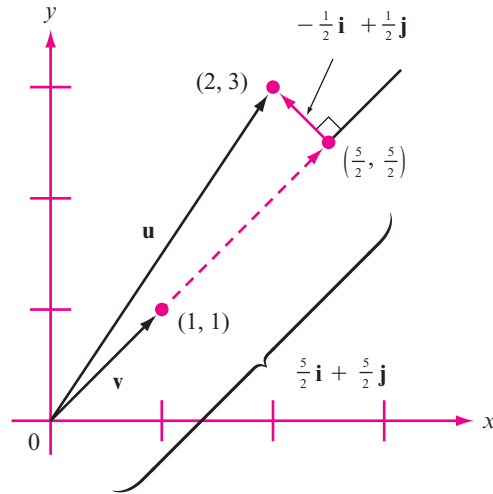


Figura 4.16

La proyección de $(2, 3)$ sobre $(1, 1)$ es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

● EJEMPLO 4.2.5 Cálculo de una proyección

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_v \mathbf{u}$.

▲▲ Solución En este caso $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_v \mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 4.17).

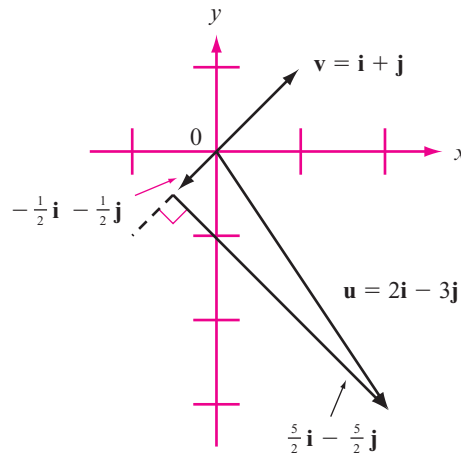


Figura 4.17

La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

R Resumen 4.2

- Sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$; entonces el **producto escalar** o **producto punto** de \mathbf{u} y \mathbf{v} , denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, está dado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

(p. 247)

- El **ángulo** φ entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathbb{R}^2 es el único número en $[0, \pi]$ que satisface (p. 247)

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en \mathbb{R}^2 son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π . Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. (p. 249)

- Dos vectores \mathbb{R}^2 son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. (p. 251)

- Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores diferentes de cero en \mathbb{R}^2 . La **proyección** de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es un vector, denotado por $\text{proy}_v \mathbf{u}$, que está definido por (p. 251)

$$\text{proy}_v \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

El escalar $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} .

- $\text{proy}_v \mathbf{u}$ es paralelo a \mathbf{v} y $\mathbf{u} - \text{proy}_v \mathbf{u}$ es ortogonal a \mathbf{v} . (p. 251)



AUTOEVALUACIÓN 4.2

I) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} =$ _____.

a) 1

b) $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}$

c) 0

d) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$

II) $(3, 4) \cdot (3, 2) =$ _____.

a) $(3+3)(4+2) = 36$

b) $(3)(3) + (4)(2) = 17$

c) $(3-3)(2-4) = 0$

d) $(3)(3) - (4)(2) = 1$

III) El coseno del ángulo entre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ es _____.

a) $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$

b) 0

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2+0}}$

IV) Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}$ son _____.

a) Ni paralelos ni ortogonales

b) Paralelos

c) Ortogonales

d) Idénticos

V) $\text{Proy}_w \mathbf{u} =$ _____.

a) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

b) $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

c) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

d) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{w}|}$



Respuestas a la autoevaluación

- I) c) II) b) III) b) IV) c) V) c)



MANEJO DE LA CALCULADORA 4.2

Se puede obtener el producto punto entre dos vectores utilizando el comando **DOT**. Se necesita tener dos vectores de dimensiones compatibles en las posiciones 1 y 2 de la pila y escribir el comando DOT seguido de la tecla **ENTER**, esto si se quiere obtener el producto punto entre los vectores v_1 con magnitud 5 y ángulo 3 radianes y el vector v_2 con magnitud 3 y ángulo 5 radianes

\leftarrow **]** **5** **ALPHA** **→** **6** **3** **ENTER**
 \leftarrow **]** **3** **ALPHA** **→** **6** **5** **ENTER**
ALPHA **ALPHA** **DOT**

```

RAD R4Z HEX R= 'X'
CHONE3
7:
6:
5:
4:
3:
2: [5. 43.]
1: [3. 4-1.28318530718]
DOT
A CASDI

```

que da por resultado $v_1 \cdot v_2 = -6.2422025$.

Si queremos obtener el vector unitario asociado a v_1 (magnitud 4 y ángulo 3 radianes) podemos proceder como sigue:

\leftarrow **]** **5** **ALPHA** **→** **6** **3** **ENTER** **ENTER**
ALPHA **ALPHA** **A** **B** **S** **ENTER** **1/x** **X**

que da por resultado

```

RAD RYZ HEX R= 'X'
CHONE3
7:
6:
5:
4:
3:
2:
1: [ -.9899924966 .14...
A CASDI

```

Para calcular el operador $\text{proy}_v u$, si tenemos guardados vectores u y v :

\leftarrow **]** **5** **ALPHA** **→** **6** **3** **ENTER** **ALPHA** **U** **STO**
 \leftarrow **]** **3** **ALPHA** **→** **6** **5** **ENTER** **ALPHA** **V** **STO**

```

RAD RYZ HEX R= 'X'
CHONE3
7:
6:
5:
4:
3:
2:
1:
V U A CASDI

```

Observe que aparecen las variables V y U. Finalmente, para encontrar la proyección

F2 **FI** **ALPHA** **ALPHA** **DOT** **ENTER** **FI** **FI** **ALPHA** **ALPHA** **DOT** **ENTER** **÷** **FI** **X**



Problemas 4.2

De los problemas 1 al 11 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

$$1. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$3. \mathbf{u} = 3\mathbf{i}; \mathbf{v} = -7\mathbf{j}$$

$$4. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \mathbf{u} = -5\mathbf{i}; \mathbf{v} = 18\mathbf{j}$$

$$6. \mathbf{u} = \alpha\mathbf{i}; \mathbf{v} = \beta\mathbf{j}; \alpha, \beta \text{ reales}$$

$$7. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$8. \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}; \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$9. \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}; \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$10. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$11. \mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}; \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

12. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β , los vectores $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

13. Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ no está definido.

De los problemas 14 al 20 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después esboce cada par.

$$14. \mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}; \mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$$

$$15. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$16. \mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}; \mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

$$17. \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$18. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$19. \mathbf{u} = 7\mathbf{i}; \mathbf{v} = -23\mathbf{j}$$

$$20. \mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}; \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

21. Sean $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a) \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales.

b) \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos.

c) El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\frac{\pi}{4}$.

d) El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\frac{\pi}{3}$.

22. Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. Determine α y β tales que:

a) \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales.

b) \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos.

c) El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\frac{\pi}{4}$.

d) El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\frac{\pi}{3}$.

23. En el problema 21 demuestre que no existe un valor de α para el que \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen direcciones opuestas.

24. Encuentre condiciones para α y β del problema 22 para que \mathbf{u} y \mathbf{v} tengan la misma dirección.

En los problemas 25 al 38 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

$$25. \mathbf{u} = 3\mathbf{i}; \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$26. \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}; \mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}; \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

33. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}; \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

34. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}; \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \alpha$ y β reales positivos

35. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}; \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \alpha$ y β reales positivos con $\alpha > \beta$

38. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

39. Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que \mathbf{v} y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

40. En el problema 39 establezca una condición que asegure que \mathbf{v} y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

41. Sean $P = (2, 3), Q = (5, 2), R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\vec{PQ}}\vec{RS}$ y $\text{proy}_{\vec{RS}}\vec{PQ}$.

42. Sean $P = (-1, 4), Q = (3, -1), R = (-7, -5)$ y $S = (1, 1)$. Calcule $\text{proy}_{\vec{PR}}\vec{QS}$ y $\text{proy}_{\vec{QS}}\vec{PR}$.

43. Pruebe que los vectores diferentes de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α . [*Sugerencia:* Demuestre que $\cos \varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

44. Pruebe que \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

45. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

46. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

47. Un triángulo tiene vértices $(-1, 3), (4, -22)$ y $(23, -6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

48. Un triángulo tiene vértices $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ y (a_3, b_3) . Encuentre el coseno de cada ángulo.

*49. La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2

$$\left\| \sum_{i=1}^2 a_i b_i \right\| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 a_i^2 \right)} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 b_i^2 \right)}$$

Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

- *50. Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.
51. Encuentre la distancia entre $P = (2, 3)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.
52. Encuentre la distancia entre $(3, 7)$ y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.
53. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^T$ (A se conoce como **matriz ortogonal**).

Matriz ortogonal



En los problemas 54 al 58 utilice una calculadora para encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

54. $(0.231, 0.816)$ 55. $(-91, 48)$ 56. $(1\ 295, -7\ 238)$
57. $(-5.2361, -18.6163)$ 58. $(-20\ 192, 58\ 116)$



En los problemas 59 al 62 utilice una calculadora para encontrar la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} y esboce \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\text{proy}_v \mathbf{u}$.

59. $\mathbf{u} = (3.28, -5.19)$, $\mathbf{v} = (-6.17, -11.526)$
60. $\mathbf{u} = (-0.8649, -0.0301)$, $\mathbf{v} = (-0.1649, 0.6277)$
61. $\mathbf{u} = (-5\ 723, 4\ 296)$, $\mathbf{v} = (17\ 171, -9\ 816)$
62. $\mathbf{u} = (37\ 155, 42\ 136)$, $\mathbf{v} = (25\ 516, 72\ 385)$



EJERCICIOS CON MATLAB 4.2

1. Para los pares de vectores de los problemas 24 a 32, verifique los vectores proyección calculados con lápiz y papel usando MATLAB (consulte la información de manejo de MATLAB anterior a los problemas de MATLAB 4.1).
2. (*Este problema usa el archivo prjtn.m*) El problema se refiere a la visualización de las proyecciones. A continuación se presenta la función prjtn.m.

M

```
function prjtn(u,v)
% PRJTN funcion proyeccion. Grafica la proyeccion del vector u
%      en la direccion del vector v
%
%      u: vector de 2x1
%      v: vector de 2x1
origen=[0;0];

P=(u'*v)/(v'*v)*v;

Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
OP=[origen,P];
uMP=[u,P];

plot(Ou(1,:),Ou(2,:), '22b*',Ov(1,:),Ov(2,:), '22b*',...
      OP(1,:),OP(2,:), '-go',uMP(1,:),uMP(2,:), ':m')
text(u(1)/2,u(2)/2, '\bf u');
text(u(1),u(2), '1')
```