

---

<b>3-1. Magnitudes Escalares y vectoriales</b>	<b>56</b>
3-1.1 Magnitudes Escalares	56
3-1.2 Magnitudes vectoriales	57
<b>3-2. Vectores geométricos</b>	<b>58</b>
3-2.1 Vector Posición	58
3-2.1.1 Suma de vectores posición	59
3-2.2 Vector entre puntos	60
3-2.2.1 Componentes de un vector entre puntos	61
3-2.2.2 Vectores y sistemas de referencia	62
3-2.3 Vector Libre	63
3-2.3.1 Módulo de un vector	63
3-2.3.2 Vector fila o vector columna	65
<b>3-3. Operaciones con Vectores</b>	<b>66</b>
3-3.1 Suma	66
3-3.1.1 Propiedades de la suma de Vectores	67
3-3.2 Escalamiento	69
3-3.2.1 Vector opuesto o simétrico	71
3-3.2.2 Versor: vector unitario	71
3-3.3 Combinación lineal de Vectores	73
3-3.4 Producto Escalar	75
3-3.4.1 Módulo de un vector (revisita)	76
3-3.5 Propiedades del producto escalar	77
3-3.6 Ángulo entre vectores	77
<b>3-4. Comandos de software para puntos y vectores</b>	<b>78</b>
3-4.1 Geogebra	79
3-4.2 WxMaxima	79

---

## 3-1. Magnitudes Escalares y vectoriales

### 3-1.1. Magnitudes Escalares

Esta sección te ayuda a esclarecer porqué se usan vectores en la ingeniería, y se hacen las primeras precisiones respecto de los vectores geométricos. Se definen los «reglamentos» con que se «juegan los partidos» respecto de los vectores.

Una magnitud escalar es normalmente un número real que se usa para medir o comparar una medida respecto de una unidad de medida.

Son ejemplos de magnitudes escalares: la masa de un cuerpo, cuya unidad en el sistema MKS es el [kg], y todo lo que se exige para determinar la

masa de un cuerpo dado es cuántos kg-masa éste posee. Otro ejemplo de magnitud escalar es la longitud de una cuerda; en este caso la unidad de medida normalmente es el metro [m], y una cuerda puede tener 10[m], 25.6[cm] o 1.2[km] etcétera. las magnitudes escalares involucradas en este último ejemplo son 10, 0.256 , y 1200 respectivamente y la unidad de medida es el metro.

Cuando hablamos de una magnitud escalar, la notación que vamos a usar es una letra minúscula. así que serán escalares  $a = 10$ ,  $b = -0.256$ ,  $k = 1200$ ,  $\ell = 1.2$

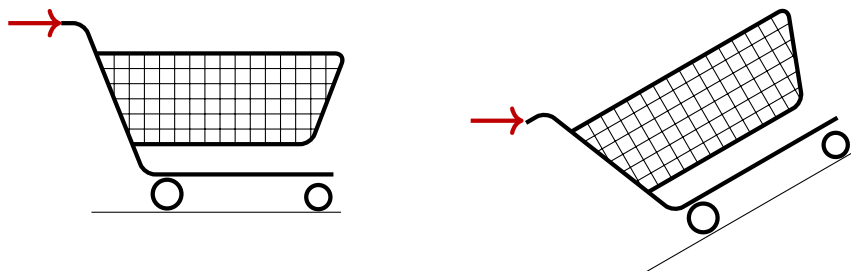
Un ejemplo importante de magnitud escalar es la distancia entre dos puntos.

### 3-1.2. Magnitudes vectoriales

Hay magnitudes que no quedan completamente determinadas con sólo un escalar.

Por ejemplo una fuerza que se aplica a un cuerpo. Supongamos que aplicamos 40Kg-fuerza a un carro de compras. El efecto sobre el mismo dependerá si lo que estamos haciendo es levantarlo en contra de la gravedad; o lo estamos haciendo rodar en una superficie plana.

Lo que queremos decir es que hay magnitudes (que las llamamos vectores libres) que exigen el conocimiento del módulo, la dirección, y el sentido; y hay otros que además exigen el conocimiento del punto de aplicación para estar totalmente determinada (vectores fijos).



**Figura 3.1** Dos casos distintos de uso de un vector fuerza

Aplicando la misma fuerza en el sentido horizontal hacia la derecha, —en los casos de la figura 3.1— se obtienen resultados muy diferentes. Es claro que en el caso de la izquierda sólo se debe vencer la fuerza de rozamiento, mientras que en el caso de la derecha hay que vencer eso y además el peso del carro en la dirección de la fuerza.

<b>Escalar :</b>	exige el conocimiento de un número, su cantidad respecto de una unidad de medida.
<b>Vector libre :</b>	exige el conocimiento de módulo - dirección - sentido.
<b>Vector fijo :</b>	exige el conocimiento de módulo - dirección - sentido - origen (en la física: punto de aplicación).

En general cuando tratemos de vectores, si decimos nada, estaremos hablando de *vectores libres* y geométricos.

### 3-2. Vectores geométricos

En esta sección describiremos el concepto de vector geométrico, para nosotros una herramienta útil para describir lugares geométricos —rectas, planos,...— en otras palabras: usaremos los números reales y los puntos para definir los vectores geométricos, y ellos nos ayudarán a describir otros entes. Para ello estudiarás cómo se definen, las primeras operaciones, y las primeras características.

Una definición diferente para el mismo concepto es la de *vector algebraico* (par ordenado, luego terna ordenada de números reales). El eslabón que une el tema de puntos con los vectores es el concepto de vector-posición.

**Definición 1** (vector-posición). Un vector posición es un segmento orientado con origen en el origen de coordenadas y extremo en un punto.

#### 3-2.1. Vector Posición

Un vector posición  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  es un segmento orientado asociado a un punto  $A$ , de manera tal que el origen del vector es el origen del sistema de coordenadas, y su extremo es el punto  $A$ .

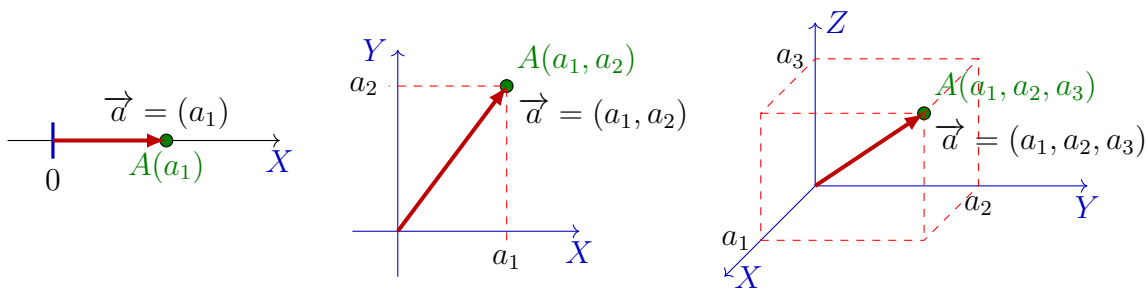


Figura 3.2 Vector Posición

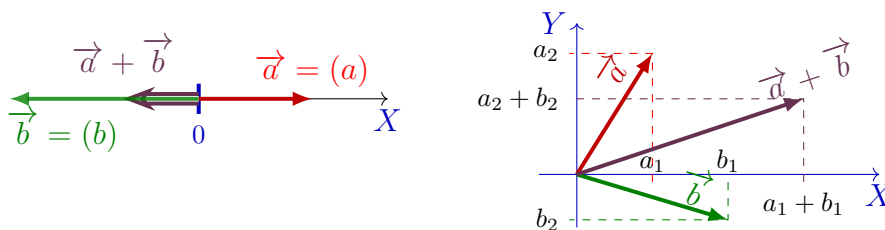


Figura 3.3 Suma de vectores posición.

Los puntos solamente se diferencian de los vectores–posición en que

- Los puntos tienen coordenadas, los vectores tienen componentes.
- Componentes y coordenadas son numéricamente iguales en un punto y su vector posición asociado.
- Los puntos se denotan  $A(a_1, a_2, a_3)$  y los vectores posición  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \overrightarrow{OA}$

Los vectores pueden llevar otro tipo de información.

Nosotros los usamos casi solamente en la geometría, al menos por ahora.

**3-2.1.0.1. Geogebra y WxMaxima** Internamente, tanto Geogebra cuanto WxMaxima, no discriminan entre punto y vector. Sin embargo en Geogebra  $A: (1, 2)$  se dibuja como un punto, y  $a: (1, 2)$  se dibuja como el vector posición. En WxMaxima se usan listas. Siempre tendrás que darle el significado preciso: mejor reserva las minúsculas para los vectores y las mayúsculas para los puntos,—por ejemplo  $a: [1, 2]$ ;  $B: [1, 2]$ ;—.

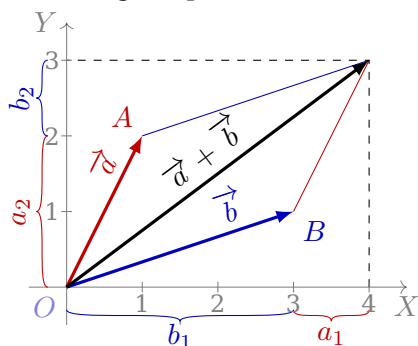
### 3-2.1.1. Suma de vectores posición

En este caso veremos que la suma de vectores no es más que otro vector cuyas componentes son la suma de las componentes de los vectores sumandos.

#### Ejemplo 3.1

Calcula y grafica la suma de los vectores posición asociados a los puntos  $A(1, 2) = A(a_1, a_2)$  y  $B(3, 1) = B(b_1, b_2)$ .

Primero grafiquemos los vectores posición



$$\begin{aligned} A(1, 2) \quad , \quad B(3, 1) \\ \vec{a} = (1, 2) \quad , \quad \vec{b} = (3, 1) \\ \vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, 2 + 1) \\ = (4, 3) \end{aligned}$$

$\vec{a}$  puede verse como  $\overrightarrow{OA}$

**Los puntos no se suman, los vectores sí, se suman.**

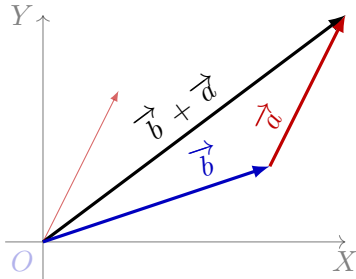
Repetamos el ejemplo 3.1, agregando una técnica: la del polígono. Piensa que el vector es libre, y por tanto puede trasladarse paralelo a si mismo.

Aprovechemos la figura para comprobar la conmutatividad de la suma de dos vectores.

**Ejemplo 3.2**

Calcula y grafica la suma de los vectores posición asociados a los puntos  $A(1, 2) = A(a_1, a_2)$  y  $B(3, 1) = B(b_1, b_2)$ .

Se visualiza lo mismo graficando uno a continuación del otro



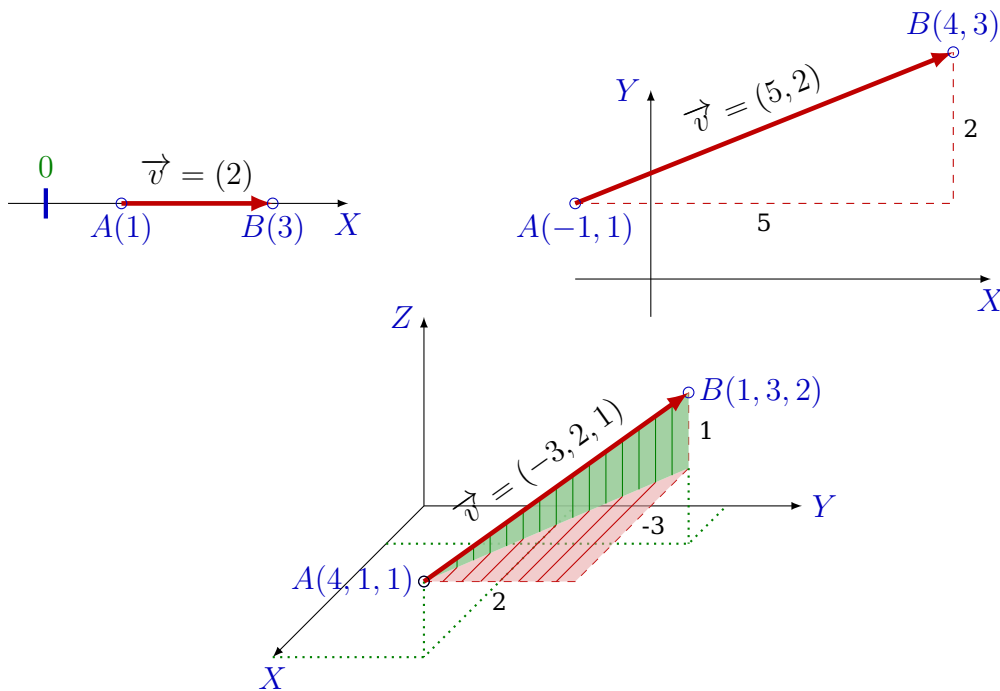
$$\begin{aligned} \vec{b} + \vec{a} &= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

**3-2.2. Vector entre puntos**

**Definición 2** (geométrico). Un vector es un segmento orientado.

**Definición 3** (algebraico-plano). Un vector es un par ordenado de números reales.

Como los vectores se definen como segmentos orientados, están limitados a ser vectores de la recta, vectores del plano y vectores del espacio, y se representan gráficamente con un punto origen y una flecha en el extremo, como se ve en la figura 3.4.



**Figura 3.4** Representaciones gráficas de vectores geométricos

Es natural pensar que para todo vector  $\vec{OA} = (a_1, a_2)$  se le opone el vector  $\vec{AO} = -\vec{OA} = (-1, -2)$ , de modo que la suma es  $\vec{OA} + \vec{AO} = \theta = (0, 0)$

### 3-2.2.1. Componentes de un vector entre puntos

La pregunta es: ¿Cómo obtienes las componentes de un vector de origen en un punto  $A(a_1, a_2)$  y extremo en otro punto  $B(b_1, b_2)$ ?, como se ve a la izquierda, en la figura 3.5

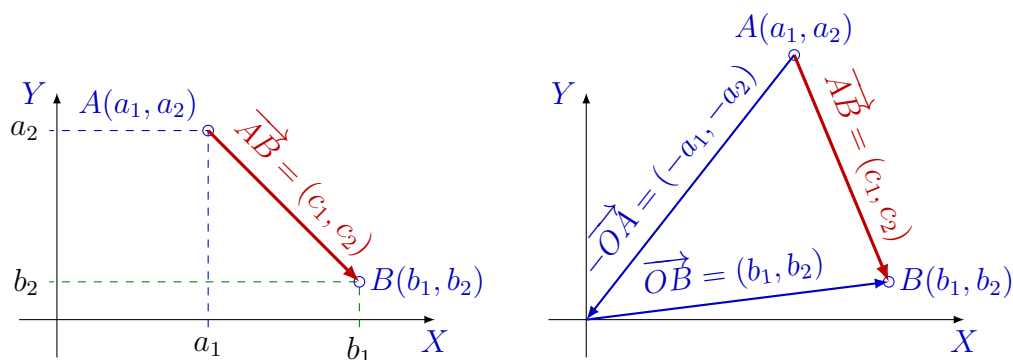


Figura 3.5 Componentes de vector entre puntos

Hemos puesto que las componentes del vector  $\overrightarrow{AB} = (c_1, c_2)$ . ¿Cómo las calculamos?

La respuesta está en la suma de vectores: en la figura 3.5 a la derecha, vemos que para ir de  $A$  a  $B$  y formar el vector  $\overrightarrow{AB}$  debemos sumar el vector posición  $\overrightarrow{OA}$  **cambiado de signo**, más el vector posición  $\overrightarrow{OB}$

con lo cual  $\overrightarrow{AB} = (c_1, c_2) = (-a_1 + b_1, -a_2 + b_2)$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-a_1 + b_1, -a_2 + b_2) \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \\ &= (b_1, b_2) + (-a_1, -a_2) \\ &= (b_1, b_2) - (a_1, a_2) \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

Entonces el vector desde un punto  $A$  —origen— a otro punto  $B$  —extremo— es

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Piensa siempre que un vector es suma de vectores y **no es suma de puntos**.<sup>(1)</sup>

#### Ejemplo 3.3

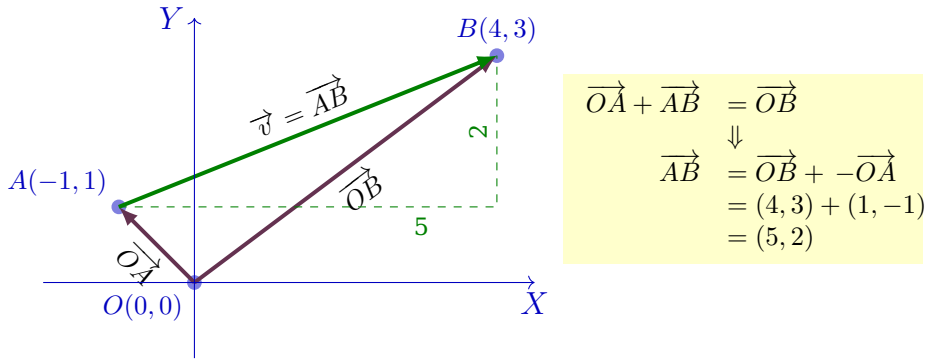
Escribe el vector que va desde el punto  $A(-1, 1)$  al punto  $B(4, 3)$ .

Hagamos la diferencia entre los vectores—posición extremo  $B$ , más el opuesto al vector—posición origen  $A$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$$

como puedes apreciar en la figura 3.6.

<sup>1</sup>Luego — §3-3 “Operaciones con Vectores”, pág.66— aprenderemos mejor los conceptos de: suma, vector nulo y vector opuesto



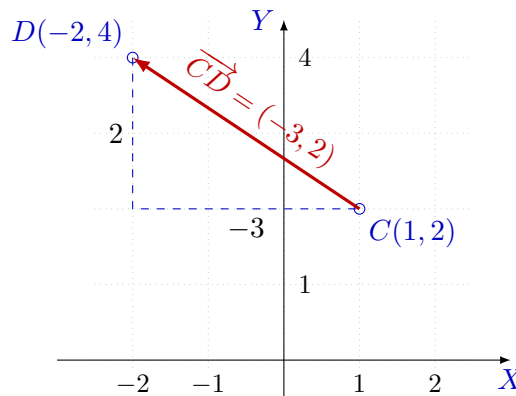
**Figura 3.6** Vector geométrico a partir de vectores–posición

**Ejemplo 3.4**

Calcula las componentes del vector que va desde  $C(1, 2)$ , a  $D(-2, 4)$

El vector pedido es  $\overrightarrow{CD} = (-2 - 1, 4 - 2) = (-3, 2)$   
lo puedes ver en la próxima figura.

El vector pedido es  $\overrightarrow{CD} = (-2 - 1, 4 - 2) = (-3, 2)$   
es decir, un vector que va tres unidades en el sentido contrario de las abscisas (eje X) y dos unidades para arriba en el eje de ordenadas (eje Y).



**Notación:**

el vector se denota mediante letra minúscula con una «flechita» por encima, por ejemplo  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  son vectores.

Punto  $\leftrightarrow$  Coordenada

$$A(a_1, a_2)$$

Vector  $\leftrightarrow$  Componente

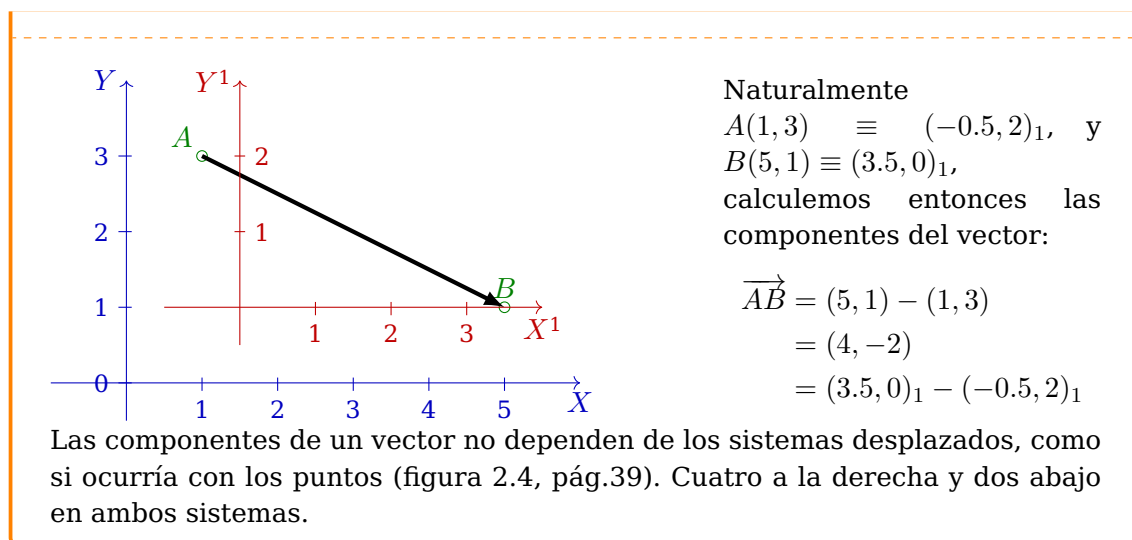
$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

**3-2.2.2. Vectores y sistemas de referencia**

Veamos el ejemplo que sigue, para ver como se comportan los vectores si los referimos a sistemas de referencia desplazados entre sí paralelamente. El resultado es notable, y apoya el concepto de vector libre.

**Ejemplo 3.5**

Halla las componentes del vector  $\overrightarrow{AB}$ , tanto sea referido al sistema  $XY$  como al  $X^1Y^1$



### 3-2.3. Vector Libre

Recordemos que para nosotros un vector que tenga las mismas componentes que otro serán iguales; es más: lo trataremos como el mismo vector.

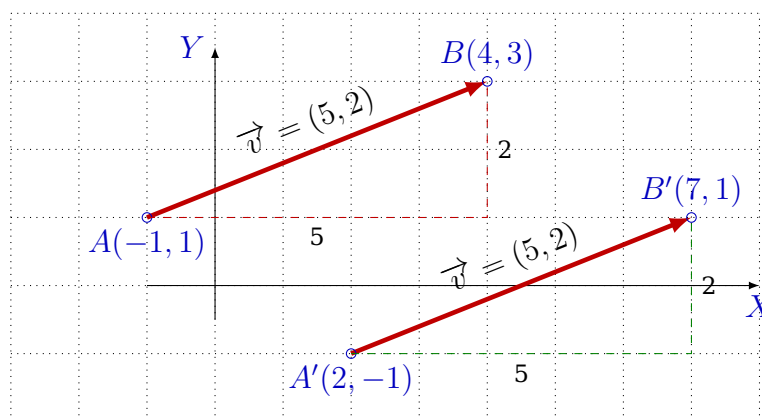


Figura 3.7 Vectores libres

#### 3-2.3.1. Módulo de un vector

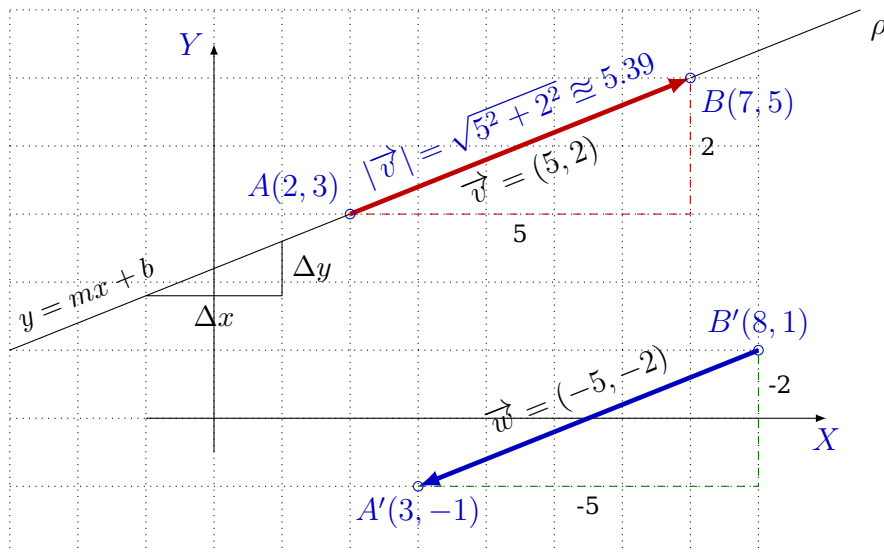
La distancia entre origen y extremo  $|\overrightarrow{OE}| = |\vec{v}|$  se llama *módulo*.

El *sentido* queda definido desde  $O$  hasta  $E$ .

En otras palabras: el vector  $\vec{w} = \overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB} = \vec{v}$  es otro vector con sentido contrario.

Un segmento está referido a una recta, y la recta —dada por  $A$  y  $B$ — provee la *dirección* dada por  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  en este caso la recta es  $\rho: y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$ , y los puntos  $A(2, 3)$  a  $B(7, 5)$  satisfacen esa ecuación ( <sup>a</sup> )

<sup>a</sup>Puedes comprobar que  $D(-3, 1)$  y  $B(7, 5)$  pertenecen a la recta haciendo  $x = -3$  y calculando  $y$ , por ejemplo.



**Figura 3.8** Módulo de un vector

Las definiciones de vector que hemos dado son teniendo en cuenta la física o la geometría (definición 2), y teniendo en cuenta el álgebra (definición 3), respectivamente (pág.60). No son dos significados diferentes, apenas son la definición de vector desde diferentes puntos de vista.

La distancia extremo–origen y el módulo del vector, para  $A(a_1, a_2)$  y  $B(b_1, b_2)$  son entonces

$$\begin{aligned}
 |\vec{v}| &= |\overrightarrow{AB}| \\
 &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\
 &= \delta(A, B)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Hemos hablado poco del concepto de «dirección» porque en la recta solo hay una, en el plano (dos dimensiones) lo hemos referido a la recta en  $\mathbb{R}^2$ . Al llegar al espacio, nos quedamos —por ahora— sin argumentos... pero volveremos a hablar de ello más adelante. Es preferible antes que definir la dirección de un vector; si dos vectores tienen o no la misma dirección.

Un vector  $\vec{u}$  tiene la misma dirección que otro  $\vec{v}$  —es colineal con otro— si puede expresarse

$$\vec{u} = k \vec{v} \quad , \quad k \neq 0$$

Una definición, más completa generaliza el concepto

**Definición 4.** Un vector (real) es una  $n$ -upla ordenada de números reales.

Es decir que un vector genérico puede ser

$$\vec{v} = (x, y, z, t) \qquad \vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

por ejemplo, con cuatro componentes.

En general, un vector con  $n$  componentes es

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

y su módulo se calcula como

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (3.3)$$

La **dimensión** de un vector es el número de componentes que éste tiene. Las componentes (ya lo verás) son las proyecciones (escalares) del vector sobre el eje respectivo.

El **módulo** de un vector es un número dado por la (3.3).

Es claro que si alguna componente del vector es un parámetro —un literal, por ejemplo  $\vec{u} = (1, 2, a)$ —, su módulo será un número en función de ese parámetro —en el ejemplo  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + 5}$ , que puede estudiarse como la función entre reales, cuya ley es  $y = \sqrt{x^2 + 5}$ —

El vector —libros 1 y 2— se denota con una letra minúscula con una «flechita» arriba, y el signo igual antes de las componentes. De esta forma no se confunden vector y punto (entes que hasta ahora vimos).

Dos vectores serán iguales cuando todas sus componentes homólogas lo sean; y para ello ambos deben ser de la misma dimensión.

Esta no es la única forma de definir un vector, en la física hay otras definiciones tanto o más convenientes.

### 3-2.3.2. Vector fila o vector columna

Un vector se puede representar por renglones o por columnas, por ejemplo el de la figura 3.8 puede escribirse como  $(4, 3)$  o como  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , y es de dimensión 2.

Por convención dos vectores son iguales si sus componentes homólogas lo son. No importa si se escriben como renglones o como columnas. Por tanto, dos vectores pueden compararse solamente cuando tienen la misma dimensión.

Los vectores (definición final) son una  $n$ -upla ordenada que se denota  $\vec{v} = (1, -1, 2, 0, 3)$ . Los vectores pueden asociarse a puntos. Son libres — pueden desplazarse paralelamente a si mismos—

### 3-3. Operaciones con Vectores

En esta sección se definen las operaciones con vectores. Estas operaciones nos acompañarán toda la carrera. Luego, usaremos el concepto de vector y sus operaciones para avanzar sobre otros entes, como ser recta y plano, por ejemplo.

Asimismo verás algunas pruebas y harás algunas comprobaciones.

Los vectores pueden operar entre ellos o con escalares.

- suma
- escalamiento
- combinación lineal
- producto escalar
- producto vectorial (lo pospondremos un poco más)

#### 3-3.1. Suma

Dos vectores de la misma dimensión se suman para formar otro de igual dimensión cuyas componentes son las sumas de las componentes homólogas. Por ejemplo, si  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  y  $\vec{v} = (-1, 2, -2)$ , la suma es

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} + \vec{v} = (1 + (-1), 2 + 2, 3 + (-2)) \\ &= (0, 4, 1)\end{aligned}$$

en forma general

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad , \quad \vec{v} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ &\Downarrow \\ \vec{u} + \vec{v} &= (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Los vectores pueden estar en fila o en columna.

Para sumar dos vectores bastan con que sean de la misma dimensión. En otras palabras: el vector suma es un vector de la misma dimensión que los vectores sumandos... O: la suma es cerrada para los vectores de la misma dimensión.

#### Ejemplo 3.6

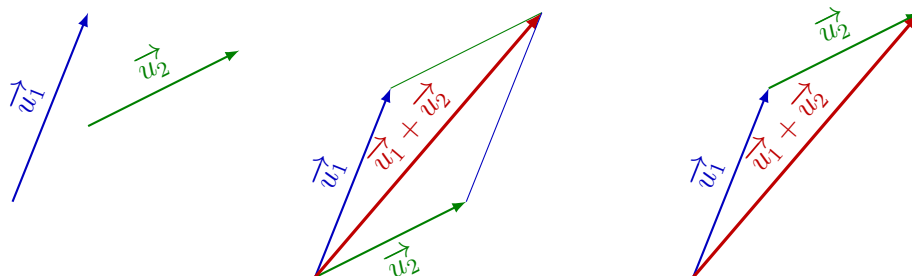
Suma los dos vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$\vec{u}$  y  $\vec{v}$  pueden sumarse, porque al poder escribirse en arreglo fila o columna, puedes cambiar la forma en que se escribe el segundo de ellos, como  $\vec{v} = (3, 4)$  para obtener el vector suma  $\vec{u} + \vec{v} = (4, 6)$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Cuando se trate de matrices, más adelante, esto no valdrá. En otras palabras: la corrección de fila por columnas es válido sólo con vectores, y hasta que se indique lo contrario.

La suma puede hacerse en forma gráfica mediante la regla del paralelogramo que consiste también en ubicar un vector a continuación del otro, como se ve en la figura 3.9.

En el ejemplo siguiente sumamos gráficamente dos vectores del plano. La del medio



**Figura 3.9** Suma gráfica (paralelogramo y polígono)

es la regla del paralelogramo y la de la derecha, la regla del polígono.

### 3-3.1.1. Propiedades de la suma de Vectores

Las propiedades son

1. asociatividad
2. conmutatividad
3. existencia de neutro –vector nulo–
4. existencia de inverso –vector opuesto–

Y las vamos a probar

**Proposición 3.1 (Asociatividad en suma).** *La suma de vectores es asociativa*

#### Prueba

Sean ahora, como en (3.2)(pág.65), y recordando que  $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

aplicamos de nuevo la definición de suma...

$$= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \dots, (u_n + v_n) + w_n)$$

como hay asociatividad de la suma en los reales...

$$= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n))$$

y aplicando la definición de suma en forma reversa...

$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

y aplicando nuevamente la definición de suma en forma reversa...

$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) + ((v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n))$$

e identificando tenemos finalmente...

$$= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

**Proposición 3.2 (Conmutatividad en suma).** *La suma de vectores es conmutativa*

### Prueba

A partir de la definición (3.2)(pág.65), como cada componente del vector suma  $\vec{u} + \vec{v}$  es una suma de reales (y hay conmutatividad en la suma de reales), puede escribirse

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, \dots, y_n + x_n)\end{aligned}$$

y aplicando la definición de suma en forma reversa (descomposición)...

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &= \vec{v} + \vec{u}\end{aligned}$$

Es importante que entiendas estas demostraciones.

En [GeogebraTube](#): Vectores-“Propiedades de la suma de vectores” tienes un experimento.

**Proposición 3.3 (Existencia del neutro para la suma de vectores).** *Un vector nulo para la suma es aquel que sumado a otro, no lo modifica.*

### Prueba

$$\begin{aligned}\vec{u} + \theta &= \vec{u} \\ &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &= (u_1 + e_1, u_2 + e_2, \dots, u_n + e_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\Downarrow \\ \theta &= (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow e_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\end{aligned}$$

En otras palabras el vector nulo lo puedes definir —al menos para la suma normal— como aquel cuyas componentes son todas cero, o aquel cuyo módulo es cero. Entonces el vector nulo —se denota  $\theta$  y nosotros no usaremos flechita— no tiene dirección.

$$\theta = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

para cada dimensión existe un vector nulo<sup>2</sup>. En particular  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  y  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$

**Proposición 3.4 (Existencia del inverso para la suma de vectores).** *Un vector opuesto para la suma es aquel que sumado a otro, arroja el vector nulo. Es el inverso aditivo.*

Todo vector — $\vec{v}$ — tiene su opuesto, y es aquel — $-\vec{v}$ — que sumado al mismo arroja el vector nulo — $\theta$ —.

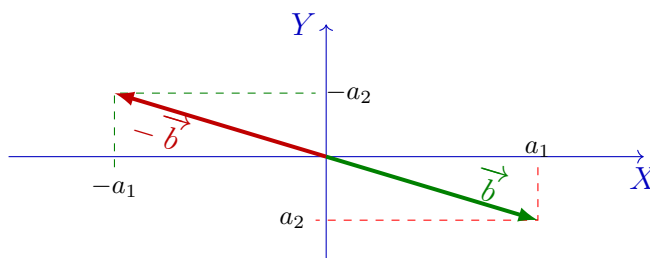
<sup>2</sup>Encontrarás que en libros traducidos del inglés lo llaman «vector cero», nosotros seguiremos usando la expresión de vector nulo.

**Prueba**

$$\begin{aligned}
 \vec{u} + \vec{u}' &= \theta \\
 &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \\
 &= (u_1 + u'_1, u_2 + u'_2, \dots, u_n + u'_n) = (0, 0, \dots, 0) \\
 &\Downarrow \\
 \vec{u}' &= (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \Rightarrow u'_i = -u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: el opuesto de  $\vec{v} = (a, b)$  es  $\vec{v}' = (-a, -b) = -\vec{v}$ .

En la figura 3.10, tienes una imagen pictórica en  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 3.10** Vector posición opuesto.

**Actividad 3.1**

Para los vectores  $\vec{u} = (3, 2)$  y  $\vec{v} = (-2, 1)$ ,

- Comprueba que  $\vec{u} + \vec{v}$  es otro vector de  $\mathbb{R}^2$
- Comprueba la asociatividad con  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , y  $\vec{w} = (w_1, w_2)$
- Exhibe cuál es el vector nulo, y cuál es el opuesto de  $\vec{u}$
- Comprueba que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Comprobar, sinónimo de verificar, es cuando decidimos que algo se cumple para elementos particulares, (como en el ejemplo 3.1).

Probar, es hacer lo mismo, pero con elementos **todos** genéricos.

**3-3.2. Escalamiento**

Un escalar  $k$  —por ejemplo un real— puede multiplicar a un vector  $\vec{u}$  para obtener otro vector de la misma dirección — $k \neq 0$ —. Las componentes del escalado serán los productos del escalar por las componentes del original

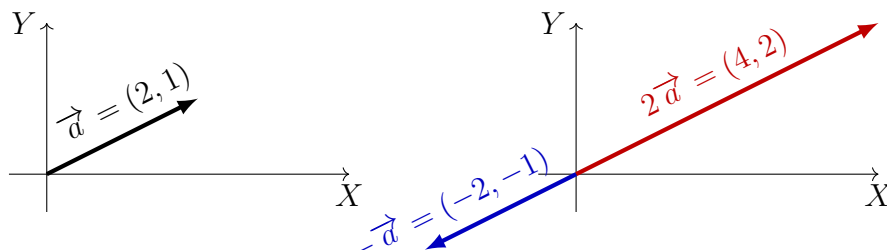
$$k \vec{u} = \vec{k}u$$

y

$$\begin{aligned}
 \vec{k}u &= k \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
 &= (k \cdot x_1, k \cdot x_2, k \cdot x_3, \dots, k \cdot x_n)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Claramente el escalamiento de un vector produce otro de vector de la misma dimensión que el original, por lo que el escalamiento es cerrado para los vectores. (Se llama **cierre externo**, ya que un escalar por un vector produce un vector de la misma dimensión).

Puedes ver que al escalar un vector y representarlo gráficamente, el vector permanece en la misma dirección, pudiendo cambiar el sentido y su módulo. En la figura 3.11 esto se muestra en el plano.



**Figura 3.11** Ejemplo de escalamiento en el plano. (**No existe  $\vec{a}^2$** , sólo  $2\vec{a}$ )

**Proposición 3.5 (dirección del vector escalado).** La dirección del vector escalado  $k\vec{u}$  es la misma que la del vector original  $\vec{u}$ , excepto cuando el escalar es cero.

Tiene que quedar claro que está definido el escalamiento de un vector como una operación que compone un escalar y un vector —en ese orden—, mientras que al contrario, no está definido, en otras palabras:  $2(2, 3) = (4, 6)$  pero  $(2, 3)2$  no está definida.

Lo verificas para el plano  $n = 2$ , sea por ejemplo  $\vec{v} = (4, 3)$ . Calculemos el escalamiento  $k\vec{v} = (4k, 3k)$ . Sabemos que si  $k \neq 0$ , las direcciones están dadas por

$$m_{kv} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4} = m_v$$

En el espacio ( $n = 3$ ) no podemos *comprobarlo*, porque no sabemos cómo caracterizar las rectas (y sus pendientes) en el espacio.

**Proposición 3.6.** El módulo del escalado es  $|k|$  veces el original.

Lo verificas para el mismo caso anterior: si  $\vec{v} = (4, 3)$ , será  $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ . Y para  $k\vec{v} = (k4, k3)$  será

$$\begin{aligned} |k\vec{v}| &= |(k4, k3)| \\ &= \sqrt{k^2 4^2 + k^2 3^2} = \sqrt{k^2} \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= |k| |\vec{v}| \end{aligned}$$

La notación es un poco confusa:  $|k|$  es el *valor absoluto* de  $k$ , en cambio  $|\vec{v}|$  es el *módulo* de  $\vec{v}$

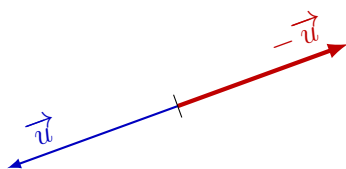
Recordemos que una **verificación**(*comprobación*) es simplemente hacer un ejemplo **numérico**, donde la proposición o ley se cumple. En cambio la **prueba**, necesariamente debe ser para todos los elementos, y, por tanto, debe hacerse usando elementos **genéricos**, como en el siguiente caso.

**Prueba**

Para el caso de un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , tenemos que  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ , entonces

$$\begin{aligned} |k \cdot \vec{u}| &= |k \cdot (u_1, u_2)| = |(k u_1, k u_2)| \\ &= \sqrt{k^2 u_1^2 + k^2 u_2^2} = \sqrt{k^2 (u_1^2 + u_2^2)} = \sqrt{k^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ &= |k| \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |k| \cdot |\vec{u}| \end{aligned}$$

Claramente una verificación se hace con un vector particular, mientras que la prueba se hace con un vector genérico. En este caso hemos probado que el escalado de un vector **del plano** cambia de módulo. ¿Te animas a probar para cualquier caso? En otras palabras, considera  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

**3-3.2.1. Vector opuesto o simétrico**

La suma de un vector y su escalado por  $(-1)$  es el vector nulo. El vector opuesto a  $\vec{u}$  es  $\vec{u}' = -1 \vec{u} = -\vec{u}$ .

**Figura 3.12** Vectores opuestos

En este caso hemos definido el opuesto también mediante un escalamiento.

**Actividad 3.2**

Prueba que el módulo de un vector y el módulo de su opuesto son iguales, y que la suma de un vector más su opuesto es el vector nulo.

**3-3.2.2. Versor: vector unitario**

Si multiplicas  $k$  por un vector no nulo —si escalas un vector no nulo por  $k$ —, y si fuera  $k$  el recíproco de su módulo obtienes un vector de módulo unitario. Como los vectores escalados conservan la dirección, el resultado es un versor: vector de módulo 1.

**Ejemplo 3.7**

Para el vector  $\vec{u} = (4, 3)$ , halla el versor que tiene la misma dirección.

El módulo de  $\vec{u} = (4, 3)$  es<sup>a</sup>

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

y su recíproco  $k = \frac{1}{|\vec{u}|} = \frac{1}{5}$ ,

con ello el versor buscado es

$$\check{u} = \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

y por supuesto, su módulo es

$$|\tilde{u}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

<sup>a</sup>Esta es una regla que usan los albañiles para trazar líneas en escuadra: cuatro medidas para un lado, clavos en ambos extremos, luego, a partir del último clavo, tres medidas más o menos a  $90^\circ$  (a ojo), clavo (esta vez, no demasiado profundo, como para que pueda sacarse con facilidad). La hipotenusa debe tener cinco medidas; así que si no coincide, se mueve el último clavo.

Para una comprobación que no es general, sino que solo vale para vectores en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ), podemos pensar en:

$$\vec{u} = (a, b) \Rightarrow \tilde{u} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

y comprobemos que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}| &= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1 \end{aligned}$$

Entonces una prueba (sólo para  $\mathbb{R}^2$ ) posible será:

### Prueba

La proposición 3.6 para el nuevo vector unitario es

$$|\tilde{u}| = 1 = |k| |\vec{u}|$$

tenemos que  $|k| = \frac{1}{|\vec{u}|}$ , y con ello  $\tilde{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} |\vec{u}|$

Para probar para  $\mathbb{R}^n$ , es cuestión nada más de definir  $\vec{u} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , y hacer las mismas cuentas. Lo puedes hacer. ¡Anímate!

### Actividad 3.3

Haz la prueba para un 3-vector,  $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ : Calcula el versor asociado y comprueba que su módulo es 1.

Cálculo del versor  $\tilde{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$

### Aplicación

Esto lo podemos usar para encontrar la posición de un punto con distancia dada, a partir de otro punto y un vector.

**Ejemplo 3.8**

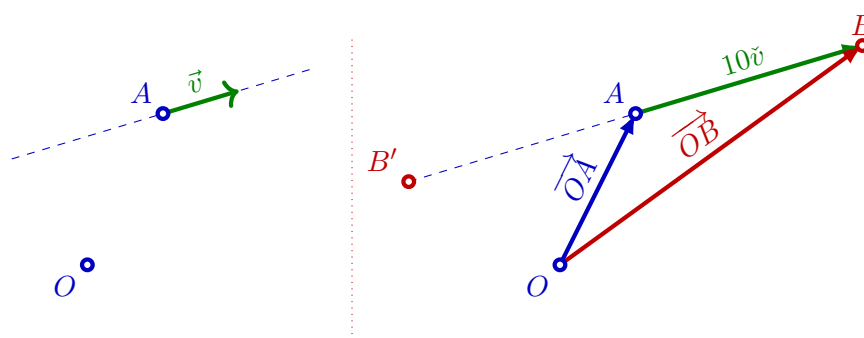
Dado el Punto  $A(1, 2, -3)$  y el vector  $\vec{v} = (2, -6, 3)$ , halla otro punto  $B$  alejado en 10 unidades y en la dirección del vector  $\vec{v}$

Podemos pensar este ejercicio como se grafica a la izquierda abajo. Tenemos un punto, y sabemos que queremos otro en la dirección que indica el vector  $\vec{v}$ . El módulo del vector es :  $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$

Si encontráramos un vector paralelo con módulo 10, ya encontraríamos que en el extremo de ese vector, está el punto que nos piden. En este caso entonces es sencillo hallar un vector de módulo 10 con la dirección de  $\vec{v}$ ,

$$\vec{w} = \frac{10}{7}(2, -6, 3), \text{ claramente } |\vec{w}| = \sqrt{\frac{4900}{49}} = \sqrt{100} = 10$$

Ahora observemos en el gráfico de la derecha, donde ubicamos a continuación del punto  $A$  —mediante el vector—posición  $\vec{a}$ —, el vector  $\vec{w}$  que tiene módulo 10



y entonces

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{w} = (1, 2, -3) + \frac{10}{7}(2, -6, 3) = \left(\frac{27}{7}, -\frac{46}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

y el punto  $B$  entonces tendrá las coordenadas numéricamente iguales que las componentes del su vector—posición asociado.

$$B \left( \frac{27}{7}, -\frac{46}{7}, \frac{9}{7} \right)$$

Sin embargo no es el único punto, hay otro que está a la misma distancia pero se consigue con  $-\vec{w}$ , ya que es el otro vector de la misma dirección, pero de sentido contrario.

Puedes probar que  $B' \left( -\frac{13}{7}, \frac{74}{7}, -\frac{51}{7} \right)$  es otro punto alejado de  $A$  una medida de 10, y en la dirección de  $\vec{v}$

Esto puede ejercitarse en [GeogebraTube: Puntos y vectores—"Punto a una distancia según vector"](#)

### 3-3.3. Combinación lineal de Vectores

Una operación que combina la suma con el escalamiento de vectores es la combinación lineal. Para un conjunto de  $n$  vectores  $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de la misma dimen-

sión, la combinación lineal es otro vector que se obtiene

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{m=1}^n k_m \vec{v}_m \\
 &= k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

donde  $k_m \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v}_m \in \mathcal{A}$ . El símbolo sigma mayúscula  $\sum$  se llama sumatorio; en este caso  $m$  es el contador y  $n$  es el límite superior.

La combinación lineal (no solamente de vectores) es un tema fundamental a lo largo de estos libros.

Por ejemplo:

**Ejemplo 3.9**

Halla la combinación lineal de 2 veces  $\vec{v}_1 = (1, 3)$  y 3 veces  $\vec{v}_2 = (2, 4)$ .

En este caso la combinación lineal pedida es

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= 2(1, 3) + 3(2, 4) \\
 &= (2, 6) + (6, 12) \\
 &= (8, 18)
 \end{aligned}$$

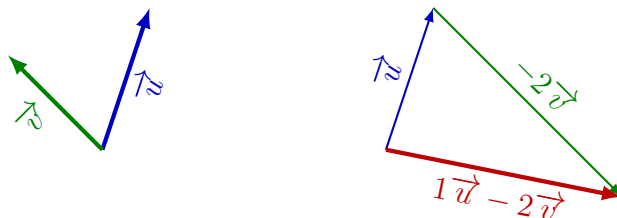
los escalares  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 3$  se denotan  $((2, 3))$  y forman la **realización** para  $\vec{v} = (8, 18)$ , con  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ .

La realización  $((4, -3))$  con  $\mathcal{A} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  produce otro vector,  $\vec{w} = (-2, 0)$ .

El orden de los vectores con los escalares es de vital importancia.

La combinación lineal de vectores es otro vector, obtenido de escalar cada vector con su coeficiente, en el orden establecido, y luego sumar todos los vectores escalados.

Puedes pensar en cualquier tipo de espacios. Como en la figura 3.13 no se dice de qué espacio estamos hablando, puede ser cualquier dimensión.



**Figura 3.13** Combinación lineal:  $\vec{u} - 2\vec{v}$ , realización  $((1, -2))$

Como propiedad, vamos a decir que la combinación lineal de vectores puede lograrse si todos los vectores son de la misma dimensión... de lo contrario la parte de la suma no estaría garantizada.

En [GeogebraTube](#): Puntos y vectores-“Combinación lineal simple” tienes una actividad. Volveremos sobre las combinaciones lineales más adelante, muchas veces.

### 3-3.4. Producto Escalar

El producto escalar de dos vectores es un número, que se calcula sumando los productos de las componentes homólogas

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \\ \vec{v} &= (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \\ \Downarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n\end{aligned}\quad (3.7)$$

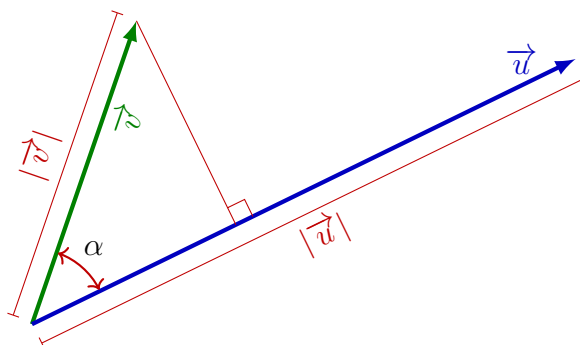
$$= \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \quad (3.8)$$

donde cada sumando es el producto elemento a elemento. Nota que  $u_1$  es la primera componente del vector  $\vec{u}$  en el producto escalar, mientras que  $\vec{u}_1$  es el primer vector de un conjunto de vectores con el que se realiza la operación de combinación lineal.

La segunda definición<sup>3</sup> para el producto escalar es la siguiente

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\angle \vec{u}, \vec{v}) \\ &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha)\end{aligned}\quad (3.9)$$

es decir el producto de los módulos por el ángulo comprendido, como se ve en la figura 3.14



**Figura 3.14** elementos a tomar en cuenta en el producto escalar

El producto escalar de dos  $n$ -vectores numéricos es un escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum u_i v_i = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha)$$

La pregunta es ¿Qué sucedería si el vector  $\vec{u}$  de la figura 3.14 estuviera orientado en el sentido opuesto?

*Es evidente que el módulo no va a cambiar, sino que el ángulo será mayor que  $90^\circ$ — entonces su coseno sería negativo— y como consecuencia el producto escalar de los vectores será un número negativo.*

<sup>3</sup>En realidad no es una definición sino una consecuencia de la definición (3.7) y el teorema del coseno, como lo ves en el apéndice A-2.2, en la pág.205

**Ejemplo 3.10**

Dados los vectores  $\vec{u}_1 = (1, 3)$ ,  $\vec{u}_2 = (-2, 2)$ ,  $\vec{u}_3 = (-2, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (1, -2, 2)$ ,  $\vec{u}_5 = (0, 1)$ , calcula primero y luego grafica

- a-  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$       b-  $\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1$       c-  $\vec{v}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$   
 d-  $\vec{v}_5 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$       e-  $\vec{v}_6 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1$       f-  $\vec{v}_7 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1 - \vec{u}_5$   
 g-  $\vec{v}_8 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$       h-  $\vec{v}_9 = \vec{u}_4 + \vec{u}_3$       i-  $\vec{w}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$   
 j-  $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$       k-  $\vec{w}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_4$       l-  $\vec{w}_4 = \vec{u}_4 \cdot \vec{u}_3$

- a-  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (1, 3) + (-2, 2) = (-1, 5)$   
 b-  $\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 = 2(1, 3) = (2, 6)$   
 c-  $\vec{v}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 = (2, 6) + 3(-2, 2) = (-4, 12)$   
 i-  $\vec{w}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

los otros cálculos son sencillos. Pero  $\vec{v}_8$  no existe, ¿Porqué? Hay otras combinaciones lineales que son iguales —por ejemplo  $\vec{v}_1 = \vec{v}_6$ —, ¿Es casualidad?

**Actividad 3.4**

En el ejemplo anterior (ejemplo 3.10) se ve que  $\vec{v}_1 = \vec{v}_6$ . Establece porqué; y prueba\* que la conmutatividad se cumple para la suma de cualesquiera dos vectores de las mismas dimensiones.

Probar no es comprobar. Probar es usar (acá) vectores genéricos, y comprobar es hacer las cuentas con vectores particulares.

**Actividad 3.5**

En que en el ejemplo anterior (ejemplo 3.10) se ve que  $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$ . Prueba que la conmutatividad se cumple para el producto escalar de cualesquiera dos vectores de las mismas dimensiones.

**3-3.4.1. Módulo de un vector (revisita)**

El **módulo de un vector**  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  se define como la raíz cuadrada positiva del producto escalar del  $n$ -vector por sí mismo

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

como vemos, es similar a la definición distancia de un punto al origen, siendo el punto el extremo del vector.

El cuadrado del módulo de un vector lo puedes escribir como

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

**Actividad 3.6**

Prueba que  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  es no-negativo, y es cero solamente cuando  $\vec{u} = \theta$  es el vector nulo.

La **prueba** de que las dos definiciones que hemos visto,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_i u_i v_i = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta_{u,v})$$

del producto escalar son equivalentes —la puedes encontrar en el apéndice; en la sección §A-2.3 (pág.206)—.

Para ver una **comprobación** de este hecho, puedes ir a [GeogebraTube: Vectores-“Producto escalar: comparativa”](#)

**3-3.5. Propiedades del producto escalar**

Las propiedades las demostramos para vectores de  $\mathbb{R}^2$ , pero valen para cualquier dimensión. Sean  $k, \ell \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

**conmutatividad**

Tomemos dos vectores de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 && \text{definición de p.e.} \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 && \text{conmutatividad en } \mathbb{R} \\ &= (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2) && \text{definición, en reversa} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} && \text{identificación} \end{aligned}$$

Pruébalo por la segunda definición, es más sencillo.

**distributividad** Respecto de la suma.

Esta propiedad está probada en la sección §6-1.7.1, pág.162.

**seudoasociativo**

Escalamiento del producto escalar

$$\begin{aligned} k(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= k(u_1 v_1 + u_2 v_2) && \text{definición de P.E.} \\ &= k u_1 v_1 + k u_2 v_2 && \text{distributividad en } \mathbb{R} \\ &= (k u_1) v_1 + (k u_2) v_2 && \text{asociatividad en } \mathbb{R} \\ &= (k u_1, k u_2) \cdot (v_1, v_2) && \text{producto escalar, en reversa} \\ &= (k \vec{u}) \cdot \vec{v} && \text{identificación} \\ &= \vec{u} \cdot (k \vec{v}) && \text{puedes probarlo} \end{aligned}$$

**módulo** probado en §3-3.4.1

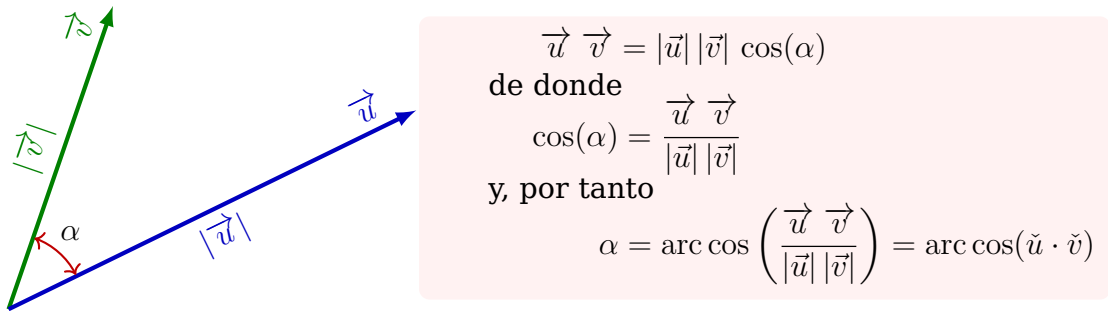
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$$

Todas las definiciones que se aplican en reversa las tienes que ver desde abajo hacia arriba, y ves que es la operación. Esto puede llamarse también descomposición, en este caso la aplicación de la definición del producto escalar en reversa, se llama **descomposición** del producto escalar.

**3-3.6. Ángulo entre vectores**

El ángulo entre vectores se usa para definir más adelante, el ángulo entre otros entes.

El producto escalar §3-3.4, —ecs. (3.8) y (3.9)—, nos ayuda a encontrar el coseno del ángulo entre dos vectores de la misma dimensión  $-0 \leq \alpha \leq \pi$ —



**Figura 3.15** ángulo entre vectores

**Ejemplo 3.11**

Halla el ángulo entre  $\vec{v}_1 = (1, 3)$  y  $\vec{v}_2 = (2, 4)$ . Luego halla el ángulo entre  $\vec{v}_2$  y el eje X.

Este es un caso de aplicación directa de la expresión de arriba —una receta de cocina, ¿qué puede salir mal?—

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos \left( \frac{\sum u_i v_i}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right) = \arccos \left( \frac{(1, 3)(2, 4)}{\sqrt{10} \sqrt{20}} \right) \\ &= \arccos \left( \frac{14}{\sqrt{10} \sqrt{20}} \right) \approx 0.142 \approx 8.13^\circ \end{aligned}$$

El ángulo entre un vector y un eje... tendrías que pensar que un eje puede ser representado por un vector paralelo al mismo... es decir, el eje X es paralelo al vector  $(1, 0)$ , y por tanto, ahora volvemos a la receta

$$\alpha = \arccos \left( \frac{(2, 4)(1, 0)}{\sqrt{20} \cdot 1} \right) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 63.43^\circ$$

**3-4. Comandos de software para puntos y vectores**

Te dejo acá los comandos de dos tipos de software, que usamos normalmente en el curso que implementa los contenidos de estos libros. El ingeniero debe tener la competencia en el uso de las computadoras para poder expresarse, pero también para hacer los cálculos. Hay otro uso del software: usarlo para apoyar el estudio. Sin embargo este uso no está dentro de los objetivos de estos libros.

### 3-4.1. Geogebra

Un punto se indica en Geogebra mediante una letra mayúscula, por ejemplo  $A: (1, 2)$  o  $B: (1, 2, 3)$ . También puedes definir un punto que esté restringido a otro objeto, como  $C: \text{Punto}(\text{EjeX})$ , y Geogebra generará un punto que puedes deslizarlo solamente a lo largo del eje X. Recuerda que Geogebra no cuenta con coordenada solamente real, sino que en el plano y en el espacio.

Para escribir un vector posición basta definirlo con una letra minúscula, por ejemplo  $u: (1, 2)$  o  $v: (1, 2, 3)$  generarán vectores posición correspondientes. También puede definirse un vector entre dos puntos, por ejemplo  $w: \text{Vector}(A, B)$ . Asimismo Geogebra gestiona internamente vectores como si fueran puntos, así que puedes «sumar» puntos y vectores. Esto es algo interno de Geogebra, no quiere decir que sea formalmente correcto.

Si haces la suma de un punto más un vector  $-A+v-$ , Geogebra interpreta que estás generando un punto (le dará un nombre) que sea el extremo de  $v$ , donde el origen es  $A$ . O sea, desplazas  $A$  en la dirección y sentido de  $v$ . Otra forma de obtener lo mismo es usar el comando `Punto(A, v)`.

La distancia entre dos puntos sale a partir del comando `Distancia(A, B)`, y el módulo de un vector se calcula mediante el comando `Longitud(v)`. Para obtener un número de la distancia entre dos puntos también puedes crear un segmento entre ambos puntos, entonces Geogebra genera el segmento, y el valor asignado a éste es la distancia  $-b: \text{Segmento}(A, B)-$ , luego puedes usar el valor  $b$  para cualquier cálculo.

El producto escalar simplemente se logra mediante `pe: u v`, con espacio, no con asterisco o punto.

El ángulo entre vectores lo puedes calcular mediante el comando `Ángulo(u, v)`, y en las propiedades, elegir que ese ángulo esté entre  $0$  y  $\pi$ .

### 3-4.2. WxMaxima

Un punto o un vector puedes ingresar a WxMaxima mediante cualquier combinación de letras y números —para WxMaxima siempre será una lista—, por ejemplo  $A: [1, 2]$  o  $B: [1, 2, 3]$ . Si quieres definir un punto que esté restringido a una recta, debes colocarlo como el elemento genérico de la misma en una lista: como  $C: [x, 2*x+1]$ , y permanecerá genérico. Si quieres un punto particular, debes darle un valor a  $x$  con el comando `x0: subs(x=3, C)`, y WxMaxima te devolverá  $(x0) \quad 7$ .

Como decíamos arriba, para escribir un vector basta definirlo, por ejemplo  $u: [1, 2]$  o  $v: [1, 2, 3]$  generarán vectores posición correspondientes. Para definir un vector entre dos puntos, solamente `vBA: A-B`, donde  $A$  y  $B$  han sido previamente definidos como listas que representan puntos.

El producto escalar simplemente se logra mediante `pe: u.v`, con punto, no con asterisco o espacio.

La distancia entre dos puntos —o el módulo de un vector— no tiene comando como en Geogebra, la solución es definir una función que lo haga, o usar los comandos habituales de una vez definidos los puntos `dAB: sqrt((A-B).(A-B))`.

Si haces la suma de un punto más un vector  $-A+v-$ , WxMaxima interpreta que sumando listas (no le dará un nombre); el sentido de esa cuenta se lo proporcionas con tu in-

interpretación. También es posible programar una función para que WxMaxima devuelva un punto alejado del punto  $A$  una distancia dada, en la dirección del vector  $v$

escribe `Alejado(A,v,d):=block([A:A,v:v],d:A+d*v/sqrt(v.v))$`

y le das enter, luego ingresa por ejemplo

`B:Alejado([1,2,1],[1,1,1],5);`

y el sistema responde

$B : \left[ \frac{5}{\sqrt{3}} + 1, \frac{5}{\sqrt{3}} + 2, \frac{5}{\sqrt{3}} + 1 \right]$

Si quisieras una aproximación puedes volver a escribir `B, numer;`

a lo que WxMaxima te responderá

`B : [3.886751345948129, 4.886751345948129, 3.886751345948129],` lo

siento no hemos ajustado la cantidad de decimales que queremos, por eso WxMaxima te lo da con 15 decimales

Desde luego que esta función está definida para darte uno de los puntos, si quieres el otro, tendrás que escribir el poco ortodoxo

`B2:Alejado([1,2,1],[1,1,1],-5);`

La buena noticia es que puedes programar para que salgan ambos, cambiando la función de arriba, la mala es que por ahora vas a tener que aprender solo, porque no es objetivo en este momento que seas programador.

El ángulo entre vectores lo puedes calcular mediante la expresión `Cosuv:u.v/(sqrt(u.u)*sqrt(v.v))`, y WxMaxima responde con la cuenta; para encontrar el ángulo debes usar el comando `anguv:acos(Cosuv);`, y WxMaxima responde en forma exacta —es decir, parece que no hace nada, pero si escribes `anguv:acos(Cosuv), numer;`, te dá el ángulo aproximado en radianes—.