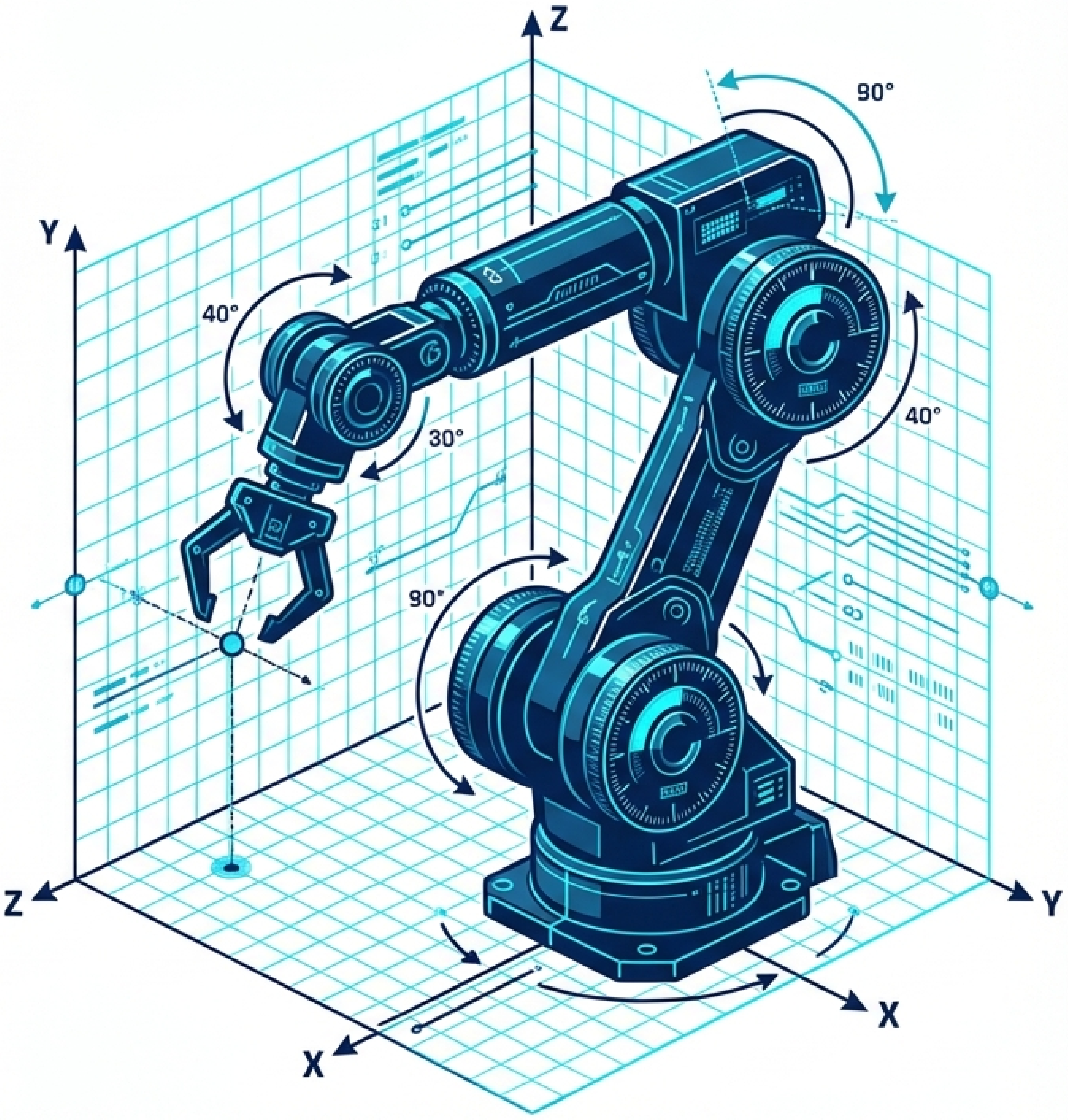
MÓDULO DE INGENIERÍA ROBÓTICA AVANZADA

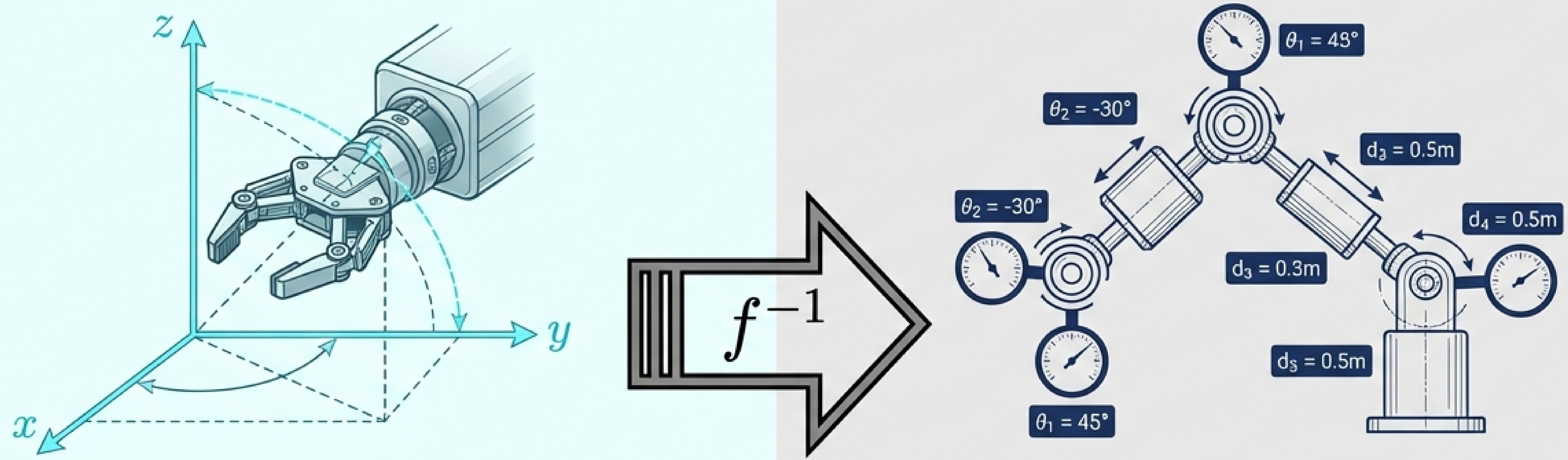
Cinemática Inversa de Robots

Mapeo del Espacio de Tarea al Espacio Articular



El Objetivo: Espacio de Tarea (Task Space)

La Realidad: Espacio Articular (Joint Space)



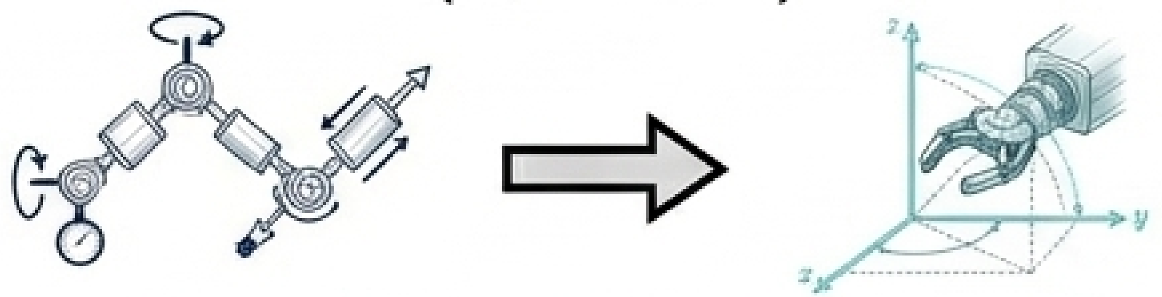
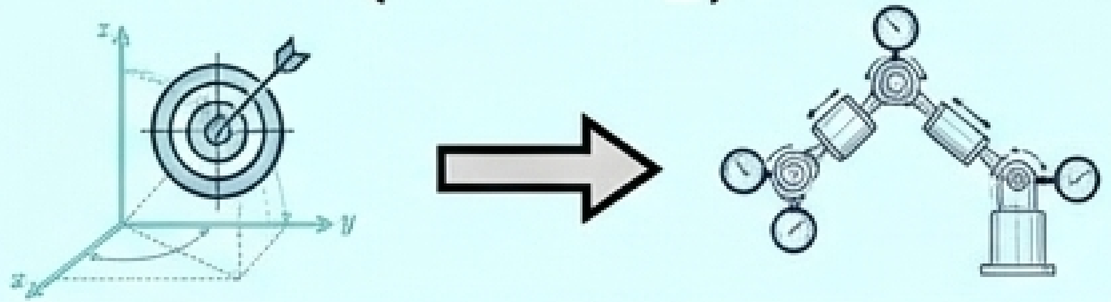
El controlador conoce la posición y orientación deseadas en el mundo físico.

$$\boldsymbol{X} \in SE(3)$$

Los actuadores solo comprenden comandos de giro o extensión angular.

$$\boldsymbol{q} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T$$

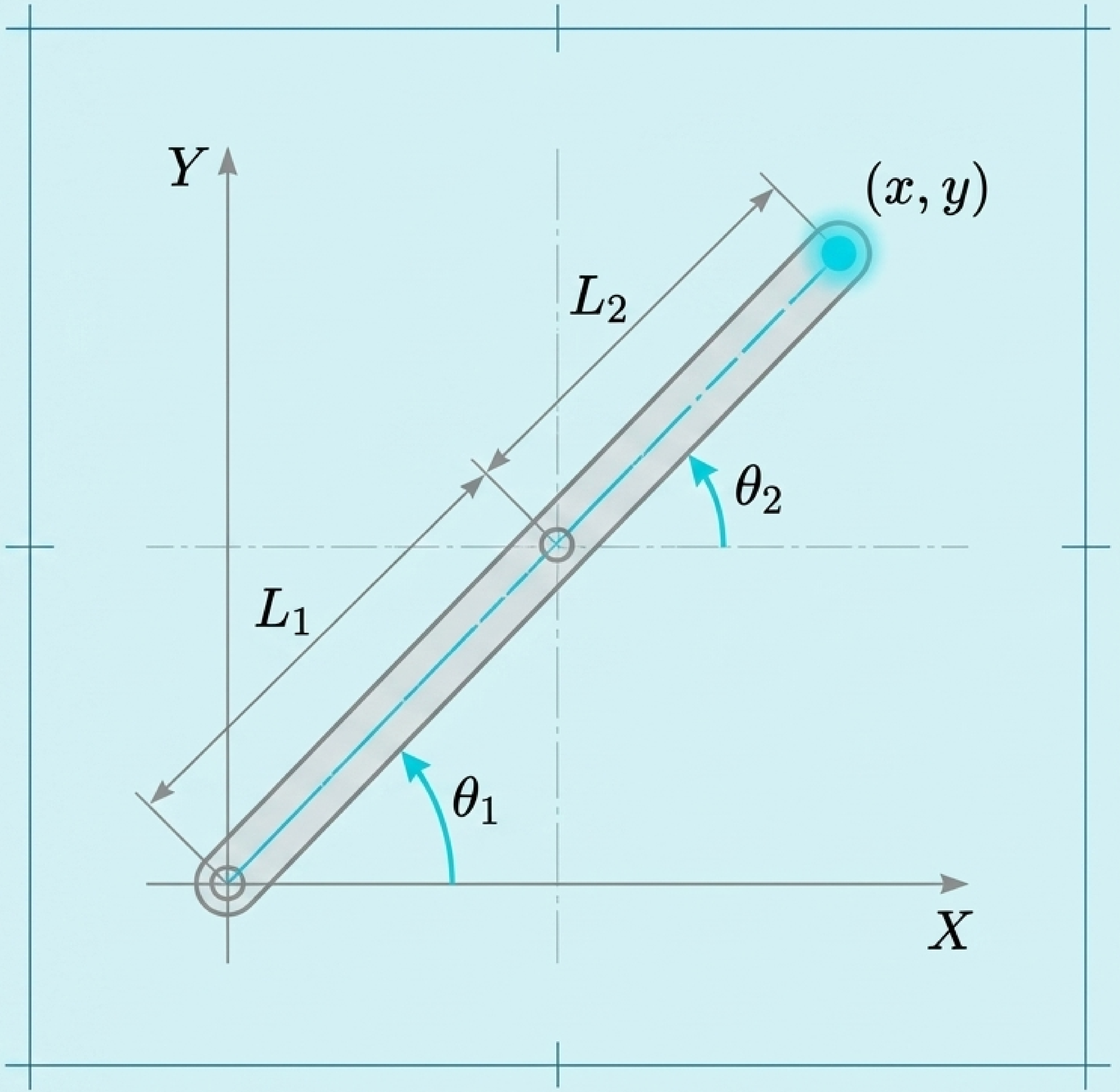
El problema inverso: Dada una matriz de transformación homogénea deseada $\boldsymbol{X}$, encontrar las soluciones $\boldsymbol{q}$ que satisfagan $T(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{X}$.

	Cinemática Directa	Cinemática Inversa
Mapeo	Articulaciones → Posición del End-Effector $(\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{X})$ 	Posición del End-Effector → Articulaciones $(\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{q})$ 
Naturaleza Matemática	Sustitución trigonométrica directa.	Sistemas de ecuaciones no lineales.
Unicidad de la Solución	**Solución Única.** Para cada postura de los motores, el robot *solo* puede estar en un punto físico.	**Soluciones Múltiples.** Un mismo punto (x, y) puede ser alcanzado de múltiples formas (o infinitas, o ninguna si está fuera del espacio de trabajo).

Método Geométrico: Intuición y Trigonometría

Contexto: Aplicable principalmente a manipuladores simples (ej. robot planar 2R) o aquellos con configuraciones configuraciones muy regulares.

Estrategia: Descomponer la estructura en polígonos (generalmente triángulos) proyectados sobre el plano cartesiano xy.



Método Geométrico: Resolución Matemática

Paso 1: Resolución de θ_2 mediante la Ley de los Cosenos

$$c_2 = \cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

Paso 2: La Condición de Existencia

Si $c_2 \notin [-1, 1]$, el punto deseado está fuera del espacio de trabajo (inadmisible).

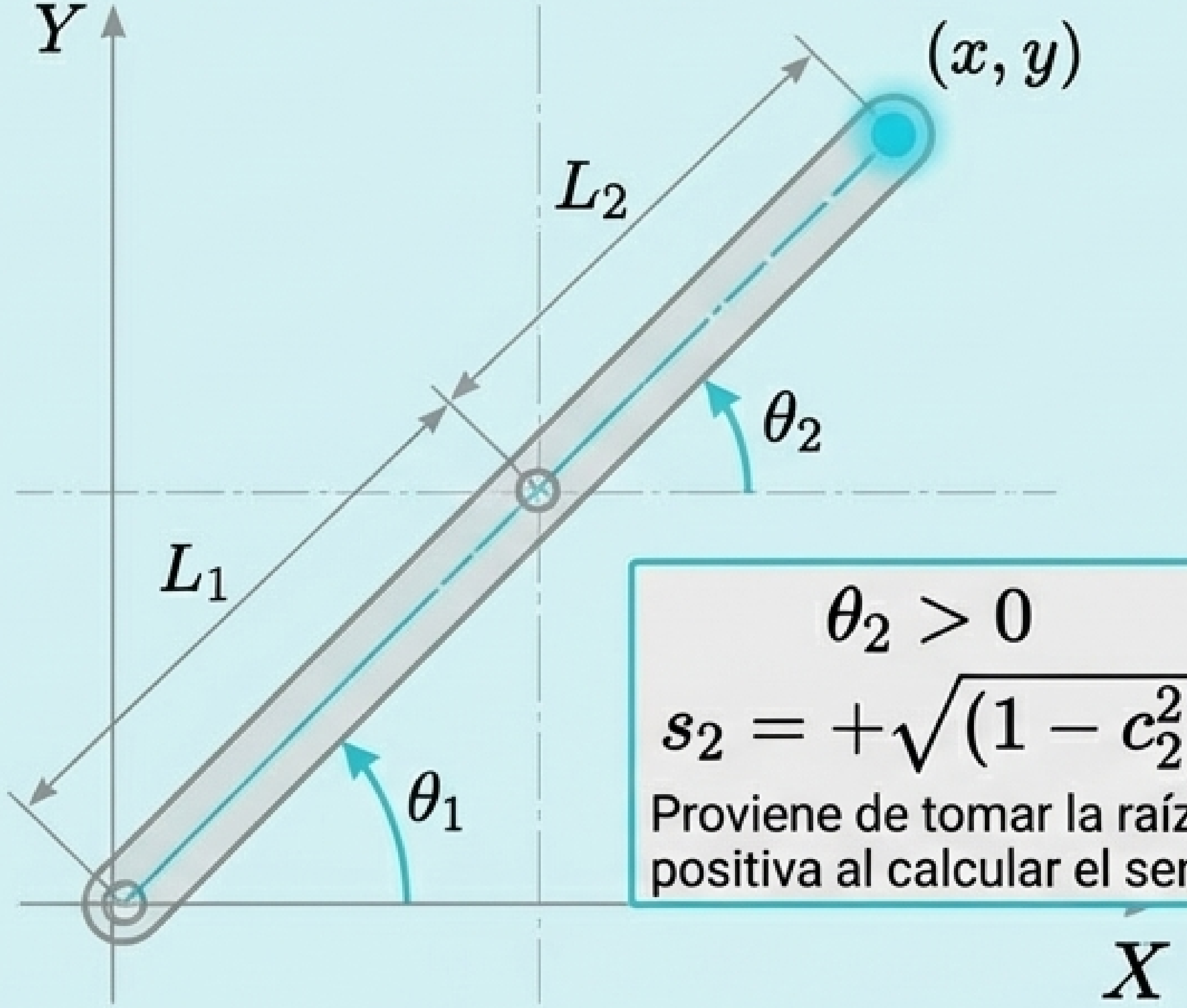
Paso 3: Cálculo Robusto con atan2

- **Por qué no usar arccos:** La función estándar no distingue cuadrantes. La solución de ingeniería es la función arcotangente de cuatro cuadrantes.

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(L_2 \sin(\theta_2), L_1 + L_2 \cos(\theta_2))$$

Multiplicidad Geométrica: Dos rutas, un solo destino

Postura "Codo Arriba" (Elbow-up / Lefty)

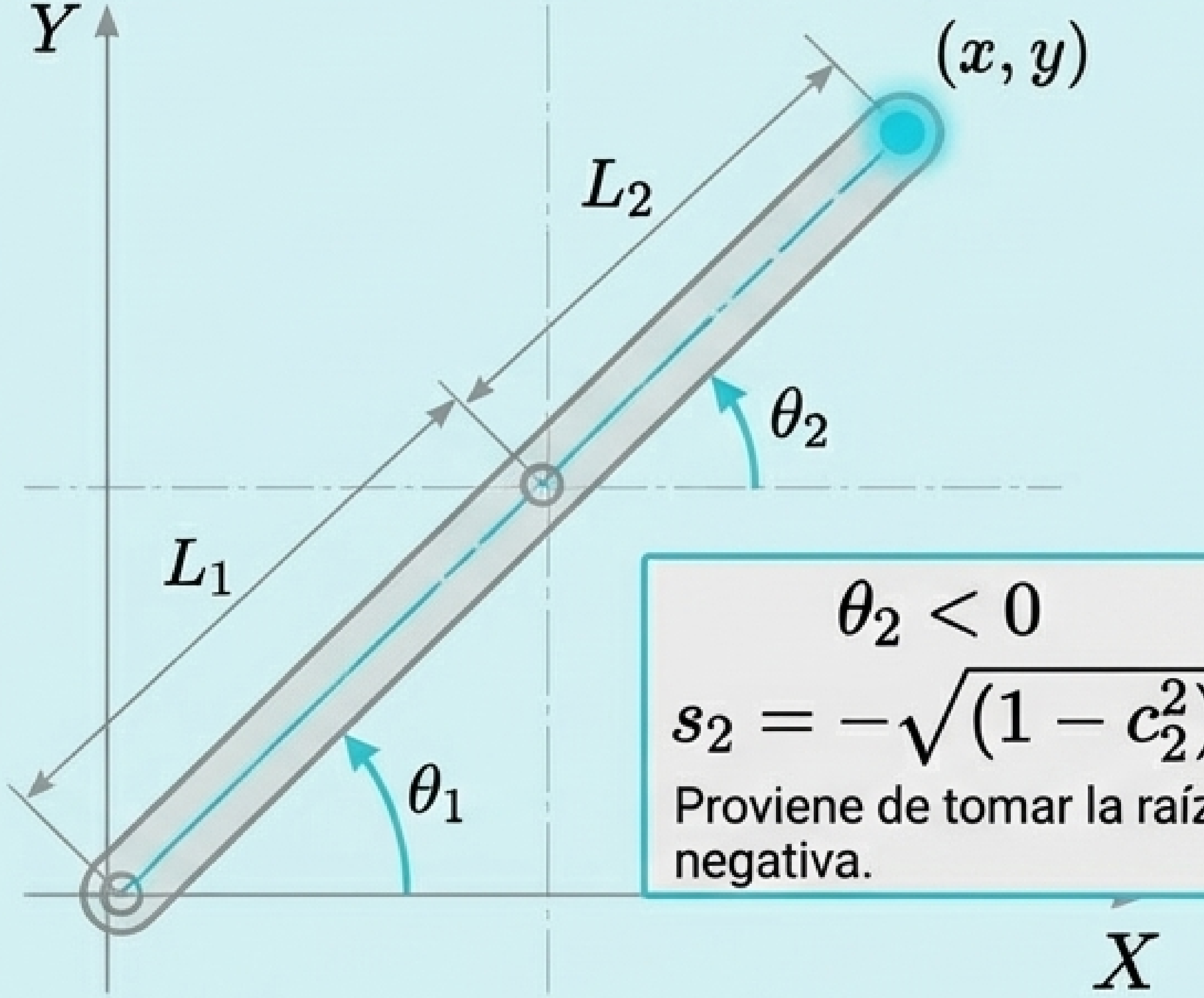


$$\theta_2 > 0$$

$$s_2 = +\sqrt{(1 - c_2^2)}$$

Proviene de tomar la raíz positiva al calcular el seno.

Postura "Codo Abajo" (Elbow-down / Righty)



$$\theta_2 < 0$$

$$s_2 = -\sqrt{(1 - c_2^2)}$$

Proviene de tomar la raíz negativa.

La elección entre ambas posturas depende del controlador para evitar obstáculos o respetar los límites articulares.

Método Algebraico: Sistematizando 6 DOF

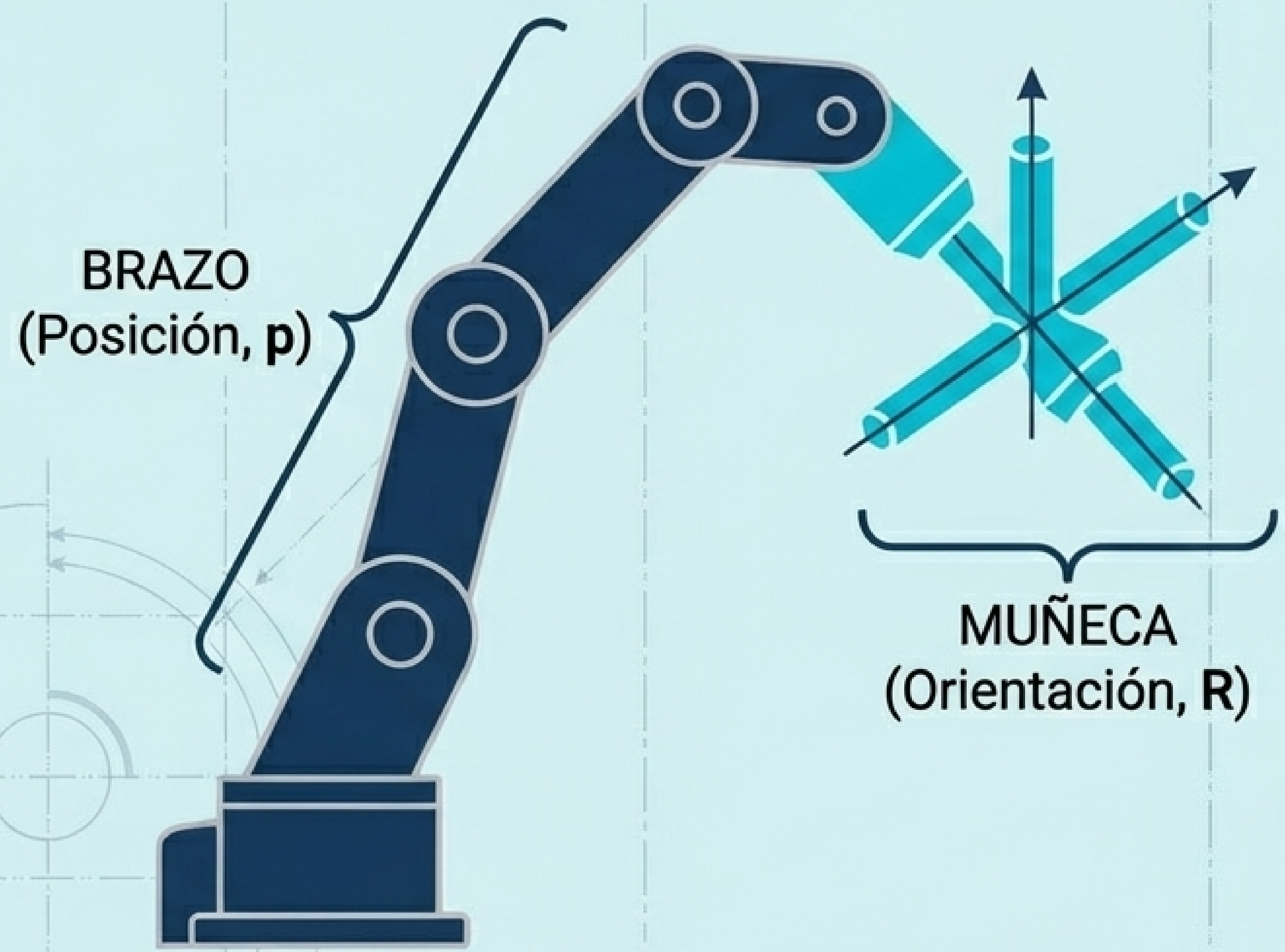
En brazos espaciales industriales, se abandona la trigonometría plana en favor del álgebra matricial de Transformaciones Homogéneas (T_0^n).

$$T(\theta_1, \dots, \theta_n) = T_{\text{deseada}} = \begin{bmatrix} \underset{\text{(Orientación)}}{R_{\text{des}}} & \underset{\text{(Posición)}}{P_{\text{des}}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El Objetivo Algebraico:
El método busca resolver sistemáticamente estas ecuaciones encadenadas premultiplicido por las transformaciones inversas paso a paso para despejar variable por variable de manera analítica.

Desacoplamiento Cinemático: Divide y Vencerás

El principio de diseño de la Muñeca Esférica (Spherical Wrist)



1. Posición (p)

Se resuelve utilizando los primeros tres eslabones (el 'brazo') para ubicar el centro de intersección de la muñeca.

2. Orientación (R)

Una vez posicionado el brazo, se utilizan los tres últimos eslabones (la "muñeca") para alinear el end-effector de forma puramente rotacional.

¿Por qué abandonar la exactitud analítica?

Falta de Solución Cerrada

No todos los robots cumplen con la condición de intersección de la muñeca esférica de Pieper. Las ecuaciones analíticas se vuelven irresolubles.

Robots Redundantes

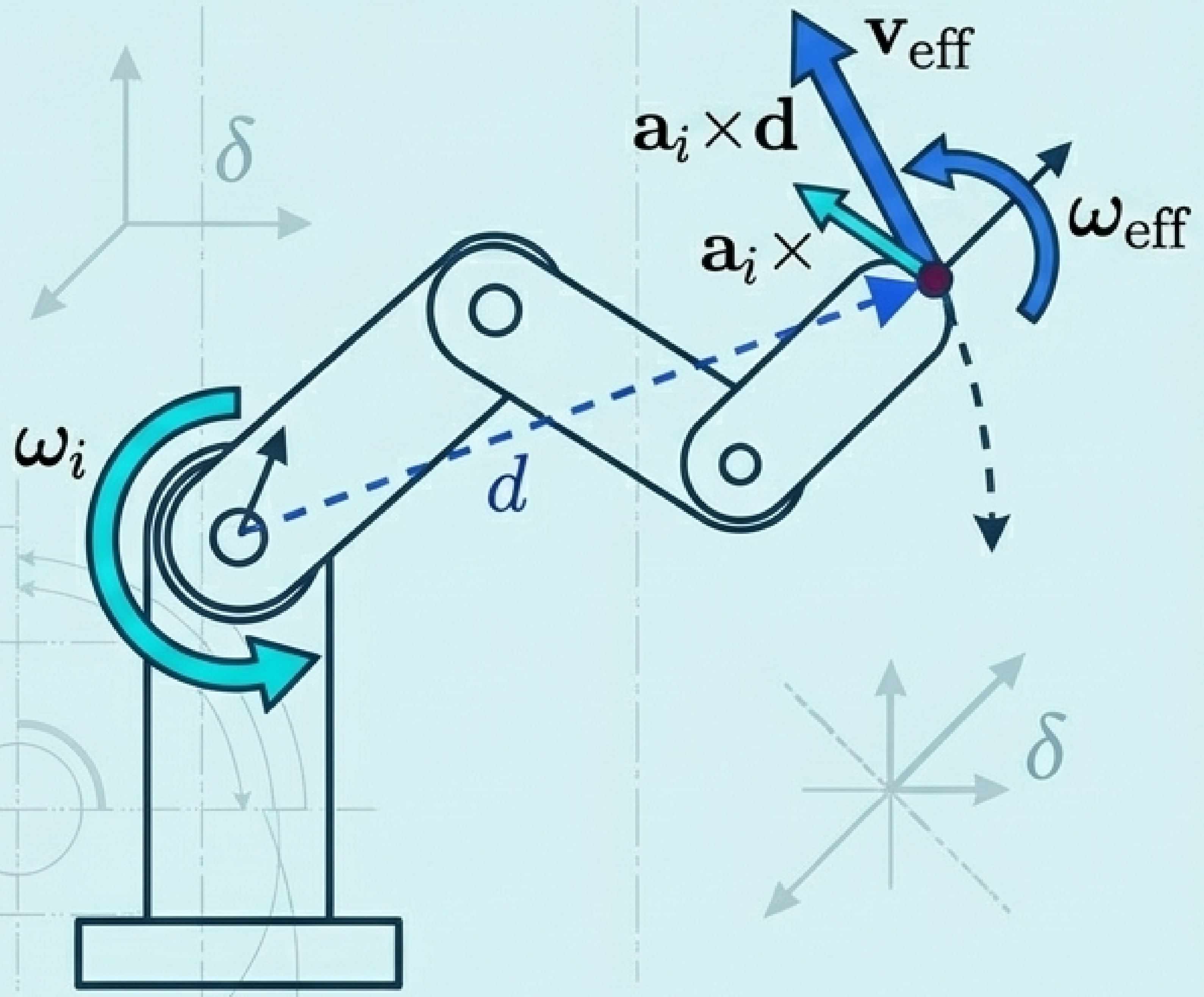
Sistemas con >6 grados de libertad (ej. brazos antropomórficos) poseen infinitas soluciones. El álgebra simple no puede decidir cuál es "la mejor".

El Salto Computacional

Transición conceptual: Pasamos de buscar fórmulas de forma cerrada (analíticas) a utilizar el cálculo diferencial computacional iterativo.

El Rol del Jacobiano (Cinemática Diferencial)

Linealización Local: Transformando espacio en velocidad.



La Ecuación Fundamental

$$\delta x = J(q)\,\delta q$$

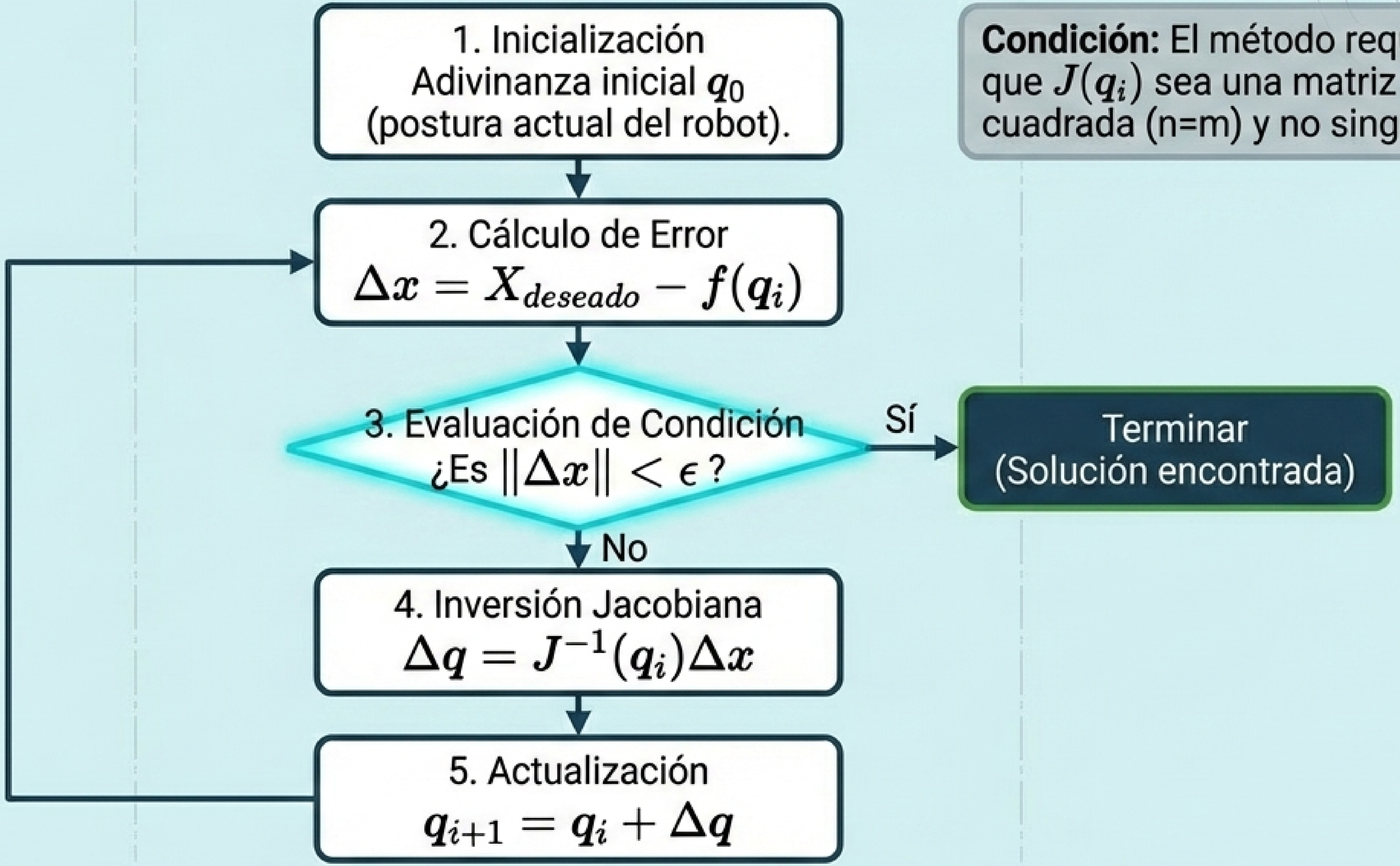
Relacionamos la velocidad de las articulaciones con la velocidad del *end-effector*.

Inversión del Movimiento

$$\delta q = J^{-1}(q)\delta x$$

Para lograr un pequeño desplazamiento deseado en el espacio (δx), invertimos la matriz Jacobiana localmente. Válido solo para pasos infinitesimales.

Algoritmo Iterativo de Newton-Raphson



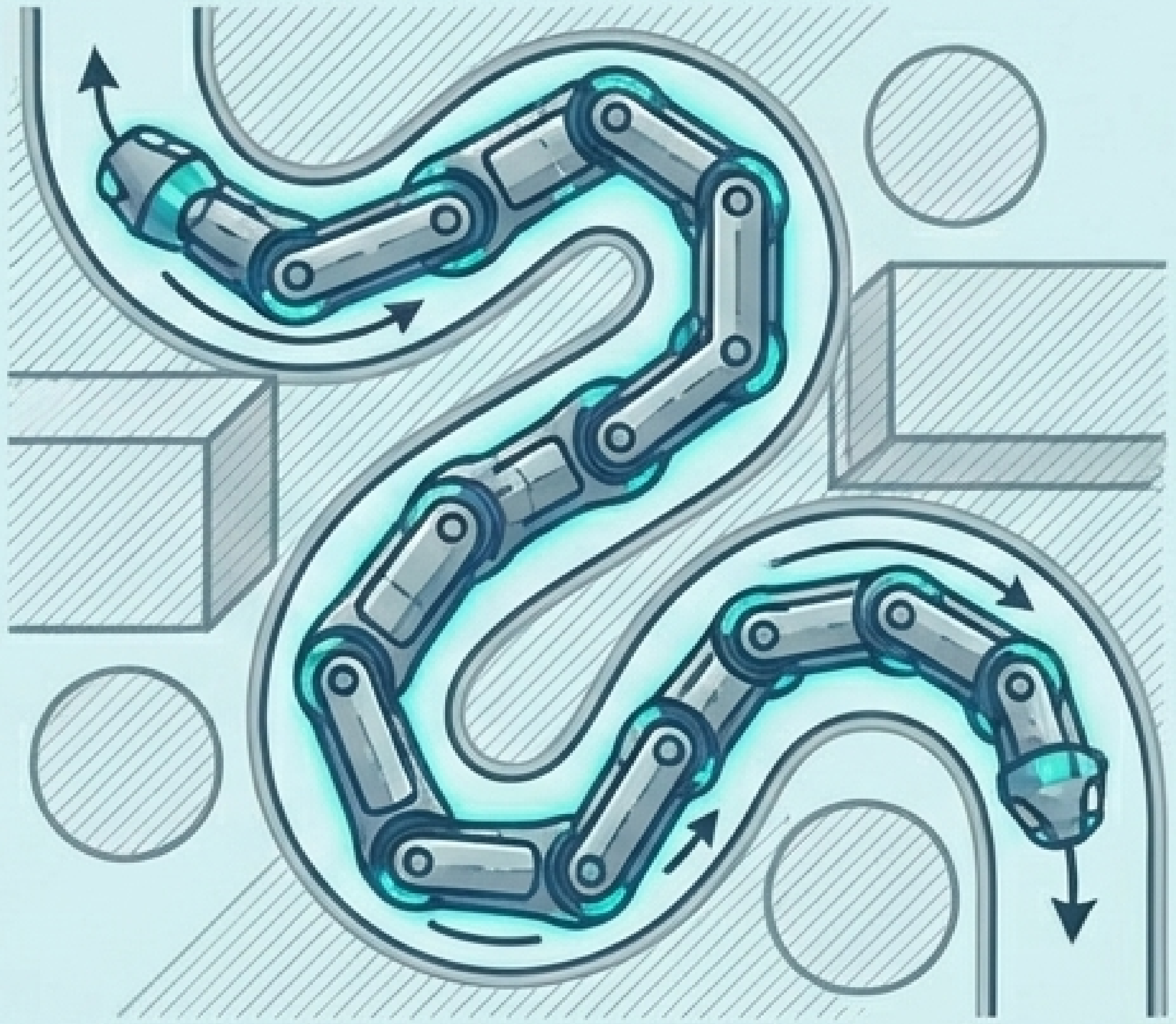
Condición: El método requiere que $J(q_i)$ sea una matriz cuadrada (n=m) y no singular.

Redundancia y la Pseudoinversa

El Problema: Para un manipulador redundante (n > m, más articulaciones que grados de libertad en el espacio de tarea), la matriz Jacobiana no es cuadrada. ¡No se puede calcular J^{-1}!

$$J^{\dagger} = J^T (J J^T)^{-1}$$

Optimización Intrínseca: Resuelve la ecuación $\delta q = J^{\dagger} \delta x$ minimizando la norma $\|\delta q\|$. Encuentra la configuración geométrica con el menor esfuerzo cinético/energético.



Singularidades Cinemáticas: El Límite Físico

Definición Técnica

Se presenta cuando el manipulador pierde la capacidad de moverse en ciertas direcciones. Se caracterizan por una pérdida de grados de libertad.

Pérdida de Grados de Libertad

En una singularidad, el robot no puede realizar movimientos en una o más direcciones del espacio cartesiano, reduciendo su movilidad.

Impacto Matemático

La matriz Jacobiana se vuelve singular (su determinante es cero). Esto hace que la inversa no exista y las velocidades articulares tiendan a infinito.

El Problema Numérico y la Regularización

El Desastre Matemático

Al invertir J^{-1} cerca de una singularidad, el determinante tendiente a cero causa divisiones por cero.

$$\boxed{\delta q \to \infty}$$

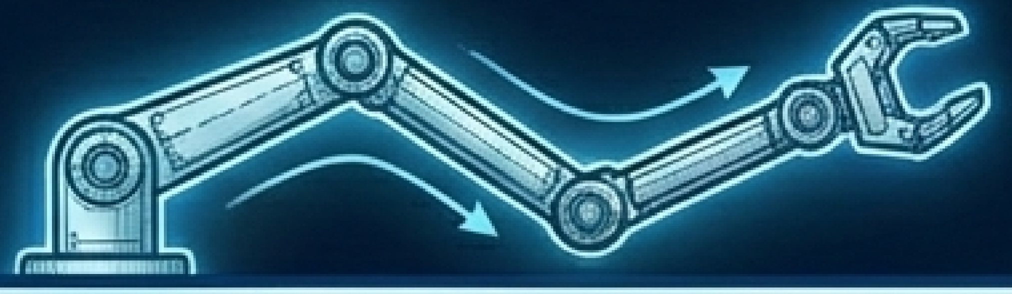
Consecuencia: Velocidades articulares infinitas. Fallo catastrófico en servomotores.

La Solución: Inversa Robusta (*Damped Least Squares*)

Sacrifica mínima precisión en la trayectoria a cambio de velocidades finitas introduciendo el factor de amortiguamiento ϵ.

$$\boxed{J^* = J^T(JJ^T + \epsilon I)^{-1}}$$

Factor de amortiguamiento



NotebookLM

Matriz de Síntesis de Herramientas de Cinemática Inversa

MÉTODO	ARQUITECTURA DEL ROBOT	COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL	MANEJO DE SINGULARIDADES
Geométrico	Simples / Planares ($\leq$ 3 DOF).	Muy Baja (Solución puramente analítica).	Fácil. Prevención visual / Límite de Espacio.
Algebraico	Industriales Estándar (Muñeca esférica, Condición de Pieper).	Baja (Cálculo analítico analítico de matrices inversas).	Imposible de cruzar analíticamente.
Numérico / Jacobiano	Sistemas Complejos / Redundantes (> 6 DOF).	Alta (Iteraciones de matrices a tiempo real).	Manejable mediante Regularización (ϵI).

El dominio de la cinemática inversa radica en seleccionar el mapeo matemático correcto para la arquitectura física correcta.