

<b>2-1. Puntos y sistemas de referencia . . . . .</b>	<b>36</b>
2-1.1 La recta real . . . . .	37
2-1.2 El plano . . . . .	38
2-1.2.1 Cartesiano . . . . .	39
2-1.2.2 Polar . . . . .	39
2-1.2.3 Notación en Geogebra y WxMaxima . . . . .	40
2-1.3 El espacio tridimensional . . . . .	41
<b>2-2. Traslación de sistema y proyecciones . . . . .</b>	<b>42</b>
2-2.1 Desplazamiento de sistema de referencias . . . . .	44
2-2.2 Proyecciones de un punto . . . . .	44
2-2.3 Distancia al origen . . . . .	46
<b>2-3. Distancia entre puntos . . . . .</b>	<b>47</b>
2-3.1 Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}$ . . . . .	47
2-3.2 Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	48
2-3.3 Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	48
2-3.4 Propiedades de la distancia . . . . .	49
<b>2-4. Problemas de distancia . . . . .</b>	<b>51</b>
2-4.1 En una dimensión . . . . .	51
2-4.2 En dos dimensiones . . . . .	53

Nota: los bocetos de geogebra de este libro, están en el libro de geogebra <http://ggbm.at/y3bFtHJ9>

## 2-1. Puntos y sistemas de referencia

Un punto es un ente geométrico sobre el cual se pueden construir otros entes. Todo punto denota una ubicación. Para que empecemos a hablar de “Analítico”, esa ubicación no es absoluta sino que está asociada a un sistema de referencia.

En esta sección aprenderás

- A reconocer los diferentes sistemas de referencia.
- Que estos sistemas pueden —para una misma dimensión— variar, dependiendo de las necesidades o de la simplicidad para representar patrones.

Que son conceptos necesarios para construir los elementos de la geometría analítica.

Un sistema de referencias nos permite cuantificar la ubicación de nuestro punto, de manera que podamos referirnos a él sin ningún equívoco. Los sistemas de referencia que preferimos en este libro son

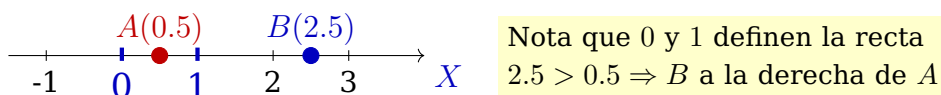
1. la recta real —unidimensional—,
2. el plano (cartesiano) , el polar —bidimensional—, y

3. el espacio (cartesiano) —tridimensional—.

Éstos no son los únicos sistemas de referencia que usa el ingeniero. En el espacio existen además el sistema de referencias cilíndrico y el sistema de referencias esférico. Asimismo, al promediar este curso, hemos de usar otros tipos de sistemas de referencia —que valdrán no solo para puntos, sino para polinomios, matrices, etc.—, a los cuales llamaremos «bases» .

### 2-1.1. La recta real

En esta recta puedes representar cualquier número, y cada número tiene una y una sola ubicación respetando el orden o distancia al origen. En ella los números crecen hacia la derecha. En este caso un punto  $A$  queda totalmente identificado mediante un número real, como se ve en la figura 2.1.

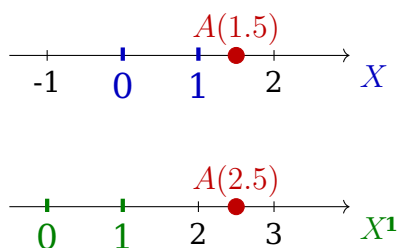


Nota que 0 y 1 definen la recta  $2.5 > 0.5 \Rightarrow B$  a la derecha de  $A$

Figura 2.1 Referencia recta: basta el 0 y la magnitud del 1

Y se ve que  $B$  está a la derecha de  $A$  porque  $2.5 > 1$

La figura 2.1 muestra dos puntos:  $A(0.5)$  y  $B(2.5)$  en un mismo sistema de referencia. Se lee «El punto  $A$  tiene coordenada 0.5, mientras que el punto  $B$  tiene coordenada 2.5» . Si el cero —Origen del sistema de coordenadas— estuviera en otro lado, la coordenada de cada punto no serían esas.



El mismo punto tiene diferentes coordenadas, dependiendo del sistema de referencias — $X$  o  $X^1$ — adoptado. El origen en  $X^1$  está corrido a la izquierda, y hay que pensarlos superpuestos.

Figura 2.2 Referencia recta: es importante el 0

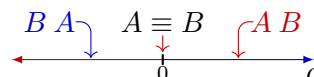
#### Ejemplo 2.1

Dado  $A(a)$ , razona para afirmar si  $B(2a)$  está a la derecha o a la izquierda de  $A$ .

$2a > a$  es válida solamente cuando  $a > 0$ ;

si  $a = 0$  las dos coordenadas son iguales, y  $B \equiv A$  —con lo que  $B$  no está a la derecha de  $A$ , porque ambas coinciden—

y si  $a < 0$   $B$  está a la izquierda de  $A$ . Ejemplo:  $2(-1) = -2 < -1$



El ejemplo anterior y otras exploraciones, lo puedes ver en [GeogebraTube: Puntos-“Coordenadas en  \$R\$ ”](#), (el ejemplo: con el deslizador vertical bien arriba y el horizontal bien a la derecha).

La figura 2.2 muestra cómo un mismo punto puede tener dos coordenadas diferentes, si se usan sistemas de referencia con diferente origen de coordenadas —0—.

**Ejemplo 2.2**

Respecto de la figura 2.2, si el origen del nuevo sistema  $X^1$  estuviera en la coordenada  $h$  del sistema original  $X$ , y  $A(a)$  está expresado respecto del sistema original, y el punto  $B(b')$ , está sobre el sistema  $X^1$ . Calcula cómo serán las coordenadas de los puntos en el otro sistema de referencia.

Propongamos primero que  $h = -1$  —como en la figura 2.2—, entonces  $A(a)$  en el sistema original sería  $A(a + 1)$  en el sistema  $X^1$ , y en el otro caso:  $B(b)_1$  el punto  $B$  tiene coordenada  $b$  respecto del sistema  $X^1$ , pero tendrá coordenada  $b - 1$  respecto del sistema  $X$  original.

Por tanto, en un caso genérico (con  $h$ ) tendremos que

$$A(a) \equiv A(a - h)_1$$

$$B(b)_1 \equiv B(b + h)$$

Esto es muy importante. Podríamos establecer que si el origen se corriera  $h$  unidades a la izquierda, la coordenada nueva será el valor original sumado a  $h$ . Por el contrario, si se corriera a la derecha, la coordenada —respecto del nuevo sistema— se restaría  $h$  de la original.

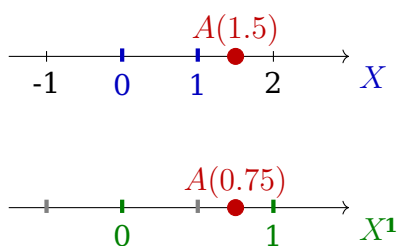
En la figura 2.3 se aprecia cómo un cambio de escala afecta a la identificación del punto.

**Ejemplo 2.3**

Respecto de la figura 2.3, si la escala del nuevo sistema  $X^1$  fuera de 2 veces el del primero, ¿Cuál será la coordenada de  $A(a)$  en el nuevo sistema?

En este caso la coordenada del punto  $A$  respecto del nuevo sistema  $X^1$  será  $A(a/2)$ .

En Geogebra el sistema de una dimensión no existe, hay 2D y 3D.



el mismo punto tiene diferentes coordenadas, dependiendo de la escala usada en sistema de referencias, y debes pensar los sistemas de referencia superpuestos

**Figura 2.3** Referencia recta: basta el 0 y la escala del 1

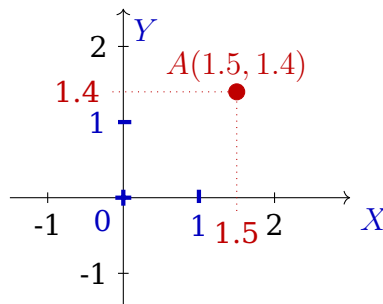
A este espacio de una dimensión lo hemos de llamar  $\mathbb{R}$ .

**2-1.2. El plano**

El plano es seguramente tu mayor experiencia en la escuela media. El plano se lo puede definir de varias maneras, entre ellas el sistema cartesiano y el sistema polar.

### 2-1.2.1. Cartesiano

El sistema más usado (XY cartesiana ortogonal, en la figura 2.4) es en el cual las rectas se cortan en el origen de ambas, y se ubican a  $90^\circ$ . Los números crecen hacia la derecha y hacia arriba. Entonces un punto  $A$  en el plano está referido a la coordenada



**Figura 2.4** Referencia plano: Se necesita el 0 y la magnitud de cada 1 (X e Y)

horizontal y a la coordenada vertical, —abscisa y ordenada respectivamente— **en ese orden**. Por ejemplo  $A(1.5, 1.4)$ .

#### Ejemplo 2.4

¿Es  $A(1, 2)$  igual a  $B(2, 1)$ ?

No hemos definido la igualdad, pero es intuitivo que los puntos deben tener las mismas coordenadas correspondientes. En este caso NO son iguales. Si graficaras ambos puntos verás que están en diferentes lugares.

Este espacio de dos dimensiones se llama  $\mathbb{R}^2$  —se lee «erre dos»—. En este libro siempre encontrarás el eje  $X$  horizontal y apuntando a la derecha y el eje  $Y$  vertical y apuntando para arriba. Cuando estés en asignaturas como física serás libre de elegir otras variables y asignar cualquier dirección y sentido a la variable independiente y/o la variable dependiente.

La variable dependiente en  $y = 2x + 1$  es la  $y$ , la variable independiente es la  $x$ . Observa que  $y$  se calcula a partir del valor que le das a  $x$ . En otras palabras:  $y$  depende de  $x$ .

Cuando te piden el punto genérico de la recta  $y = 2x + 1$ , como es un punto del plano, tiene dos coordenadas, y la segunda dependiendo de la primera: lo escribiremos  $\{(x, 2x + 1)\}$ .

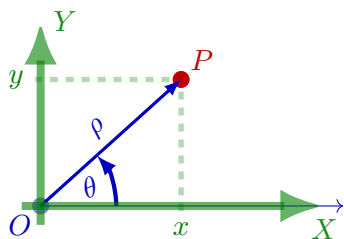
### 2-1.2.2. Polar

Un sistema polar tiene un punto de origen  $O$ , y cada punto  $P$  tiene coordenadas que están de acuerdo con: el ángulo que se define entre el mismo  $P$ ,  $O$ , y la semirrecta orientada hacia la derecha que parte de  $O$ ; mientras que la segunda coordenada es el alejamiento de punto  $P$  respecto de  $O$ . La figura 2.5 lo aclara.

#### Ejemplo 2.5

¿Que coordenadas cartesianas tendrá el punto  $P(30^\circ : 4)$ ?, y ¿Cuáles son las coordenadas polares de  $Q(3, 4)$ ?

Si superpones los dos sistemas, como en la figura, llegas rápidamente a:



$$P(\theta : \rho) \mapsto P(x, y) : \\ x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

$$P(x, y) \mapsto P(\theta : \rho) : \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Donde hemos usado los resultados de la trigonometría.

Con los resultados de arriba:  $P(30^\circ : 4)$  tiene coordenadas cartesianas

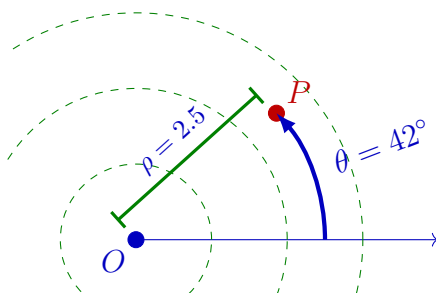
$$x = 4 \cos(30^\circ) = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3.464 \text{ y } y = 4 \operatorname{sen}(30^\circ) = 2, \text{ es decir}$$

$$P(30^\circ : 4) \equiv P(3.464, 2)$$

Por otro lado:  $Q(3, 4)$  tendrá coordenadas polares  $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\text{y } \theta = \arctan \frac{4}{3} \approx 53.13^\circ, \text{ o sea:}$$

$$P(3, 4) \equiv P(53.13^\circ : 5)$$



**Figura 2.5** Sistema Polar: las coordenadas son, ángulo y alejamiento

### 2-1.2.3. Notación en Geogebra y WxMaxima

En Geogebra ingresas un punto en la forma cartesiana  $A: (3, 4)$

o en la forma polar  $B: (4; 30^\circ)$  (grados) o  $B: (4; 30\pi/180)$  (radianes)

En WxMaxima no tienes la alternativa de usar grados, puedes usarlos, pero siempre que hagas una cuenta lo tendrás que tener presente

(%i1)  $A: [3, 4];$

(A)  $[3, 4]$

(%i2)  $B: [4, 30];$

(B)  $[4, 30]$

A la hora de hallar el coseno de un ángulo,

supuesto que lo hayas ingresado en Geogebra  $B: (4; 30^\circ)$  la función  $\text{Ángulo}$  te lo devuelve siempre en grados  $\cos(\text{Ángulo}(B))$ , y la función  $\text{Longitud}$ , te devuelve el alejamiento  $\text{Longitud}(B)$ .

En cambio en WxMaxima:

(%i3)  $\cos(B[2]*\%pi/180), \text{numer};$

(%o3)  $0.154251449887584$

Primero: estás usando los  $30^\circ$  que pusiste como segunda coordenada del punto B, pero teniendo en cuenta que está en grados. En otras palabras: el argumento a pasar a WxMaxima estará en radianes.

Segundo: colocas `,numer` para que WxMaxima te dé una aproximación con 15 decimales. Si no lo colocas, WxMaxima calcula el coseno pero te dá la respuesta solamente cuando es exacta, por ejemplo

```
(%i4) cos(%pi);
(%o4)      -1
```

Y para el arco tangente, con los ejemplos de arriba, en Geogebra `h1:atan(y(A)/x(A))` el cual te arroja sin errores solamente en el primero y cuarto cuadrante. Puedes usar el comando `h2:atan2(y(A),x(A))`

En WxMaxima, también con problemas en el segundo y tercer cuadrante

```
(%i5) h3:atan(A[2]/A[1]),numer, h4:atan2(A[2],A[1]),numer;
```

### 2-1.3. El espacio tridimensional

En el espacio se usa un sistema de coordenadas (XYZ) —el sistema puede denominarse  $X_1X_2X_3$  también— como se ve en la figura 2.6

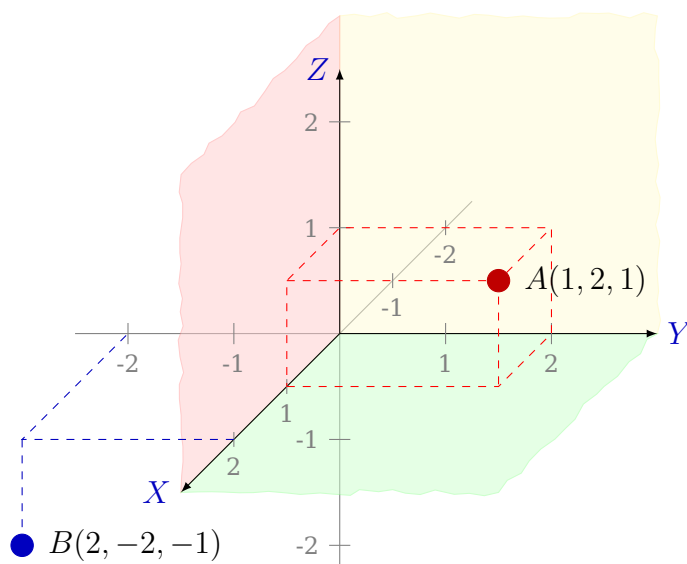


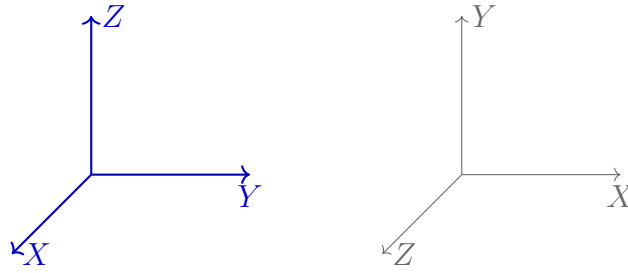
Figura 2.6 Espacio: origen (0,0,0) y unidad en cada eje

Repetimos que aunque no son los únicos tipos de sistemas de coordenadas, son los que usaremos preferentemente. A este espacio tridimensional lo llamamos  $\mathbb{R}^3$ . En este libro siempre encontrarás el eje  $X$  horizontal y saliendo del plano del papel, a la derecha y horizontal el eje  $Y$ , y vertical y apuntando para arriba al eje  $Z$ . Esta es una forma dextrógira —ya tendremos oportunidad de ahondar más en ello—.

No usaremos la otra, en donde los ejes  $X$  y  $Y$  se ubican como en  $\mathbb{R}^2$ , y se agrega el eje  $Z$  saliendo del plano del papel —puedes verlo en la figura 2.7(a la derecha)—.

*¿Para qué crees que vemos otros sistemas de referencia además del cartesiano ortogonal?*

Un sistema de referencia no es más que el «idioma» que elegimos para comunicar algo, y para que todos entendamos lo mismo, de la forma más simple posible. Elegiremos el origen de coordenadas y la escala, de acuerdo con lo que queramos representar: no es lo mismo representar el movimientos de una bola de billar que la posición de las ventanas de un edificio, o de las dimensiones de un tornillo. Asimismo —ya lo verás— es más sencillo representar rectas horizontales en el sistema rectangular que en el polar, y mucho más fácil representar



**Figura 2.7** Diferentes sistemas en  $\mathbb{R}^3$ , usamos solo el de la izquierda.

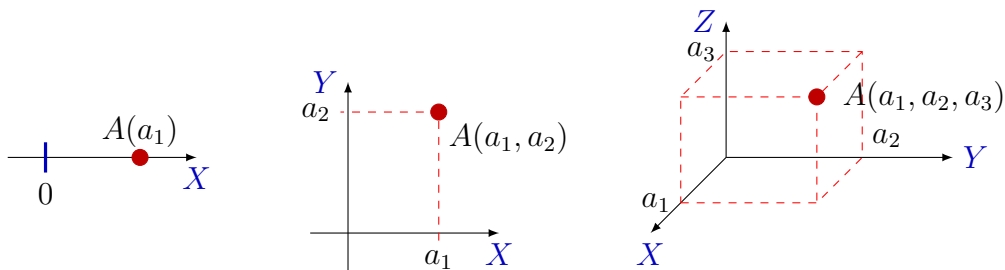
circunferencias y espirales en el sistema polar que en el rectangular.

## 2-2. Traslación de sistema y proyecciones

En esta sección aprenderás las primeras interacciones entre puntos y sistemas de referencia

- Cómo cambian las coordenadas de un punto si cambiamos el origen de coordenadas, o la escala de los ejes.
- Proyectar un punto sobre los ejes o planos.
- Caracterizar un punto desde la propiedad de su distancia al origen.

Para que los emplees en algunos problemas geométricos.



**Figura 2.8** Puntos (geométricos): pueden referirse a sistemas cartesianos de una, dos o tres dimensiones. En los otros libros de esta serie, pueden aparecer puntos en otros espacios (no geométricos).

En general el punto lo denotas con una letra mayúscula, y —entre paréntesis— la ubicación relativa a cada eje en el orden X-Y-Z. Los conjuntos lineal (unidimensional), plano (bidimensional) y espacio (tridimensional) los puedes denotar mediante  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  respectivamente, o  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

### Ejemplo 2.6

¿A qué sistemas pertenecen  $A(3)$ ,  $B(2, 4)$ , y  $D(2, 3, 4)$ ?

El punto  $A(3) \in \mathbb{R}$  tres pertenece a la recta real, mientras que el punto dos-cuatro  $B(2, 4)$  que es distinto de  $C(4, 2)$  pertenece al plano — $B(2, 4)$ ,  $C(4, 2) \in \mathbb{R}^2$ —, y finalmente el punto dos-tres-cuatro pertenece al espacio  $D(2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$

en general

$$A(a) \in \mathbb{R}$$

$$A(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$A(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

donde  $a, b$  y  $c$  —o  $a_1, a_2$  y  $a_3$ — son números reales, y  $A$  es un punto de la recta, del plano o del espacio respectivamente

Además dos puntos son iguales cuando tienen *todas* sus coordenadas *homólogas* —es decir *correspondientes*— iguales

$$A_1(1, 2) = A_2(1, 2)$$

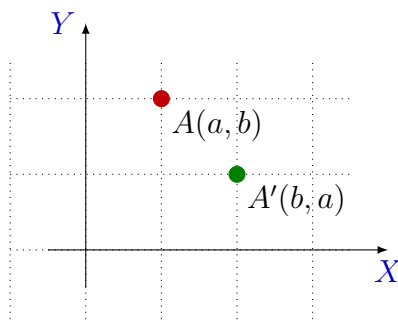
$$\neq A_3(2, 1)$$

$$\neq A_4(1, 2, 1)$$

$A_1$  es igual a  $A_2$ , pero no es igual a  $A_3$  ni a  $A_4$ . Además  $A_3$  también es distinto a  $A_4$ .

La posición de un punto cualquiera de la recta, del plano o del espacio respecto de un sistema de coordenadas adecuado queda determinada si se da un número real, un par ordenado de números reales, o una terna ordenada de números reales respectivamente, llamadas **coordenadas** del punto —como los ves en la figura 2.8—.

El orden de las coordenadas de un punto específico es importante:  $A(1, 2)$  no es el mismo punto que  $A(2, 1)$ , como ves en la figura 2.9



**Figura 2.9** El orden de las coordenadas es relevante

Las coordenadas de los puntos genéricos las puedes notar indistintamente como  $A(x, y, z)$ ,  $A(a_1, a_2, a_3)$  o cualquier combinación de letras.

Los ejes pueden normalmente llamarse  $X - Y - Z$ , o  $X_1 - X_2 - X_3$ ; o de otra forma, como se acostumbra en el ámbito de la física.

Los puntos —por ahora al menos— denotan ubicación

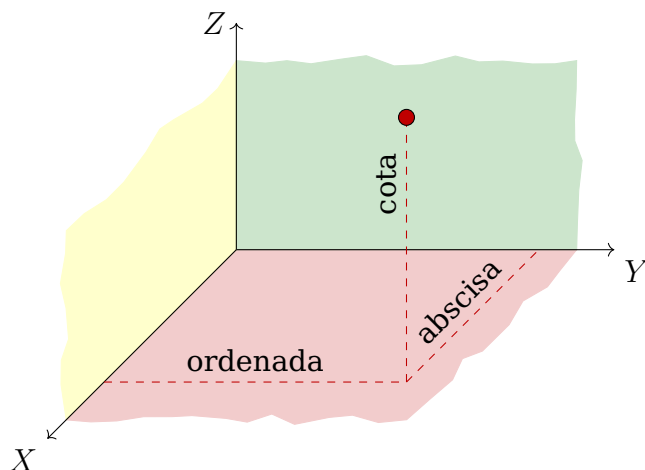
en la línea, en el plano, o en el espacio.

Cada punto se conoce por sus coordenadas, en un orden establecido.

Las coordenadas de un mismo punto están referidas

a un sistema de referencias en particular.

Las coordenadas de cada punto tienen nombre: en  $A(a, b, c)$ ,  $a$  es la abscisa,  $b$  es la ordenada y  $c$  es la cota, como se aprecia en la figura 2.10.

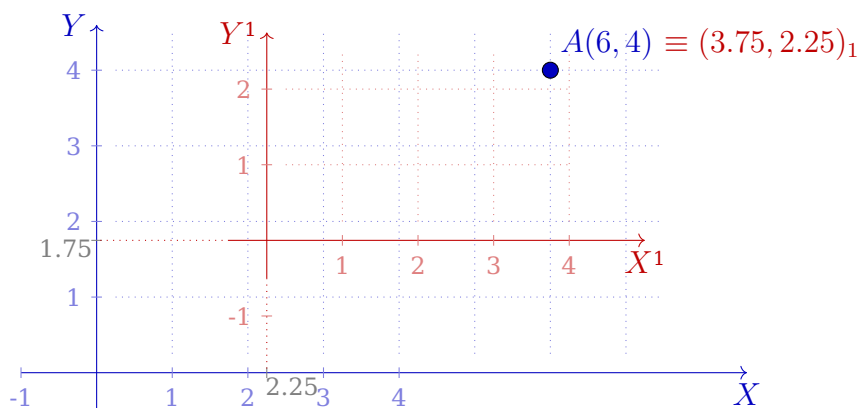


**Figura 2.10** Nombre de las coordenadas de un punto

### 2-2.1. Desplazamiento de sistema de referencias

Es importante convenir sobre qué sistema de referencias están escritas las coordenadas de un punto. Un mismo punto puede tener distintas coordenadas si las referimos a sistemas de coordenadas distintos —regresa a ver las figuras 2.2 y 2.3, págs 37 y 38—.

En la figura tenemos el caso en que coexisten dos sistemas de referencia: el original  $-XY-$  y el desplazado  $-X^1Y^1-$ .



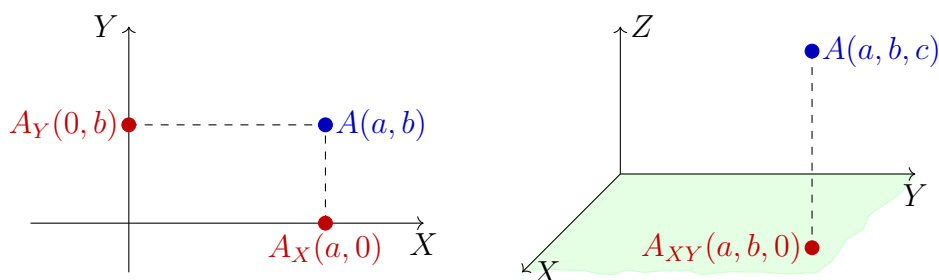
**Figura 2.11** Se necesitan los orígenes 0 y las magnitudes de cada unidad. Se ven las coordenadas de un punto sobre dos sistemas de referencia  $-XY$  o  $X^1Y^1-$  desplazados pero con la misma escala.

Algo de ejercitación sobre este tópico lo encuentras en [GeogebraTube: Puntos y Vectores-“Referencias Desplazadas 2D”](#).

### 2-2.2. Proyecciones de un punto

La proyección de un punto  $A$  sobre un eje, es otro punto que conserva la coordenada original en tal eje, mientras que en el otro es cero  $-\mathbb{R}^2-$ , o ceros en  $\mathbb{R}^3$ .

La proyección de un punto del espacio tridimensional sobre un plano coordenado es otro punto que solamente posee coordenadas en tal plano, mientras que en el eje normal al plano tiene coordenada 0.



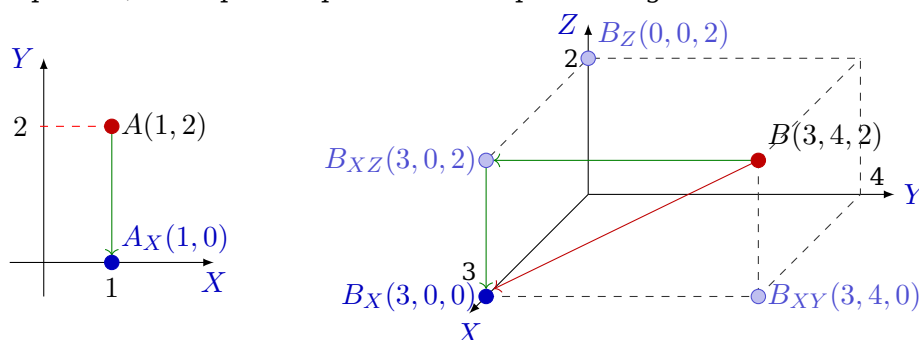
**Figura 2.12** Proyecciones: un punto se proyecta en otro punto

El ejemplo siguiente lo aclara más.

### Ejemplo 2.7

Halla la proyección del punto  $A(1, 2)$  sobre el eje  $X$ . Repite para  $B(3, 4, 2)$  para los planos  $XY$ ,  $ZX$  y el eje  $Z$ .

Grafiquemos, tanto para el primero como para el segundo



Ves que la proyección de un punto  $B(a, b, c)$  sobre el eje  $X$  es  $B_X(a, 0, 0)$ . Equivale a primero proyectar  $B$  sobre un plano que contenga al eje  $X$ —digamos  $B_{XZ}(a, 0, c)$ —y luego, proyectar este último sobre el eje  $X$ — $B_X(a, 0, 0)$ —.

Si nos hubiesen pedido la proyección de  $A$  sobre el eje  $Y$  responderíamos  $A_Y(0, 4, 0)$ . La diferencia entre  $B_Z$  y  $B_{\bar{Z}}$ —en este contexto— es que la segunda es la proyección sobre el plano  $XY$ — $B_{\bar{Z}}(3, 4, 0) = B_{XY}$ —y la primera es la proyección sobre el eje  $Z$ — $B_Z(0, 0, 2)$ —. **notaciones:**  $(3, 4, 0) = B_{\bar{Z}} \equiv B_{XY}$

### Actividad 2.1

Bosqueja en el espacio bidimensional ¿Podrías definir la proyección de un punto sobre un eje dado, como el que se obtiene hallando la intersección del eje dado, con la recta **perpendicular** que contiene al punto original? ¿Sería la misma definición la que diga que se obtiene por la intersección de una recta **paralela** al otro eje y que contenga al punto original? Coteja tus conclusiones en el caso de que el sistema de referencias no sea ortogonal sino que el eje  $Y$ , por ejemplo, esté inclinado formando 60 grados respecto del eje  $X$ .

### 2-2.3. Distancia al origen

La distancia al origen de coordenadas es un concepto muy interesante, y la vamos a definir directamente como el número no negativo

$$A(a) \Rightarrow \delta(A) = |a| = \sqrt{a^2}$$

$$A(a_1, a_2) \Rightarrow \delta(A) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$A(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \delta(A) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

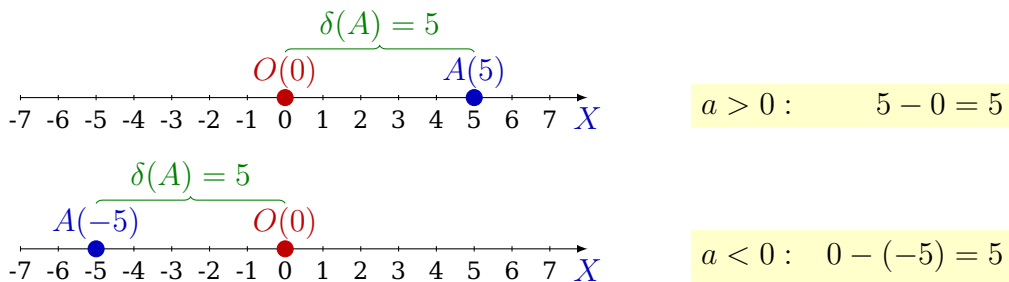
En general, la distancia al origen de coordenadas es...

$$A(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \delta(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \tag{2.1}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Veamos por qué (ten en cuenta que  $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0, \\ -a & a < 0, \end{cases}$

de modo que  $\sqrt{x^2} = |x|$ , y  $\sqrt{x^2} \neq x$ . Ésta última sólo es cierta si  $x > 0$ )



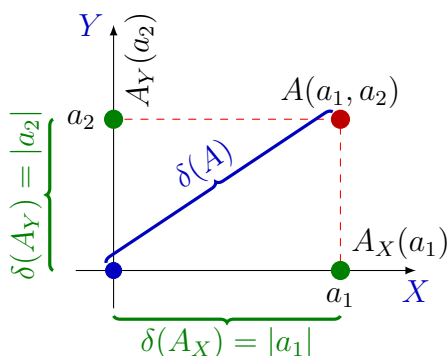
**Figura 2.13** Distancia de un punto  $A(a)$  al origen  $O(0)$  en  $\mathbb{R}$

**2-2.3.0.1. Distancia al origen en una dimensión** En la figura 2.13, para que la distancia de  $A(a)$  al origen sea siempre positiva, tomemos  $\delta(A) = |a| = \sqrt{a^2}$

Si nos preguntaran cuál es el punto cuya distancia al origen es por ejemplo 3, claramente nuestra respuesta sería que habrán dos puntos que satisfacen esa condición:  $A(-3)$  y  $A'(3)$ , porque  $\delta(A) = 3 = |a|$  de donde  $a = \pm 3$ .

**2-2.3.0.2. Distancia al origen en dos dimensiones** Esta distancia la podemos trabajar mediante la relación de pitágoras, que dice que  $h^2 = c_1^2 + c_2^2$  y una de sus interpretaciones es que  $h$  es la longitud —distancia— de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos cuya longitud es  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente.

Por eso podemos trabajar la figura 2.14, refiriendo que  $A_X(a_1, 0)$  es la proyección del punto  $A$  según el eje  $X$  y que  $A_Y(0, a_2)$  es la proyección del punto  $A$  según el eje  $Y$ . Podemos pensar cada eje por separado para hallar la distancia en una dimensión, de acuerdo con lo desarrollado en la figura 2.13, por eso ves que  $-A_X(a_1)$  y  $A_Y(a_2)$ — así, la distancia del punto  $A(a_1, a_2)$  al origen es  $\delta(A) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .



$$\begin{aligned}\delta^2(A) &= \delta^2(A_X) + \delta^2(A_Y) \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

**Figura 2.14** Distancia en  $\mathbb{R}^2$

## 2-3. Distancia entre puntos

En esta sección encontrarás la primera herramienta con qué construir relaciones entre puntos, y llegar a describirlas como una ecuación. Asimismo, no olvides que estamos en la geometría analítica, con lo que deberás aprender a enumerar y reconocer las propiedades de la distancia, para que puedas usarlas en alguna situación problemática.

De manera análoga, la distancia entre dos puntos  $A(a_1, \dots, a_n)$  y  $B(b_1, \dots, b_n)$  se definirá como

$$\begin{aligned}\delta(A, B) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Con ello, claramente se ve que  $\delta(A) = \delta(A, O)$ , donde  $O(0, 0, \dots, 0)$  es el origen de coordenadas. Nuevamente analizaremos en forma gráfica para justificar esta expresión.

### 2-3.1. Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}$

Observa los diagramas de la figura para los casos en que los puntos «viven» en  $\mathbb{R}$ .



**Figura 2.15** Distancia entre dos puntos en  $\mathbb{R}$ :  $\delta(A, B) = |b_1 - a_1|$

Claramente, la distancia entre dos puntos  $A(a)$  y  $B(b)$  es  $\delta(A, B) = |b - a|$ , sin importarnos quién está a la derecha del otro. Recordemos el resultado siguiente  $\sqrt{x^2} = |x|$ <sup>(1)</sup>,

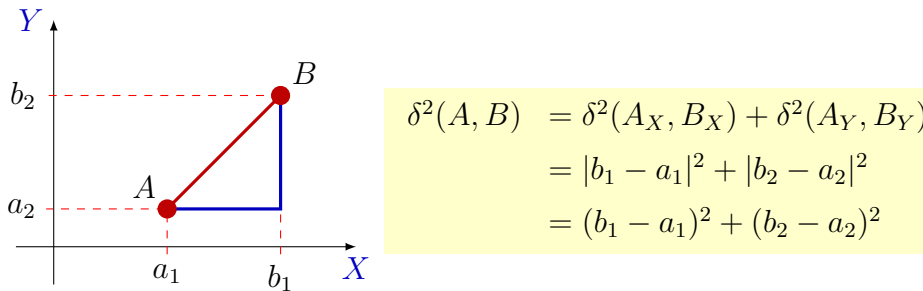
<sup>1</sup>Por ejemplo  $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$  y no  $-5$ .

con ello podemos decir que  $|b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$ , y entonces podemos deducir que la distancia en la recta ( $\mathbb{R}$ ) es

$$\begin{aligned} \delta(A, B) &= |b_1 - a_1| \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

### 2-3.2. Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$

Para el caso del plano, en la figura 2.16 podemos ver la distancia mediante el teorema de Pitágoras, conocidas las distancias en una dimensión



**Figura 2.16** Distancia entre dos puntos en el plano

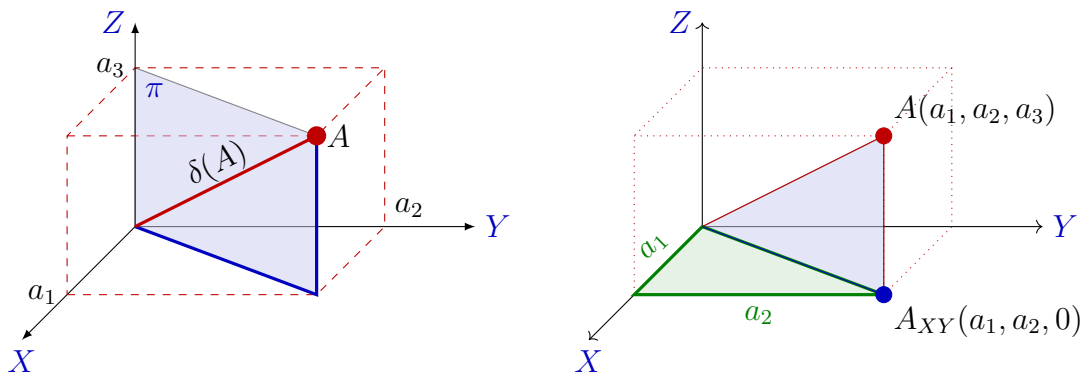
y en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) es

$$\delta(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

en el plano aplicamos el teorema de Pitágoras: la distancia  $\delta(A, B)$  es la hipotenusa indicada en la figura.

### 2-3.3. Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$

En el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) también puede mostrarse la distancia de un punto a otro, aunque por simplicidad, en la figura mostramos que uno de los puntos es el origen  $O(0, 0, 0)$ . En este caso es  $B \equiv O$  y  $\delta(A, O) = \delta(A)$



**Figura 2.17** Distancia en  $\mathbb{R}^3$

La proyección del segmento  $\overline{OA}$  —desde el origen al punto  $A$ — sobre el plano  $XY$  es  $\overline{OA_{XY}}$  y tiene una magnitud de  $\delta(A_{XY}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , que es la base del triángulo  $OA_{XY}A$  en el plano  $\pi$ ; de modo que aplicando de nuevo Pitágoras —al triángulo

$OA_{XY}A$ — tenemos

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \sqrt{(\delta^2(A_{XY})) + \delta^2(A_{XY}, A)} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + a_3^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\end{aligned}$$

y cuando  $B$  no coincide con el origen, la anterior deviene en

$$\delta(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad (2.4)$$

que es la expresión de la distancia válida para  $\mathbb{R}^3$ . Más aún: si definiéramos puntos que no podemos representar (en  $\mathbb{R}^n$ ), y las coordenadas de los puntos se denotan  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , la distancia entre ellos se calcularía mediante

$$\delta(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \quad (2.5)$$

Que vale para  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$

Para puntos en  $\mathbb{R}^n$  tales como  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\delta(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \delta(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

### 2-3.4. Propiedades de la distancia

Una propiedad de *la distancia* es que es *no negativa*, que puede probarse analizando la 2.2: cualquier número —y  $(b_i - a_i)$  lo es— elevado al cuadrado es positivo, luego, la suma de números positivos es positiva, con lo que la raíz cuadrada positiva será también positiva.

¿Cuándo *la distancia valdrá cero*? cuando todas las diferencias de coordenadas de los puntos valgan cero. En otras palabras, cuando los dos puntos sean coincidentes.

Otra propiedad dice que *la distancia entre dos puntos es única*, es decir que  $\delta(A, B) = \delta(B, A)$ , y esto puede probarse de la siguiente manera:

#### Prueba

En la ecuación 2.2, cada término

$$\begin{aligned}(b_i - a_i)^2 &= b_i^2 - 2b_i a_i + a_i^2 && \text{cuadrado de un binomio} \\ &= a_i^2 - 2b_i a_i + b_i^2 && \text{conmutatividad en } \mathbb{R} \\ &= (a_i - b_i)^2 && \text{cuadrado de un binomio}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\delta(A, B) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} && \text{definición} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} && \text{discusión de arriba} \\ &= \delta(B, A) && \text{identificación*}\end{aligned}$$

\* la identificación también puede asimilarse a aplicar la definición en forma reversa. Resumiendo

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0 \quad (2.6)$$

es mayor o igual a cero, porque cada término  $(b_i - a_i)^2$ , al estar al cuadrado, es cero o mayor que cero.

Estas pruebas son muy sencillas, pero formales, y no hacen nada más que establecer claramente lo que ya sabemos o intuimos. Sin embargo hay que prestarles mucha atención para poder aprender la habilidad de «decir las cosas» con propiedad en el lenguaje matemático e ingenieril. A medida que avances en la carrera aparecerán nuevas pruebas, un poco más refinadas, las que se entenderán muy fácilmente prestando buena atención a éstas.

### Ejemplo 2.8

Calcula las distancias entre los puntos  $A(3)$ ,  $B(-2)$ ,  $C(1, 2)$ ,  $D(-2, 4)$ ,  $E(1, 2, 3)$ ,  $F(-1, 2, -3)$

Las distancias calculables son  $\delta(A, B)$ ,  $\delta(C, D)$  y  $\delta(E, F)$ , ya que por ejemplo, la distancia entre  $A$  y  $C$  no puede ni siquiera plantearse por no estar ambas en la misma dimensión.

Calculemos las que están definidas:

$$\delta(A, B) = \sqrt{(-2 - 3)^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\delta(C, D) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \simeq 3.60555$$

$$\delta(E, F) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (-3 - 3)^2} = 2\sqrt{10} \simeq 6.32455$$

¿Cuánto valdría  $\delta(F, E)$ ?

Los **puntos** son entes matemáticos que describen una ubicación respecto de un sistema de referencia. Pueden ser de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ , y  $\mathbb{R}^3$ ...

Los **ejes** pueden llamarse de cualquier manera, en este libro empleamos  $XYZ$  o  $X_1X_2X_3$  y dextrógiros. Casi exclusivamente usamos sistemas de coordenada cartesianos.

La **distancia** entre puntos de la misma dimensión  $\mathbb{R}^n$ ,  
**es conmutativa** :  $\delta(A, B) = \delta(B, A)$   
**es positiva o nula**  $\delta(A, B) \geq 0$ . Si alguna coordenada es un parámetro —una letra—, la distancia estará en función de ese parámetro.

## 2-4. Problemas de distancia

Aprenderás herramientas de manipulación para expresar las relaciones entre puntos mediante una ecuación, para emplearlo en otro contexto (solamente el concepto de punto y distancia).

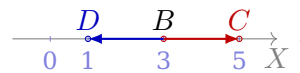
En el caso de que una coordenada pudiera ser  $A(1, b, 3)$ , por ejemplo; entonces la distancia respecto del origen dependerá del valor que asuma el parámetro  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\delta(A) = \sqrt{b^2 + 10}$ .

### 2-4.1. En una dimensión

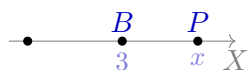
#### Ejemplo 2.9

Halla el lugar geométrico de los puntos de la recta cuya distancia al punto  $B(3)$  es de 2 unidades.

Hagamos un gráfico. Podemos «caminar» hacia la derecha dos unidades y nos encontraremos con un punto  $C$  de coordenada 5... pero «caminando» a la izquierda, tenemos  $D(1)$ .



¿Cómo lo hacemos analíticamente?

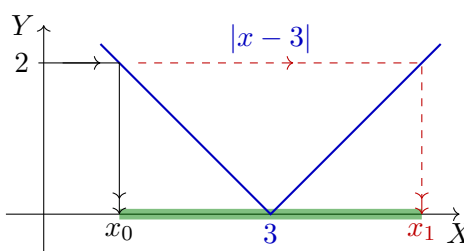
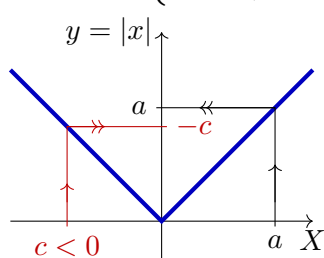


$$\begin{aligned} \delta(P, B) = 2 &= \sqrt{(x-3)^2} && \text{elevando al cuadrado} \\ 4 &= (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \\ &\Downarrow \\ 0 &= (x-5)(x-1) \end{aligned}$$

de donde se obtienen **ambos** resultados simultáneamente:  $x \in \{1, 5\}$ .

Otra manera —más laboriosa— de verlo es haciendo  $2 = |x-3|$  y aplicando la

$$\text{definición } \begin{cases} 2 = x-3, & x-3 \geq 0 \\ 2 = -(x-3), & x-3 < 0 \end{cases}$$



$$\text{es decir: } x-3 = 2 \Rightarrow x = 5 \quad \text{o} \quad x-3 = -2 \Rightarrow x = 1. \quad |x-3| = 2 \quad \equiv \quad x \in \{1, 5\}$$

Es interesante notar que la solución analítica arroja automáticamente —en este caso al menos— todos los resultados posibles.

Este mismo ejercicio lo haremos en el contexto de un punto del plano o un punto en el espacio y notarás que hay diferencia... te propongo que la pienses.

En matemática, y más en ingeniería, es bueno saber predecir. Mejor aún hubiera sido que te hicieras esta pregunta, sin haberla leído acá. Se trata de una **habilidad del aprendizaje**: buscarse preguntas del tipo «qué hubiera sucedido si...» —y te lo recuerdo acá porque estás empezando a andar el camino que has elegido: ser ingeniero, y en los primeros pasos necesitarás de estos consejos—.

Búscate preguntas del tipo «qué hubiera sucedido si...» , cuando resuelvas un ejemplo o ejercicio.

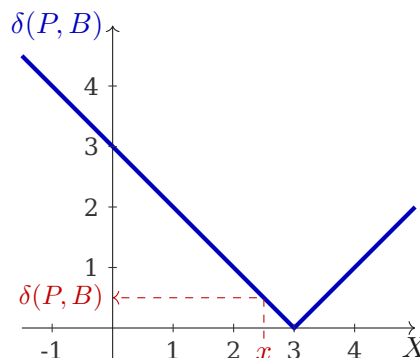
**Ejemplo 2.10**

Halla y grafica la distancia del punto  $P(x)$  al punto  $B(3)$

Lo primero que hemos de hacer es un gráfico —y un boceto de geogebra: [GeogebraTube: Puntos-“Distancia en R”](#)—



De donde  
 $\delta(P, B) = \sqrt{(x - 3)^2}$ ,  
 o lo que es lo mismo:  
 $\delta(P, B) = |x - 3|$   
 con lo que tendremos una función  $\delta(P, B)(x)$  de la distancia entre  $P(x)$  y  $B(3)$  con  $x$  como variable libre



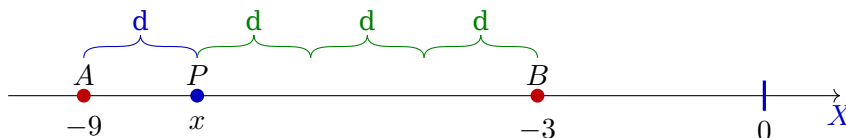
En otras palabras, la función distancia del punto de coordenada  $x$  al punto de coordenada 3 es la función valor absoluto de la diferencia.

**Ejemplo 2.11**

Halla la coordenada de un punto situado de tal modo que la distancia a otro  $A(-9)$  sea tres veces menor que su distancia a  $B(-3)$ .

¿Qué significa que la distancia a un punto  $\delta(P, A)$  fuera tres veces menor a  $\delta(P, B)$ ?

Claramente, que hacen falta tres distancias  $\delta(P, A)$  para igualar a una distancia  $\delta(P, B)$  —el boceto de geogebra que corresponde es: [GeogebraTube: Puntos-“Razón de distancias en R”](#)—.



De ese modo

$$\begin{aligned}\delta(P, B) &= 3\delta(P, A) \\ \downarrow \\ \delta(P, B)^2 &= 3^2\delta(P, A)^2 \\ \downarrow \\ (x - (-3))^2 &= 9(x - (-9))^2 \\ \downarrow \\ x^2 + 6x + 9 &= 9x^2 + 162x + 729\end{aligned}$$

Trabajando con esta ecuación llegas a la expresión  $8x^2 + 156x + 720$ , cuyas soluciones son  $8x^2 + 156x + 720 = 8(x + 7.5)(x + 12) = 0$ , en otras palabras: hay dos puntos que satisfacen el problema,  $P_1(-7.5)$  y  $P_2(-12)$ .

## 2-4.2. En dos dimensiones

Hagamos ejercicios parecidos a los anteriores, pero ubicados en el plano.

### Ejemplo 2.12

Halla la distancia entre un punto fijo  $A(1, 2)$  y un punto cualquiera  $B(x, y)$ .

En este caso, hemos de tener como resultado una función de  $x$  y de  $y$ , de dos variables; puesto que  $B$  puede moverse libremente en todo el plano.

$$\delta(A, B) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

claramente  $\delta(A, B) = f(x, y)$ .

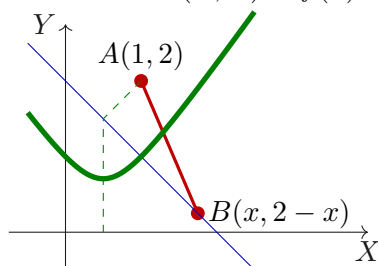
### Ejemplo 2.13

Halla la distancia entre un punto fijo  $A(1, 2)$  y un punto cualquiera  $B$  que se mueve solo en la recta  $y = 2 - x$ .

En este caso, puesto que  $B$  puede moverse libremente en la recta, sus coordenadas son  $B(x, 2 - x)$ .

$$\delta(A, B) = \sqrt{(x-1)^2 + (2-x-2)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

claramente  $\delta(A, B) = f(x)$ , el grafo de la función distancia es:



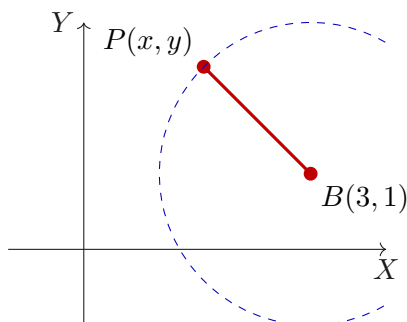
La función tiene un mínimo en  $x = \frac{1}{2}$  como ves en [GeogebraTube: Puntos- "Distancia en R2"](#).

La distancia entre dos puntos fijos es un número, y la distancia entre un punto fijo y un punto móvil es una función.

**Ejemplo 2.14**

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto  $B(3, 1)$  es de 2 unidades.

En este caso el gráfico cambia porque un punto del plano tiene coordenadas  $P(x, y)$



De donde  $\delta(P, B) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = 2$ , o lo que es lo mismo

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

La cual es justamente la ecuación de una circunferencia con centro en  $B$  y radio 2!

Sería interesante que lo comprobaras ingresando esa expresión en Geogebra.

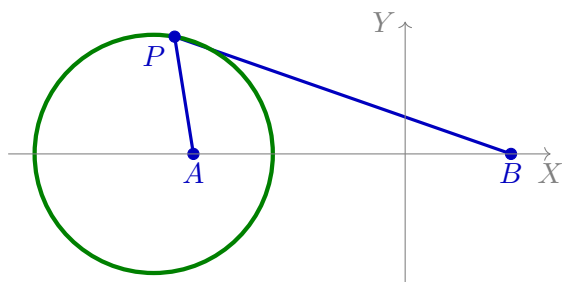
**Ejemplo 2.15**

Halla las coordenadas de un punto situado de tal modo que la distancia a otro  $A(-9, 0)$  sea tres veces menor que su distancia a  $B(-3, 0)$ .

Lo mismo que en el caso anterior —ver [GeogebraTube: Puntos y Vectores\(1\)-“razón de distancias a dos puntos”](#)— Corresponde al mismo ejemplo que 2.11, pero en el plano, ya no en la recta.

$$\begin{aligned} \delta(P, B)^2 &= 3^2 \delta(P, A)^2 \\ \downarrow \\ (x + 3)^2 + y^2 &= 9((x + 9)^2 + y^2) \\ \downarrow \\ -720 &= 8x^2 + 156x + \quad + 8y^2 \\ \downarrow \\ -720 + 8 \frac{156^2}{16^2} &= 8 \left( x^2 + 2 \frac{156}{16} x + \frac{156^2}{16^2} \right) + 8y^2 \\ \downarrow \\ \frac{9^2}{4^2} &= \left( x + \frac{39}{4} \right)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Es decir, todos los puntos de la circunferencia de centro en  $(9.75, 0)$  y radio  $\frac{9}{4} = 2.25$  son solución. En la figura —eje Y corrido— se ve una construcción que puedes hacer en Geogebra con los siguientes comandos



- A:(-9,0)
- B:(-3,0)
- e:(x+156/16)^2+y^2=81/16
- P:Punto(e)
- h:Distancia(P,B)
- k:Distancia(P,A)
- r=h/k