

# 2

# Sistemas de ecuaciones lineales

2.1  
2.2

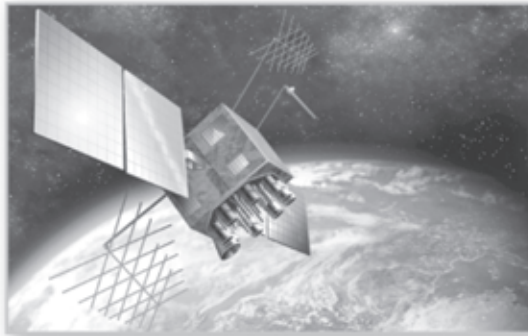
Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales  
Eliminación gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan



Flujo vehicular



Análisis de redes eléctricas



Sistema de posicionamiento global



Balace de ecuaciones químicas



Velocidad del vuelo de un avión

## 2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

- Reconocer sistemas de ecuaciones lineales de  $n$  variables.
- Encontrar una representación paramétrica de un conjunto solución.
- Determinar cuándo un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.
- Utilizar la sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

### ECUACIONES LINEALES EN $n$ VARIABLES

El estudio del álgebra lineal requiere que el estudiante esté familiarizado con álgebra, geometría analítica y trigonometría. Ocasionalmente encontrará ejemplos y ejercicios que requieran conocimientos de cálculo; estos se señalan claramente en el texto.

Al comenzar con el estudio del álgebra lineal, descubrirá que muchos de los métodos implican docenas de pasos aritméticos, así que es esencial revisar constantemente su trabajo. Puede utilizar una computadora o calculadora para revisar su trabajo, así como para ejecutar muchos de los cálculos de rutina en el álgebra lineal.

Aunque algún material de este primer capítulo le resultará familiar, es recomendable que estudie cuidadosamente los métodos presentados aquí. Así, cultivará y aclarará su intuición para el material más abstracto que se presentará después.

Recuerde de su curso de geometría analítica que la ecuación de la recta en un espacio de dos dimensiones, tiene la forma

$$a_1x + a_2y = b, \quad a_1, a_2 \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Esta es una **ecuación lineal en dos variables**  $x$  y  $y$ . De la misma manera, la ecuación de un plano en un espacio de tres dimensiones tiene la forma

$$a_1x + a_2y + a_3z = b, \quad a_1, a_2, a_3 \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación lineal en tres variables**  $x$ ,  $y$  y  $z$ . En general, una ecuación lineal en  $n$  variables se define de la siguiente manera.

#### COMENTARIO

Para representar constantes se utilizan las primeras letras del alfabeto y las variables se representan con las últimas letras de éste.

#### Definición de una ecuación lineal en $n$ variables

Una **ecuación lineal en  $n$  variables**  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b.$$

Los **coeficientes**  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  son números reales y el **término constante**  $b$  es un número real. El número  $a_1$  es el **coeficiente principal** y  $x_1$  es la **variable principal**.

Las ecuaciones lineales no tienen productos o raíces de variables; tampoco variables que aparezcan en funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Las variables aparecen elevadas sólo a la primera potencia. El ejemplo 1 lista algunas ecuaciones lineales y algunas que no lo son.

#### Ejemplos de ecuaciones lineales y no lineales

Cada ecuación es lineal.

a)  $3x + 2y = 7$       b)  $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$       c)  $(\text{Sen } \pi)x_1 - 4x_2 = e^2$

Las siguientes ecuaciones no son lineales.

a)  $xy + z = 2$       b)  $e^x - 2y = 4$       c)  $\text{Sen } x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

## SOLUCIONES Y CONJUNTOS SOLUCIÓN

Una **solución** de una ecuación lineal en  $n$  variables es una sucesión de  $n$  números reales  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  ordenados de modo que la ecuación se cumple cuando los valores

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad x_3 = s_3, \quad \dots, \quad x_n = s_n$$

se sustituyen en ésta. Por ejemplo, la ecuación  $x_1 + 2x_2 = 4$ . Se cumple cuando  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 1$ . Otras soluciones son  $x_1 = -4$  y  $x_2 = 4$ , y también  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 2$ , y  $x_1 = -2$  y  $x_2 = 3$ .

El conjunto de *todas* las soluciones de la ecuación lineal se denomina **conjunto solución** y cuando se determina este conjunto, se dice que se ha resuelto la ecuación. Para describir todo el conjunto solución de una ecuación lineal, a menudo se utiliza la **representación paramétrica**, como se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

### Representación paramétrica de un conjunto solución

Resuelva la ecuación lineal  $x_1 + 2x_2 = 4$ .


#### SOLUCIÓN

Para determinar el conjunto solución de una ecuación en dos variables, resolvemos una de las variables en términos de la otra. Si usted resuelve para  $x_1$  en términos de  $x_2$ , obtiene

$$x_1 = 4 - 2x_2.$$

De esta manera, la variable  $x_2$  es **libre**, lo cual significa que puede tomar cualquier valor real. La variable  $x_1$  no es libre, ya que su valor dependerá del valor asignado a  $x_2$ . Para representar un número infinito de soluciones de esta ecuación es conveniente introducir una tercera variable  $t$  denominada **parámetro**. Así, con  $x_2 = t$ , se puede representar el conjunto solución como

$$x_1 = 4 - 2t, \quad x_2 = t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

Se pueden obtener soluciones particulares al asignar valores al parámetro  $t$ . Por ejemplo,  $t = 1$  produce la solución  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 1$  y  $t = 4$  genera la solución  $x_1 = -4$  y  $x_2 = 4$ . 

El conjunto solución de una ecuación lineal puede representarse paramétricamente en más de una forma. En el ejemplo 2 usted pudo haber elegido  $x_1$  como la variable libre. La representación paramétrica del conjunto solución habría entonces tomado la forma

$$x_1 = s, \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}s, \quad s \text{ es cualquier número real.}$$

Por conveniencia, elegiremos como variables libres aquellas que aparecen al final en la ecuación.

### Representación paramétrica de un conjunto solución

Resuelva la ecuación lineal  $3x + 2y - z = 3$ .

#### SOLUCIÓN

Al elegir  $y$  y  $z$  como variables libres, empezamos a resolver para  $x$  para obtener

$$\begin{aligned} 3x &= 3 - 2y + z \\ x &= 1 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z. \end{aligned}$$

Haciendo  $y = s$  y  $z = t$ , obtenemos la representación paramétrica

$$x = 1 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t, \quad y = s, \quad z = t$$

donde  $s$  y  $t$  son números reales cualesquiera. Dos soluciones particulares son

$$x = 1, y = 0, z = 0 \quad \text{y} \quad x = 1, y = 1, z = 2. \quad \text{■}$$

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un **sistema de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  variables** es un conjunto de  $m$  ecuaciones, cada una de las cuales es lineal en las mismas  $n$  variables:

### COMENTARIO

La notación con doble subíndice indica que  $a_{ij}$  es el coeficiente de  $x_j$  en la  $i$ -ésima ecuación.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

La **solución** de un sistema de ecuaciones lineales es una sucesión de números  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  que es solución de cada una de las ecuaciones lineales del sistema. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

tiene a  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 3$  como una solución debido a que *ambas* ecuaciones se cumplen cuando  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 3$ . Por otra parte,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 0$  no es una solución del sistema, ya que estos valores sólo satisfacen la primera ecuación.

## DESCUBRIMIENTO

1. Grafique las dos rectas

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

en el plano  $x$ - $y$ . ¿En dónde se intersectan? ¿Cuántas soluciones tiene este sistema de ecuaciones?

2. Repita el análisis anterior para el par de rectas:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}$$

y

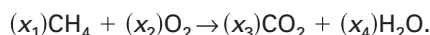
$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 6x - 2y &= 2. \end{aligned}$$

3. En general, ¿Qué tipos básicos de conjuntos solución son posibles para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas?



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En una reacción química, los átomos se reorganizan en una o más sustancias. Por ejemplo, cuando el metano ( $\text{CH}_4$ ) se combina con oxígeno ( $\text{O}_2$ ) y se quema, se forman dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) y agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Los químicos representan este proceso con una ecuación química de la forma



Puesto que una reacción química no puede crear o destruir átomos, todos los átomos representados a la izquierda de la flecha deben ser considerados también a la derecha. Esto se llama *balance* de la ecuación química. En el ejemplo dado, los químicos pueden usar un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los valores de  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  que balanceen la ecuación química.

Puede suceder que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente una solución, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Un sistema de ecuaciones lineales se denomina **consistente** si tiene por lo menos una solución e **inconsistente** si no tiene solución.

### Sistemas de dos ecuaciones en dos variables

Resuelva y grafique cada sistema de ecuaciones lineales.

a)  $x + y = 3$   
 $x - y = -1$

b)  $x + y = 3$   
 $2x + 2y = 6$

c)  $x + y = 3$   
 $x + y = 1$

### SOLUCIÓN

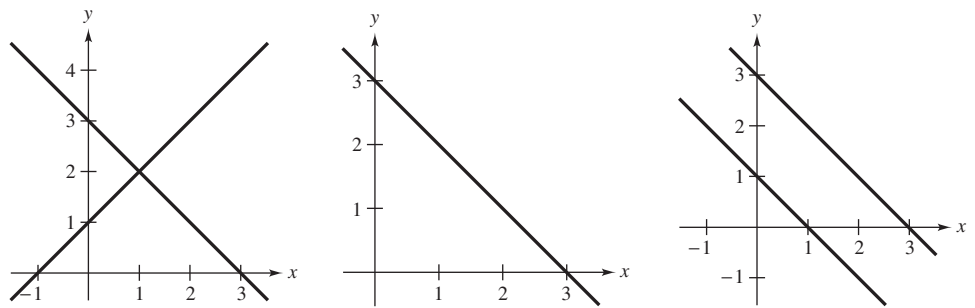
a) Este sistema tiene exactamente una solución,  $x = 1$  y  $y = 2$ . Esta solución puede alcanzarse al sumar las dos ecuaciones para obtener  $2x = 2$ , lo cual implica que  $x = 1$  y por tanto,  $y = 2$ . La gráfica de este sistema se representa mediante dos rectas que se *intersectan*, como se muestra en la Figura 2.1 (a).

b) Este sistema cuenta con un número infinito de soluciones, ya que la segunda ecuación es el resultado de multiplicar por 2 ambos miembros de la primera ecuación. Una representación paramétrica del conjunto solución es:

$$x = 3 - t, \quad y = t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

La gráfica de este sistema se representa como dos rectas *coincidentes*, como se muestra en la figura 2.1 (b).

c) Este sistema no tiene solución porque es imposible que la suma de dos números sea 3 y 1 simultáneamente. La gráfica de este sistema se representa como dos rectas *paralelas*, como se muestra en la figura 2.1 (c).



a) Dos rectas que se cortan:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

b) Dos rectas coincidentes:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

c) Dos rectas paralelas:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Figura 2.1

El ejemplo 4 ilustra los tres tipos básicos de conjuntos solución que son posibles para un sistema de ecuaciones lineales. Este resultado se enuncia aquí sin demostración. (Ésta se proporciona después en el Teorema 3.5)

### Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales, una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. El sistema tiene exactamente una solución (sistema consistente).
2. El sistema tiene un número infinito de soluciones (sistema consistente).
3. El sistema no tiene solución (sistema inconsistente).

## RESOLVIENDO UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

¿Cuál de los siguientes sistemas es más fácil de resolver algebraicamente?

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 9 \\ -x + 3y & = & -4 \\ 2x - 5y + 5z & = & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 9 \\ y + 3z & = & 5 \\ z & = & 2 \end{array}$$

El sistema de la derecha es el más fácil de resolver. Este sistema está en la **forma escalonada por filas o renglones**, lo cual significa que sigue un patrón escalonado y que tiene coeficientes principales iguales a 1. Para resolver este sistema se aplica un procedimiento denominado **sustitución hacia atrás**.

### Uso de la sustitución hacia atrás para resolver un sistema de forma escalonada por renglones

Utilice la sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 5 \\ y & = & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

### SOLUCIÓN

De la Ecuación 2 usted sabe que  $y = -2$ . Al sustituir este valor en la Ecuación 1, obtiene

$$\begin{array}{rcl} x - 2(-2) & = & 5 \\ x & = & 1. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Sustituya } -2 = y \\ \text{Resuelva para } x \end{array}$$

Así, el sistema tiene exactamente una solución  $x = 1$  y  $y = -2$ . 

El término “sustitución hacia atrás” implica que se trabaja en *retrospectiva*. Así, en el Ejemplo 5, la segunda ecuación generó el valor de  $y$ . El Ejemplo 6 demuestra este procedimiento. Se sustituye entonces ese valor en la primera ecuación y se resuelve para  $x$ .

### Uso de la sustitución hacia atrás para resolver un sistema de forma escalonada por renglones

Resuelva el siguiente sistema.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 9 \\ y + 3z & = & 5 \\ z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} \end{array}$$


### SOLUCIÓN

De la Ecuación 3, conoce el valor de  $z$ . Para resolver para  $y$ , sustituya  $z = 2$  en la ecuación 2 para obtener

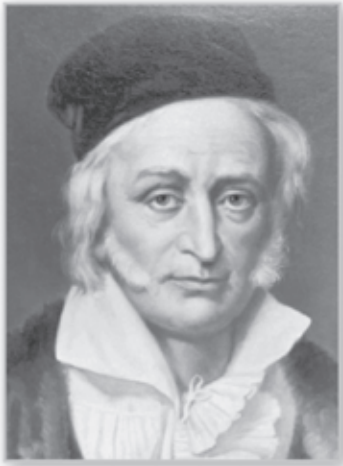
$$\begin{array}{rcl} y + 3(2) & = & 5 \\ y & = & -1. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Sustituya } z = 2 \\ \text{Resuelva para } y \end{array}$$

Finalmente, sustituya  $y = -1$  y  $z = 2$  en la ecuación 1 para obtener

$$\begin{array}{rcl} x - 2(-1) + 3(2) & = & 9 \\ x & = & 1. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Sustituya } y = -1, z = 2 \\ \text{Resuelva para } x \end{array}$$

La solución es  $x = 1$ ,  $y = -1$  y  $z = 2$ . 

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Para resolver un sistema que no esté en la forma escalonada por renglones, primero se transforma a un sistema *equivalente* que esté en la forma escalonada por renglones mediante las siguientes operaciones.



**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss es reconocido, con Newton y Arquímedes, como uno de los tres matemáticos más importantes de la historia. Gauss usó una forma de lo que ahora se conoce como Eliminación Gaussiana en sus investigaciones. Aunque este método fue nombrado en honor a Gauss, los chinos usaban un método casi idéntico 2000 años antes que él.

**Operaciones que conducen a sistemas de ecuaciones equivalentes**

Cada una de las siguientes operaciones, aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales, produce un sistema *equivalente*:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar el múltiplo de una ecuación a otra.

Reescribir un sistema de ecuaciones lineales en la forma escalonada por renglones, a menudo implica una *cadena* de sistemas equivalentes, cada uno de los cuales se obtiene mediante la aplicación de una de las tres operaciones básicas. Este proceso es denominado **Eliminación Gaussiana**, en honor del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

**Uso de la eliminación gaussiana para reescribir un sistema en la forma escalonada por renglones**

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN**

Aunque existen varias maneras de empezar, es recomendable utilizar un procedimiento sistemático que pueda aplicarse fácilmente a sistemas grandes. Trabaje a partir de la esquina superior izquierda del sistema, mantenga  $x$  en la posición superior izquierda y elimine las demás  $x$  de la primera columna.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 && \leftarrow \text{Sumando la primera ecuación a la segunda, obtenemos una nueva segunda ecuación.} \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \\ x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 && \leftarrow \text{Sumando } -2 \text{ veces la primera ecuación a la tercera, obtenemos una nueva tercera ecuación} \\ -y - z &= -1 \end{aligned}$$

Ahora que todo se ha eliminado de la primera columna, excepto la primera  $x$ , procedemos con la segunda.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 && \leftarrow \text{Sumando la segunda ecuación a la tercera, generamos una nueva tercera ecuación.} \\ 2z &= 4 \\ x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 && \leftarrow \text{Multiplicando la tercera ecuación por } \frac{1}{2}, \text{ obtenemos una nueva tercera ecuación.} \\ z &= 2 \end{aligned}$$

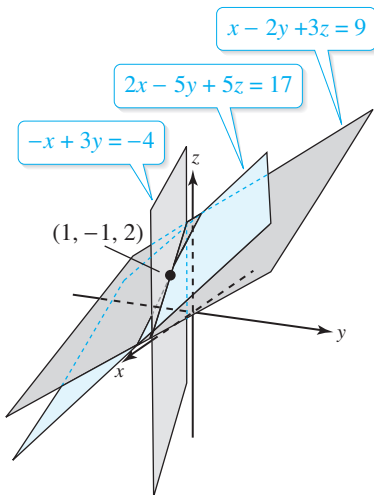
Éste es el mismo sistema usado en el Ejemplo 6 y, como en ese caso, la solución es

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$$

Cada una de las tres ecuaciones en el Ejemplo 7 representa un plano en un sistema de coordenadas tridimensionales. Ya que la única solución del sistema es el punto

$$(x, y, z) = (1, -1, 2)$$

los tres planos se intersectan en el punto representado por estas coordenadas, como se muestra en la figura 2.2.



**Figura 2.2**

Debido a que se requieren muchos pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es muy fácil cometer errores aritméticos; es por ello que se sugiere fomentar el hábito de *comprobar la solución sustituyéndola en cada una de las ecuaciones del sistema original*. Así, en el ejemplo 7, puede comprobar la solución  $x = 1$ ,  $y = -1$  y  $z = 2$  como sigue.

$$\begin{array}{l} \text{Ecuación 1: } (1) - 2(-1) + 3(2) = 9 \\ \text{Ecuación 2: } -(1) + 3(-1) = -4 \\ \text{Ecuación 3: } 2(1) - 5(-1) + 5(2) = 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sustituya la solución} \\ \text{en cada ecuación} \\ \text{del sistema original.} \end{array}$$

El siguiente ejemplo implica un sistema inconsistente, o que no tiene solución. La clave para identificar un sistema inconsistente es que, en algún punto del proceso de eliminación, se obtendrá un resultado sin sentido como  $0 = -2$ . Esto se demuestra en el ejemplo 8.

### Un sistema inconsistente

Resuelva el sistema.

$$\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{array}$$

#### SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_2 - 4x_3 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Sumando } -2 \text{ veces la primera ecuación} \\ \text{a la segunda ecuación, generamos una} \\ \text{nueva segunda ecuación.} \\ \\ \leftarrow \text{Sumando } -1 \text{ veces la primera ecuación} \\ \text{a la tercera ecuación, producimos una} \\ \text{nueva tercera ecuación.} \end{array}$$

(Otra manera de describir esta operación es decir que de la tercera ecuación *se restó* la primera para obtener una nueva tercera ecuación.)

$$\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 0 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Sumando } -1 \text{ veces la segunda ecuación} \\ \text{a la tercera ecuación, producimos una} \\ \text{nueva tercera ecuación.} \end{array}$$

Ya que la tercera “ecuación” es falsa, este sistema no tiene solución. Además, debido a que es equivalente al sistema original, podemos concluir que éste tampoco tiene solución. ■

Como en el ejemplo 7, las tres ecuaciones del ejemplo 8 representan planos en un sistema coordenado tridimensional. En este ejemplo, sin embargo, el sistema es inconsistente. Así, los planos no tienen un punto en común, como se muestra en la Figura 2.3.

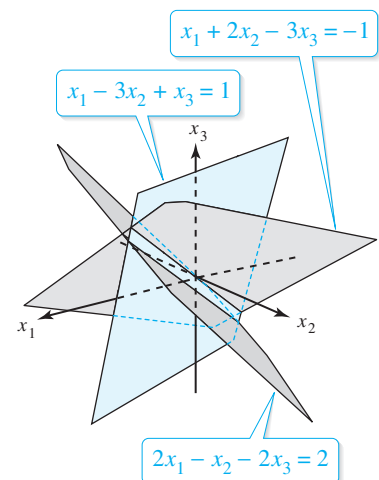


Figura 2.3

Esta sección termina con el análisis de un sistema de ecuaciones lineales que tiene un número infinito de soluciones. Puede representarse el conjunto solución para este sistema de manera paramétrica como se hizo en los Ejemplos 2 y 3.

### Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema.

$$\begin{array}{rcl} x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

#### SOLUCIÓN

Comience por reescribir el sistema en la forma escalonada por renglones, como se muestra enseguida.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_3 = -1 \\ & x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Intercambiamos las dos} \\ \leftarrow \text{primeras ecuaciones.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_3 = -1 \\ & x_2 - x_3 & = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Sumando la primera ecuación} \\ \leftarrow \text{a la tercera ecuación, se genera} \\ \leftarrow \text{una nueva tercera ecuación.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_3 = -1 \\ & x_2 - x_3 & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Sumando } -3 \text{ veces la segunda ecuación} \\ \leftarrow \text{a la tercera ecuación para eliminar} \\ \leftarrow \text{la tercera ecuación.} \end{array}$$

Debido a que la tercera ecuación es innecesaria, la eliminamos para obtener el sistema mostrado abajo.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_3 = -1 \\ & x_2 - x_3 & = 0 \end{array}$$

Para representar las soluciones, se elige  $x_3$  como la variable libre y se representa con el parámetro  $t$ . Dado que  $x_2 = x_3$  y  $x_1 = 3x_3 - 1$ , se puede describir el conjunto solución como

$$x_1 = 3t - 1, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

## DESCUBRIMIENTO

1. Grafique las dos rectas representadas por el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ -2x + 3y & = & -3 \end{array}$$

2. Utilice la eliminación Gaussiana para resolver este sistema de la siguiente manera.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ -1y & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ & y & = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & x & = 3 \\ & y & = 1 \end{array}$$

Grafique el sistema de ecuaciones que obtiene a cada paso de este proceso. ¿Qué puede observar acerca de estas rectas?

Se le pedirá repetir este análisis gráfico para otros sistemas en los ejercicios 89 y 90.

## 2.1 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Ecuaciones lineales** En los ejercicios 1 a 6, determine si la ecuación dada es lineal en las variables  $x$  y  $y$ .

- $2x - 3y = 4$
- $3x - 4xy = 0$
- $\frac{3}{y} + \frac{2}{x} - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 = 4$
- $2 \operatorname{sen} x - y = 14$
- $(\operatorname{sen} 2)x - y = 14$

**Representación paramétrica** En los ejercicios 7 a 10, encuentre la representación paramétrica del conjunto solución de la ecuación lineal.

- $2x - 4y = 0$
- $3x - \frac{1}{2}y = 9$
- $x + y + z = 1$
- $13x_1 - 26x_2 + 39x_3 = 13$

**Análisis gráfico** En los Ejercicios 11 a 24, grafique el sistema de ecuaciones lineales. Resuelva el sistema e interprete su respuesta.

- $2x + y = 4$   
 $x - y = 2$
- $x + 3y = 2$   
 $-x + 2y = 3$
- $x - y = 1$   
 $-2x + 2y = 5$
- $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$   
 $-2x + \frac{4}{3}y = -4$
- $3x - 5y = 7$   
 $2x + y = 9$
- $-x + 3y = 17$   
 $4x + 3y = 7$
- $2x - y = 5$   
 $5x - y = 11$
- $x - 5y = 21$   
 $6x + 5y = 21$
- $\frac{x+3}{4} + \frac{y-1}{3} = 1$   
 $2x - y = 12$
- $\frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 4$   
 $x - 2y = 5$
- $0.05x - 0.03y = 0.07$   
 $0.07x + 0.02y = 0.16$
- $0.2x - 0.5y = -27.8$   
 $0.3x + 0.4y = 68.7$
- $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$   
 $x - y = 3$
- $\frac{2x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{2}{3}$   
 $4x + y = 4$

**Sustitución hacia atrás** En los Ejercicios 25 a 30, use el sistema de sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

- $x_1 - x_2 = 2$   
 $x_2 = 3$
- $2x_1 - 4x_2 = 6$   
 $3x_2 = 9$
- $-x + y - z = 0$   
 $2y + z = 3$   
 $\frac{1}{2}z = 0$
- $x - y = 4$   
 $2y + z = 6$   
 $3z = 6$
- $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$   
 $2x_1 + x_2 = 0$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $x_2 = 0$
- $x + y + z = 6$   
 $2x - y + z = 3$   
 $3x - z = 0$
- $x + y + z = 2$   
 $-x + 3y + 2z = 8$   
 $4x + y = 4$
- $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$   
 $x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$   
 $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 8$
- $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$   
 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$   
 $x_1 - 11x_2 + 4x_3 = 3$


**Análisis gráfico** En los ejercicios 31 a 36, complete el siguiente conjunto de tareas para cada sistema de ecuaciones.

- Utilice una aplicación gráfica para graficar las ecuaciones en el sistema.
- Utilice las gráficas para determinar si el sistema es consistente o inconsistente.
- Si el sistema es consistente, aproxime la solución.
- Resuelva el sistema algebraicamente.
- Compare la solución del inciso (d) con la aproximación del inciso (c). ¿Qué puede concluir?


- $-3x - y = 3$   
 $6x + 2y = 1$
- $4x - 5y = 3$   
 $-8x + 10y = 14$
- $2x - 8y = 3$   
 $\frac{1}{2}x + y = 0$
- $9x - 4y = 5$   
 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0$
- $4x - 8y = 9$   
 $0.8x - 1.6y = 1.8$
- $-5.3x + 2.1y = 1.25$   
 $15.9x - 6.3y = -3.75$

**Sistema de ecuaciones lineales** En los ejercicios 37 a 56 resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

- $x_1 - x_2 = 0$   
 $3x_1 - 2x_2 = -1$
- $3x + 2y = 2$   
 $6x + 4y = 14$
- $2u + v = 120$   
 $u + 2v = 120$
- $x_1 - 2x_2 = 0$   
 $6x_1 + 2x_2 = 0$
- $9x - 3y = -1$   
 $\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = -\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 0$   
 $4x_1 + x_2 = 0$
- $\frac{x-2}{4} + \frac{y-1}{3} = 2$   
 $x - 3y = 20$
- $\frac{x_1+4}{3} + \frac{x_2+1}{2} = 1$   
 $3x_1 - x_2 = -2$
- $0.02x_1 - 0.05x_2 = -0.19$   
 $0.03x_1 + 0.04x_2 = 0.52$
- $0.05x_1 - 0.03x_2 = 0.21$   
 $0.07x_1 + 0.02x_2 = 0.17$
- $x + y + z = 6$   
 $2x - y + z = 3$   
 $3x - z = 0$
- $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$   
 $x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$   
 $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 8$
- $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$   
 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$   
 $x_1 - 11x_2 + 4x_3 = 3$

El símbolo  indica un ejercicio en el cual puede utilizarse una aplicación gráfica o un programa de cómputo.

$$\begin{aligned}
 51. \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\
 & 4x_1 + 2x_3 = 10 \\
 & -2x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -8 \\
 52. \quad & x_1 + 4x_3 = 13 \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\
 & 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -19 \\
 53. \quad & x - 3y + 2z = 18 \\
 & 5x - 15y + 10z = 18 \\
 54. \quad & x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\
 55. \quad & x + y + z + w = 6 \\
 & 2x + 3y - w = 0 \\
 & -3x + 4y + z + 2w = 4 \\
 & x + 2y - z + w = 0 \\
 56. \quad & x_1 + 3x_4 = 4 \\
 & 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
 & 3x_2 - 2x_4 = 1 \\
 & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5
 \end{aligned}$$

 **Sistema de ecuaciones lineales** En los Ejercicios 57 a 60, utilice un programa de cómputo o una aplicación gráfica para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
 57. \quad & x_1 + 0.5x_2 + 0.33x_3 + 0.25x_4 = 1.1 \\
 & 0.5x_1 + 0.33x_2 + 0.25x_3 + 0.21x_4 = 1.2 \\
 & 0.33x_1 + 0.25x_2 + 0.2x_3 + 0.17x_4 = 1.3 \\
 & 0.25x_1 + 0.2x_2 + 0.17x_3 + 0.14x_4 = 1.4 \\
 58. \quad & 120.2x + 62.4y - 36.5z = 258.64 \\
 & 56.8x - 42.8y + 27.3z = -71.44 \\
 & 88.1x + 72.5y - 28.5z = 225.88 \\
 59. \quad & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{9}x_3 = \frac{349}{630} \\
 & \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{19}{45} \\
 & \frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{8}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{139}{150} \\
 60. \quad & \frac{1}{8}x - \frac{1}{7}y + \frac{1}{6}z - \frac{1}{5}w = 1 \\
 & \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{5}z + \frac{1}{4}w = 1 \\
 & \frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{3}w = 1 \\
 & \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}w = 1
 \end{aligned}$$

**Número de Soluciones** En los Ejercicios 61 a 64, indique por qué el sistema de ecuaciones debe tener al menos una solución. Después resuelva el sistema y determine si éste tiene exactamente una solución o un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned}
 61. \quad & 4x + 3y + 17z = 0 & 62. \quad & 2x + 3y = 0 \\
 & 5x + 4y + 22z = 0 & & 4x + 3y - z = 0 \\
 & 4x + 2y + 19z = 0 & & 8x + 3y + 3z = 0 \\
 63. \quad & 5x + 5y - z = 0 & 64. \quad & 12x + 5y + z = 0 \\
 & 10x + 5y + 2z = 0 & & 12x + 4y - z = 0 \\
 & 5x + 15y - 9z = 0 & &
 \end{aligned}$$

65. **Nutrición** Un vaso de ocho onzas de jugo de manzana y un vaso de ocho onzas de jugo de naranja contienen un total de 177.4 miligramos de vitamina C. Dos vasos de ocho onzas de jugo de manzana y tres vasos de ocho onzas de jugo de naranja contienen un total de 436.7 miligramos de vitamina C. ¿Cuánta vitamina C hay en un vaso de ocho onzas de cada tipo de jugo?
66. **Velocidad de vuelo** Dos aviones parten del Aeropuerto Internacional de Los Ángeles y vuelan en direcciones opuestas. El segundo avión parte media hora después que el primero, pero su velocidad es 80 kilómetros por hora mayor. Encuentre la velocidad de vuelo de cada avión si 2 horas después de que partió el primer avión, ambos están a 3200 kilómetros de distancia uno del otro.

**¿Verdadero o falso?** En los Ejercicios 67 y 68, determine si cada una de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proponga un ejemplo que demuestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite una expresión adecuada a partir del texto.

67. a) Un sistema de una ecuación lineal en dos variables es siempre consistente.  
 b) Un sistema de dos ecuaciones lineales en tres variables es siempre consistente.  
 c) Si un sistema lineal es consistente, entonces tiene un número infinito de soluciones.
68. a) Un sistema lineal puede tener exactamente dos soluciones.  
 b) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.  
 c) Un sistema de tres ecuaciones lineales en dos variables siempre es inconsistente.
69. Encuentre un sistema de dos ecuaciones en dos variables,  $x_1$  y  $x_2$ , que tengan un conjunto solución dado por la representación paramétrica  $x_1 = t$  y  $x_2 = 3t - 4$ , donde  $t$  es cualquier número real. Entonces demuestre que las soluciones del sistema pueden escribirse como

$$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = t.$$

70. Encuentre un sistema de dos ecuaciones en tres variables,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , que tengan el conjunto solución dado por la representación paramétrica  $x_1 = t$ ,  $x_2 = s$  y  $x_3 = 3 + s - t$ , donde  $s$  y  $t$  son cualquier número real. Después demuestre que las soluciones del sistema pueden escribirse como  $x_1 = 3 + s - t$ ,  $x_2 = s$  y  $x_3 = t$ .

**Sustitución** En los Ejercicios 71 a 74, resuelva el sistema de ecuaciones haciendo  $A = 1/x$ ,  $B = 1/y$  y  $C = 1/z$

71.  $\frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 7$       72.  $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 0$   
 $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 0$        $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{25}{6}$

73.  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 4$       74.  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 5$   
 $\frac{4}{x} + \frac{2}{z} = 10$        $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -1$   
 $-\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{13}{z} = -8$        $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 0$

**Coefficientes Trigonométricos** En los Ejercicios 75 y 76, resuelva el sistema de ecuaciones lineales para  $x$  y  $y$ .

75.  $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$   
 $(-\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$

76.  $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$   
 $(-\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 1$

**Diseño de Coeficiente** En los Ejercicios 77 a 82, determine los valores de  $k$  de tal manera que el sistema tenga el número de soluciones que se indica.

77. Un número infinito de soluciones.  
 $4x + ky = 6$   
 $kx + y = -3$

78. Un número infinito de soluciones.  
 $kx + y = 4$   
 $2x - 3y = -12$

79. Exactamente una solución.  
 $x + ky = 0$   
 $kx + y = 0$

80. Sin solución.  
 $x + ky = 2$   
 $kx + y = 4$

81. Sin solución.  
 $x + 2y + kz = 6$   
 $3x + 6y + 8z = 4$

82. Exactamente una solución.  
 $kx + 2ky + 3kz = 4k$   
 $x + y + z = 0$   
 $2x - y + z = 1$

83. Determine los valores de  $k$  tales que el sistema de ecuaciones lineales no tenga una solución única.  
 $x + y + kz = 3$   
 $x + ky + z = 2$   
 $kx + y + z = 1$

**84. REMATE** Encuentre los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que el sistema de ecuaciones lineales tenga (a) exactamente una solución, (b) un número infinito de soluciones y (c) no tenga solución. Explique su razonamiento.

$$\begin{aligned} x + 5y + z &= 0 \\ x + 6y - z &= 0 \\ 2x + ay + bz &= c \end{aligned}$$

**85. Escriba** Considere el sistema de ecuaciones lineales en  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}$$

Describa las gráficas de estas tres ecuaciones en el plano  $x$ - $y$  cuando el sistema tiene (a) exactamente una solución, (b) un número infinito de soluciones y (c) ninguna solución.

**86. Escriba** Explique por qué el sistema de ecuaciones lineales del Ejercicio 85 debe ser consistente, si los términos constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  son todos cero.

**87.** Demuestre que si  $ax^2 + bx + c = 0$  para toda  $x$ , entonces  $a = b = c = 0$ .

**88.** Considere el sistema de ecuaciones lineales en  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

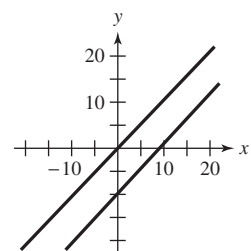
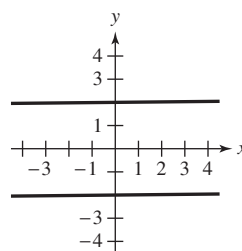
¿Bajo qué condiciones el sistema tiene exactamente una solución?

**Descubrimiento** En los Ejercicios 89 y 90, trace las rectas determinadas por el sistema de ecuaciones lineales. Entonces, aplique la eliminación gaussiana para resolver el sistema. En cada paso del proceso de eliminación, trace las rectas correspondientes. ¿Qué puede observar de estas rectas?

89.  $x - 4y = -3$       90.  $2x - 3y = 7$   
 $5x - 6y = 13$        $-4x + 6y = -14$

**Escriba** En los Ejercicios 91 y 92, las gráficas de ambas ecuaciones parecen ser paralelas. Resuelva el sistema de ecuaciones algebraicamente. Explique por qué las gráficas confunden.

91.  $100y - x = 200$       92.  $21x - 20y = 0$   
 $99y - x = -198$        $13x - 12y = 120$



## 2.2 Eliminación gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan

- Determine el tamaño de una matriz y escriba una matriz aumentada o una matriz de coeficientes a partir de un sistema de ecuaciones lineales.
- Use matrices y eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones lineales.
- Use matrices y la eliminación Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Resuelva un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

### MATRICES

En la Sección 2.1 la eliminación Gaussiana fue introducida como un procedimiento para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección usted estudiará este procedimiento con mayor profundidad, empezando por algunas definiciones. La primera es la definición de **matriz**.

#### COMENTARIO

El plural de matriz es *matrices*. Si cada elemento de la matriz es un número *real*, entonces la matriz se denomina *matriz real*. A menos que se indique lo contrario, todas las matrices de este texto son reales.

#### Definición de matriz

Si  $m$  y  $n$  son enteros positivos, entonces una matriz  $m \times n$  (que se lee como “ $m$  por  $n$ ”) es un arreglo rectangular

	Columna 1	Columna 2	Columna 3	. . .	Columna $n$
Renglón 1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\dots$	$a_{1n}$
Renglón 2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\dots$	$a_{2n}$
Renglón 3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\dots$	$a_{3n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Renglón $m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{m3}$	$\dots$	$a_{mn}$

en el cual cada elemento  $a_{ij}$  de la matriz es un número. Una matriz  $m \times n$  tiene  $m$  renglones (líneas horizontales) y  $n$  columnas (líneas verticales). Las matrices usualmente se denotan con letras mayúsculas.

El elemento  $a_{ij}$  está ubicado en el  $i$ -ésimo renglón y en la  $j$ -ésima columna.  $i$  se denomina *subíndice del renglón* porque identifica la línea horizontal en la cual se ubica el elemento y el subíndice  $j$  se denomina *subíndice de la columna* porque identifica la línea vertical en la que se encuentra el elemento.

Se dice que una matriz con  $m$  renglones y  $n$  columnas es de **tamaño**  $m \times n$ . Si  $m = n$ , entonces la matriz se llama **cuadrada de orden**  $n$ . Los elementos  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$  se denominan elementos de la **diagonal principal**.

#### Tamaños de matrices

Cada matriz tiene indicado el tamaño.

a) Tamaño:  $1 \times 1$  [2]    b) Tamaño:  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     c) Tamaño:  $2 \times 3$   $\begin{bmatrix} e & 2 & -7 \\ \pi & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$

#### COMENTARIO

Comience alineando verticalmente las variables en las ecuaciones. Use 0 para indicar coeficientes de cero en la matriz. Considere la cuarta columna de términos constantes en la matriz aumentada.

El uso más común de las matrices es para representar un sistema de ecuaciones lineales. La matriz obtenida de los coeficientes y términos constantes de un sistema de ecuaciones lineales se denomina **matriz aumentada** del sistema. A la matriz que sólo contiene los coeficientes del sistema se le llama **matriz de coeficientes** del sistema. He aquí un ejemplo.

Sistema	Matriz aumentada	Matriz de coeficientes
$x - 4y + 3z = 5$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
$-x + 3y - z = -3$		
$2x - 4z = 6$		

## OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLÓN

En la sección anterior, usted estudió tres operaciones que producen sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.

1. Intercambie dos ecuaciones.
2. Multiplique una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sume un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

En terminología de matrices, estas tres operaciones corresponden a **operaciones elementales por renglón**. Una operación elemental por renglón en una matriz aumentada produce una nueva matriz aumentada, correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales nuevo (aunque equivalente). Dos matrices son **equivalentes por renglón** cuando una puede obtenerse a partir de otra por una a secuencia finita de operaciones elementales por renglón.

### Operaciones elementales por renglón

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Suma de un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

Aunque es fácil efectuar las operaciones elementales en los renglones, esto implica muchas operaciones aritméticas. Ya que es fácil cometer un error, es recomendable anotar siempre la operación elemental realizada en cada paso, de modo que revisar el trabajo sea más fácil.

Debido a que resolver algunos sistemas implica muchos pasos, es de gran ayuda utilizar un método de notación abreviada, para tener seguimiento de cada operación elemental que usted efectúe. Esta notación se introduce en el siguiente ejemplo.

### Operaciones elementales en los renglones

- a) Intercambie el primero y segundo renglones.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$

- b) Multiplique el primer renglón por  $\frac{1}{2}$  para producir un nuevo primer renglón.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_1 \rightarrow R_1$

- c) Sume  $-2$  veces el primer renglón al tercero, para generar un nuevo tercer renglón.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$

Note que sumar  $-2$  veces el renglón 1 al renglón 3 no cambia el renglón 1.

### NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden efectuar operaciones elementales en renglones de matrices. Si usted usa una aplicación gráfica, las pantallas para el ejemplo 2(c) pueden verse como las que aparecen abajo. Los comandos y sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas para el ejemplo 2(c) se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en [college.cengage.com/pic/larsonELA6e](http://college.cengage.com/pic/larsonELA6e).

```

A
  [[1 2 -4 3]
   [0 3 -2 -1]
   [2 1 5 -2]]

mRAdd(-2,A,1,3)
  [[1 2 -4 3]
   [0 3 -2 -1]
   [0 -3 13 -8]]
  
```

En el Ejemplo 7 de la Sección 2.1, se aplicó la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Ahora aprenderá la versión matricial de la eliminación gaussiana. Los dos métodos utilizados en el siguiente ejemplo son esencialmente iguales, la diferencia fundamental es que con el método matricial no es necesario escribir las variables una y otra vez.

### Uso de las operaciones elementales en los renglones para resolver un sistema

#### Sistema lineal

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17\end{aligned}$$

Sume la primera ecuación a la segunda.

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 5z &= 17\end{aligned}$$

Sume  $-2$  veces la primera ecuación a la tercera.

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ -y - z &= -1\end{aligned}$$

Sume la segunda ecuación a la tercera.

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4\end{aligned}$$

Multiplique la tercera ecuación por  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2\end{aligned}$$

#### Matriz asociada aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Sume el primer renglón al segundo para obtener un nuevo segundo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1 \rightarrow R_2$$

Sume  $-2$  veces el primer renglón al tercero para obtener un nuevo tercer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$$

Sume el segundo renglón al tercero para obtener un nuevo tercer renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

Multiplique el tercer renglón por  $\frac{1}{2}$  para obtener un nuevo tercer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3$$

Ahora puede utilizar la sustitución hacia atrás para encontrar la solución, como en el ejemplo 6 de la sección 2.1. La solución es  $x = 1$ ,  $y = -2$  y  $z = 2$ . ■

Se dice que la última matriz del ejemplo 3 está en la **forma escalonada por renglones**. El término *escalonada* se refiere al patrón de escalera formado por los elementos no nulos de la matriz. Para que una matriz tenga esta forma debe tener las siguientes propiedades.

#### Forma Escalonada por Renglones y Forma Escalonada por Renglones Reducida

Una matriz en la **forma escalonada** por renglones tiene estas propiedades:

1. Todos los renglones que constan por completo de ceros se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. Por cada renglón que no consta completamente de ceros, el primer elemento no nulo es 1 (denominado 1 principal).
3. Para dos renglones consecutivos (no nulos), el 1 principal del renglón superior está más a la izquierda que el **1 principal** del renglón inmediato inferior.

Una matriz escalonada **por renglones** está en la **forma escalonada reducida** si toda columna con un 1 principal tiene ceros en todas las posiciones por arriba y por debajo de su 1 principal.

### Forma escalonada por renglones

Determine si cada matriz está en forma escalonada por renglones. De estarlo, determine si está en forma reducida.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### NOTA TECNOLÓGICA

Utilice una aplicación gráfica o un programa de cómputo para encontrar la forma escalonada por renglones reducida de la matriz del inciso (f) de la matriz en el Ejemplo 4 (b). Los comandos y la sintaxis de programación de esta aplicación/ programa para el ejemplo 4 se proporcionan en la **Online Technology Guide** disponible en [college.cengage.com/pic/larsonELA6e](http://college.cengage.com/pic/larsonELA6e).

#### SOLUCIÓN

Las matrices en (a), (c), (d) y (f) están ahora en forma escalonada por renglones. Las matrices en (d) y (f) están en forma escalonada por renglones reducida porque cada columna que tiene un 1 principal tiene ceros en cada posición arriba y abajo de su 1 principal. La matriz en (b) no está en forma escalonada por renglones porque no hay un renglón de puros ceros hasta abajo de la matriz. La matriz en (e) no está en forma escalonada por renglón porque la primer entrada distinta a cero en el Renglón 2 no es un 1 principal.

Puede demostrarse que toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en forma escalonada por renglones. De este modo, en el ejemplo 4 usted puede cambiar la matriz del inciso (e) a la forma escalonada por renglones al multiplicar por  $\frac{1}{2}$  el segundo renglón de la matriz.

El procedimiento para utilizar la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema es el siguiente.

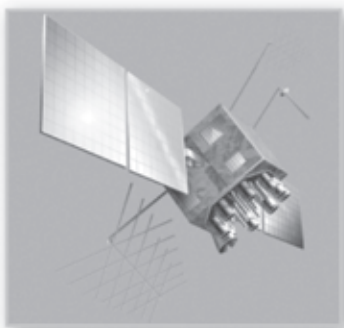
#### Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Utilice operaciones elementales en los renglones para reescribir la matriz aumentada en la forma escalonada por renglones.
3. Escriba el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz en la forma escalonada por renglones y aplique la sustitución hacia atrás para encontrar la solución.

La eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás funciona bien como método algorítmico para resolver sistemas de ecuaciones lineales ya sea a mano o a computadora. Para este algoritmo, el orden en el que las operaciones elementales en los renglones son efectuadas es importante. Muévase de *izquierda a derecha por columnas*, cambiando a cero todos los elementos directamente debajo de los 1 principales.

#### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés) es una red de 24 satélites originalmente desarrollado por el ejército de Estados Unidos como herramienta de navegación. En la actualidad, los receptores de GPS son usados en una gran variedad de aplicaciones civiles, como determinar direcciones, localizar botes a la deriva y monitorear terremotos. Un receptor de GPS funciona con lecturas satelitales para calcular su ubicación. En tres dimensiones, el receptor usa señales de al menos cuatro satélites para "trilaterar" su posición. En un modelo matemático simplificado, se usa un sistema de tres ecuaciones lineales en cuatro incógnitas (tres dimensiones y tiempo) para determinar las coordenadas del receptor como funciones de tiempo.



### Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19\end{aligned}$$

#### SOLUCIÓN

La matriz aumentada para este sistema es

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array} \right]$$

Obteniendo un 1 principal en la esquina superior izquierda y ceros en los demás elementos de la primera columna.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Se intercambian los dos} \\ \leftarrow \text{primeros renglones.} \end{array} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Se suma } -2 \text{ veces el} \\ \leftarrow \text{primer renglón al tercero} \\ \leftarrow \text{para obtener un nuevo} \\ \leftarrow \text{tercer renglón.} \end{array} \quad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Se suma } -1 \text{ veces el primer} \\ \leftarrow \text{renglón al cuarto, para} \\ \leftarrow \text{obtener un nuevo cuarto} \\ \leftarrow \text{renglón.} \end{array} \quad R_4 + (-1)R_1 \rightarrow R_4$$

Ahora que la primera columna está en la forma deseada, puede modificar la segunda columna como sigue.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Sume 6 veces el segundo} \\ \leftarrow \text{renglón al cuarto, para} \\ \leftarrow \text{obtener un nuevo cuarto} \\ \leftarrow \text{renglón.} \end{array} \quad R_4 + (6)R_2 \rightarrow R_4$$

Para escribir la tercera columna en la forma adecuada, multiplique el tercer renglón por  $\frac{1}{3}$  y multiplique el cuarto renglón por  $-\frac{1}{13}$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Multiplique el tercer renglón} \\ \leftarrow \text{por } \frac{1}{3} \text{ y el cuarto renglón} \\ \leftarrow \text{por } -\frac{1}{13} \text{ para obtener un} \\ \leftarrow \text{nuevo cuarto renglón.} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\frac{1}{3})R_3 \rightarrow R_3 \\ (-\frac{1}{13})R_4 \rightarrow R_4 \end{array}$$

La matriz está ahora en la forma escalonada por renglones y el sistema de ecuaciones lineales respectivo es el siguiente

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\x_3 - x_4 &= -2 \\x_4 &= 3\end{aligned}$$

Aplicando la sustitución hacia atrás, la solución es  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 3$ .

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, recuerde que es posible que el sistema no tenga solución. Si durante el proceso de eliminación obtiene un renglón con ceros excepto en el último elemento, es innecesario continuar con el proceso de eliminación. Así, usted puede concluir simplemente que el sistema es *inconsistente* y no tiene solución.

### Un sistema sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\x_1 + x_3 &= 6 \\2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1\end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

La matriz aumentada de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la eliminación gaussiana a la matriz aumentada tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 + (-1)R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix} \quad R_4 + (-3)R_1 \rightarrow R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

Observe que el tercer renglón de esta matriz consta de ceros, excepto el último elemento. Esto significa que el sistema de ecuaciones lineales original es inconsistente. Puede comprobarlo al regresar de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\x_2 - x_3 &= 2 \\0 &= -2 \\5x_2 - 7x_3 &= -11\end{aligned}$$

Debido a que la tercera ecuación es absurda, el sistema no tiene solución. ■

## ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Con la eliminación gaussiana, usted aplica operaciones elementales en los renglones de una matriz para obtener una forma escalonada por renglones (equivalente por renglones). Un segundo método de eliminación, denominado **eliminación de Gauss-Jordan** en honor de Carl Gauss y Wilhem Jordan (1842-1899), continúa el proceso de reducción hasta que se obtiene una forma escalonada *reducida* por renglones. Este procedimiento se demuestra en el siguiente ejemplo.

### Eliminación de Gauss-Jordan

Utilice la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema.

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17\end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

En el ejemplo 3 usted utilizó la eliminación gaussiana para obtener la siguiente forma escalonada por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora, aplique soluciones elementales en los renglones hasta obtener ceros arriba de cada uno de los 1 principales, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_1 + (2)R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2 + (-3)R_3 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_1 + (-9)R_3 \rightarrow R_1$$

La matriz está ahora en la forma escalonada reducida por renglones. Volviendo a un sistema de ecuaciones lineales tenemos

$$\begin{aligned}x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2.\end{aligned}$$

Los procedimientos de eliminación descritos en esta sección a veces resultan en coeficientes fraccionales. Por ejemplo, en el procedimiento de eliminación para el sistema

$$\begin{aligned}2x - 5y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \\ -3x + 3y &= -16\end{aligned}$$

puede que quiera multiplicar el primer renglón por 1/2 para generar un 1 principal, lo que habría introducido fracciones en éste. Para cálculos manuales, en ocasiones podemos evitar las fracciones eligiendo prudentemente el orden en el que se aplican las operaciones elementales en los renglones.

### COMENTARIO

No importa el orden que utilice, la forma escalonada por renglones reducida será la misma.



## DESCUBRIMIENTO

1. Sin realizar ninguna operación en los renglones, explique por qué este sistema de ecuaciones lineales es consistente.

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 6x_2 - 17x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

2. El siguiente sistema tiene más variables que ecuaciones. ¿Por qué esto hace que tenga un número infinito de soluciones?

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -5x_1 + 6x_2 - 17x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 13x_4 &= 0\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar la eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema que tiene un número infinito de soluciones.

### Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 1\end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales es

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Utilizando una aplicación gráfica, un programa de cómputo o la eliminación de Gauss-Jordan, usted puede comprobar que la forma escalonada por renglones reducida de la matriz es

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right].$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -1.\end{aligned}$$

Ahora, usando el parámetro  $t$  para representar  $x_3$ , tenemos

$$x_1 = 2 - 5t, \quad x_2 = -1 + 3t, \quad x_3 = t, \quad \text{donde } t \text{ es cualquier número real.}$$

Tome en cuenta que en el ejemplo se asignó un parámetro arbitrario a la variable no principal  $x_3$ . Después resolvemos para las variables principales  $x_1$  y  $x_2$  como funciones de  $t$ .

Ahora que ha considerado dos métodos de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, ¿cuál es mejor? En cierta medida, la respuesta depende de la preferencia personal. En las aplicaciones del álgebra lineal a la vida real, los sistemas de ecuaciones lineales frecuentemente se resuelven por computadora. Muchos programas de cómputo utilizan la eliminación gaussiana, enfatizando las maneras de reducir los errores por redondeo y minimizando el almacenamiento de datos. Ya que los ejemplos y los ejercicios en este libro generalmente son más simples y centrados en los conceptos básicos, usted necesita conocer los dos métodos de eliminación.

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS

Como último tema de esta sección, usted estudiará sistemas de ecuaciones lineales en los que todos los términos constantes son iguales a cero. A estos sistemas les denominamos **homogéneos**. Por ejemplo un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones en  $n$  variables tiene la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Es fácil observar que un sistema homogéneo debe tener por lo menos una solución. Específicamente, si todas las variables de un sistema homogéneo son iguales a cero, entonces deben satisfacerse cada una de las ecuaciones. Tal solución se denomina **trivial** (u **obvia**).

### Solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + (-2)R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{1}{3}\right)R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

El sistema de ecuaciones correspondientes a esta matriz es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando el parámetro  $t = x_3$ , el conjunto solución es  $x_1 = -2t$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = t$ ,  $t$  es cualquier número real.

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales es la solución trivial (dada por  $t = 0$ ).

Como ilustra el ejemplo 9, un sistema homogéneo con menos ecuaciones que variables tiene un número infinito de soluciones.

### TEOREMA 2.1 Número de soluciones de un sistema homogéneo

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente. Además, si el sistema tiene menos ecuaciones que variables, entonces debe tener un número infinito de soluciones.

Una demostración del teorema 2.1 puede efectuarse aplicando los mismos procedimientos que utilizó en el ejemplo 9, esta vez para una matriz general.

### COMENTARIO

Un sistema homogéneo de tres ecuaciones en tres variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  debe tener como solución trivial  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  y  $x_3 = 0$ .

## 2.2 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Matrix Size** En los ejercicios 1 a 6 determine el tamaño de la matriz.

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4. [-1]$$

$$5. \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad -10]$$

**Operaciones elementales por renglón** En los Ejercicios 7 a 10, identifique la o las operaciones elementales por renglón realizadas para obtener la nueva matriz equivalente por renglones.

$$7. \begin{array}{l} \text{Matriz original} \\ \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Nueva matriz equivalente por renglones} \\ \begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$8. \begin{array}{l} \text{Matriz original} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Nueva matriz equivalente por renglones} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$9. \begin{array}{l} \text{Matriz original} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Nueva matriz equivalente por renglones} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$10. \begin{array}{l} \text{Matriz original} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Nueva matriz equivalente por renglones} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

**Matriz aumentada** En los ejercicios 11 a 18, encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada.

$$11. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 12. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 14. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 16. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$17. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Forma escalonada por renglones** En los ejercicios 19 a 24, determine si la matriz está en la forma escalonada por renglones. Si es así, determine también si está en la forma escalonada reducida.

$$19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$20. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$21. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$22. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$23. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$24. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Sistema de ecuaciones lineales** En los ejercicios 25 a 38, resuelva el sistema ya sea utilizando eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o la eliminación de Gauss-Jordan.

$$25. \begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{array} \quad 26. \begin{array}{l} 2x + 6y = 16 \\ -2x - 6y = -16 \end{array}$$

$$27. \begin{array}{l} -x + 2y = 1.5 \\ 2x - 4y = 3 \end{array}$$

$$28. \begin{array}{l} 2x - y = -0.1 \\ 3x + 2y = 1.6 \end{array}$$

$$29. \begin{array}{l} -3x + 5y = -22 \\ 3x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 32 \end{array}$$

$$30. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{array}$$

31.  $x_1 - 3x_3 = -2$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

32.  $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 24$

$2x_2 - x_3 = 14$

$7x_1 - 5x_2 = 6$

33.  $2x_1 + 3x_3 = 3$

$4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5$

$8x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 10$

34.  $x_1 + x_2 - 5x_3 = 3$

$x_1 - 2x_3 = 1$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

35.  $4x + 12y - 7z - 20w = 22$

$3x + 9y - 5z - 28w = 30$

36.  $x + 2y + z = 8$

$-3x - 6y - 3z = -21$

37.  $3x + 3y + 12z = 6$

$x + y + 4z = 2$

$2x + 5y + 20z = 10$


$-x + 2y + 8z = 4$

38.  $2x + y - z + 2w = -6$

$3x + 4y + w = 1$

$x + 5y + 2z + 6w = -3$

$5x + 2y - z - w = 3$

 **Sistema de ecuaciones lineales** En los ejercicios 39 y 40, utilice un programa de cómputo o una aplicación gráfica para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

39.  $x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6$

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 14$

$x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = -3$

$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 15x_5 = 10$

$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 13x_5 = 13$

40.  $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 17$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 - 3x_6 = -5$

$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - 2x_6 = -1$

$-x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 10$

$x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 11$

**Sistema homogéneo** En los ejercicios 41 a 44, resuelva el sistema lineal homogéneo que corresponda a la matriz de coeficientes dada.

41. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

42. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

43. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

44. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

45. **Finanzas** Una pequeña corporación de software tomó un préstamo por \$500,000 para expandir su línea de software. Parte del préstamo fue a 9%, otra parte a 10%, y otra a 12% de interés. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto se tomó en préstamo a cada tasa si el interés anual fue de \$52,000 y la cantidad prestada a 10% fue  $2\frac{1}{2}$  veces la cantidad prestada a 9%. Resuelva el sistema usando matrices.

46. **Propinas** Un mesero examina la cantidad de dinero que ganó en propinas después de trabajar un turno de 8 horas. El mesero tiene un total de \$95 en billetes de \$1, \$5, \$10, y \$20. El número total de billetes es 26. El número de billetes de \$5 es 4 veces el número de billetes de \$10, y el número de billetes de \$1 es 1 menos que el doble del número de billetes de \$5. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para representar la situación. Después use matrices para encontrar el número de cada denominación.

**Representación de matrices** En los ejercicios 47 y 48, asuma que la matriz dada es una matriz *augmentada* de un sistema de ecuaciones lineales, y (a) determine el número de ecuaciones y el número de variables; (b) encuentre el valor o valores de  $k$  tal que el sistema sea consistente. Después asuma que la matriz es de *coeficientes* de un sistema de ecuaciones lineales *homogéneo*, y repita los incisos (a) y (b).

47.  $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

48.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & k \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

**Diseño de coeficientes** En los ejercicios 49 y 50, encuentre los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  (si es posible) tales que el sistema de ecuaciones lineales tenga (a) una única solución, (b) no tenga solución y (c) un número infinito de soluciones.

49.  $x + y = 2$

$y + z = 2$

$x + z = 2$

$ax + by + cz = 0$

50.  $x + y = 0$

$y + z = 0$

$x + z = 0$

$ax + by + cz = 0$

51. El siguiente sistema tiene una solución:  $x = 1, y = -1$  y  $z = 2$ .

$$4x - 2y + 5z = 16 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$x + y = 0 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$-x - 3y + 2z = 6 \quad \text{Ecuación 3}$$

Resuelva el sistema propuesto por las (a) Ecuaciones 1 y 2, (b) Ecuaciones 1 y 3, (c) Ecuaciones 2 y 3. (d) ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas?

52. Suponga que el siguiente sistema tiene una única solución.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad \text{Ecuación 3}$$

¿El sistema formado por las ecuaciones 1 y 2 tiene una única solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones?

**Equivalencia por renglones** En los ejercicios 53 y 54, encuentre la única matriz escalonada por renglones reducida que es equivalente por renglones a la matriz propuesta.

53.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$       54.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

55. **Escriba** Describa todas las posibles matrices escalonadas por renglones reducidas de  $2 \times 2$ . Respalde su respuesta con ejemplos.

56. **Escriba** Describa todas las posibles matrices escalonadas por renglones reducidas de  $3 \times 3$ . Respalde su respuesta con ejemplos.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 57 y 58, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión es falsa en todos los casos o cite una expresión adecuada a partir del texto.

57. (a) Una matriz de  $6 \times 3$  tiene seis renglones.  
 (b) Toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en la forma escalonada por renglones.  
 (c) Si la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales contiene el renglón  $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , entonces el sistema original es inconsistente.  
 (d) Un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneo en seis variables tiene un número infinito de soluciones.

58. (a) Una matriz de  $4 \times 7$  tiene cuatro columnas.  
 (b) Toda matriz tiene una forma escalonada por renglones reducida única.  
 (c) Un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneo en cuatro variables siempre es consistente.  
 (d) Multiplicar un renglón de una matriz por una constante es una de las operaciones elementales con renglones.

59. **Escriba** ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que variables no tenga solución? Si es así, proporcione un ejemplo.

60. **Escriba** ¿Puede tener una matriz una forma escalonada por renglones única? Ilustre su respuesta con ejemplos. ¿Es única la forma escalonada reducida por renglones?

**Equivalencia por renglones** En los ejercicios 61 y 62, determine las condiciones  $a, b, c$  y  $d$  tales que la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sea equivalente por renglones a la matriz dada.

61.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$       62.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Sistema homogéneo** En los ejercicios 63 y 64, encuentre todos los valores de  $\lambda$  (la letra griega lambda) tales que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga soluciones no triviales.

63.  $(\lambda - 2)x + y = 0$   
 $x + (\lambda - 2)y = 0$

64.  $(\lambda - 1)x + 2y = 0$   
 $x + \lambda y = 0$

65. **Escriba** Considere la matriz de  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Realice la sucesión de operaciones con renglones.

- (a) Sume  $(-1)$  veces el segundo renglón al primero.  
 (b) Sume 1 veces el primer renglón al segundo.  
 (c) Sume  $(-1)$  veces el segundo renglón al primero.  
 (d) Multiplique el primer renglón por  $(-1)$ .

¿Qué pasa con la matriz original? Describa, en general, cómo intercambiar dos renglones de una matriz utilizando solamente la segunda y la tercera operaciones elementales con renglones.

66. La matriz aumentada representa un sistema de ecuaciones lineales que ha sido reducida aplicando la eliminación de Gauss-Jordan. Escriba un sistema de ecuaciones con coeficientes distintos a cero que sea representado por la matriz reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hay muchas respuestas correctas.

67. **Escriba** Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales que (a) es consistente y (b) tiene un número infinito de soluciones.

68. **REMATE** En sus propias palabras, describa la diferencia entre una matriz en la forma escalonada por renglones y una matriz en la forma escalonada por renglones reducida. Incluya un ejemplo de cada uno para respaldar su explicación.

# 3 Matrices y determinantes

- 3.1 Operaciones con matrices
- 3.2 Propiedades de las operaciones con matrices
- 3.3 Inversa de una matriz
- 3.4 Matrices elementales



Encriptación de datos



Dinámica de fluidos computacional



Deflexión de vigas



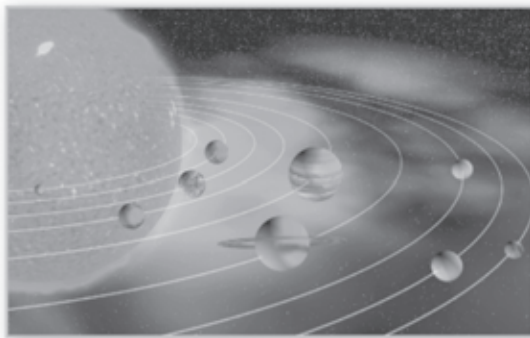
Recuperación de información



Calendarios de la tripulación de vuelo



- 3.5 Determinante de una matriz
- 3.6 Determinantes y operaciones elementales
- 3.7 Propiedades de los determinantes
- 3.8 Adjunta de una matriz y regla de Cramer



Órbitas planetarias



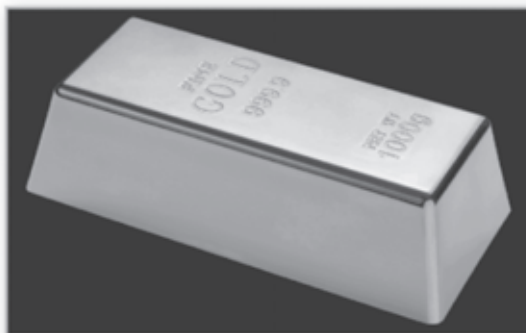
Publicación de libros de texto



Ingeniería y control



Sudoku



Volumen de un sólido

## 3.1 Operaciones con matrices

- Determine si dos matrices son iguales.
- Sume y reste matrices y multiplique una matriz por una escalar.
- Multiplique dos matrices.
- Use matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Particione una matriz y escriba una combinación lineal de vectores columna.

### OPERACIONES CON MATRICES

En la Sección 2.2 usted utilizó matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este capítulo introduce algunos fundamentos de teoría de matrices y aplicaciones adicionales de matrices.

Por un acuerdo matemático común, las matrices se pueden representar en alguna de las siguientes tres formas:

1. Una matriz puede denotarse por una letra mayúscula como  $A$ ,  $B$  o  $C$
2. Una matriz puede denotarse por un elemento representativo escrito entre corchetes  $[a_{ij}]$ ,  $[b_{ij}]$  o  $[c_{ij}]$ .
3. Una matriz puede denotarse como por un arreglo rectangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como se mencionó en la unidad 2, las matrices en este texto son fundamentalmente *matrices reales*. Es decir, sus elementos son números reales.

Decimos que dos matrices son *iguales* si sus elementos correspondientes son iguales.

#### Definición de la igualdad de matrices

Dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son iguales si tienen el mismo tamaño ( $m \times n$ ) y  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ .

#### COMENTARIO

La frase “si y sólo si” significa que la expresión es válida en ambas direcciones. Por ejemplo, “ $p$  si y sólo si  $q$ ” quiere decir que  $p$  implica a  $q$  y  $q$  implica a  $p$ .

#### Igualdad de matrices

Considere las cuatro matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3], \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}.$$

Las matrices  $A$  y  $B$  **no** son iguales, ya que tienen diferente tamaño. De manera similar,  $B$  y  $C$  tampoco lo son. Las matrices  $A$  y  $D$  son iguales si y sólo si  $x = 3$ .

Una matriz que sólo tiene una columna, como la matriz  $B$  del Ejemplo 1, se denomina **matriz columna** o **vector columna**. De manera similar, una matriz que sólo tiene un renglón, como la matriz  $C$  del ejemplo 1, se denomina **matriz renglón** o **vector renglón**. A menudo se utilizan letras negritas minúsculas para designar matrices columna o renglón. En este caso,

la matriz  $A$  del ejemplo 1 puede dividirse en dos matrices columna  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  de la siguiente manera.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & | & 2 \\ 3 & | & 4 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad | \quad \mathbf{a}_2]$$

## SUMA Y RESTA DE MATRICES Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Usted puede **sumar** dos matrices (del mismo tamaño) sumando sus elementos correspondientes.

### Definición de suma de matrices

Si  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son matrices de tamaño  $m \times n$ , entonces su **suma** es la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ . Para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ .

La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

### Suma de matrices

$$\text{a. } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ no está definida.}$$

### COMENTARIO

A menudo es conveniente reescribir una matriz  $B$  como  $cA$ , factorizando  $c$  de cada uno de los elementos de la matriz  $B$ . Por ejemplo, el escalar  $\frac{1}{2}$  se ha factorizado de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando trabajamos con matrices nos referimos a los números reales como **escalares**. Usted puede multiplicar una matriz  $A$  por un escalar  $c$ , multiplicando cada elemento de la matriz  $A$  por el escalar  $c$ .

### Definición de la multiplicación por un escalar

Si  $A = [a_{ij}]$  es una matriz de tamaño  $m \times n$  y  $c$  es un escalar, entonces el **múltiplo escalar** de  $A$  por  $c$  es la matriz de tamaño  $m \times n$  dada por

$$cA = [ca_{ij}]. \text{ Para } 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq j \leq n.$$

Podemos utilizar  $-A$  para representar el producto escalar  $(-1)A$ . Si  $A$  y  $B$  son del mismo tamaño, entonces  $A - B$  representa la suma de  $A$  y  $(-1)B$ . Es decir  $A - B = A + (-1)B$ .

### Multipliación por un escalar y resta de matrices

Para las matrices  $A$  y  $B$ , determine (a)  $3A$ , (b)  $-B$  y (c)  $3A - B$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

$$\text{a. } 3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } -B = (-1) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } 3A - B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

## MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La tercera operación básica es la **multiplicación de matrices**. Para ver la utilidad de esta operación, considere la siguiente aplicación, en la cual las matrices son de mucha ayuda para organizar información.

Un estadio de fútbol tiene tres áreas concesionadas para locales comerciales, ubicadas en el sur, norte y oeste del mismo. Los artículos más vendidos son los cacahuates, los hot dogs y los refrescos. Las ventas para cierto día son registradas en la primera matriz abajo y los precios (en dólares) de los tres artículos aparecen en la segunda.

	<b>Número de artículos vendidos</b>				
	Cacahuates	Hot dogs	Refrescos	Precio de venta	
Local sur	120	250	305	2.00	Cacahuates
Local norte	207	140	419	3.00	Hot Dogs
Local oeste	29	120	190	2.75	Sodas

Para calcular el total de ventas de los tres productos más vendidos en el local sur, multiplique cada elemento en el primer renglón de la matriz de la izquierda por el precio correspondiente en la matriz columna de la derecha y sume los resultados. Las ventas del local sur son

$$(120)(2.00) + (250)(3.00) + (305)(2.75) = \$1828.75 \quad \text{Ventas local sur}$$

De manera similar, calculamos las ventas de los otros dos locales de la siguiente forma.

$$(207)(2.00) + (140)(3.00) + (419)(2.75) = \$1986.25 \quad \text{Ventas local norte}$$

$$(29)(2.00) + (120)(3.00) + (190)(2.75) = \$940.50 \quad \text{Ventas local oeste}$$

Los cálculos anteriores son ejemplos de la multiplicación de matrices. Usted puede escribir el producto de la matriz de  $3 \times 3$  indicando el número de artículos vendidos y la matriz de  $3 \times 1$  indicando los precios de venta, de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 120 & 250 & 305 \\ 207 & 140 & 419 \\ 29 & 120 & 190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ 2.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1828.75 \\ 1986.25 \\ 940.50 \end{bmatrix}$$

El producto de estas matrices es la matriz de  $3 \times 1$ , que nos da el total de las ventas por cada uno de los tres locales.

La definición general del producto de dos matrices mostrada abajo, se basa en las ideas recién desarrolladas. A primera vista esta definición puede parecer inusual, no obstante, usted verá más adelante que tiene muchas aplicaciones prácticas.

### Definición de la multiplicación de matrices

Si  $A = [a_{ij}]$  es una matriz de tamaño  $m \times n$  y si  $B = [b_{ij}]$  es una matriz de tamaño  $n \times p$ , entonces el **producto**  $AB$  es una matriz de tamaño  $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq p$ .

Esta definición significa que el elemento en el  $i$ -ésimo renglón y en la  $j$ -ésima columna del producto  $AB$  se obtiene al multiplicar los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $A$  por los elementos correspondientes de la  $j$ -ésima columna de  $B$  y luego sumar los resultados. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

**Determinación del producto de dos matrices**

Encuentre el producto  $AB$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**SOLUCIÓN**

Primero, observe que el producto  $AB$  está definido porque el tamaño de  $A$  es  $3 \times 2$  y el de  $B$  es  $2 \times 2$ . Además, el producto  $AB$  es de tamaño  $3 \times 2$  y tiene la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Para determinar  $c_{11}$  (el elemento en el primer renglón y en la primera columna del producto), multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de  $A$  y la primera columna de  $B$ . Es decir

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

$c_{11} = (-1)(-3) + (3)(-4) = -9$

Similarmente, para determinar  $c_{12}$  multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de  $A$  y la segunda columna de  $B$  para obtener

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

$c_{12} = (-1)(2) + (3)(1) = 1$

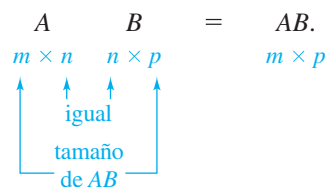
Siguiendo este patrón obtenemos los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} c_{21} &= (4)(-3) + (-2)(-4) = -4 \\ c_{22} &= (4)(2) + (-2)(1) = 6 \\ c_{31} &= (5)(-3) + (0)(-4) = -15 \\ c_{32} &= (5)(2) + (0)(1) = 10 \end{aligned}$$

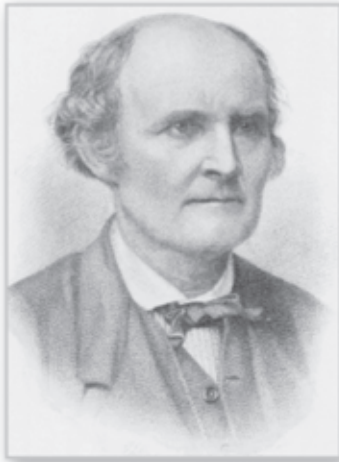
El producto es

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}.$$

Asegúrese de entender que el producto de dos matrices está definido cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz; es decir,



Así, el producto  $BA$  de las matrices del ejemplo 4 no está definido.



**Arthur Cayley**  
(1821-1895)

El matemático inglés Arthur Cayley es reconocido por proporcionar una definición abstracta de una matriz. Cayley era egresado de la Universidad de Cambridge y era abogado de profesión. Comenzó su revolucionario trabajo en matrices mientras estudiaba la teoría de transformaciones. Cayley también fue fundamental para el desarrollo de los determinantes (mismos que se discuten en el Capítulo 3). Se reconoce a Cayley y dos matemáticos estadounidenses, Benjamin Peirce (1809-1880) y su hijo, Charles S. Peirce (1839-1914), por el desarrollo del "álgebra matricial."

El patrón general de la multiplicación de matrices es el siguiente. Para obtener el elemento del  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna del producto  $AB$ , use el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  y la  $j$ -ésima columna de  $B$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

## DESCUBRIMIENTO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule  $A + B$  y  $B + A$ . ¿La suma de una matriz es conmutativa?
2. Calcule  $AB$  y  $BA$ . ¿La multiplicación de matrices es conmutativa?

### Multiplicación de matrices

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 3 \qquad 2 \times 3$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\text{d. } [1 \quad -2 \quad -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$$

$1 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 1 \times 1$

$$\text{e. } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -2 \quad -3] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \qquad 1 \times 3 \qquad 3 \times 3$

Note la diferencia entre los dos productos en los incisos (d) y (e) del ejemplo 5. En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Es decir, casi nunca se cumple que el producto  $AB$  sea igual al producto  $BA$ . (Véase la sección 2.2 para un análisis más profundo de la no conmutatividad de la multiplicación de matrices.)

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una aplicación práctica de la multiplicación de matrices es la representación de un sistema de ecuaciones lineales. Observe cómo el sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

puede escribirse como la ecuación matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $A$  es la matriz de coeficientes del sistema y  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{b}$  son matrices columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$A \quad \mathbf{x} = \mathbf{b}$

### Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Resuelva la ecuación matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### SOLUCIÓN

Como un sistema de ecuaciones lineales,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  lo representamos como

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada de este sistema, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema tiene un número infinito de soluciones. En este caso, una elección conveniente de parámetro es  $x_3 = 7t$ , y puede escribir el conjunto solución como

$$x_1 = t, \quad x_2 = 4t, \quad x_3 = 7t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

En términos de matrices, encontramos que la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene un número infinito de soluciones, representado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ 7t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad t \text{ es cualquier escalar.}$$

Esto es, cualquier múltiplo escalar de la matriz columna de la derecha es una solución. A continuación se muestran algunas soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

### NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden ejecutar la suma de matrices, multiplicación escalar y la multiplicación de matrices. Si usted utiliza una aplicación gráfica, sus pantallas para el Ejemplo 6 se verán como:

[A]	
[B]	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$
[A]*[B]	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas del Ejemplo 6 están disponibles en **Online Technology Guide**, [college.cengage.com/pic/larsonEL6e](http://college.cengage.com/pic/larsonEL6e).



## PARTICIÓN DE MATRICES

El sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  puede representarse de una forma más conveniente, dividiendo las matrices  $A$  y  $\mathbf{x}$  de la siguiente manera. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

son las matrices de coeficientes, la matriz columna de incógnitas y la matriz del lado derecho, respectivamente, del sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  de tamaño  $m \times n$ , entonces podemos escribir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

En otras palabras

$$\mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

donde  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  son las columnas de la matriz  $A$ . La expresión

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se llama **combinación lineal** de las matrices columna  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  con **coeficientes**  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### Combinaciones lineales de vectores columna

La matriz producto  $\mathbf{Ax}$  es una combinación lineal de los vectores columna  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  que forman la matriz de coeficientes  $A$ .

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  es consistente si y sólo si  $\mathbf{b}$  se puede expresar como una combinación lineal tal, en la que los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.

## Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema lineal

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \\7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 6\end{aligned}$$

puede reescribirse como una ecuación matricial  $Ax = \mathbf{b}$  de la siguiente forma

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando la eliminación gaussiana podemos demostrar que este sistema tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales es  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  y  $x_3 = -1$ .

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Es decir,  $\mathbf{b}$  puede expresarse como una combinación lineal de las columnas de  $A$ . Esta representación de un vector columna en función de otros es un tema fundamental del álgebra lineal. ■

El dividir  $A$  en columnas y  $x$  en renglones, se emplea a menudo para reducir una matriz de tamaño  $m \times n$  a matrices más pequeñas. Por ejemplo, la matriz abajo a la izquierda puede dividirse como se muestra en la matriz a la derecha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 0 \\ -1 & -2 & | & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz también puede dividirse en matrices columna

$$\begin{bmatrix} 1 & | & 2 & | & 0 & | & 0 \\ 3 & | & 4 & | & 0 & | & 0 \\ -1 & | & -2 & | & 2 & | & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

o matrices renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Muchas aplicaciones en la vida real de los sistemas lineales involucran enormes cantidades de ecuaciones y variables. Por ejemplo, un problema con los calendarios de la tripulación de vuelo de American Airlines requirió la manipulación de matrices con 837 renglones y más de 12,750,000 columnas. Esta aplicación de *programación lineal* exigía que el problema se dividiera en piezas más pequeñas y después se resolviera en una supercomputadora Cray. (Fuente: *Very Large-Scale Linear Programming. A Case Study in Combining Interior Point y Simplex Methods*, Bixby, Robert E., et al., *Operations Research*, 40, no. 5)

## 3.1 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Igualdad de matrices** En los ejercicios 1 a 4, encuentre  $x$  e  $y$

$$1. \begin{bmatrix} x & -2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -5 & x \\ y & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

**Operaciones con matrices** En los ejercicios 5 a 12, determine (a)  $A + B$ , (b)  $A - B$ , (c)  $2A$ , (d)  $2A - B$  y (e)  $B + \frac{1}{2}A$ .

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, B = [-4 \ 6 \ 2]$$

13. Encuentre (a)  $c_{21}$  y (b)  $c_{13}$ , donde  $C = 2A - 3B$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, y B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Encuentre (a)  $c_{23}$  y (b)  $c_{32}$ , donde  $C = 5A + 2B$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, y B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 11 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

15. Resuelva la ecuación matricial para  $x, y, z$ .

$$4 \begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}.$$

16. Resuelva la ecuación matricial para  $x, y, z, w$ .

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}.$$

**Determinación de los productos de dos matrices** En los ejercicios 17 a 30, halle (a)  $AB$  y (b)  $BA$  (si están definidas).

$$17. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$18. A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$19. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$21. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$22. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$23. A = [3 \ 2 \ 1], B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$24. A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, B = [2 \ 1 \ 3 \ 2]$$

$$25. A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$26. A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$27. A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$28. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$



**61. Demostración guiada.** Pruebe que si  $A$  y  $B$  son matrices diagonales (del mismo tamaño), entonces  $AB = BA$ .

Inicio: Para demostrar que las matrices  $AB$  y  $BA$  son iguales, primero necesita demostrar que sus elementos correspondientes son iguales.

(i) Empiece su demostración haciendo que  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  sean dos matrices diagonales  $n \times n$ .

(ii) El  $ij$ -ésimo elemento del producto  $AB$  es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

(iii) Evalúe el elemento  $c_{ij}$  para los casos en los que  $i \neq j$  e  $i = j$ .

(iv) Repita este análisis para el producto  $BA$ .

**62. Escriba** Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $3 \times 3$ , donde  $A$  es diagonal.

(a) Describa el producto  $AB$ . Ilustre su respuesta con ejemplos.

(b) Describa el producto  $BA$ . Ilustre su respuesta con ejemplos.

(c) ¿Cómo cambian los resultados de los incisos (a) y (b) si los elementos de la diagonal de  $A$  son iguales?

**Traza de una matriz** En los ejercicios 63 a 66, determine la traza de la matriz. La traza de una matriz  $A$  de  $n \times n$  es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir  $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .

**63.**  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**64.**  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**65.**  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

**66.**  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

**67. Prueba** Demuestre que cada una de las expresiones es verdadera si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de tamaño  $n$  y  $c$  es un escalar.

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

$$\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}(A)$$

**68. Prueba** Demuestre que si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de tamaño  $n$ , entonces  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

**69.** Determine las condiciones en  $w$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$  tales que  $AB = BA$  en las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**70.** Verifique  $AB = BA$  para las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

**71.** Demuestre que la ecuación matricial no tiene solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**72.** Demuestre que no existen matrices de  $2 \times 2$  que satisfagan la ecuación matricial

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**73. Exploración** Sea  $i = \sqrt{-1}$  y sea

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine  $A^2$ ,  $A^3$  y  $A^4$ . (Nota:  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA = A^2A$ , etc.) Identifique cualquier similitud entre  $i^2$ ,  $i^3$  e  $i^4$ .

(b) Determine e identifique  $B^2$ .

**74. Demostración guiada.** Pruebe que si el producto  $AB$  es una matriz cuadrada, entonces el producto  $BA$  está definido.

Inicio: Para probar que el producto  $BA$  está definido, necesita demostrar que el número de columnas de  $B$  es igual al número de renglones de  $A$ .

(i) Comience su demostración haciendo notar que el número de columnas de  $A$  es igual al número de renglones de  $B$ .

(ii) Después usted puede suponer que  $A$  es de tamaño  $m \times n$  y  $B$  es de tamaño  $n \times p$ .

(iii) Utilice la hipótesis de que el producto  $AB$  es una matriz cuadrada.

**75. Prueba** Demuestre que si ambos productos:  $AB$  y  $BA$  están definidos, entonces  $AB$  y  $BA$  son matrices cuadradas.

**76.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices tales que el producto  $AB$  está definido. Demuestre que si  $A$  tiene dos renglones idénticos, entonces los dos renglones correspondientes  $AB$  también son idénticos.

**77.** Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $n \times n$ . Demuestre que si el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  tiene todos sus elementos iguales a cero, entonces el  $i$ -ésimo renglón de  $AB$  tiene todos sus elementos iguales a cero. Proporcione un ejemplo utilizando matrices de  $2 \times 2$  para demostrar que la conversión es falsa.

**78. REMATE** Sean  $A$  y  $B$  matrices de tamaño  $3 \times 2$  y  $2 \times 2$ , respectivamente. Responda las siguientes preguntas y explique su razonamiento.

(a) ¿Es posible que  $A = B$ ?

(b) ¿ $A + B$  está definido?

(c) ¿ $AB$  está definido? Si es así, ¿es posible que  $AB = BA$ ?

**79. Agricultura** Un agricultor tiene dos cosechas de fruta, manzanas y peras. Cada una de estas cosechas es enviada a tres diferentes mercados. El número de unidades de la cosecha  $i$  que es enviada al mercado  $j$  se representa por  $a_{ij}$  en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{bmatrix}$$

La ganancia por unidad es representada por la matriz

$$B = [\$3.50 \quad \$6.00]$$

Determine el producto  $BA$  y explique qué representa cada elemento de este producto.

**80. Manufactura** Una corporación tiene tres fábricas, cada una de las cuales produce guitarras acústicas y guitarras eléctricas. El número de guitarras del tipo  $i$  producidas en la fábrica  $j$  en un día se representa por  $a_{ij}$  en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}$$

Determine los niveles de producción de cada fábrica, si la producción se incrementa 20%.

**81. Política** La matriz

$$P = \begin{matrix} & \underbrace{\text{De}} \\ & \begin{matrix} R & D & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ D \\ I \end{matrix} & \left. \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \right\} A \end{matrix}$$

representa la proporción de votantes que cambió del partido  $i$  al partido  $j$  en una elección dada. Es decir,  $p_{ij}$  ( $i \neq j$ ) representa la proporción de votantes que cambiaron del partido  $i$  al partido  $j$  y  $p_{ii}$  representa la proporción que permanece leal al partido  $i$  de una elección a la siguiente. Determine el producto de  $P$  consigo mismo. ¿Qué representa este producto?

**82. Población** Las matrices muestran la población (en miles de personas) que vivía en diferentes regiones de Estados Unidos en 2009 y la población (en miles de personas) estimada que vivirá en estas regiones en 2015. Las poblaciones regionales se separaron en tres categorías de edad. (Fuente: U.S. Census Bureau)

	2009		
	0-17	18-64	65+
Noreste	12,399	35,137	7747
Medio oeste	16,047	41,902	8888
Sur	27,959	70,571	14,608
Montaña	5791	13,716	2616
Pacífico	12,352	31,381	5712

	2015		
	0-17	18-64	65+
Noreste	12,441	35,289	8835
Medio oeste	16,363	42,250	9955
Sur	29,373	73,496	17,572
Montaña	6015	14,231	3337
Pacífico	12,826	33,292	7086

- La población total en 2009 fue 307 000 000 y la población total estimada para 2015 fue 322 000 000. Reescriba las matrices para obtener la información como porcentajes de la población total.
- Escriba una matriz que proporcione los porcentajes en cambios estimados de población por regiones y por grupos de edad de 2009 a 2015.
- Basado en el resultado del inciso (b), ¿qué grupo(s) de edad se estima mostrará(n) un crecimiento relativo de 2009 a 2015?

**Multiplicación por bloques** En los ejercicios 83 y 84, ejecute la multiplicación por bloques indicada de las matrices  $A$  y  $B$ . Si las matrices  $A$  y  $B$  se dividen en cuatro submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

entonces puede multiplicar por bloques  $A$  y  $B$ , asignando el tamaño de las submatrices para las cuales la suma y la multiplicación están definidas.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$83. A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$84. A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right]$$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 85 y 86 determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, dé una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que demuestre que la expresión no es válida para todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

- (a) Para que el producto de dos matrices esté definido, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda matriz.  
(b) El sistema  $Ax = b$  es consistente si y sólo si  $b$  puede ser expresada como una combinación lineal, donde los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.
- (a) Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $B$  es una matriz de  $n \times r$ , entonces el producto  $AB$  es una matriz de  $m \times r$ .  
(b) La ecuación matricial  $Ax = b$ , donde  $A$  es la matriz de coeficientes y  $x$  y  $b$  son las matrices columna, puede utilizarse para representar un sistema de ecuaciones lineales.
- Las columnas de la matriz  $T$  muestran las coordenadas de los vértices de un triángulo. La matriz  $A$  es una matriz de transformación.  
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
  
(a) Encuentre  $AT$  y  $AAT$ . Después dibuje el triángulo original y los dos triángulos transformados. ¿Qué transformación representa  $A$ ?  
(b) Un triángulo está determinado por  $AAT$ . Describa el proceso de transformación que produce el triángulo determinado por  $AT$  y luego el triángulo determinado por  $T$ .

## 3.2 Propiedades de las operaciones con matrices

- Use las propiedades de la suma de matrices, multiplicación escalar y matrices cero.
- Use las propiedades de multiplicación de matrices y matriz identidad.
- Encuentre la transpuesta de una matriz.

### ÁLGEBRA DE MATRICES

En la sección 3.1 su atención se centró en la mecánica de las tres operaciones básicas con matrices: suma de matrices, multiplicación escalar y multiplicación de matrices. Esta sección comienza con el desarrollo del **álgebra de matrices**. Observará que esta álgebra comparte muchas (pero no todas) de las propiedades del álgebra de los números reales. Enseguida aparece una lista de algunas propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar.

#### TEOREMA 3.1 Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación por un escalar

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de  $m \times n$ ;  $c$ ,  $d$ ,  $1$ , escalares, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| 1. $A + B = B + A$             | Propiedad conmutativa de la suma                       |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ | Propiedad asociativa de la suma                        |
| 3. $(cd)A = c(dA)$             | Propiedad asociativa de la multiplicación de escalares |
| 4. $1A = A$                    | Identidad multiplicativa                               |
| 5. $c(A + B) = cA + cB$        | Propiedad distributiva izquierda                       |
| 6. $(c + d)A = cA + dA$        | Propiedad distributiva derecha                         |

#### DEMOSTRACIÓN

La demostración de estas seis propiedades se concluyen directamente a partir de las definiciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, así como de las propiedades correspondientes a los números reales. Por ejemplo, para demostrar la propiedad conmutativa de la *suma de matrices*, sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ . Entonces, aplicando la propiedad conmutativa de la *suma de números reales*, escribimos

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A.$$

De igual forma, para demostrar la propiedad 5, aplicamos la propiedad distributiva (de los números reales) de la multiplicación sobre la suma, para escribir

$$c(A + B) = [c(a_{ij} + b_{ij})] = [ca_{ij} + cb_{ij}] = cA + cB.$$

Las demostraciones de las cuatro propiedades restantes se dejan como ejercicios (véase los ejercicios 57 a 60).

En la sección anterior, la suma de matrices se definió como la suma de *dos* matrices, haciéndola así una operación binaria. La propiedad asociativa de la suma de matrices ahora permite escribir expresiones como  $A + B + C$  como  $(A + B) + C$  o como  $A + (B + C)$ . Este mismo razonamiento se aplica a la suma de cuatro o más matrices.

#### Suma de más de dos matrices

Sumando los elementos correspondientes, podemos obtener la siguiente suma de cuatro matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de la suma de números reales es que el número 0 sirve como la identidad aditiva. Esto es,  $c + 0 = c$  para cualquier número real  $c$ . Para las matrices se cumple una propiedad semejante. Específicamente, si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $0_{mn}$  es la matriz de  $m \times n$  consistente únicamente de ceros, entonces  $A + 0_{mn} = A$ . La matriz  $0_{mn}$  se denomina **matriz cero** y sirve como la **identidad aditiva** para el conjunto de todas las matrices de  $m \times n$ . Por ejemplo, la siguiente matriz funciona como la identidad aditiva para el conjunto de todas las matrices de  $2 \times 3$ .

$$0_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando se sobreentiende el tamaño de la matriz, las matrices cero pueden denotarse simplemente por **0**.

Las siguientes propiedades de las matrices cero son fáciles de probar, por lo que sus demostraciones se dejan como ejercicio. (Véase Ejercicio 61.)

### COMENTARIO

La propiedad 2 puede describirse diciendo que la matriz  $-A$  es el **inverso aditivo** de  $A$ .



### TEOREMA 3.2 Propiedades de las matrices cero

Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $c$  es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1.  $A + 0_{mn} = A$
2.  $A + (-A) = 0_{mn}$
3. Si  $cA = 0_{mn}$ , entonces  $c = 0$  o  $A = 0_{mn}$

El álgebra de los números reales y el álgebra de matrices tienen numerosas similitudes. Por ejemplo, compare las siguientes soluciones.

Números reales  
(resolver para  $x$ )

$$\begin{aligned} + &= \\ x + a + (-a) &= b + (-a) \\ x + 0 &= b - a \\ x &= b - a \end{aligned}$$

Matrices de  $m \times n$   
(resolver para  $X$ )

$$\begin{aligned} X + A &= B \\ X + A + (-A) &= B + (-A) \\ X + 0 &= B - A \\ X &= B - A \end{aligned}$$

El proceso de resolución de una ecuación matricial se muestra en el ejemplo 2.

### Resolución de una ecuación matricial

Resuelva para  $X$  en la ecuación  $3X + A = B$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

### SOLUCIÓN

Empecemos por resolver la ecuación para  $X$ , para obtener

$$\begin{aligned} 3X &= B - A \\ X &= \frac{1}{3}(B - A). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando las matrices dadas tiene

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



## COMENTARIO

Observe que la propiedad conmutativa para la multiplicación de matrices no está en la lista que aparece en el teorema 3.3. Aunque el producto  $AB$  está definido, podemos ver fácilmente que  $A$  y  $B$  no tienen el tamaño adecuado que defina el producto  $BA$ . Por ejemplo, si  $A$  es de tamaño  $2 \times 3$  y  $B$  es de  $3 \times 3$ , entonces el producto  $AB$  está definido, no así el producto  $BA$ . El siguiente ejemplo muestra que incluso si los productos  $AB$  y  $BA$  están definidos, éstos pueden no ser iguales.



## PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En el siguiente teorema, el álgebra de matrices se extiende para incluir algunas propiedades más utilizadas de la multiplicación de matrices. La demostración de la propiedad 2 se presenta abajo. Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicio. (Véase el Ejercicio 62.)

**TEOREMA 3.3 Propiedades de la multiplicación de matrices**

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices (con tamaños tales que los productos matriciales dados están definidos) y  $c$  es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1.  $A(BC) = (AB)C$  Propiedad asociativa de la multiplicación
2.  $A(B + C) = AB + AC$  Propiedad distributiva izquierda
3.  $(A + B)C = AC + BC$  Propiedad distributiva derecha
4.  $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

**DEMOSTRACIÓN**

Para demostrar la propiedad 2, muestre que las matrices  $A(B + C)$  y  $AB + AC$  son iguales si sus elementos correspondientes son iguales. Suponga que  $A$  es de tamaño  $m \times n$ ,  $B$  es de tamaño  $n \times p$  y  $C$  es de tamaño  $n \times p$ . Aplicando la definición de la multiplicación de matrices, el elemento en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de

$$A(B + C) \text{ es } a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \dots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}).$$

Además, el elemento en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $AB + AC$  es

$$(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}c_{nj}).$$

Distribuyendo y reagrupando, puede ver que estos dos  $ij$ -ésimos elementos son iguales. Así

$$A(B + C) = AB + AC. \quad \blacksquare$$

La propiedad asociativa de la multiplicación de matrices le permite escribir estos productos matriciales como  $ABC$  sin ambigüedad, como se muestra en el ejemplo 3.

**La multiplicación de matrices es asociativa**

Determine el producto matricial  $ABC$  agrupando primero los factores como  $(AB)C$  y luego como  $A(BC)$ . Demuestre que se obtiene el mismo resultado con ambos procesos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN**

Agrupando los factores como  $(AB)C$ , obtiene

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left( \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agrupando los factores como  $A(BC)$ , obtiene el mismo resultado

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra que aun cuando los productos de  $AB$  y  $BA$  estén definidos, podrían no ser iguales.

### La multiplicación de matrices no es conmutativa

Demuestre que  $AB$  y  $BA$  no son iguales para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$  ■

A partir del ejemplo 4 no podemos concluir que los productos matriciales  $AB$  y  $BA$  *nunca* son iguales. Algunas veces sí lo son. Por ejemplo, intente multiplicar las siguientes matrices, primero en el orden  $AB$  y después del modo  $BA$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Usted puede ver que los dos productos son iguales. El punto es este: aunque  $AB$  y  $BA$  son en ocasiones iguales, a menudo no lo son.

Otra cualidad importante del álgebra matricial es que no existe la propiedad de cancelación para la multiplicación de matrices. Es decir, si  $AC = BC$ , no es necesariamente cierto que  $A = B$ . Esto se demuestra en el ejemplo 5. (En la siguiente sección verá que, para algunos tipos especiales de matrices, la cancelación es válida.)

### Ejemplo en el cual la cancelación no es válida

Demuestre que  $AC = BC$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$AC = BC$ , aun cuando  $A \neq B$ . ■

Ahora verá un tipo especial de matriz cuadrada que tiene números 1 en la diagonal principal y números 0 en otro lugar.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$

Por ejemplo, si  $n = 1, 2$  ó  $3$ , tenemos

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando se sobreentienda que el orden de la matriz es  $n$ , puede denotar  $I_n$  simplemente como  $I$ .

Como se establece en el teorema 3.4, en la siguiente página, la matriz  $I_n$  sirve como identidad para la multiplicación de matrices; recibe el nombre de **matriz identidad de orden  $n$** . La demostración de este teorema se deja como ejercicio. (Véase el Ejercicio 63.)

## COMENTARIO

Observe que si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , entonces  $AI_n = I_nA = A$ .

**TEOREMA 3.4 Propiedades de la matriz identidad**

Si  $A$  es una matriz de tamaño  $m \times n$ , entonces estas propiedades son verdaderas.

1.  $AI_n = A$
2.  $I_mA = A$

**Multiplicación por una matriz identidad**

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para la multiplicación repetida de matrices cuadradas, puede utilizar la misma notación exponencial usada con los números reales. Es decir,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = AA$ , y para un entero positivo  $k$ ,  $A^k$  es

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ factores}}$$

También esto es conveniente para definir  $A^0 = I_n$  (donde  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ ). Estas definiciones nos permiten establecer las propiedades (1)  $A^jA^k = A^{j+k}$  y (2)  $(A^j)^k = A^{jk}$  donde  $j$  y  $k$  son enteros no negativos.

**Multiplicación repetida de una matriz cuadrada**

Para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$A^3 = \left( \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

En la sección 2.1 usted vio que un sistema de ecuaciones lineales debe tener exactamente una solución, un número infinito de soluciones o bien, no tiene solución. Aplicando el álgebra matricial desarrollada antes, ahora puede demostrar que esto es cierto.

**TEOREMA 3.5 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales**

Para un sistema de ecuaciones lineales en  $n$  variables, precisamente una de las siguientes declaraciones es verdadera.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema tiene un número infinito de soluciones.
3. El sistema no tiene solución.

**DEMOSTRACIÓN**

Represente el sistema por la matriz  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Si el sistema tiene exactamente una solución o no tiene solución, entonces no hay nada que demostrar. Así, puede suponer que el sistema tiene al menos dos soluciones diferentes  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . La demostración puede completarse si usted demuestra que esta suposición implica que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Como  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son soluciones, tiene que  $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$  y  $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ . Esto implica que la columna de la matriz distinta de cero  $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  es una solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Con esto podemos decir que para cualquier escalar  $c$ ,

$$A(\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_1 + A(c\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + c(A\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + c\mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Así que  $\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h$  es una solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  para cualquier escalar  $c$ . Debido a que hay un número infinito de valores posibles de  $c$  y cada valor genera una solución diferente, puede concluir que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

## DESCUBRIMIENTO

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  y

$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

1. Calcule  $(AB)^T$ ,  $A^T B^T$  y  $B^T A^T$ .

2. Haga una conjetura sobre la transpuesta del producto de dos matrices cuadradas.

3. Seleccione otras dos matrices cuadradas para verificar su conjetura.

## TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La **transpuesta** de una matriz se forma al escribir sus columnas como renglones. Por ejemplo, si  $A$  es la matriz de  $m \times n$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tamaño:  $m \times n$

entonces la transpuesta, denotada por  $A^T$ , es la matriz de  $n \times m$  de abajo

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tamaño:  $n \times m$

### Transpuesta de una matriz

Encuentre la transpuesta de cada matriz.

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$     b.  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$     c.  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$     d.  $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

### SOLUCIÓN

a.  $A^T = [2 \quad 8]$     b.  $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

c.  $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$     d.  $D^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

### COMENTARIO

Advierta que la matriz cuadrada en el inciso (c) del ejemplo 8 es igual a su transpuesta. Esta matriz se denomina **simétrica**. Una matriz  $A$  es simétrica si  $A = A^T$ . Partiendo de esta definición, es evidente que una matriz simétrica debe ser cuadrada. Además, si  $A = [a_{ij}]$  es una matriz simétrica, entonces  $a_{ij} = a_{ji}$  para toda  $i \neq j$ .

### TEOREMA 3.6 Propiedades de la transpuesta

Si  $A$  y  $B$  son matrices (de tamaño tal que las operaciones con matrices dadas están definidas) y  $c$  es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- $(A^T)^T = A$  Transpuesta de la transpuesta
- $(A + B)^T = A^T + B^T$  Transpuesta de una suma
- $(cA)^T = c(A^T)$  Transpuesta de la multiplicación por un escalar
- $(AB)^T = B^T A^T$  Transpuesta de un producto

### DEMOSTRACIÓN

Debido a que con la transposición de una matriz se intercambian renglones y columnas, la propiedad 1 parece tener sentido. Para demostrar la propiedad 1, sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Observe que  $A^T$  tiene el tamaño  $n \times m$  y  $(A^T)^T$  es de  $m \times n$ , igual que  $A$ . Para demostrar que  $(A^T)^T = A$  usted debe demostrar que el  $ij$ -ésimo elemento es el mismo. Sea  $a_{ij}$  el  $ij$ -ésimo elemento de  $A$ . Entonces  $a_{ij}$  es el  $ji$ -ésimo elemento de  $A^T$  y el  $ij$ -ésimo elemento de  $(A^T)^T$ . Esto demuestra la propiedad 1. La demostración de las demás propiedades se deja como ejercicio. (Véase el Ejercicio 64.)

**COMENTARIO**

Recuerde que debe *invertir el orden* de la multiplicación al formar la transpuesta de un producto. Es decir, la transpuesta de  $AB$  es  $(AB)^T = B^T A^T$  y normalmente *no* es igual a  $A^T B^T$ .



Las propiedades 2 y 4 pueden generalizarse para abarcar sumas o productos de cualquier número finito de matrices. Por ejemplo, la transpuesta de la suma de tres matrices es

$$(A + B + C)^T = A^T + B^T + C^T$$

y la transpuesta del producto de tres matrices es

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T.$$

**Transpuesta de un producto**

Demuestre que  $(AB)^T$  y  $B^T A^T$  son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN**

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

**Producto de una matriz y su transpuesta**

Para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , encuentre el producto  $AA^T$  y demuestre que es simétrico.

**SOLUCIÓN**

$$\text{Debido a que } AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -5 \\ -6 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

se tiene que  $AA^T = (AA^T)^T$ , así que  $AA^T$  es simétrica.

**COMENTARIO**

La propiedad demostrada en el ejemplo 10 es generalmente cierta. Es decir, para toda matriz  $A$ , la matriz  $AA^T$  es simétrica. La matriz  $A^T A$  también es simétrica. Se le pedirá que demuestre estos resultados en el ejercicio 65.

**ÁLGEBRA LINEAL APLICADA**

Los sistemas de recuperación de información como los sistemas de búsqueda de Internet utilizan una teoría de matrices y álgebra lineal para llevar el registro de, por ejemplo, palabras clave que ocurren en una base de datos. Para ilustrar con un ejemplo simplificado, suponga que usted quisiera realizar una búsqueda en algunas de las palabras clave  $m$  disponibles en una base de datos de documentos  $n$ . Usted puede representar la búsqueda con la matriz columna de  $\mathbf{x}$   $m \times 1$ , en la cual un 1 representa una palabra clave que usted está buscando y 0 representa una palabra clave que no está buscando. Usted puede representar las apariciones de las palabras clave  $m$  en los documentos  $n$  con  $A$ , una matriz  $m \times n$  en la cual una entrada es 1 si la palabra clave ocurre en el documento y 0 si no ocurre en el documento. Entonces, la matriz producto  $A^T \mathbf{x}$  de  $n \times 1$  representaría el número de palabras clave en su búsqueda que ocurren en cada uno de los documentos  $n$ .



## 3.2 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Evaluación de una expresión** En los ejercicios 1 a 6, evalúe la expresión.

- $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- $4 \left( \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \right)$
- $\frac{1}{2}([5 \quad -2 \quad 4 \quad 0] + [14 \quad 6 \quad -18 \quad 9])$
- $-3 \left( \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \right) - 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$
- $-\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -2 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \right)$

**Operaciones con matrices** En los ejercicios 7 a 12, realice las operaciones indicadas cuando  $a = 3$ ,  $b = -4$  y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $aA + bB$
  - $aA + bB$
  - $ab(B)$
  - $(a + b)B$
  - $(a - b)(A - B)$
  - $(ab)0$
13. Resuelva para  $X$  cuando
- $$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$
- $3X + 2A = B$
  - $2A - 5B = 3X$
  - $X - 3A + 2B = 0$
  - $6X - 4A - 3B = 0$

14. Resuelva para  $X$  cuando

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

- $X = 3A - 2B$
- $2X = 2A - B$
- $2X + 3A = B$
- $2A + 4B = -2X$

**Operaciones con matrices** En los ejercicios 15 a 20, realice las operaciones indicadas siempre que  $c = -2$  y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $B(CA)$
- $C(BC)$
- $(B + C)A$
- $B(C + O)$
- $(cB)(C + C)$
- $B(cA)$

**Asociatividad de la multiplicación de matrices** En los ejercicios 21 y 22, encuentre la matriz producto  $ABC$  al (a) agrupar los factores como  $(AB)C$  y (b) agrupar los factores como  $A(BC)$ . Demuestre que se obtiene el mismo resultado de ambos procesos.

$$21. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$22. A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**No conmutatividad de multiplicación de matrices** En los ejercicios 23 y 24, muestre que  $AB$  y  $BA$  no son iguales para las matrices dadas.

$$23. A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$24. A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

**Productos de matrices iguales** En los ejercicios 25 y 26, muestre que  $AC = BC$  a pesar de que  $A \neq B$

$$25. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$26. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Producto de matriz cero** En los ejercicios 27 y 28, demuestre que si  $AB = 0$ , aunque  $A \neq 0$  o  $B \neq 0$ .

$$27. A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$28. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

**Operaciones con matrices** En los ejercicios 29 a 34, realice las operaciones indicadas cuando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- $IA$
- $AI$
- $A(I + A)$
- $A + IA$
- $A^2$
- $A^4$

**Escriba** En los ejercicios 35 y 36, explique por qué la fórmula no es válida para matrices. Ilustre su razonamiento con ejemplos.

$$35. (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$36. (A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$$

**Encontrando la transpuesta de una matriz** En los ejercicios 37 y 38, encuentre la transpuesta de la matriz.

$$37. D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad 38. D = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 19 \\ -7 & 0 & 23 \\ 19 & 23 & -32 \end{bmatrix}$$

**Encontrando de la transpuesta del producto de dos matrices** En los ejercicios 39 a 42, verifique que  $(AB)^T = B^T A^T$ .

$$39. A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$40. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$41. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$42. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Multiplicación con la transpuesta de una matriz**

En los ejercicios 43 a 46, encuentre (a)  $A^T A$  y (b)  $AA^T$ . Muestre que cada uno de estos productos es simétrico.

$$43. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad 44. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$45. A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$46. A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 14 & -2 & 12 & -9 \\ 6 & 8 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 47 y 48, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

47. (a) La suma de matrices es conmutativa.

(b) La multiplicación de matrices es asociativa.

(c) La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de sus transpuestas. Es decir,  $(AB)^T = A^T B^T$ .

(d) Para toda matriz  $C$ , la matriz  $CC^T$  es simétrica.

48. (a) La multiplicación de matrices es conmutativa.

(b) Toda matriz  $A$  tiene inversa aditiva.

(c) Si las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  satisfacen  $AB = AC$ , entonces  $B = C$ .

(d) La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus transpuestas.

49. Considere las siguientes matrices.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine escalares  $a$  y  $b$  tales que  $Z = aX + bY$ .

(b) Demuestre que no existen escalares  $a$  y  $b$  tales que  $W = aX + bY$ .

(c) Demuestre que si  $aX + bY + cW = 0$ , entonces  $a = b = c = 0$ .

(d) Determine escalares  $a$ ,  $b$  y  $c$ , no todos iguales a cero, tales que  $aX + bY + cZ = 0$ .

**50. REMATE** En la ecuación matricial

$$aX + A(bB) = b(AB + IB)$$

$X$ ,  $A$ ,  $B$  e  $I$  son matrices cuadradas, y  $a$  y  $b$  son escalares distintos de cero. Justifique cada paso en la solución dada a continuación.

$$aX + (Ab)B = b(AB + B)$$

$$aX + bAB = bAB + bB$$

$$aX + bAB + (-bAB) = bAB + bB + (-bAB)$$

$$aX = bAB + bB + (-bAB)$$

$$aX = bAB + (-bAB) + bB$$

$$aX = bB$$

$$X = \frac{b}{a}B$$

**Determinación de una potencia de una matriz** En los ejercicios 51 y 52, calcule la potencia de  $A$  para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

51.  $A^{19}$

52.  $A^{20}$

**Determinación de la  $n$ -ésima raíz de una matriz** Una raíz  $n$ -ésima de una matriz  $B$  es una matriz  $A$  tal que  $A^n = B$ . En los ejercicios 53 y 54, encuentre la raíz  $n$ -ésima de la matriz  $B$ .

$$53. B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad n = 2$$

$$54. B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}, \quad n = 3$$

**Función polinomial** En los ejercicios 55 y 56, use la definición dada para determinar  $f(A)$ : si  $f$  es la función polinomial.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

entonces para una matriz  $A$  de  $n \times n$ ,  $f(A)$  está definida así

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n.$$

55.  $f(x) = x^2 - 5x + 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

56.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

57. **Demostración guiada** Demuestre la propiedad asociativa de la suma de matrices:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .

Inicio: Para probar que  $A + (B + C)$  y  $(A + B) + C$  son iguales, demuestre que sus elementos correspondientes son iguales.

- (i) Comience su demostración haciendo que  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean matrices de  $m \times n$ .
- (ii) Observe que el  $ij$ -ésimo elemento de  $B + C$  es  $b_{ij} + c_{ij}$ .
- (iii) Además, el  $ij$ -ésimo elemento de  $A + (B + C)$  es  $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ .
- (iv) Determine el  $ij$ -ésimo elemento de  $(A + B) + C$ .

58. **Prueba** Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación escalar:  $(cd)A = c(dA)$

59. **Prueba** Demuestre que el escalar 1 es la identidad para la multiplicación por un escalar:  $1A = A$

60. **Prueba** Demuestre la siguiente propiedad distributiva:  $(c + d)A = cA + dA$ .

61. **Prueba** Demuestre el teorema 3.2.

62. **Prueba** Complete la demostración del teorema 3.3.

- (a) Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación:  $A(BC) = (AB)C$
- (b) Demuestre la propiedad distributiva:  $(A + B)C = AC + BC$
- (c) Demuestre la propiedad:  $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

63. **Prueba** Demuestre el teorema 3.4

64. **Prueba** Demuestre las propiedades 2, 3 y 4 del teorema 3.6.

65. **Demostración guiada** Demuestre que si  $A$  es una matriz de  $m \times n$ , entonces  $AA^T$  y  $A^T A$  son matrices simétricas.

Inicio: para demostrar que  $AA^T$  es simétrica es necesario que demuestre que es igual a su transpuesta,  $(AA^T)^T = AA^T$ .

- (i) Comience su demostración con la expresión matricial del lado izquierdo  $(AA^T)^T$ .
- (ii) Aplique las propiedades de la transpuesta de un matriz para demostrar que se puede simplificar e igualar con la expresión del lado derecho,  $AA^T$ .
- (iii) Repita este análisis para el producto  $A^T A$ .

66. **Prueba** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices simétricas de  $n \times n$ .

- (a) Proporcione un ejemplo que muestre que el producto  $AB$  no necesariamente es simétrico.
- (b) Demuestre que  $AB$  es simétrica si y sólo si  $AB = BA$ .

**Matrices simétricas y cuasi-simétricas** Una matriz cuadrada es denominada cuasi-simétrica si  $A^T = -A$ . En los ejercicios 67 a 70, determine cuál de las matrices es simétrica, cuasi-simétrica o ninguna de las dos.

67.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

68.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

69.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

70.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

71. **Prueba** Demuestre que la diagonal principal de una matriz cuasi-simétrica consiste únicamente de ceros.

72. **Prueba** Demuestre que si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuasi-simétricas de  $n \times n$ , entonces  $A + B$  es cuasi-simétrica.


73. **Prueba** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

- (a) Demuestre que  $\frac{1}{2}(A + A^T)$  es simétrica.
- (b) Demuestre que  $\frac{1}{2}(A - A^T)$  es cuasi-simétrica.
- (c) Demuestre que  $A$  puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica  $B$  y una matriz cuasi-simétrica  $C$ ,  $A = B + C$ .
- (d) Escriba la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

como la suma de una matriz cuasi-simétrica y una matriz simétrica.

74. **Prueba** Demuestre que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces  $A - A^T$  es cuasi-simétrica.

 75. Considere matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Escriba una matriz de  $2 \times 2$  y otra de  $3 \times 3$  en la forma de  $A$ .
- (b) Utilice una aplicación gráfica o un software computacional para elevar cada una de las matrices a potencias más altas. Describa el resultado.
- (c) Utilice el resultado del inciso (b) para hacer una conjetura sobre las potencias de  $A$  si  $A$  es una matriz de  $4 \times 4$ . Use una aplicación gráfica para verificar su conjetura.
- (d) Utilice los resultados de los incisos (b) y (c) para hacer una conjetura sobre las potencias de  $A$  si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ .

## 3.3 Inversa de una matriz

- Encuentre la inversa de una matriz (si existe).
- Use las propiedades de matrices inversas.
- Use una matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

### MATRICES Y SUS INVERSAS

La sección 3.2 analizó algunas de las semejanzas entre el álgebra de los números reales y el álgebra de matrices. Esta sección también desarrolla el álgebra de matrices para incluir las soluciones de ecuaciones matriciales que implican la multiplicación de matrices. Para empezar, considere la ecuación con números reales  $ax = b$ . Para resolver esta ecuación para  $x$ , multiplique ambos lados de la ecuación por  $a^{-1}$  (siempre que  $a \neq 0$ ).

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

El número  $a^{-1}$  se denomina *inverso multiplicativo* de  $a$ , ya que  $a^{-1}a$  da como resultado 1 (elemento identidad para la multiplicación). La definición del inverso multiplicativo de una matriz es similar.

#### Definición de la inversa de una matriz

Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz  $B$  de  $n \times n$  tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . La matriz  $B$  se denomina **inversa** (multiplicativa) de  $A$ . La matriz  $A$  que no tiene una inversa se denomina **no invertible** (o **singular**).

Las *matrices no cuadradas no tienen inversas*. Para ver esto, advierta que si  $A$  es de tamaño  $m \times n$  y  $B$  es de tamaño  $n \times m$  (donde  $m \neq n$ ), entonces los productos  $AB$  y  $BA$  son de tamaño diferente y no pueden ser iguales entre sí. Efectivamente, no todas las matrices cuadradas poseen inversa. (Véase el ejemplo 4.) El siguiente teorema, sin embargo, nos dice que si una matriz tiene inversa, entonces ésta es única.

#### TEOREMA 3.7 Unicidad de la inversa de una matriz

Si  $A$  es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de  $A$  se denota por  $A^{-1}$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Ya que  $A$  es invertible, sabemos que al menos tiene una inversa  $B$  tal que


$$AB = I = BA.$$

Suponga que  $A$  tiene otra inversa  $C$  tal que

$$AC = I = CA.$$

Entonces usted puede demostrar que  $B$  y  $C$  son iguales, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 AB &= I \\
 C(AB) &= CI \\
 (CA)B &= C \\
 IB &= C \\
 B &= C
 \end{aligned}$$

En consecuencia,  $B = C$  y tenemos que la inversa de una matriz es única. 

Debido a que la inversa  $A^{-1}$  de una matriz invertible  $A$  es única, podemos denominarla como la inversa de  $A$  y escribimos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

### Inversa de una matriz


Demuestre que  $B$  es la inversa de  $A$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

Usando la definición de matriz inversa, puede ver que  $B$  es la inversa de  $A$  para demostrar que  $AB = I = BA$ , de la siguiente manera

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 & 2 - 2 \\ -1 + 1 & 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 & 2 - 2 \\ -1 + 1 & 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$


El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar un sistema de ecuaciones para determinar la inversa de una matriz.

### Encontrar la inversa de una matriz

Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

Para determinar la inversa de  $A$ , resuelva la ecuación matricial  $AX = I$  para  $X$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, igualando los elementos correspondientes, obtiene los dos sistemas de ecuaciones que se muestran

$$\begin{aligned}
 x_{11} + 4x_{21} &= 1 & x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\
 -x_{11} - 3x_{21} &= 0 & -x_{12} - 3x_{22} &= 1
 \end{aligned}$$

Resolviendo el primer sistema, tenemos que la primera columna de  $X$  es  $x_{11} = -3$  y  $x_{21} = 1$ . De manera similar, resolviendo el segundo sistema, tenemos que la segunda columna de  $X$  es  $x_{12} = -4$  y  $x_{22} = 1$ . La inversa de  $A$  es

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilice la multiplicación de matrices para verificar este resultado. 

### COMENTARIO

Recuerde que no siempre es verdad que  $AB = BA$ , incluso si ambos productos están definidos. Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas y  $AB = I_n$ , entonces puede demostrar que  $BA = I_n$ . Aunque se omite la demostración de este hecho, esto implica que en el ejemplo 1 usted sólo necesita verificar que  $AB = I_2$ .



La generalización del método aplicado para resolver el ejemplo 2 proporciona un procedimiento conveniente para encontrar la inversa. Primero observe que los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + 4x_{21} & = & 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_{12} + 4x_{22} & = & 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} & = & 1 \end{array}$$

tienen la *misma matriz de coeficientes*. En lugar de resolver los dos sistemas representados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

separadamente, puede hacerlo de manera simultánea. Usted puede hacer esto **adjuntando** la matriz identidad a la matriz de coeficientes para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, puede resolver *ambos* sistemas con un sencillo proceso de eliminación, como el siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 + (-4)R_2 \rightarrow R_1$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz “doblemente aumentada”  $[A \quad I]$ , usted obtiene la matriz  $[I \quad A^{-1}]$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A & I \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} I & A^{-1} \end{matrix}$$

Este procedimiento (o algoritmo) funciona para una matriz arbitraria de  $n \times n$ . Si  $A$  no puede reducirse por renglones a  $I_n$ , entonces  $A$  es no invertible (o singular). Este procedimiento se justificará formalmente en la siguiente sección, después de exponer el concepto de matriz elemental. Por el momento, el algoritmo se resume de la siguiente manera.

### Determinación de la inversa de una matriz por eliminación de Gauss-Jordan

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

1. Escriba la matriz de  $n \times 2n$ , que consta de la matriz  $A$  dada a la izquierda y la matriz identidad  $I$  de  $n \times n$  a la derecha para obtener  $[A \quad I]$ . Observe que las matrices  $A$  e  $I$  están separadas por una línea punteada. Este proceso se denomina **adjuntar** la matriz  $I$  a la matriz  $A$ .
2. Si es posible, reduzca por renglones  $A$  a  $I$  utilizando operaciones elementales con renglones en toda la matriz  $[A \quad I]$  con la idea de obtener la matriz  $[I \quad A^{-1}]$ . Si esto no es posible, entonces  $A$  es no invertible (singular).
3. Verifique su trabajo multiplicando por  $AA^{-1}$  y  $A^{-1}A$  para ver que  $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ .



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Recuerde la Ley de Hooke, que dice que para deformaciones relativamente pequeñas de un objeto elástico, la cantidad de deflexión es directamente proporcional a la fuerza que causa la deformación. En una viga elástica soportada de manera simple, sujeta a múltiples fuerzas, la deflexión  $\mathbf{d}$  se relaciona con la fuerza  $\mathbf{w}$  por la ecuación matricial

$$\mathbf{d} = F\mathbf{w}$$

donde  $F$  es una matriz de flexibilidad cuyas entradas dependen del material de la viga. La inversa de la matriz de flexibilidad,  $F^{-1}$ , se denomina la matriz de rigidez. En los ejercicios 61 y 62, se le pedirá que encuentre la matriz de rigidez  $F^{-1}$  y la matriz de fuerza  $\mathbf{w}$  para un conjunto dado de matrices de flexibilidad y deflexión.

### Encontrar la inversa de una matriz

Determine la inversa de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

Empiece adjuntando la matriz identidad a  $A$  para formar la matriz

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, utilizando operaciones elementales con renglones, reescriba esta matriz en la forma

$$[I \quad A^{-1}]$$

de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 + (-1)R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (6)R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (4)R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (-1)R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_3 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

La matriz  $A$  es invertible y esta inversa es

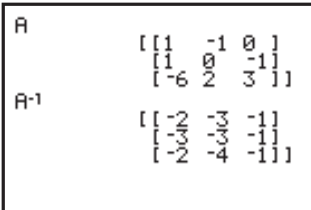
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Confirme esto demostrando que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ &= A^{-1}A. \end{aligned}$$

#### NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de computadora pueden calcular la inversa de una matriz cuadrada. Si usted usa una aplicación gráfica, las pantallas para el ejemplo 3 se verán como las mostradas más abajo. Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas aplicables al ejemplo 3 se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en [college.cengage.com/pic/larsonELA6e](http://college.cengage.com/pic/larsonELA6e).



A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A<sup>-1</sup>

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

El proceso mostrado en el ejemplo 3 se aplica a cualquier matriz de  $n \times n$  y permite hallar la inversa de la matriz  $A$ , si es posible. Si la matriz  $A$  no tiene inversa, el proceso puede decirse también. En el siguiente ejemplo se aplica el proceso a una matriz singular (una que no tiene inversa).

### Matriz singular

Demuestre que la matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

Adjunte la matriz identidad a A para formar

$$[A \ I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y aplique la eliminación de Gauss-Jordan de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que la “parte A” de la matriz tiene un renglón de ceros, puede concluir que no es posible reescribir la matriz  $[A \ I]$  en la forma  $[I \ A^{-1}]$ . Esto significa que A no tiene inversa o es no invertible (o singular). ■

Aplicar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar la inversa de una matriz funciona bien (incluso como una técnica de computadora) para matrices de tamaño  $3 \times 3$  o mayores. Sin embargo, para matrices de  $2 \times 2$  puede utilizar una fórmula para determinar la inversa de una matriz en lugar de la eliminación de Gauss-Jordan.

Si A es una matriz de  $2 \times 2$  representada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces A es invertible si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ . Además, si  $ad - bc \neq 0$ , entonces la inversa es representada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

#### COMENTARIO

El denominador  $ad - bc$  se llama **determinante** de A. Usted podrá estudiar los determinantes con más detalles en la sección 3.5.



### Determinar la inversa de una matriz de $2 \times 2$

Si es posible, determine la inversa de cada matriz.

a.  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$       b.  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

#### SOLUCIÓN

a. Para la matriz A aplique la fórmula para la inversa de una matriz de  $2 \times 2$  para obtener  $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-2) = 4$ . Debido a que esta cantidad no es cero, la inversa se forma intercambiando los elementos en la diagonal principal y cambiando los signos de los otros dos elementos y multiplicando por la escalar  $\frac{1}{4}$  como sigue.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

b. Para la matriz B, tiene que  $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-6) = 0$ , lo que significa que B es no invertible. ■

## PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSAS

Algunas propiedades importantes de las matrices inversas se listan enseguida.

### TEOREMA 3.8 Propiedades de las matrices inversas

Si  $A$  es una matriz invertible,  $k$  es un entero positivo y  $c$  es un escalar diferente de cero, entonces  $A^{-1}$ ,  $A^k$ ,  $cA$  y  $A^T$  son invertibles y se cumple lo siguiente.

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k$
3.  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
4.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

### DEMOSTRACIÓN

La clave de la demostración de las propiedades 1, 3 y 4 es el hecho de que la inversa de una matriz es única (teorema 3.7). Es decir, si  $BC = CB = I$ , entonces  $C$  es la inversa de  $B$ .

La propiedad 1 establece que la inversa de  $A^{-1}$  es  $A$  misma. Para probar esto, observe que  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ , lo que significa que  $A$  es la inversa de  $A^{-1}$ . Así,  $A = (A^{-1})^{-1}$ .

De manera similar, la propiedad 3 establece que  $\frac{1}{c}A^{-1}$  es la inversa de  $(cA)$ ,  $c \neq 0$ . Para probar esto, utilice las propiedades de la multiplicación escalar dada en los teoremas 3.1 y 3.3 de la siguiente manera.

$$(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \left(c\frac{1}{c}\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

$$\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)(cA) = \left(\frac{1}{c}c\right)A^{-1}A = (1)I = I$$

Así,  $\frac{1}{c}A^{-1}$  es la inversa de  $(cA)$ , lo cual implica  $\frac{1}{c}A^{-1} = (cA)^{-1}$ . La demostración de las propiedades 2 y 4 se dejan como ejercicio. (Véanse los Ejercicios 65 y 66) ■

Para matrices no singulares, la notación exponencial utilizada para la multiplicación repetida de matrices *cuadradas* puede extenderse para incluir exponentes que sean enteros negativos. Esto puede lograrse si se define  $A^{-k}$  como sigue

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k.$$

Usando esta convención usted puede demostrar que las propiedades  $A^jA^k = A^{j+k}$  y  $(A^j)^k = A^{jk}$  son verdaderas para cualesquiera enteros  $j$  y  $k$ .

## DESCUBRIMIENTO

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

1. Calcule  $(AB)^{-1}$ ,  $A^{-1}B^{-1}$  y  $B^{-1}A^{-1}$ .
2. Haga una conjetura acerca de la inversa de un producto de dos matrices no singulares.
3. Elija otras dos matrices no singulares y vea si su conjetura es válida.

### Inversa de una matriz

Calcule  $A^{-2}$  en dos formas diferentes y demuestre que los resultados son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

Una forma de determinar  $A^{-2}$  es encontrando  $(A^2)^{-1}$  al elevar la matriz  $A$  al cuadrado para obtener

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

y utilizando la fórmula para la inversa de una matriz de  $2 \times 2$  para obtener

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Otro modo de determinar  $A^{-2}$  es encontrando  $(A^{-1})^2$  después de hallar  $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y después elevando al cuadrado esta matriz para obtener

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Observe que cada método produce el mismo resultado. ■

El siguiente teorema proporciona una fórmula para calcular la inversa del producto de dos matrices.

#### TEOREMA 3.9 La inversa de un producto

Si  $A$  y  $B$  son dos matrices invertibles de tamaño  $n$ , entonces  $AB$  es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

#### DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que  $B^{-1}A^{-1}$  es la inversa de  $AB$ , usted sólo necesita mostrar que ésta cumple con la definición de la inversa de una matriz. Esto es

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

De una manera similar puede demostrar que  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$  y concluir que  $AB$  es invertible y que tiene la inversa indicada. ■

El teorema 3.9 establece que la inversa del producto de dos matrices invertibles es el producto de sus inversas tomado en el orden contrario. Esto puede generalizarse para incluir el producto de algunas matrices invertibles:

$$(A_1A_2A_3 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

### Inversa del producto de una matriz

Halle  $(AB)^{-1}$  para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando el hecho de que  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$  están representadas por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

#### COMENTARIO

Advierta que *inviertió el orden* de la multiplicación para encontrar la inversa de  $AB$ . Esto es,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  y la inversa de  $AB$  a menudo no es igual a  $A^{-1}B^{-1}$ .

#### SOLUCIÓN

Utilizando el teorema 2.9 obtenemos

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = \begin{matrix} & B^{-1} & & & A^{-1} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -8 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}. \end{matrix} \end{aligned}$$

Una propiedad importante en el álgebra de los números reales es la propiedad de cancelación. Es decir, si  $ac = bc$  ( $c \neq 0$ ), entonces  $a = b$ . Las matrices *invertibles* tienen una propiedad de cancelación similar.

#### TEOREMA 3.10 Propiedades de cancelación

Si  $C$  es una matriz invertible, entonces las siguientes propiedades son válidas.

1. Si  $AC = BC$ , entonces  $A = B$ . Propiedad de cancelación por la derecha
2. Si  $CA = CB$ , entonces  $A = B$ . Propiedad de cancelación por la izquierda

#### DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 1, utilice el hecho de que  $C$  es invertible y escriba

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ (AC)C^{-1} &= (BC)C^{-1} \\ A(CC^{-1}) &= B(CC^{-1}) \\ AI &= BI \\ A &= B. \end{aligned}$$

La segunda propiedad puede demostrarse de forma semejante. (Véase el Ejercicio 68.)

Asegúrese de recordar que el teorema 3.10 puede aplicarse sólo si  $C$  es una matriz *invertible*. Si no lo es, entonces a menudo la cancelación no es válida. Así, en la sección 3.2 el ejemplo 5 proporciona el modelo de una ecuación matricial  $AC = BC$  en la cual  $A \neq B$ , ya que  $C$  no es invertible en el ejemplo.

## SISTEMAS DE ECUACIONES

Para sistemas *cuadrados* (los que tienen el mismo número de ecuaciones que de variables), puede utilizar el siguiente teorema para determinar cuál de los sistemas tiene una solución única.

### TEOREMA 3.11 Sistemas de ecuaciones con una solución única

Si  $A$  es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una solución única para cada vector columna  $\mathbf{b}$  de  $n$  componentes, dada por  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

### DEMOSTRACIÓN

Puesto que  $A$  no es singular, los siguientes pasos son válidos.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Esta solución es única, ya que si  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son dos soluciones, usted podría aplicar la propiedad de cancelación para la ecuación  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2$  para concluir que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . ■

Reemplazar lo resaltado por Un uso del Teorema 3.11 aparece cuando se resuelven varios sistemas en los cuales todos tienen la misma matriz de coeficientes  $A$ . En este caso usted debe encontrar la matriz inversa y luego resolver cada sistema calculando el producto  $A^{-1}\mathbf{b}$ .

### Solución de un sistema de ecuaciones utilizando una matriz inversa

Utilice una matriz inversa para resolver cada sistema.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 2x + 3y + z = -1 & \text{b. } 2x + 3y + z = 4 & \text{c. } 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 1 & 3x + 3y + z = 8 & 3x + 3y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = -2 & 2x + 4y + z = 5 & 2x + 4y + z = 0 \end{array}$$

### SOLUCIÓN

Primero observe que la matriz de coeficientes de cada sistema es  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan encontrará que  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ .

$$\text{a. } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{La solución es } x = 2, \\ y = -1, y \ z = -2.$$

$$\text{b. } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{La solución es } x = 4, \\ y = 1, y \ z = -7.$$

$$\text{c. } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{La solución es trivial:} \\ x = 0, y = 0, y \ z = 0. \quad \text{■}$$

## 3.3 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**La inversa de una matriz** En los ejercicios 1 a 6, demuestre que  $B$  es la inversa de  $A$ .

1.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

5.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

6.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

**Determinación de la inversa de una matriz** En los ejercicios 7 a 30, encuentre la inversa de la matriz (si ésta existe)

7.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

10.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{bmatrix}$

12.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

13.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

14.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{bmatrix}$

16.  $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

19.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

20.  $\begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

21.  $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ 0.7 & -1 & 0.2 \\ 1 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$

22.  $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

25.  $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

26.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

27.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

28.  $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -7 & 14 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

29.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

30.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

### Determinación de la inversa de una matriz de $2 \times 2$

En los ejercicios 31 a 36, utilice la fórmula en la página 66 para encontrar la inversa de una matriz de  $2 \times 2$  (si existe).

31.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

32.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

33.  $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

34.  $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

35.  $\begin{bmatrix} 7 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

36.  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

### Determinación de la inversa del cuadrado de una matriz

En los ejercicios 37-40, calcule  $A^{-2}$  de dos maneras diferentes y muestre que los resultados son iguales.

37.  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

38.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

39.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

40.  $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

### Determinación de las inversas de productos y transpuestas

En los ejercicios 41 a 44, utilice matrices invertidas para determinar (a)  $(AB)^{-1}$ , (b)  $(A^T)^{-1}$  y (c)  $(2A)^{-1}$ .

41.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

42.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

43.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

44.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

**Resolución de un sistema de ecuaciones usando una inversa** En los ejercicios 45 a 48, utilice una matriz inversa para resolver cada sistema de ecuaciones lineales.

45. (a)  $x + 2y = -1$   
 $x - 2y = 3$   
(b)  $x + 2y = 10$   
 $x - 2y = -6$
46. (a)  $2x - y = -3$   
 $2x + y = 7$   
(b)  $2x - y = -1$   
 $2x + y = -3$
47. (a)  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$   
(b)  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$
48. (a)  $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$   
 $x_1 - x_2 - x_3 = -1$   
(b)  $x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$   
 $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

**Resolución de un sistema of ecuaciones usando una inversa** En los ejercicios 49 a 52, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidad matricial para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa.

49.  $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -3$   
 $x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -3$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 6$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2$   
 $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -3$
50.  $x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 3$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$   
 $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3$   
 $2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -1$   
 $3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 5$
51.  $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 = 20$   
 $3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = -16$   
 $4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 = -12$   
 $-5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 3x_6 = -2$   
 $x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 + x_6 = -15$   
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 6x_6 = 25$
52.  $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - x_6 = 1$   
 $3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 = -11$   
 $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 = 0$   
 $-x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 2x_5 + 4x_6 = -9$   
 $3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 - 5x_6 = 1$   
 $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_5 + 2x_6 = -12$

**Matriz igual a su propia inversa** En los ejercicios 53 a 54, determine el valor de  $x$  tal que la matriz sea igual a su inversa.

53.  $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$       54.  $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

**Matriz singular** En los ejercicios 55 y 56, determine el valor de  $x$  tal que la matriz sea singular.

55.  $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$       56.  $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

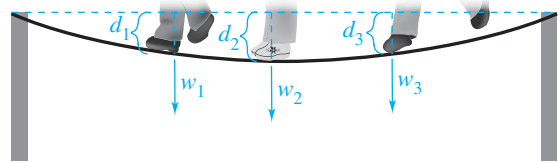
**Resolución de una ecuación matricial** En los ejercicios 57 y 58, determine el valor de  $A$  tal que

57.  $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$       58.  $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

**Determinación de la inversa de una matriz** En los ejercicios 59 y 60, demuestre que la matriz es invertible y encuentre su inversa.

59.  $A = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \\ -\text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta \end{bmatrix}$       60.  $A = \begin{bmatrix} \text{Sec } \theta & \text{Tan } \theta \\ \text{Tan } \theta & \text{Sec } \theta \end{bmatrix}$

**Deflexión de vigas** En los ejercicios 61 y 62, las fuerzas  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  (en libras) actúan en una elástica soportada de manera simple, lo que resulta en las deflexiones  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  (en pulgadas) en la viga (véase la figura).



Utilice la ecuación matricial  $\mathbf{d} = F\mathbf{w}$  donde

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

y  $F$  es la *matriz de flexibilidad*  $3 \times 3$  para la viga, para encontrar la matriz de rigidez  $F^{-1}$  y la matriz de fuerza  $\mathbf{w}$ . Las unidades de las entradas de  $F$  se presentan en pulgadas por libra.

61.  $F = \begin{bmatrix} 0.008 & 0.004 & 0.003 \\ 0.004 & 0.006 & 0.004 \\ 0.003 & 0.004 & 0.008 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.585 \\ 0.640 \\ 0.835 \end{bmatrix}$

62.  $F = \begin{bmatrix} 0.017 & 0.010 & 0.008 \\ 0.010 & 0.012 & 0.010 \\ 0.008 & 0.010 & 0.017 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 63 y 64, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es cierta, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite una expresión apropiada a partir del texto.

63. (a) Si las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  satisfacen  $BA = CA$  y  $A$  es invertible, entonces  $B = C$ .  
(b) La inversa del producto de dos matrices es el producto de sus inversas, esto es  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .  
(c) Si  $A$  puede ser reducida por la matriz identidad, entonces  $A$  es no singular.

64. (a) La inversa de la inversa de una matriz no singular  $A$ ,  $(A^{-1})^{-1}$  es igual a  $A$  misma.

(b) La matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es invertible si  $ab - dc \neq 0$ .

(c) Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  tiene una solución única.

65. **Prueba** Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.8: si  $A$  es una matriz invertible y  $k$  un entero positivo, entonces

$$(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ factor}} = (A^{-1})^k$$

66. **Prueba** Demuestre la propiedad 4 del teorema 3.8: si  $A$  es una matriz invertible, entonces  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

67. **Demostración guiada** Demuestre que la inversa de una matriz simétrica no singular es simétrica.

Inicio: para demostrar que la inversa de  $A$  es simétrica, necesita probar que  $(A^{-1})^T = A^{-1}$

- (i) Sea  $A$  una matriz simétrica no singular.
- (ii) Esto significa que  $A^T = A$  y  $A^{-1}$  existen.
- (iii) Utilice las propiedades de la transpuesta para demostrar que  $(A^{-1})^T$  es igual a  $A^{-1}$ .

68. **Prueba** Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.10: si  $C$  es una matriz invertible tal que  $CA = CB$ , entonces  $A = B$ .

69. **Prueba** Demuestre que si  $A^2 = A$ , entonces  $I - 2A = (I - 2A)^{-1}$ .

70. **Prueba** Demuestre que si  $A, B$  y  $C$  son matrices cuadradas y  $ABC = I$ , entonces  $B$  es invertible y  $B^{-1} = CA$ .

71. **Prueba** Demuestre que si  $A$  es invertible y  $AB = O$ , entonces  $B = O$ .

72. **Demostración guiada** Demuestre que si  $A^2 = A$ , entonces una de dos cosas:  $A = I$  o  $A$  es singular.

Inicio: usted debe demostrar que  $A$  es singular o que  $A$  es igual a la matriz

- (i) Comience su demostración observando que  $A$  es singular o no singular.
- (ii) Si  $A$  es singular, la demostración está hecha.
- (iii) Si  $A$  es no singular, entonces utilice la matriz inversa  $A^{-1}$  y la hipótesis de que  $A^2 = A$  para demostrar que  $A = I$ .

73. **Escriba** ¿La suma de dos matrices invertibles es invertible? Explique por qué sí o por qué no. Ilustre su conclusión con un ejemplo apropiado.

74. **Escriba** ¿Bajo qué condiciones la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es invertible? Si  $A$  es invertible, encuentre la inversa.

75. Use el resultado del ejercicio 74 para determinar  $A^{-1}$  para cada matriz.

(a)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

76. Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Demuestre que  $A^2 - 2A + 5I = O$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.
- (b) Demuestre que  $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$ .
- (c) Demuestre que, en general, para cualquier matriz cuadrada que satisfaga la ecuación  $A^2 - 2A + 5I = O$ , la inversa de  $A$  está dada por  $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$ .

77. **Prueba** Sea  $u$  la matriz columna  $n \times 1$  que satisface  $u^T u = 1$ . La matriz de  $n \times n$ ,  $H = I_n - 2uu^T$  se llama **matriz de Householder**.

(a) Demuestre que  $H$  es simétrica y no singular.

(b) Sea  $u = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Demuestre que  $u^T u = 1$  y calcule la matriz de Householder  $H$ .

78. **Prueba** Sean  $A$  y  $B$  matrices  $n \times n$ . Demuestre que si la matriz  $I - AB$  es no singular, entonces también lo es  $I - BA$ .

79. Sean  $A, D$  y  $P$  matrices de  $n \times n$  que satisfacen  $AP = PD$ . Si  $P$  es no singular, resuelva esta ecuación para  $A$ . ¿Debe cumplirse que  $A = D$ ?

80. Encuentre un ejemplo de una matriz singular de  $2 \times 2$  que satisfaga  $A^2 = A$ .

81. **Escriba** Explique cómo determinar si la inversa de una matriz existe. Si es así, explique cómo encontrar la inversa.

82. **REMATE** Como se mencionó en la página 66, si  $A$  es una matriz de  $2 \times 2$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces  $A$  es invertible si y sólo si  $ad - cb \neq 0$ . Verifique que la inversa de  $A$  esté dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

83. **Escriba** Explique en sus propias palabras cómo escribir un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables como una ecuación matricial,  $AX = B$ , así como la manera de resolver el sistema usando una matriz inversa.

## 3.4 Matrices elementales

- Factorice una matriz en un producto de matrices elementales.
- Encuentre y utilice una factorización  $LU$  de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

### MATRICES ELEMENTALES Y OPERACIONES ELEMENTALES CON RENGLONES

En la sección 2.2 se presentaron las tres operaciones elementales sobre renglones aplicadas a las matrices; éstas son:

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.

En esta sección, usted podrá ver cómo la multiplicación matricial puede emplearse para ejecutar estas operaciones.

#### COMENTARIO

De acuerdo con esta definición, la matriz identidad  $I_n$  es elemental, ya que puede obtenerse a partir de sí misma al multiplicar cualquiera de sus renglones por 1.



#### Definición de matriz elemental

Una matriz de  $n \times n$  se denomina **matriz elemental** si puede ser obtenida a partir de la matriz identidad  $I_n$  por una sola operación elemental de renglón.

#### Matrices elementales y no elementales

¿Cuáles de las siguientes matrices son elementales? Para aquéllas que lo sean, describa la operación elemental de renglón.

a. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

f. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

- a. Esta matriz es elemental. Puede obtenerse multiplicando el segundo renglón de  $I_3$  por 3.
- b. Esta matriz *no* es elemental, ya que no es cuadrada.
- c. Esta matriz *no* es elemental, ya que fue obtenida al multiplicar el tercer renglón de  $I_3$  por 0 (la multiplicación de renglones debe ser por una constante diferente de cero).
- d. Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse intercambiando el segundo y el tercer renglón de  $I_3$ .
- e. Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse al multiplicar el primer renglón de  $I_2$  por 2 y sumar el resultado al segundo renglón.
- f. Esta matriz *no* es elemental, ya que se requieren dos operaciones con renglones para obtenerla a partir de  $I_3$ .

Las matrices elementales resultan útiles porque permiten usar la multiplicación matricial para realizar operaciones elementales con renglones, como se muestra en el ejemplo 2.

### Matrices elementales y operaciones elementales con renglones

- a. En el siguiente producto de matrices,  $E$  es una matriz elemental en la cual los dos primeros renglones de  $I_3$  se han intercambiado.

$$\begin{matrix} E & A \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que los dos primeros renglones de  $A$  se han intercambiado en la multiplicación por la izquierda por  $E$ .

- b. En el siguiente producto de matrices,  $E$  es la matriz elemental en la cual el segundo renglón de  $I_3$  se ha multiplicado por  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{matrix} E & A \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí el tamaño de  $A$  es  $3 \times 4$ .  $A$  puede, sin embargo, ser cualquier matriz de  $3 \times n$  y multiplicarse por la izquierda por  $E$  y mantener el resultado de multiplicar el segundo renglón de  $A$  por  $\frac{1}{2}$ .

- c. En el siguiente producto,  $E$  es la matriz elemental en la que se ha sumado dos veces el primer renglón de  $I_3$  al segundo renglón.

$$\begin{matrix} E & A \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que en el producto  $EA$  se ha sumado dos veces el primer renglón al segundo. ■

En cada uno de los tres productos del ejemplo 2, usted fue capaz de ejecutar operaciones elementales con renglones para multiplicar por la izquierda por una matriz elemental. Esta propiedad de las matrices elementales se generaliza en el siguiente teorema, el cual se enuncia sin demostrar.

#### TEOREMA 3.12 Representación de operaciones elementales con renglones

Sea  $E$  la matriz elemental obtenida al ejecutar una operación elemental con renglones en  $I_m$ . Si esta misma operación es realizada en una matriz  $A$  de  $m \times n$ , entonces el resultado está dado por el producto  $EA$ .

Muchas aplicaciones de las operaciones elementales con renglones requieren de una secuencia de operaciones. Por ejemplo, la eliminación gaussiana a menudo precisa de varias operaciones elementales con renglones para reducir una matriz. Para matrices elementales, esta secuencia se traduce en la multiplicación (por la izquierda) por varias matrices elementales. El orden de la multiplicación es importante; la matriz elemental inmediata para la izquierda de  $A$  corresponde a la operación con renglones ejecutada primero. Este proceso se demuestra en el ejemplo 3.

#### COMENTARIO

Asegúrese de tener en mente que en el teorema 3.12  $A$  es multiplicada por la izquierda por la matriz elemental  $E$ . La multiplicación por la derecha por matrices elementales, la cual implica operaciones con columnas, no se considera en este texto.



### Aplicación de matrices elementales

Encuentre una sucesión de matrices elementales que puedan utilizarse para escribir la matriz  $A$  en forma escalonada por renglones.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$	$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$(\frac{1}{2})R_3 \rightarrow R_3$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Las tres matrices elementales  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  pueden utilizarse para ejecutar la misma eliminación.

$$\begin{aligned} B = E_3 E_2 E_1 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### COMENTARIO

El procedimiento demostrado en el ejemplo 3 es primordialmente de interés teórico. En otras palabras, este procedimiento no se recomienda como un método práctico para realizar la eliminación gaussiana.

Las dos matrices en el ejemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por renglones, ya que usted puede obtener  $B$  al ejecutar una secuencia de operaciones con renglones en  $A$ . Es decir,  $B = E_3 E_2 E_1 A$ .

La definición de matrices equivalentes por renglones puede ser reexpresada usando matrices elementales de la siguiente manera.

### Definición de equivalencia por renglones

Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $m \times n$ . La matriz  $B$  es **equivalente por renglones** con  $A$  si existe un número finito de matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tal que

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Usted sabe, de la sección 3.3, que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Sin embargo, toda matriz elemental es invertible. Además, la inversa de una matriz elemental es en sí misma una matriz elemental.

**TEOREMA 3.13 Las matrices elementales son invertibles**

Si  $E$  es una matriz elemental, entonces  $E^{-1}$  existe y es una matriz elemental.

La inversa de una matriz elemental  $E$  es la matriz elemental que convierte  $E$  de nuevo en  $I_n$ . Por ejemplo, puede encontrar la inversa de cada una de las tres matrices elementales mostradas en el ejemplo 3 de la siguiente manera.

**COMENTARIO**

$E_2^{-1}$  está como se muestra porque convertir  $E_2$  a  $I_3$ , en  $E_2$  se tendría que sumar dos veces el primer renglón al tercero.

Matriz elemental		Matriz inversa	
$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_3 + (2)R_1 \rightarrow R_3$
$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$(\frac{1}{2})R_3 \rightarrow R_3$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$(2)R_3 \rightarrow R_3$

Intente utilizar la multiplicación de matrices para verificar estos resultados.

El siguiente teorema establece que toda matriz invertible puede ser escrita como el producto de dos matrices elementales.

**TEOREMA 3.14 Propiedad de las matrices invertibles**

Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si puede ser escrita como el producto de matrices elementales.

**DEMOSTRACIÓN**

La frase “si y sólo si” significa que el teorema tiene dos partes. En una, usted debe demostrar que si  $A$  es invertible, entonces puede escribirse como el producto de matrices elementales. Luego debe demostrar que si  $A$  puede ser escrita como el producto de matrices elementales, entonces es invertible.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, suponga que  $A$  es invertible. Del teorema 3.11 sabe que el sistema de ecuaciones lineales representado por  $Ax = 0$  tiene sólo la solución trivial. Pero esto implica que la matriz aumentada  $[A \ 0]$  puede reescribirse en la forma  $[I \ 0]$  (usando operaciones elementales con renglones correspondientes  $E_1, E_2, \dots$  y  $E_k$ ). Ahora tenemos  $E_k \dots E_3 E_2 E_1 A = I$  y esto seguido de  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \dots E_k^{-1}$ .  $A$  puede escribirse como el producto de dos matrices elementales y la demostración está completa.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, asuma que  $A$  es el producto de matrices elementales. Entonces, debido a que cada matriz elemental es invertible y el producto de matrices invertibles es invertible, se sigue que  $A$  es invertible. Esto completa la demostración. ■

La primera parte de esta demostración se ilustra en el ejemplo 4.

### Escritura de una matriz como el producto de matrices elementales

Determine una sucesión de matrices elementales cuyo producto es la matriz no singular

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

Empecemos por encontrar una sucesión de operaciones elementales con renglones que puedan utilizarse para reescribir  $A$  en la forma escalonada reducida.

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$	$(-1)R_1 \rightarrow R_1$	$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$R_2 + (-3)R_1 \rightarrow R_2$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(\frac{1}{2})R_2 \rightarrow R_2$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 + (-2)R_2 \rightarrow R_1$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora, a partir del producto matricial  $E_4E_3E_2E_1A = I$ , resuelva para  $A$  para obtener  $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$ . Esto implica que  $A$  es el producto de matrices elementales.

$$A = \begin{matrix} E_1^{-1} & E_2^{-1} & E_3^{-1} & E_4^{-1} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

En la sección 3.3 usted aprendió un proceso para encontrar la inversa de una matriz no singular  $A$ . Entonces empleó la eliminación de Gauss-Jordan para reducir la matriz aumentada  $[A \ I]$  a  $[I \ A^{-1}]$ . Ahora puede utilizar el teorema 3.14 para justificar este procedimiento. Específicamente, la demostración del teorema 3.14 permite escribir el producto

$$I = E_k \cdot \dots \cdot E_3E_2E_1A.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (por la derecha) por  $A^{-1}$ , podemos escribir  $A^{-1} = E_k \cdot \dots \cdot E_3E_2E_1I$ . En otras palabras, una sucesión de matrices elementales que reducen  $A$  a la identidad pueden usarse para reducir también la identidad  $I$  a  $A^{-1}$ . Aplicando la sucesión correspondiente de operaciones elementales con renglones a las matrices  $A$  e  $I$  de manera simultánea, tenemos

$$E_k \cdot \dots \cdot E_3E_2E_1[A \ I] = [I \ A^{-1}].$$

Por supuesto, si  $A$  es singular, entonces tal sucesión no puede ser determinada.

El siguiente teorema vincula algunas relaciones importantes entre matrices de  $n \times n$  y sistemas de ecuaciones lineales. Las partes esenciales de este teorema ya han sido demostradas (véanse los teoremas 3.11 y 3.14); se deja a usted completar el resto de la demostración.

#### TEOREMA 3.15 Condiciones equivalentes

Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1.  $A$  es invertible.
2.  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una solución única para cada matriz  $\mathbf{b}$  columna de  $n \times 1$ .
3.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sólo tiene solución trivial.
4.  $A$  es equivalente por renglones a  $I_n$ .
5.  $A$  puede escribirse como el producto de matrices elementales.

## FACTORIZACIÓN LU

Como el corazón de muchos eficientes y modernos algoritmos para resolver sistemas lineales,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se llama también factorización  $LU$ , en la cual la matriz cuadrada  $A$  es expresada como un producto,  $A = LU$ . En este producto la matriz cuadrada  $L$  es *triangular inferior*, lo que significa que todos los elementos arriba de la diagonal principal no nula son ceros. La matriz cuadrada  $U$  es **triangular superior**, lo cual significa que todos los elementos debajo de la diagonal principal no nula son ceros.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior de  $3 \times 3$

Matriz triangular superior de  $3 \times 3$

### Definición de la factorización LU

Si la matriz  $A$  de  $n \times n$  puede ser escrita como el producto de una matriz triangular inferior  $L$  y una matriz triangular superior  $U$ , entonces  $A = LU$  es una **factorización LU** de  $A$ .

### Factorizaciones LU

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = LU$$

es una factorización  $LU$  de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como el producto de la matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = LU$$

es una factorización  $LU$  de la matriz  $A$ .



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés) es el análisis por computadora de fenómenos de la vida real como flujo de fluidos, transferencia de calor y reacciones químicas. Resolver ecuaciones de conservación de energía, masa y momento implicadas en un análisis de CFD puede involucrar grandes sistemas de ecuaciones lineales. Así, para mayor eficiencia en el cálculo, los análisis de CFD a menudo usan particionado de matrices y factorización  $LU$  en sus algoritmos. Las empresas aeroespaciales como Boeing y Airbus han usado el análisis CFD para el diseño de aeronaves. Por ejemplo, los ingenieros de Boeing usaron análisis de CFD para simular el flujo de aire alrededor de un modelo virtual del avión 787 para ayudar a producir un diseño más rápido y eficiente que los anteriores de Boeing.

Si una matriz cuadrada  $A$  puede ser reducida a una matriz triangular superior  $U$  usando sólo la operación suma de renglón para sumar un múltiplo de un renglón a otro debajo de éste, entonces es fácil determinar una factorización  $LU$  de la matriz  $A$ . Todo lo que necesita hacer es mantener el registro de las operaciones con cada renglón, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### Determinación de las factorizaciones $LU$ de una matriz

Determine la factorización  $LU$  de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$ .

### SOLUCIÓN

Comience por reducir  $A$  a la forma triangular superior mientras mantiene el registro de las matrices elementales utilizadas para cada operación con renglones.

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$	$R_3 + (4)R_2 \rightarrow R_3$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz reducida  $U$  a la izquierda es triangular superior, lo que conduce a  $E_2E_1A = U$  o  $A = E_1^{-1}E_2^{-1}U$ . Como el producto de matrices triangulares inferiores

$$E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular inferior  $L$ , la factorización  $A = LU$  está completa. Observe que esta es la misma factorización  $LU$  que se demostró en el ejemplo 5(b) al inicio de esta página. ■

En general, si  $A$  puede ser reducida a una matriz  $U$  triangular superior utilizando sólo la operación suma de un múltiplo de un renglón a otro, entonces  $A$  tiene una factorización  $LU$ .

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \\ A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU$$

Aquí  $L$  es el producto de las inversas de matrices elementales utilizadas en la reducción.

Observe que los múltiplos en el ejemplo 6 son  $-2$  y  $4$ , es decir, los negativos de los elementos correspondientes en  $L$ . En general esto es cierto. Si  $U$  puede ser obtenida a partir de  $A$  usando sólo la operación de sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón de abajo, entonces la matriz  $L$  es triangular inferior con números 1 a lo largo de la diagonal. Además, el negativo de cada múltiplo está en la misma posición que el cero correspondiente en la matriz  $U$ .

Una vez que haya obtenido una factorización  $LU$  de la matriz  $A$ , usted puede resolver entonces el sistema de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  variables  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  eficientemente en dos pasos.

1. Escriba  $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$  y resuelva  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  para  $\mathbf{y}$ .
2. Resuelva  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  para  $\mathbf{x}$ .

La matriz columna  $\mathbf{x}$  es la solución del sistema original porque

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

El segundo paso en este algoritmo es sólo una sustitución hacia atrás, ya que la matriz  $U$  es triangular superior. El primer paso es similar, excepto que comienza en la parte de arriba de la matriz, ya que  $L$  es triangular inferior. Por esta razón, el primer paso a menudo recibe el nombre de **sustitución hacia delante**.

### Resolución de un sistema lineal usando factorización $LU$

Resuelva el sistema lineal.

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= -5 \\x_2 + 3x_3 &= -1 \\2x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -20\end{aligned}$$

#### SOLUCIÓN

Usted obtuvo la factorización  $LU$  de la matriz de coeficientes  $A$  en el ejemplo 6.

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Primero, haga  $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$  y resuelva el sistema  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  para  $\mathbf{y}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Este sistema se resuelve fácilmente usando la sustitución hacia delante. Comenzando con la primera ecuación, tiene que

$$y_1 = 5.$$

La segunda ecuación da como resultado  $y_2 = -1$ . Finalmente, de la tercera ecuación,

$$\begin{aligned}2y_1 - 4y_2 + y_3 &= -20 \\y_3 &= -20 - 2y_1 + 4y_2 \\y_3 &= -20 - 2(-5) + 4(-1) \\y_3 &= -14.\end{aligned}$$

La solución de  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  es

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Ahora, resolviendo el sistema  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  para  $\mathbf{x}$ , aplicando la sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

De la última ecuación,  $x_3 = -1$ . Entonces, la segunda ecuación da

$$x_2 + 3(-1) = -1$$

o  $x_2 = 2$ . Finalmente, la primera ecuación es

$$x_1 - 3(2) = -5$$

o  $x_1 = 1$ . Así, la solución del sistema original de ecuaciones es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



## 3.4 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Matrices elementales** En los ejercicios 1 a 8 determine si las matrices son elementales. Si es así, establezca las operaciones elementales con renglones utilizadas para producirlas.

1. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Determinación de una matriz elemental** En los ejercicios 9 a 12, sean  $A$ ,  $B$  y  $C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Encuentre la matriz elemental  $E$  tal que  $EA = B$ .
10. Encuentre la matriz elemental  $E$  tal que  $EA = C$ .
11. Encuentre la matriz elemental  $E$  tal que  $EB = A$ .
12. Encuentre la matriz elemental  $E$  tal que  $EC = A$ .

**Determinación de una secuencia de matrices elementales** En los ejercicios 13 a 16, encuentre una secuencia de matrices elementales que se pueden usar para escribir la matriz en la forma escalonada por renglones.

13. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

14. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

15. 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ -6 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

16. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

**Determinación de la inversa de una matriz elemental** En los ejercicios 17 a 22, encuentre la inversa de la matriz elemental.

17. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18. 
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

21. 
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  
 $k \neq 0$

22. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Determinación de la inversa de una matriz** En los ejercicios 23 a 26, encuentre la inversa de la matriz aplicando matrices elementales.

23. 
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

24. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

25. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

26. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Determinación de una secuencia de matrices elementales** En los ejercicios 27 a 34, encuentre una secuencia de matrices elementales cuyo producto sea la matriz no singular dada.

27. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

28. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

29. 
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

30. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

31. 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

32. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

33. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

34. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 35 y 36, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

35. (a) La matriz identidad es una matriz elemental.  
(b) Si  $E$  es una matriz elemental, entonces  $2E$  es una matriz elemental también.  
(c) La inversa de una matriz elemental es una matriz elemental.
36. (a) La matriz nula es una matriz elemental.  
(b) Una matriz cuadrada es no singular si puede escribirse como el producto de dos matrices elementales.  
(c)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sólo tiene solución trivial si y sólo si  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una única solución para toda matriz columna  $\mathbf{b}$  de  $n \times 1$ .

37. **Escriba** ¿El producto de dos matrices elementales siempre es una matriz elemental? Explique por qué sí o por qué no y dé ejemplos que ilustren su conclusión.

38. **Escriba**  $E$  es la matriz elemental obtenida al intercambiar dos renglones en  $I_n$ .  $A$  es una matriz de  $n \times n$ .

(a) ¿Cómo se puede comparar  $EA$  con  $A$ ? (b) Encuentre  $E^2$ .

39. Utilice matrices elementales para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

$c \neq 0$ .

40. Utilice matrices elementales para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0.$$

**Determinación de la factorización LU de una matriz** En los ejercicios 41 a 44, encuentre la factorización LU de la matriz

41.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

42.  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

43.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

44.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 10 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

**Resolución de un sistema lineal usando factorización LU**

En los ejercicios 45 y 46, resuelva el sistema lineal  $Ax = b$  de la siguiente manera:

(a) Encuentre la factorización LU de la matriz de coeficientes  $A$ ,

(b) Resuelva el sistema triangular inferior  $Ly = b$ , y

(c) Resuelva el sistema triangular superior  $Ux = y$ .

45.  $2x + y = 1$   
 $y - z = 2$   
 $-2x + y + z = -2$

46.  $2x_1 = 4$   
 $-2x_1 + x_2 - x_3 = -4$   
 $6x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$   
 $-x_4 = -1$

47. **Escriba** Suponga que necesita resolver varios sistemas de ecuaciones lineales  $Ax = b_i$  que tienen la misma matriz de coeficientes  $A$ . Explique cómo podría aplicar la técnica de la factorización LU para facilitar la tarea, más que resolver cada sistema de manera individual utilizando la eliminación gaussiana.

**48. REMATE** Explique cada uno de los siguientes.

(a) Cómo encontrar una matriz elemental.

(b) Cómo usar matrices elementales para encontrar la factorización LU de una matriz.

(c) Cómo usar la factorización LU para resolver un sistema lineal

**Matrices idempotentes** En los ejercicios 49 a 52, determine cuál de las matrices es idempotente. Una matriz cuadrada  $A$  es idempotente si  $A^2 = A$ .

49.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

50.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

51.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

52.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

53. Determine  $a$  y  $b$  tales que  $A$  sea idempotente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

54. **Demostración guiada** Demuestre que  $A$  es idempotente si y sólo si  $A^T$  es idempotente.

Inicio: la frase “si y sólo si” significa que usted debe probar dos afirmaciones:

1. Si  $A$  es idempotente, entonces  $A^T$  es idempotente.
2. Si  $A^T$  es idempotente, entonces  $A$  es idempotente.
  - (i) Comience su demostración de la primera afirmación suponiendo que  $A$  es idempotente.
  - (ii) Esto quiere decir que  $A^2 = A$ .
  - (iii) Aplique las propiedades de la transpuesta para demostrar que  $A^2$  es idempotente.
  - (iv) Comience su demostración de la segunda afirmación suponiendo que  $A^2$  es idempotente.

55. **Prueba** Pruebe que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  que es idempotente e invertible, entonces  $A = I_n$ .

56. **Prueba** Demuestre que si  $A$  y  $B$  son idempotentes y  $AB = BA$ , entonces  $AB$  es idempotente.

57. **Demostración guiada** Demuestre que si  $A$  es equivalente por renglones a  $B$  y  $B$  equivale por renglones a  $C$ , entonces  $A$  es equivalente por renglones a  $C$ .

Inicio: para demostrar que  $A$  es equivalente por renglones a  $C$ , usted debe encontrar matrices elementales  $E_1, \dots, E_k$  tales que  $A = E_k \dots E_1 C$ .

- (i) Comience su demostración observando que  $A$  es equivalente por renglones a  $B$ .
- (ii) Esto quiere decir que existen matrices elementales  $F_1, \dots, F_n$  tales que  $A = F_n \dots F_1 B$
- (iii) Existen matrices elementales  $G_1, \dots, G_m$  tales que  $B = G_1 \dots G_m C$ .
- (iv) Combine las ecuaciones matriciales de los pasos (ii) y (iii).

58. **Prueba** Demuestre que si  $A$  es equivalente por renglones a  $B$ , entonces  $B$  es equivalente por renglones a  $A$ .

59. **Prueba** Demuestre que si  $A$  es equivalente por renglones a  $B$  y  $B$  equivale por renglones a  $C$ , entonces  $A$  es equivalente por renglones a  $C$ .

60. Demuestre que la matriz no tiene factorización LU.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3.5 Determinante de una matriz

- Encuentre el determinante de una matriz.
- Encontrar los menores y los cofactores de una matriz.
- Utilizar la expansión por cofactores para encontrar el determinante de una matriz.
- Encuentre el determinante de una matriz triangular.

### DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Toda *matriz cuadrada* puede ser asociada con un número real llamado su *determinante*. Históricamente, el uso de determinantes surge del reconocimiento de patrones especiales que ocurren en las soluciones de sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, la solución general del sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

puede mostrarse como

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

siempre que  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ . (Véase el ejercicio 69.) Observe que las dos fracciones tienen el mismo denominador,  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ . Esta cantidad se llama *determinante* de la matriz de coeficientes del sistema.

#### COMENTARIO

En este texto,  $\det(A)$  y  $|A|$  se utilizan de modo intercambiable para representar el determinante de una matriz. Las barras verticales también se usan para denotar el valor absoluto de un número real; el contexto en el que se mostrará su uso es deliberado. Además, es práctica común eliminar los corchetes de una matriz y escribir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en lugar de

$$\left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right].$$

#### Definición del determinante de una matriz de $2 \times 2$

El **determinante** de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

está dado por  $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

Un método conveniente para recordar la fórmula de un determinante de una matriz de  $2 \times 2$  se muestra en el siguiente diagrama.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

El determinante es la diferencia de los productos de dos diagonales de la matriz. Observe que el orden es importante, como se demuestra a continuación.

#### COMENTARIO

El determinante de una matriz puede ser positivo, negativo o cero.

#### Determinante de una matriz de orden 2

a. Para  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-3) = 4 + 3 = 7$ .

b. Para  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(1) = 4 - 4 = 0$ .

c. Para  $C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $|C| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - 2(\frac{3}{2}) = 0 - 3 = -3$ .

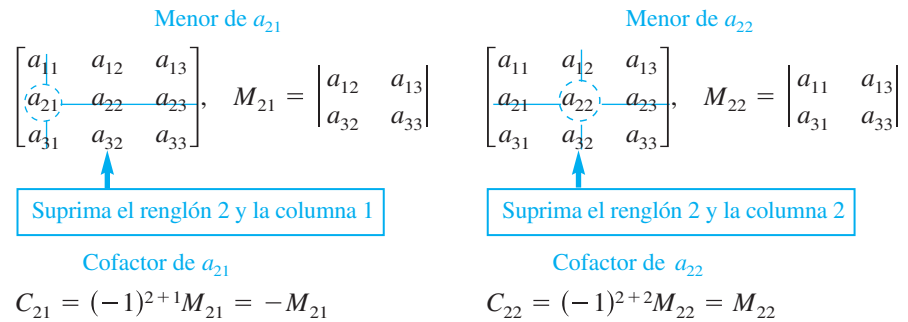
### MENORES Y COFACTORES

Para definir el determinante de matriz cuadrada de orden mayor que 2 es conveniente la aplicación de las nociones de *menores* y *cofactores*.

#### Definición de menores y cofactores de una matriz

Sea  $n > 1$ . Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ , entonces el **menor**  $M_{ij}$  del elemento  $a_{ij}$  es el determinante de la matriz de orden  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtenida al suprimir el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $A$ . El cofactor  $C_{ij}$  del elemento  $a_{ij}$  está dado por  $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ .

Por ejemplo, si  $A$  es una matriz de  $3 \times 3$ , entonces los menores y los cofactores de  $a_{21}$  y  $a_{22}$  son como se muestra en el diagrama presentado a continuación.



Como puede ver, los menores y cofactores de una matriz pueden diferir sólo por el signo. Para obtener los cofactores de una matriz, primero encuentre los menores y después aplique el patrón ajedrezado de + y - como se muestra a la izquierda. Observe que las posiciones *impares* (donde  $i + j$  es impar) tienen signos negativos y las *pares* (donde  $i + j$  es par) signos positivos.

#### Menores y cofactores de una matriz

Determine todos los menores y los cofactores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### SOLUCIÓN

Para encontrar el menor  $M_{11}$ , suprima el primer renglón y la primera columna de  $A$  y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 0(2) = -1$$

Verifique que los menores son

$$\begin{matrix} M_{11} = -1 & M_{12} = -5 & M_{13} = 4 \\ M_{21} = 2 & M_{22} = -4 & M_{23} = -8 \\ M_{31} = 5 & M_{32} = -3 & M_{33} = -6. \end{matrix}$$

Ahora, para encontrar los cofactores, combine el patrón de los signos con estos menores para obtener

$$\begin{matrix} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{matrix}$$

Patrón de signos para los cofactores

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriz de  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriz de  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Matriz de  $n \times n$



## COMENTARIO

El determinante de una matriz de orden 1 se define simplemente como la entrada de la matriz. Por ejemplo, si  $A = [-2]$ , entonces

$$\det(A) = -2.$$



## EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

La siguiente definición es llamada **inductiva**, porque utiliza determinantes de matrices de orden  $n - 1$  para definir el determinante de una matriz de orden  $n$ .

## Definición del determinante de una matriz

Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n \geq 2$ , entonces el determinante de  $A$  es la suma de los elementos en el primer renglón de  $A$  multiplicados por sus respectivos cofactores. Esto es

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Intente verificar que, para matrices de  $2 \times 2$ , esta definición da como resultado

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

como lo habíamos definido previamente.

Cuando utilice esta definición para evaluar un determinante, use la **expansión por cofactores en el primer renglón**. Este procedimiento se demuestra en el ejemplo 3.

Determinante de una matriz de orden  $3 \times 3$ 

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## SOLUCIÓN

Esta matriz es la misma del ejemplo 2. Ahí determinó que los cofactores de los elementos del primer renglón son

$$C_{11} = -1, \quad C_{12} = 5, \quad C_{13} = 4.$$

Por la definición de determinante, tiene

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} && \text{Expansión del primer renglón} \\ &= 0(-1) + 2(5) + 1(4) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Aunque el determinante se define como una expansión por cofactores del primer renglón, puede demostrarse que el determinante puede ser evaluado por la expansión de cualquier renglón o columna. Por ejemplo, usted puede expandir la matriz de  $3 \times 3$  del ejemplo 3 por el segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} && \text{Expansión del segundo renglón} \\ &= 3(-2) + (-1)(-4) + 2(8) \\ &= 14 \end{aligned}$$

o por la primera columna para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} && \text{Expansión de la primera columna} \\ &= 0(-1) + 3(-2) + 4(5) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Intente otras posibilidades para confirmar que el determinante de  $A$  puede evaluarse por la expansión de *cualquier* renglón o columna. Esto se establece en el siguiente teorema, Expansión de Laplace de un determinante, nombrado así en honor del matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

**TEOREMA 3.16 Expansión por cofactores**

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $i$  y  $j$  seleccionados de entre la lista:  $1, 2, \dots, n$ . Entonces el determinante de  $A$  está dado por

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad \text{Expansión del } i\text{-ésimo renglón}$$

o

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}. \quad \text{Expansión de la } j\text{-ésima columna}$$

Cuando expanda por cofactores no necesita evaluar los cofactores de los elementos nulos debido a que el cofactor de un elemento nulo siempre es cero.

$$\begin{aligned} a_{ij}C_{ij} &= (0)C_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

El renglón (o columna) que contiene más ceros es a menudo la mejor elección para la expansión por cofactores. Esto es demostrado en el siguiente ejemplo.

**Determinante de una matriz de orden 4**

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

**SOLUCIÓN**

Por inspección de esta matriz puede verse que tres de los elementos en la tercera columna son ceros. Puede evitar algo de trabajo en la expansión utilizando la tercera columna.

$$|A| = 3(C_{13}) + 0(C_{23}) + 0(C_{33}) + 0(C_{43})$$

Como  $C_{23}$ ,  $C_{33}$  y  $C_{43}$  tienen coeficientes cero, usted sólo necesita encontrar el cofactor  $C_{13}$ . Para hacer esto, suprima el primer renglón y la tercera columna de  $A$  y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$\begin{aligned} C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} && \text{Elimine la primera y tercera columna.} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Expandiendo por cofactores el segundo renglón da como resultado

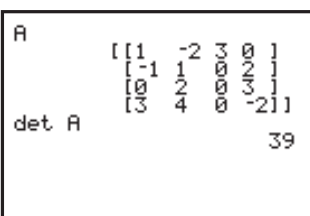
$$\begin{aligned} C_{13} &= (0)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2(1)(-4) + 3(-1)(-7) \\ &= 13. \end{aligned}$$

Usted obtiene

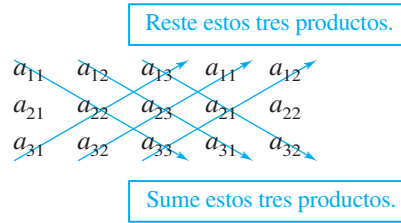
$$\begin{aligned} |A| &= 3(13) \\ &= 39. \end{aligned}$$

**NOTA TECNOLÓGICA**

Muchas de las aplicaciones gráficas y programas de computadora tienen la capacidad de calcular el determinante de una matriz cuadrada. Si utiliza una aplicación gráfica, entonces podría ver algo similar a lo siguiente para el Ejemplo 4. en la **Online Technology Guide**, disponible en [college.cengage.com/pic/larsonELA6e](http://college.cengage.com/pic/larsonELA6e).



Hay un método alternativo usado comúnmente para evaluar el determinante de una matriz  $A$  de  $3 \times 3$ . Para aplicar este método, copie la primera y la segunda columna de  $A$  para formar la cuarta y la quinta columna. El determinante de  $A$  se obtiene después sumando (o restando) los productos de las seis diagonales, como se muestra en el siguiente diagrama.



Intente confirmar que el determinante de  $A$  es

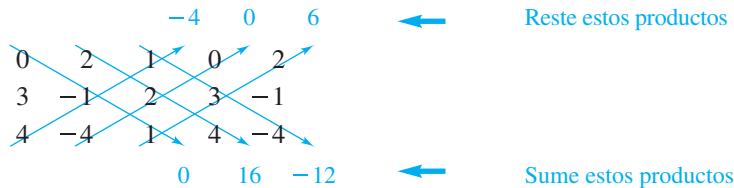
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

### Determinante de una matriz de orden 3

Encuentre el determinante de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ .

#### SOLUCIÓN

Comience copiando las primeras dos columnas y luego calcule los seis productos de la diagonal como sigue.



Ahora, sumando los tres productos de abajo y restando los tres de arriba, usted puede encontrar que el determinante de

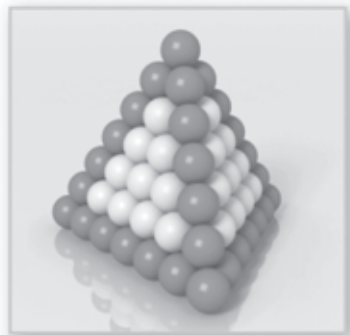
$$|A| = 0 + 16 + (-12) - (-4) - 0 - 6 = 2.$$

El proceso ilustrado en el ejemplo 5 *sólo* es válido para matrices de orden 3. Para matrices de orden mayor debe usarse otro método.



#### Simulación

Para explorar este concepto por medio de una simulación electrónica y para comandos y sintaxis de programación, revise las aplicaciones y programas de computadora implicados en el ejemplo 5. Visite [college.cengage.com/pic/larsonELA6e](http://college.cengage.com/pic/larsonELA6e). Ejemplos y ejercicios similares están disponibles en este sitio.



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Si  $x$ ,  $y$  y  $z$  son funciones continuas de  $u$ ,  $v$  y  $w$  con primeras derivadas parciales continuas, entonces las **Jacobianos**  $J(u, v)$  y  $J(u, v, w)$  se definen como los determinantes

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Un uso práctico de los Jacobianos es la determinación del volumen de una región sólida.

## Matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## MATRICES TRIANGULARES

Recuerde de la sección 3.4 que una matriz cuadrada es llamada *triangular superior* si todos sus elementos bajo la diagonal principal son cero, y *triangular inferior* si todos sus elementos sobre la diagonal principal son cero. Una matriz que tiene ambas características es denominada **diagonal**. Es decir, una matriz diagonal es aquella en la que todos los elementos arriba y abajo de la diagonal principal son cero.

Para encontrar el determinante de una matriz diagonal, simplemente formamos el producto de la diagonal principal. Esta parte de la oración es redundante, es fácil observar que el procedimiento es válido para una matriz de orden 2 ó 3. Por ejemplo, el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puede determinarse por la expansión del tercer renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= 0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(1)(-2) = -6 \end{aligned}$$

que es el producto de las entradas de la diagonal principal.

**TEOREMA 3.17** Determinante de una matriz triangular

Si  $A$  es una matriz triangular, superior o inferior, de orden  $n$ , entonces su determinante es el producto de los elementos en la diagonal principal, esto es

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}.$$

## DEMOSTRACIÓN

Puede utilizar *inducción matemática* para demostrar este teorema para el caso en el que  $A$  es una matriz triangular superior. El caso en el que  $A$  es una matriz triangular inferior se demuestra de manera similar. Si  $A$  es de orden 1, entonces  $|A| = [a_{11}]$  y el determinante es  $|A| = a_{11}$ . Suponiendo que el teorema es válido para cualquier matriz triangular superior de orden  $k - 1$ , considere una matriz triangular superior de orden  $k$ . Expandiendo el  $k$ -ésimo renglón, obtiene

$$|A| = 0C_{k1} + 0C_{k2} + \cdots + 0C_{k(k-1)} + a_{kk}C_{kk} = a_{kk}C_{kk}.$$

Ahora, observe que  $C_{kk} = (-1)^{2k}M_{kk}$ , donde  $M_{kk}$  es el determinante de la matriz triangular superior formada por la supresión del  $k$ -ésimo renglón y la  $k$ -ésima columna de  $A$ . Ya que esta matriz es de orden  $k - 1$ , usted puede aplicar la inducción para escribir

$$|A| = a_{kk}M_{kk} = a_{kk}(a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{k-1, k-1}) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{kk}. \quad \blacksquare$$

## Determinante de una matriz triangular

Encuentre el determinante de cada matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

es

$$|A| = (2)(-2)(1)(3) = -12. \quad \blacksquare$$

## 3.5 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**El determinante de una matriz** En los ejercicios 1 a 12, encuentre el determinante de la matriz.

1.  $[1]$
2.  $[-3]$
3.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
4.  $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
5.  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$
6.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
7.  $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$
8.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$
9.  $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
10.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$
11.  $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 4 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$
12.  $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

**Encontrar los menores y cofactores de una matriz** En los ejercicios 13 a 16, encuentre (a) los menores y (b) los cofactores de la matriz.

13.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
14.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
15.  $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
16.  $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

17. Encuentre el determinante de la matriz del ejercicio 15 aplicando el método de expansión por cofactores. (a) Use el segundo renglón y (b) la segunda columna.
18. Encuentre el determinante de la matriz del ejercicio 16, aplicando el método de expansión por cofactores. Use (a) el tercer renglón y (b) la tercera columna.

**Encontrar un determinante** En los ejercicios 19 a 32, use expansión por cofactores para encontrar el determinante de la matriz.

19.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
20.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
21.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
22.  $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
23.  $\begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$
24.  $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$
25.  $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
26.  $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$27. \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad 28. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$29. \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 21 & -15 & 24 & 30 \\ -10 & 24 & -32 & 18 \\ -40 & 22 & 32 & -35 \end{bmatrix}$$

$$30. \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 10 & 15 & -25 & 30 \\ -30 & 20 & -15 & -10 \\ 30 & 35 & -25 & -40 \end{bmatrix}$$

$$31. \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$32. \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 13 & 12 \\ 6 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

**Encontrar un determinante** En los Ejercicios 33 y 34, use el método demostrado en el Ejemplo 5 para encontrar el determinante de la matriz.

$$33. \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 34. \begin{bmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$



**Encontrar un determinante** En los ejercicios 35 a 38, utilice una aplicación gráfica o un software de computadora con capacidades matriciales para encontrar el determinante de la matriz.

$$35. \begin{bmatrix} 0.25 & -1 & 0.6 \\ 0.50 & 0.8 & -0.2 \\ 0.75 & 0.9 & -0.4 \end{bmatrix} \quad 36. \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$



$$37. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



$$38. \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 6 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -8 & 4 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**Encontrar el determinante de una matriz triangular** En los ejercicios 39 a 42, encuentre el determinante de la matriz triangular.

39.  $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$       40.  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

41.  $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       42.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 43 y 44, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

43. (a) El determinante de la matriz  $A$  de  $2 \times 2$  es  $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ .  
 (b) El determinante de una matriz de orden 1 es el elemento de la matriz.  
 (c) El cofactor  $ij$  de una matriz cuadrada  $A$  es la matriz definida por la cancelación del  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $A$ .
44. (a) Para encontrar el determinante de una matriz triangular, sume los elementos de la diagonal principal.  
 (b) El determinante de una matriz puede ser evaluado aplicando expansión por cofactores en cualquier renglón o columna.  
 (c) Cuando se expande por cofactores no es necesario evaluar los cofactores de los elementos nulos.

**Resolución de una ecuación** En los ejercicios 45 a 48, resuelva para  $x$ .

45.  $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$       46.  $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

47.  $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$       48.  $\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

**Resolución de una ecuación** En los ejercicios 49 a 52, encuentre los valores de  $\lambda$  para los que el determinante es cero.

49.  $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$       50.  $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

51.  $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$       52.  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

**Entradas que involucran expresiones** En los ejercicios 53 a 58, evalúe el determinante en donde los elementos son funciones. Determinantes de este tipo ocurren cuando se hacen cambios de variables en cálculo.

53.  $\begin{vmatrix} 4u & -1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}$       54.  $\begin{vmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

55.  $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}$       56.  $\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}$

57.  $\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1/x \end{vmatrix}$       58.  $\begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & 1 + \ln x \end{vmatrix}$

59. El determinante de una matriz de  $2 \times 2$  implica dos productos. El determinante de una matriz de  $3 \times 3$  implica seis productos triples. Demuestre que el determinante de una matriz de  $4 \times 4$  implica 24 productos cuádruples.
60. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales  
 $ax + by = e$   
 $cx + dy = f$   
 tiene una única solución si y sólo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

**Verificación de una ecuación** En los ejercicios 61 a 66, evalúe los determinantes para verificar la ecuación.

61.  $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y & z \\ w & x \end{vmatrix}$

62.  $\begin{vmatrix} w & cx \\ y & cz \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix}$

63.  $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & x+cw \\ y & z+cy \end{vmatrix}$       64.  $\begin{vmatrix} w & x \\ cw & cx \end{vmatrix} = 0$

65.  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

66.  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

67. Dada la ecuación  
 $\begin{vmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c.$   
 (a) Verifique la ecuación.  
 (b) Use la ecuación como un modelo para encontrar un determinante que sea igual a  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

**68. REMATE** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , explique cómo encontrar lo siguiente.

(a) El menor  $M_{ij}$  de la entrada  $a_{ij}$ .  
 (b) El cofactor  $C_{ij}$  de la entrada  $a_{ij}$ .  
 (c) El determinante de  $A$ .

69. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales  
 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$   
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$   
 tiene la solución  
 $x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$  y  $x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$   
 cuando  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ .

## 3.6 Determinantes y operaciones elementales

- Utilice operaciones elementales por renglón para evaluar un determinante.
- Utilice operaciones elementales por columna para evaluar un determinante.
- Reconozca las condiciones que generan determinantes cero.

### DETERMINANTES Y OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLÓN

¿Cuál de los siguientes determinantes es más fácil de evaluar?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -9 & -3 \\ 3 & -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Puesto que usted ya sabe acerca del determinante de una matriz triangular, está claro que el segundo determinante es *mucho* más fácil de evaluar. Este determinante es simplemente el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir,  $|B| = (1)(2)(-3)(-1) = 6$ . Por otra parte, usar expansión por cofactores (la única técnica aplicada antes) para evaluar el primer determinante es confuso. Por ejemplo, si expande por cofactores a lo largo del primer renglón, tiene

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 4 & -9 & -3 \\ -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -9 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Evaluando los determinantes de estas cuatro matrices de  $3 \times 3$  se obtiene

$$|A| = (1)(-60) + (2)(39) + (3)(-10) - (1)(-18) = 6.$$

Note que  $|A|$  y  $|B|$  tienen el mismo valor. De hecho, usted puede obtener la matriz  $B$  al realizar operaciones elementales con renglones en la matriz  $A$ . En esta sección, verá los efectos de operaciones elementales con renglones (o columnas) en el valor de un determinante.

#### Efectos de las operaciones elementales con renglones en un determinante

a. La matriz  $B$  fue obtenida a partir de  $A$  por intercambio de los renglones de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

b. La matriz  $B$  fue obtenida a partir de  $A$  al sumar  $-2$  veces el primer renglón de  $A$  al segundo renglón de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

c. La matriz  $B$  fue obtenida a partir de  $A$  al multiplicar el primer renglón de  $A$  por  $\frac{1}{2}$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

En el ejemplo 1, puede observar que al intercambiar dos renglones de una matriz cambia el signo de su determinante. Sumar un múltiplo de un renglón a otro no cambia el determinante. Finalmente, multiplicar un renglón por una constante diferente de cero, multiplica el determinante por la misma constante. El siguiente teorema generaliza estas observaciones.

**COMENTARIO**

Observe que la tercera propiedad del teorema 3.18 le permite dividir un renglón entre un factor común. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Factor 2 del primer renglón.



**TEOREMA 3.18 Determinantes y operaciones elementales con renglones**

Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas.

1. Si  $B$  es obtenida a partir de  $A$  al intercambiar dos renglones, entonces  $\det(B) = -\det(A)$ .
2. Si  $B$  es obtenida a partir de  $A$  al sumar un múltiplo de un renglón de  $A$  a otro renglón de  $A$ , entonces  $\det(B) = \det(A)$ .
3. Si  $B$  es obtenida a partir de  $A$  al multiplicar un renglón de  $A$  por una constante  $c$  diferente de cero, entonces  $\det(B) = c \det(A)$ .

**DEMOSTRACIÓN**

Para probar la propiedad 1, utilice inducción matemática como sigue. Las demostraciones de las otras dos propiedades se dejan como ejercicios (Véanse los ejercicios 47 y 48). Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de  $2 \times 2$  tales que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Entonces, usted tiene  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  y  $|B| = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$ , así que  $|B| = -|A|$ . Ahora suponga que la propiedad es cierta para matrices de orden  $(n - 1)$ . Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  tal que  $B$  se obtiene a partir del intercambio de dos renglones de  $A$ . Entonces, para encontrar  $|A|$  y  $|B|$ , expanda otro renglón junto con los dos renglones intercambiados. Por inducción, los cofactores de  $B$  pueden ser los negativos de los cofactores de  $A$ , ya que las matrices correspondientes de  $(n - 1) \times (n - 1)$  tienen dos renglones intercambiados. Finalmente,  $|B| = -|A|$  y la demostración está completa. ■

El teorema 3.18 proporciona una manera práctica para evaluar determinantes. Para encontrar el determinante de una matriz  $A$ , aplique operaciones elementales con renglones para obtener una matriz  $B$  triangular equivalente por renglones a  $A$ . Para cada paso en el proceso de eliminación, utilice el teorema 3.18 para determinar el efecto de la operación elemental con renglones en el determinante. Finalmente, encuentre el determinante de  $B$  multiplicando los elementos de su diagonal principal. Este proceso se demuestra en el siguiente ejemplo.



**Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)**

Las contribuciones de Cauchy al estudio de las matemáticas fueron revolucionarias, y a menudo se le reconoce por imponerles rigor a las matemáticas modernas. Por ejemplo, fue el primero en definir rigurosamente límites, continuidad y la convergencia de una serie infinita. Además de ser conocido por su trabajo en análisis complejo, contribuyó a las teorías de determinantes y ecuaciones diferenciales. Es interesante considerar que el trabajo de Cauchy con determinantes antecedió al desarrollo de matrices de Cayley.

**Evaluación de un determinante utilizando operaciones elementales con renglones**

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

**SOLUCIÓN**

Aplicando operaciones elementales con renglones, reescriba  $A$  en la forma triangular de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Intercambie los dos primeros renglones} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Sume } -2 \text{ veces el primer renglón al segundo para producir un nuevo segundo renglón} \\ &= -21 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Factorice } -7 \text{ fuera del segundo renglón} \\ &&& \leftarrow \text{Factor } -3 \text{ fuera del tercer renglón} \end{aligned}$$

Ahora, debido a que la matriz final es triangular, puede concluir que el determinante es

$$|A| = -21(1)(1)(1) = -21.$$

## DETERMINANTES Y OPERACIONES ELEMENTALES CON COLUMNAS

Aunque el teorema 3.18 se establece en términos de operaciones elementales con *renglones*, se mantiene válido si la palabra “columna” reemplaza al término “renglón”. Las operaciones realizadas en las columnas (más que en los renglones) de una matriz se denominan **operaciones elementales con columnas** y dos matrices son llamadas **equivalentes por columnas** si una puede ser obtenida a partir de la otra por operaciones elementales con columnas. La versión del teorema 3.18 para el caso de operaciones con columnas se ilustra enseguida.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Intercambie las primeras dos columnas

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Factorice 2 fuera de la primera columna

Al evaluar un determinante a mano, ocasionalmente convendrá usar operaciones elementales con columnas, como se muestra en el ejemplo 3.

### Evaluación de un determinante usando operaciones elementales con columnas

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

Como las dos primeras columnas de  $A$  son múltiplos una de otra, usted puede obtener una columna de ceros sumando dos veces la primera columna a la segunda, de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Hasta este punto, no es necesario que reescriba la matriz en forma triangular. Como existe una columna completa de ceros, concluimos que el determinante es cero. La validez de esta conclusión proviene del teorema 3.16. Específicamente, al expandir por cofactores a lo largo de la segunda columna, tiene

$$\begin{aligned} |A| &= (0)C_{12} + (0)C_{22} + (0)C_{32} \\ &= 0. \end{aligned}$$



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En el juego de colocación de números Sudoku, la finalidad es llenar una retícula parcialmente completada de  $9 \times 9$  recuadros con números del 1 al 9 de manera que cada columna, renglón y subretícula de  $3 \times 3$  contenga cada uno de estos números sin repetición. Para que una retícula de Sudoku completa sea válida, dos renglones (o columnas) no pueden tener los números en el mismo orden. Si esto pasara en un renglón o columna, entonces el determinante de la matriz formada por los números en la retícula será cero. Ése es un resultado directo de la condición 2 del Teorema 3.19 en la siguiente página.

## MATRICES Y DETERMINANTES CERO

El ejemplo 3 muestra que una de las columnas de la matriz es un múltiplo escalar de otra columna, por lo que puede concluir de inmediato que el determinante de la matriz es cero. Esta es una de tres condiciones, listadas enseguida, que generan un determinante cero.

### TEOREMA 3.19 Condiciones que generan un determinante cero

Si  $A$  es una matriz cuadrada y una de las siguientes condiciones es cierta, entonces  $\det(A) = 0$ .

1. Un renglón (o columna) consta completamente de ceros.
2. Dos renglones (o columnas) son iguales.
3. Un renglón (o columna) es un múltiplo de otro renglón (o columna).

### DEMOSTRACIÓN

Verifique cada parte de este teorema aplicando operaciones elementales con renglones y expansión por cofactores. Por ejemplo, si un renglón o una columna están formados completamente de ceros, entonces cada cofactor en la expansión es multiplicado por cero. Si la condición 2 ó 3 es cierta, puede aplicar operaciones elementales con renglones o columnas para crear un renglón o columna formados completamente de ceros.

Reconociendo las condiciones listadas en el teorema 3.4 podemos evaluar un determinante más fácilmente. Por ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

El primer renglón consta completamente de ceros

El primer y el tercer renglones son iguales

La tercera columna es múltiplo de la primera

No podemos concluir, sin embargo, que el teorema 3.19 proporciona las *únicas* condiciones que producen un determinante cero. A menudo, este teorema se usa indirectamente. Es decir, usted puede comenzar con una matriz que no satisfaga ninguna de las condiciones del teorema 3.19 y, por medio de operaciones elementales con renglones o columnas, obtener una matriz que cumpla una de las condiciones. Este proceso se muestra en el ejemplo 4.

### Matriz con determinante cero

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix}.$$

### SOLUCIÓN

Sumando  $-2$  veces el primer renglón al segundo se produce

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, ya que el segundo y el tercer renglones son múltiplos uno de otro, puede concluir que el determinante es cero.

En el ejemplo 4, usted pudo obtener una matriz con un renglón completo de ceros al realizar una operación elemental con renglones adicional (sumar 2 veces el segundo renglón al tercero). Esto en general es cierto, es decir, una matriz cuadrada tiene un determinante cero si y sólo si uno de estos renglones (o columnas) son equivalentes a una matriz que tiene al menos un renglón (o columna) formado completamente de ceros. Esto se demostrará en la siguiente sección.

Usted tiene ahora dos métodos de reconocimiento para evaluar determinantes. De ellos, el método de aplicar operaciones elementales con renglones o columnas para reducir una matriz a la forma triangular es más rápido que el de expansión por cofactores a lo largo de un renglón o una columna. Si la matriz es grande, entonces el número de operaciones necesarias para una expansión por cofactores puede volverse extremadamente grande. Por esta razón, muchos algoritmos de computadora y de calculadora usan el método que aplica operaciones elementales con renglones o columnas. La siguiente tabla muestra el número de sumas (más restas) y las multiplicaciones (más divisiones) necesarias para cada uno de estos dos métodos para matrices de orden 3, 5 y 10.

Orden $n$	<i>Expansión por cofactores</i>		<i>Reducción de renglones</i>	
	Sumas	Multiplicaciones	Sumas	Multiplicaciones
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3,628,799	6,235,300	285	339

De hecho, el número de operaciones para la expansión por cofactores de una matriz de una matriz  $n \times n$  es  $n!$ . Como  $30! \approx 2.65 \times 10^{32}$ , incluso una matriz relativamente pequeña de  $30 \times 30$  puede requerir de más de  $10^{32}$  operaciones. Si una computadora puede realizar un billón de operaciones por segundo, le tomaría más de un billón de años calcular el determinante de esta matriz aplicando expansión por cofactores. Sin embargo, la reducción de renglones sólo toma algunos segundos.

Cuando evalúa un determinante *a mano*, usted puede ahorrarse algunos pasos aplicando operaciones elementales con renglones (o columnas) para formar un renglón (o columna) completamente de ceros excepto en una posición y entonces usar expansión por cofactores para reducir el orden de la matriz a 1. Este planteamiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

### Evaluación de un determinante

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

Observe que la matriz  $A$  tiene un cero en el tercer renglón. Usted puede crear otro cero en el tercer renglón al sumar dos veces la primera columna a la tercera, como sigue.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por cofactores a lo largo del tercer renglón se produce

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3(1)(-1) = 3.$$

## Evaluación de un determinante

Evalúe el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

## SOLUCIÓN

Ya que la segunda columna de esta matriz tiene dos ceros, se elige para expansión por cofactores. Dos ceros adicionales pueden generarse en la segunda columna al sumar el segundo renglón al cuarto y después sumando  $-1$  vez el segundo renglón al quinto.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Como ya tiene dos ceros en el cuarto renglón, lo elige para la siguiente expansión por cofactores. Sume  $-3$  veces la cuarta columna a la primera para producir lo siguiente

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & -2 \\ -8 & -1 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & 6 & -4 \\ -0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-1)^8 \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Suma el segundo renglón al primero y luego expanda por cofactores a lo largo del primer renglón.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0 & 0 & 5 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5(1)(-27) \\ &= -135 \end{aligned}$$

## 3.6 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Propiedades de determinantes** En los ejercicios 1 a 20, ¿cuál propiedad de los determinantes es ilustrada por la ecuación?

$$1. \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2. \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 12 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$4. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -7 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 3 & -12 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 6 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 25 & -30 & 40 \\ -15 & 5 & 20 \end{vmatrix} = 5^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 8 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 19 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 17 & -11 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 5 & -7 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 15 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$20. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 9 \\ 9 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



**Encontrar un determinante** En los ejercicios 21 a 24, use cualquier operación elemental con renglones o columnas, o expansión por cofactores, para evaluar el determinante a mano. Después, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora para verificar su respuesta.

$$21. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Encontrar un determinante** En los ejercicios 25 a 36, utilice operaciones elementales con renglones o columnas para evaluar el determinante.

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$31. \begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$32. \begin{vmatrix} 9 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

33. 
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 9 \\ 3 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

34. 
$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

35. 
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

36. 
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 37 y 38, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

37. (a) Intercambiar dos renglones de una matriz dada cambia el signo de su determinante.  
 (b) Multiplicar un renglón de una matriz por una constante diferente de cero da como resultado el determinante multiplicado por la misma constante diferente de cero.  
 (c) Si dos renglones de una matriz cuadrada son iguales, entonces su determinante es 0.
38. (a) Sumar un múltiplo de un renglón de una matriz a otro renglón sólo cambia el signo del determinante.  
 (b) Dos matrices son equivalentes por columnas si una matriz puede ser obtenida al realizar en la otra operaciones elementales con columnas.  
 (c) Si un renglón de una matriz cuadrada es un múltiplo de otro renglón, entonces el determinante es 0.

**Encontrar el determinante de una matriz elemental** En los ejercicios 39 a 42, encuentre el determinante de la matriz elemental. (Suponga  $k \neq 0$ .)

39. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

40. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

41. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

42. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

43. **Prueba** Demuestre la propiedad.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + b_{21}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + b_{31}) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

44. **Prueba** Demuestre la propiedad.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

45. Encuentre cada determinante.

(a)  $\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$  (b)  $\begin{vmatrix} \sin \theta & 1 \\ 1 & \sin \theta \end{vmatrix}$

**46. REMATE** Evalúe cada determinante cuando  $a = 1, b = 4, y c = -3$ .

(a)  $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$  (b)  $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & -16 \end{vmatrix}$

47. **Demostración guiada** Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.18: si  $B$  es obtenida a partir de  $A$  al sumar un múltiplo de un renglón de  $A$  a otro renglón de  $A$ , entonces  $\det(B) = \det(A)$ .

Inicio: para demostrar que el determinante de  $B$  es igual al determinante de  $A$ , usted necesita demostrar que sus respectivas expansiones por cofactores son iguales.

- Comience su demostración haciendo que  $B$  sea la matriz obtenida al sumar  $c$  veces el  $j$ -ésimo renglón de  $A$  al  $i$ -ésimo renglón de  $A$ .
- Encuentre el determinante de  $B$  por expansión a lo largo de este  $i$ -ésimo renglón de  $A$ .
- Distribuya y después agrupe los términos que contengan un coeficiente de  $c$  y aquellos que no lo contengan.
- Demuestre que la suma de los términos que no contienen un coeficiente de  $c$  es el determinante de  $A$  y la suma de los términos que contienen un coeficiente de  $c$  es igual a cero.

48. **Demostración guiada** Demuestre la propiedad 3 del teorema 3.18: si  $B$  es obtenida a partir de  $A$  por la multiplicación de un renglón de  $A$  por una constante  $c$  diferente de cero, entonces  $\det(B) = c \det(A)$ .

Inicio: para demostrar que el determinante de  $B$  es igual a  $c$  veces el determinante de  $A$ , usted necesita demostrar que el determinante de  $B$  es igual a  $c$  veces la expansión por cofactores del determinante de  $A$ .

- Comience su demostración haciendo que  $B$  sea la matriz obtenida al multiplicar  $c$  veces el  $i$ -ésimo renglón de  $A$ .
- Encuentre el determinante de  $B$  por expansión a lo largo de este  $i$ -ésimo renglón.
- Obtenga el factor común  $c$ .
- Demuestre que este resultado es  $c$  veces el determinante de  $A$ .

## 3.7 Propiedades de los determinantes

- Encuentre el determinante de una matriz producto y un múltiplo escalar de una matriz.
- Encuentre el determinante de una matriz inversa y reconozca las condiciones equivalentes para una matriz no singular.
- Encuentre el determinante de la transpuesta de una matriz.

### MATRIZ PRODUCTO ESCALARES MÚLTIPLES

En esta sección aprenderá algunas propiedades importantes de los determinantes. Empezaremos considerando el determinante del producto de dos matrices.

#### Determinante de una matriz producto

Encuentre  $|A|$ ,  $|B|$  y  $|AB|$  para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

#### SOLUCIÓN

Utilizando las técnicas descritas en las secciones anteriores, usted puede demostrar que  $|A|$  y  $|B|$  tienen los valores

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 11.$$

La matriz producto  $AB$  es

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando las mismas técnicas, puede demostrar que  $|AB| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -77$ . ■

En el ejemplo 1, observe que  $|AB| = |A||B|$ , o  $-77 = (-7)(11)$ . Esto es cierto en general, como se indica en el siguiente teorema.

#### TEOREMA 3.20 Determinante de una matriz producto

Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de orden  $n$ , entonces  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Para empezar, observe que si  $E$  es una matriz elemental, entonces, por el teorema 3.18 las siguientes afirmaciones son ciertas. Si  $E$  es obtenida a partir de  $I$  por intercambio de dos renglones, entonces  $|E| = -1$ . Si  $E$  es obtenida por la multiplicación de un renglón de  $I$  por una constante  $c$  diferente de cero, entonces  $|E| = c$ . Si  $E$  es obtenida por la suma del múltiplo de un renglón de  $I$  con otro renglón de  $I$ , entonces  $|E| = 1$ . Adicionalmente, por el teorema 3.12, si  $E$  es el resultado de efectuar una operación elemental con un renglón de  $I$  y la misma operación elemental se ejecuta con un renglón de  $B$ , entonces resulta la matriz  $EB$ . Así tenemos que  $|EB| = |E| |B|$ .

#### COMENTARIO

El teorema 3.20 puede extenderse para incluir el producto de cualquier número finito de matrices. Esto es,

$$\begin{aligned} |A_1 A_2 A_3 \cdots A_k| \\ = |A_1| |A_2| |A_3| \cdots |A_k|. \end{aligned}$$



Esto puede generalizarse para concluir que  $|E_k \dots E_2 E_1 B| = |E_k| \dots |E_2| |E_1| |B|$ , donde  $E_i$  es una matriz elemental. Ahora considere la matriz  $AB$ . Si  $A$  es *no singular*, entonces, por el teorema 3.14, puede escribirse como el producto de matrices elementales  $A = E_k \dots E_2 E_1$  y usted puede escribir como

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_k \dots E_2 E_1 B| \\ &= |E_k| \dots |E_2| |E_1| |B| = |E_k \dots E_2 E_1| |B| = |A| |B|. \end{aligned}$$

Si  $A$  es *singular*, entonces es equivalente por renglones a una matriz con un renglón entero formado de ceros. A partir del teorema 3.19, usted puede concluir que  $|A| = 0$ . Más aún, como  $A$  es singular, se tiene que  $AB$  también es singular. (Si  $AB$  fuera no singular, entonces  $A[B(AB)^{-1}] = I$  implicaría que  $A$  es no singular.) Así,  $|AB| = 0$  y puede concluir que  $|AB| = |A| |B|$ . ■

La relación entre  $|A|$  y  $|cA|$  se muestra en el siguiente teorema.

### TEOREMA 3.21 Determinante de un escalar múltiplo de una matriz

Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $c$  es un escalar, entonces el determinante de  $cA$  está dado por

$$\det(cA) = c^n \det(A).$$

### DEMOSTRACIÓN

Esta fórmula puede obtenerse por la repetida aplicación de la propiedad 3 del teorema 3.18. Factorice el escalar  $c$  de los  $n$  renglones de  $|cA|$  para obtener

$$|cA| = c^n |A|. \quad \blacksquare$$

### Determinante de un escalar múltiplo de una matriz

Encuentre el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

Como

$$A = 10 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

usted puede aplicar el teorema 3.6 para concluir que

$$|A| = 10^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1000(5) = 5000. \quad \blacksquare$$

Los teoremas 3.20 y 3.21 proporcionan fórmulas para evaluar los determinantes del producto de dos matrices y un múltiplo escalar de una matriz. Sin embargo, estos teoremas no incluyen la fórmula para el determinante de la suma de dos matrices. Es importante observar que la suma de los determinantes de dos matrices a menudo no es igual al determinante de la suma. En general, esto es  $|A| + |B| \neq |A + B|$ . Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces  $|A| = 2$  y  $|B| = -3$ , pero  $A + B = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  y  $|A + B| = -18$ .

## DETERMINANTES Y LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Ya hemos verificado que algunas matrices cuadradas no son invertibles. También resulta difícil decir simplemente por inspección si una matriz tiene o no inversa. ¿Podría decir cuál de las siguientes matrices es invertible?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema muestra que los determinantes son útiles para clasificar las matrices cuadradas invertibles.

### TEOREMA 3.22 Determinante de una matriz invertible

Una matriz cuadrada  $A$  es invertible (no singular) si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

### DEMOSTRACIÓN

Para demostrar el teorema en una dirección, suponga que  $A$  es invertible. Entonces  $AA^{-1} = I$ , y por el teorema 3.20 puede escribir  $|A||A^{-1}| = |I|$ . Ahora, como  $|I| = 1$ , usted sabe que tampoco el determinante de la izquierda es cero. Específicamente,  $|A| \neq 0$ .

Para demostrar el teorema en otra dirección, suponga que el determinante de  $A$  es diferente de cero. Entonces, aplicando la eliminación de Gauss-Jordan, encuentre una matriz  $B$  en la forma escalonada-reducida por renglones que sea equivalente por renglones a  $A$ . Como  $B$  está en la forma escalonada-reducida por renglones, esta debe ser la matriz identidad o debe contener al menos un renglón formado por ceros. Pero si  $B$  tiene un renglón completo de ceros, entonces por el teorema 3.19 usted sabe que  $|B| = 0$ , lo cual puede implicar que  $|A| = 0$ . Debido a que supuso que  $|A|$  es diferente de cero, puede concluir que  $B = I$ .  $A$  es, por tanto, equivalente por renglones a la matriz identidad y por el teorema 3.15 usted sabe que  $A$  es invertible. ■

## DES-CUBRI-MIENTO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora para encontrar  $A^{-1}$ .
2. Compare  $\det(A^{-1})$  con  $\det(A)$ .
3. Haga una conjetura sobre el determinante de la inversa de una matriz.

### Clasificación de matrices cuadradas como singulares o no singulares

¿Cuál de las siguientes matrices tiene inversa?

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b. } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

puede concluir que esta matriz no tiene inversa (es singular).

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

puede concluir que esta matriz tiene una inversa (es no singular). ■

En el teorema siguiente se brinda una forma práctica de hallar el determinante de la inversa de una matriz.

### TEOREMA 3.23 Determinante de la inversa de una matriz

Si  $A$  es una matriz  $n \times n$  invertible, entonces  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**DEMOSTRACIÓN**

Debido a que  $A$  es invertible,  $AA^{-1} = I$ , y usted puede aplicar el teorema 3.20 para concluir que  $|A| |A^{-1}| = |I| = 1$ . Como  $A$  es invertible, también sabe que  $|A| \neq 0$  y puede dividir cada lado entre  $|A|$  para obtener

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$



**Determinante de la inversa de una matriz**

Encuentre  $|A^{-1}|$  para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**SOLUCIÓN**

Una manera de resolver este problema es encontrar  $A^{-1}$  y después evaluar su determinante. Sin embargo, es más fácil aplicar el teorema 3.23 como sigue. Encuentre el determinante de  $A$ ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

y luego aplique la fórmula  $|A^{-1}| = 1/|A|$  para concluir que  $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$ .



Observe que el teorema 3.22 proporciona otra condición de equivalencia que puede ser agregada a la lista del teorema 3.15. Las seis condiciones se resumen a continuación.

**Condiciones de equivalencia para una matriz no singular**

Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1.  $A$  es invertible.
2.  $Ax = b$  tiene una única solución para toda matriz columna  $b$  de  $n \times 1$ .
3.  $Ax = 0$  tiene sólo la solución trivial.
4.  $A$  es equivalente por renglones a  $I_n$ .
5.  $A$  puede ser escrita como el producto de dos matrices elementales.
6.  $\det(A) \neq 0$ .

**Sistemas de ecuaciones lineales**

¿Cuál de los siguientes sistemas tiene una única solución?

- |  |  |
|--|--|
| <p><b>a.</b></p> $\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$ | <p><b>b.</b></p> $\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$ |
|--|--|

**SOLUCIÓN**

Del ejemplo 3, usted sabe que las matrices de coeficientes para estos dos sistemas de ecuaciones tienen los siguientes determinantes.

<p><b>a.</b> <math>\begin{vmatrix} 0 &amp; 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -2 &amp; 1 \\ 3 &amp; 2 &amp; -1 \end{vmatrix} = 0</math></p>	<p><b>b.</b> <math>\begin{vmatrix} 0 &amp; 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -2 &amp; 1 \\ 3 &amp; 2 &amp; 1 \end{vmatrix} = -12</math></p>
--	---

Utilizando la lista de condiciones de equivalencia anterior, puede concluir que sólo el segundo sistema tiene una única solución.



**COMENTARIO**

En el ejemplo 4, la inversa de  $A$  es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Intente evaluar el determinante de esta matriz directamente. Después compare su respuesta con la obtenida en el ejemplo 4.



**COMENTARIO**

En la sección 3.6 usted vio que una matriz cuadrada  $A$  puede tener un determinante cero si es equivalente por renglones a una matriz que por lo menos tenga un reglón que conste completamente de ceros. La validez de esta afirmación surge a partir de la equivalencia de las propiedades 4 y 6.



## DETERMINANTES Y LA TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

El siguiente teorema nos dice que el determinante de la transpuesta de una matriz cuadrada es igual al determinante de la matriz original. Este teorema se puede demostrar utilizando inducción matemática y el teorema 3.16, el cual establece que un determinante puede evaluarse aplicando expansión por cofactores a lo largo de un renglón o de una columna. Los detalles de esta demostración se le dejan a usted. (Véase el ejercicio 64.)

### TEOREMA 3.24 Determinante de una transpuesta

Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ , entonces

$$\det(A) = \det(A^T).$$

### Determinante de una transpuesta

Demuestre que  $|A| = |A^T|$  para la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

### SOLUCIÓN

Para encontrar el determinante de  $A$ , expanda por cofactores a lo largo del segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-1)(3) \\ &= -6. \end{aligned}$$

Para encontrar el determinante de

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

expanda por cofactores bajo la *segunda columna* para obtener

$$\begin{aligned} |A^T| &= 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-1)(3) \\ &= -6. \end{aligned}$$

Entonces  $|A| = |A^T|$ .



### ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se presentan a menudo en ingeniería y teoría de control. Para una función  $f(t)$  que está definida por todos los valores positivos de  $t$ , la **transformada de Laplace** de  $f(t)$  está dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Las transformadas de Laplace y la Regla de Cramer, que utiliza determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales, pueden usarse a menudo para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Usted estudiará la Regla de Cramer en la siguiente sección.

# 3.7 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**El determinante de una matriz producto** En los ejercicios 1 a 6, encuentre (a)  $|A|$ , (b)  $|B|$ , (c)  $|AB|$  y (d)  $|A||B|$ . Luego verifique que  $|A||B| = |AB|$ .

1.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

3.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**El determinante de un múltiplo escalar de una matriz** En los ejercicios 7 a 12, use el hecho de que  $|cA| = c^n|A|$  para evaluar el determinante de una matriz de  $n \times n$ .

7.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

8.  $A = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$

9.  $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

10.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{bmatrix}$

11.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix}$

12.  $A = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 10 \\ 30 & 5 & 20 \\ 15 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

**El determinante de una suma matricial** En los ejercicios 13 a 16, encuentre (a)  $|A|$ , (b)  $|B|$ , (c)  $|A + B|$ . Luego verifique que  $|A| + |B| \neq |A + B|$ .

13.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

14.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

15.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Clasificación de matrices como singulares o no singulares** En los ejercicios 17 a 24, use un determinante para decidir qué matriz es singular o no singular.

17.  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

19.  $\begin{bmatrix} 14 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

20.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

21.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22.  $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 8 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 4 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 8 \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & -0.6 & 0.1 \\ -1.2 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & -0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$

**El determinante de la inversa de una matriz** En los ejercicios 25 a 30, encuentre  $|A^{-1}|$ . Comience hallando  $A^{-1}$  y después evalúe su determinante. Verifique su resultado encontrando  $|A|$  y luego aplicando la fórmula del teorema

3.23,  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

25.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

26.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

27.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

28.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

29.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

30.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

**Sistema de ecuaciones lineales** En los ejercicios 31 a 36, use el determinante de la matriz de coeficientes para determinar qué sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución.

$$31. \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad 32. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 2 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{8}{9}x_2 = 1 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**Encontrar determinantes** En los ejercicios 37 a 44, encuentre (a)  $|A^T|$ , (b)  $|A^2|$ , (c)  $|AA^T|$ , (d)  $|2A|$  y (e)  $|A^{-1}|$ .

$$37. A = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad 38. A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$39. A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad 40. A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$41. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 42. A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$43. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$44. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Encontrar determinantes** En los ejercicios 45 a 50, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidades matriciales para encontrar (a)  $|A|$ , (b)  $|A^T|$ , (c)  $|A^2|$ , (d)  $|2A|$  y (e)  $|A^{-1}|$ .

$$45. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad 46. A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$47. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$48. A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$49. A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$50. A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

51. Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas de orden 4 tales que  $|A| = -5$  y  $|B| = 3$ . Encuentre (a)  $|A^2|$ , (b)  $|B^2|$ , (c)  $|A^3|$  y (d)  $|B^4|$ .

**52. REMATE** Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas de orden 3 tales que  $|A| = 4$  y  $|B| = 5$ .

- Encuentre  $|AB|$ .
- Encuentre  $|2A|$ .
- ¿ $A$  y  $B$  son singulares o no singulares? Explique.
- Si  $A$  y  $B$  son no singulares, encuentre  $|A^{-1}|$  y  $|B^{-1}|$ .
- Encuentre  $|(AB)^T|$ .

**Matrices Singulares** En los ejercicios 53 a 56, encuentre el valor(es) de  $k$  tal que  $A$  sea singular.

$$53. A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 \\ 2 & k-2 \end{bmatrix} \quad 54. A = \begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$$

$$55. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & k \end{bmatrix} \quad 56. A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -2 & 0 & -k \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

57. **Prueba** Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $n \times n$  tales que  $AB = I$ . Demuestre que  $|A| \neq 0$  y  $|B| \neq 0$ .

58. **Prueba** Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $n \times n$  tales que  $AB$  es singular. Demuestre que cualquiera de las dos  $A$  o  $B$  es singular.

59. Encuentre dos matrices de  $2 \times 2$  tales que  $|A| + |B| = |A + B|$ .

60. Verifique la ecuación.

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$$

61. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  en la que los elementos de cada renglón suman más de cero. Encuentre  $|A|$ .

62. Ilustre el resultado del ejercicio 61 con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

**63. Demostración guiada** Demuestre que el determinante de una matriz invertible  $A$  es igual a  $\pm 1$  si todos los elementos de  $A$  y  $A^{-1}$  son enteros.

Inicio: denote  $\det(A)$  con  $x$  y  $\det(A^{-1})$  con  $y$ . Observe que  $x$  e  $y$  son números reales. Para demostrar que  $\det(A)$  es igual a  $\pm 1$ , debe demostrar que  $x$  e  $y$  son enteros tales que su producto  $xy$  es igual a 1.

- (i) Utilice la propiedad del determinante de una matriz producto para demostrar que  $xy = 1$ .
- (ii) Use la definición de determinante y el hecho de que los elementos de  $A$  y  $A^{-1}$  son enteros para demostrar que  $x = \det(A)$  y  $y = \det(A^{-1})$  son enteros.
- (iii) Concluya que  $x = \det(A)$  debe ser 1 o  $-1$  debido a que estas son las únicas soluciones enteras para la ecuación  $xy = 1$ .

**64. Demostración guiada** Demuestre el teorema 3.24: si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ , entonces  $\det(A) = \det(A^T)$ .

Inicio: para demostrar que los determinantes de  $A$  y  $A^T$  son iguales, usted necesita demostrar que sus expansiones por cofactores son iguales. Debido a que los cofactores son determinantes  $\pm$  de matrices pequeñas, es necesario utilizar la inducción matemática.

- (i) Paso inicial para la inducción: si  $A$  es de orden 1, entonces  $A = [a_{11}] = A^T$ , así  $\det(A) = \det(A^T) = a_{11}$ .
- (ii) Considere la hipótesis inductiva sostenida para todas las matrices de orden  $n - 1$ . Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Escriba una expresión para el determinante de  $A$  por expansión del primer renglón.
- (iii) Escriba una expresión para el determinante de  $A^T$  por expansión de la primera columna.
- (iv) Compare las expansiones en (ii) y (iii). Los elementos del primer renglón de  $A$  son los mismos que los elementos de la primera columna de  $A^T$ . Compare cofactores (estos son los determinantes  $\pm$  de matrices más pequeñas que son las transpuestas de otras) y utilice la hipótesis inductiva para concluir que estos también son iguales.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 65 y 66, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

- 65.** (a) Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $c$  es un escalar diferente de cero, entonces el determinante de la matriz  $cA$  está dado por  $nc \cdot \det(A)$ .
- (b) Si  $A$  es una matriz invertible, entonces el determinante de  $A^{-1}$  es igual al recíproco del determinante de  $A$ .
- (c) Si  $A$  es una matriz invertible de  $n \times n$ , entonces  $Ax = b$  tiene una única solución para cada  $b$ .

- 66.** (a) En general, el determinante de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus determinantes.
- (b) Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de orden  $n$ , y  $\det(A) = \det(B)$ , entonces  $\det(AB) = \det(A^2)$ .
- (c) Si el determinante de una matriz  $A$  de  $n \times n$  es diferente de cero, entonces  $Ax = 0$  tiene sólo la solución trivial.

**67. Escriba** Sean  $A$  y  $P$  matrices de  $n \times n$ , donde  $P$  es invertible. ¿Es posible que  $P^{-1}AP = A$ ? Ilustre su conclusión con ejemplos apropiados. ¿Qué puede decir sobre los dos determinantes  $|P^{-1}AP|$  y  $|A|$ ?

**68. Escriba** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  diferente de cero que satisface  $A^{10} = O$ . Explique por qué  $A$  debe ser singular. ¿Qué propiedades de los determinantes utilizaría en sus argumentos?

**69. Prueba** Una matriz cuadrada es llamada cuasi-simétrica si  $A^T = -A$ . Demuestre que si  $A$  es una matriz cuasi-simétrica de  $n \times n$ , entonces  $|A| = (-1)^n |A|$ .

**70. Prueba** Sea  $A$  una matriz cuasi-simétrica de orden impar. Utilice el resultado del ejercicio 69 para demostrar que  $|A| = 0$ .

**Matrices ortogonales** En los ejercicios 71 a 76, determine qué matriz es ortogonal. Una matriz cuadrada invertible  $A$  es llamada ortogonal si  $A^{-1} = A^T$ .

- |  |   |
|--|---|
| <b>71.</b> $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$                      | <b>72.</b> $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   |
| <b>73.</b> $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$                   | <b>74.</b> $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$                    |
| <b>75.</b> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | <b>76.</b> $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ |

**77. Prueba** Demuestre que si  $A$  es una matriz ortogonal, entonces  $|A| = \pm 1$ .

**Matrices ortogonales** En los ejercicios 78 y 79, utilice una aplicación gráfica con capacidades matriciales para determinar cuál  $A$  es ortogonal. Para probar la ortogonalidad, encuentre (a)  $A^{-1}$ , (b)  $A^T$  (c)  $|A|$  y verifique que  $A^{-1} = A^T$  y  $|A| = \pm 1$ .

- |   |  |
|---|--|
| <b>78.</b> $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ | <b>79.</b> $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ |
|---|--|

**80. Prueba** Si  $A$  es una matriz idempotente ( $A^2 = A$ ), entonces demuestre que el determinante de  $A$  puede ser 0 o 1.

**81. Prueba** Sea  $S$  una matriz singular de  $n \times n$ . Demuestre que para cualquier matriz  $B$  de  $n \times n$ , la matriz  $SB$  también es singular.

## 3.8 Adjunta de una matriz y regla de Cramer

- Encuentre la adjunta de una matriz y úsela para encontrar la inversa de la matriz.
- Use Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales en variables.
- Use determinantes para encontrar área, volumen y las ecuaciones de las rectas y planos.

### ADJUNTA DE UNA MATRIZ

Hasta ahora, en este capítulo ha estudiado procedimientos para evaluar —y las propiedades de— determinantes. En esta sección aprenderá una fórmula explícita para obtener la inversa de una matriz no singular y luego la usará para deducir un teorema conocido como regla de Cramer. Después resolverá algunas aplicaciones de los determinantes con ella.

Recuerde de la sección 3.5 que el cofactor  $C_{ij}$  de la matriz  $A$  está definido como  $(-1)^{i+j}$  veces el determinante de la matriz obtenida al suprimir el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $A$ . Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces la **matriz de cofactores** de  $A$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de esta matriz se llama **adjunta** de  $A$  y se denota como  $\text{adj}(A)$ , es decir

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

#### Determinación de la adjunta de una matriz cuadrada

Encuentre la adjunta de  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

#### SOLUCIÓN

El cofactor  $C_{11}$  está dado por

$$\begin{bmatrix} \textcircled{-1} & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Continuando con este proceso, tenemos la siguiente matriz de cofactores de  $A$ .

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de esta matriz es la adjunta de  $A$ . Esto es,  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

**COMENTARIO**

El teorema 3.25 no es particularmente eficiente para calcular inversas. El método de Gauss-Jordan estudiado en la sección 3.3 es mucho mejor. El teorema 3.25 es, sin embargo, muy utilizado teóricamente debido a que proporciona una fórmula concisa para la inversa de una matriz.



La adjunta de la matriz  $A$  puede utilizarse para encontrar la inversa de  $A$ , como se indica en el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.25 Inversa de una matriz dada por su adjunta**

Si  $A$  es una matriz invertible de  $n \times n$ , entonces  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ . Donde  $\text{adj}(A)$  es la transpuesta de la matriz de cofactores

**DEMOSTRACIÓN**

Comience por probar que el producto de  $A$  y su adjunta es igual al producto del determinante de  $A$  e  $I_n$ . Considere el producto

$$A[\text{adj}(A)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

El elemento en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de este producto es

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

Si  $i = j$ , entonces la suma es simplemente la expansión por cofactores de  $A$  a lo largo de su  $i$ -ésimo renglón, lo que significa que la suma es el determinante de  $A$ . Por otra parte, si  $i \neq j$ , entonces la suma es cero.

$$A[\text{adj}(A)] = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I$$

Como  $A$  es invertible,  $\det(A) \neq 0$  y usted puede escribir

$$\frac{1}{\det(A)} A[\text{adj}(A)] = I \quad \text{o} \quad A \left[ \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right] = I$$

Por el Teorema 3.7 y la definición de la inversa de una matriz, se sigue que

$$\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = A^{-1}$$

**COMENTARIO**

Si  $A$  es una matriz de  $2 \times 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , entonces la adjunta de  $A$  es simplemente

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Más aún, si  $A$  es invertible, entonces, por el teorema 3.25 se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con el resultado en la sección 3.3.



**Uso de la adjunta de una matriz para hallar su inversa**

Use la adjunta para hallar  $A^{-1}$ , donde  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

**SOLUCIÓN**

El determinante de esta matriz es 3. Utilizando la adjunta de  $A$  (encontrada en el ejemplo 1), puede encontrar que la inversa de  $A$  es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Puede verificar que esta matriz es la inversa de  $A$  al multiplicar para obtener  $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ .

## REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer, nombrada así en honor de Gabriel Cramer (1704–1752), es una fórmula que utiliza determinantes para resolver un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  variables. Esta regla sólo puede ser aplicada a sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución. Para ver cómo funciona la regla de Cramer, dé otro vistazo a la solución descrita al principio de la sección 3.5. Ahí se muestra que el sistema.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

tiene la solución

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

cuando  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ . Cada numerador y denominador en esta solución se puede representar como un determinante, como sigue

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

El denominador para  $x_1$  y  $x_2$  es simplemente el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ . Los numeradores para  $x_1$  y  $x_2$  se forman al usar la columna de constantes como reemplazos para los coeficientes de  $x_1$  y  $x_2$  en  $|A|$ . Estos dos determinantes son denotados por  $|A_1|$  y  $|A_2|$  como sigue.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Usted tiene  $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$  y  $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$ . Esta forma de solución por determinante se llama **regla de Cramer**.

### Uso de la regla de Cramer

Utilice la Regla de Cramer para resolver el sistema lineal de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

Primero encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14$$

Como  $|A| \neq 0$ , usted sabe que el sistema tiene una única solución y aplicando la regla de Cramer obtiene

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

y

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1.$$

La solución es  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -1$ .

La regla de Cramer se generaliza fácilmente a sistemas de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  variables. El valor de cada variable es el cociente de dos determinantes. El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante de la matriz formada a partir del reemplazo de la columna correspondiente a la variable resuelta por la columna que representa las constantes. Por ejemplo, la solución para  $x_3$  en el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \text{es } x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

**TEOREMA 3.26 Regla de Cramer**

Si un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  variables tiene una matriz de coeficientes con un determinante  $|A|$  diferente de cero, entonces la solución única del sistema está dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde la  $i$ -ésima columna de  $A_i$  corresponde a la columna de constantes en el sistema de ecuaciones.

**DEMOSTRACIÓN**

Sea el sistema representado por  $Ax = b$ . Como  $|A|$  es diferente de cero, puede escribir

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Si los elementos de  $b$  son  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , entonces  $x_i = \frac{1}{|A|}(b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \dots + b_nC_{ni})$ , pero la suma (en el paréntesis) es precisamente la expansión del cofactor de  $A_i$ , lo que significa que  $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$  y la demostración está completa. ■

**Uso de la regla de Cramer**

Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales para  $x$ .

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x \quad \quad + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN**

El determinante de la matriz de coeficientes es  $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10$ .

Como  $|A| \neq 0$ , usted sabe que la solución es única y la regla de Cramer puede aplicarse para encontrar  $x$ , como sigue.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)(-8)}{10} = \frac{4}{5}$$

**COMENTARIO**

Intente aplicar la regla de Cramer en el ejemplo 4 para resolver para  $y$  y  $z$ . Verá que la solución es  $y = -\frac{3}{2}$  y  $z = -\frac{8}{5}$ .



## ÁREA, VOLUMEN Y ECUACIONES DE LÍNEAS Y PLANOS

Los determinantes tiene muchas aplicaciones en geometría analítica; algunas se presentan aquí. La primera aplicación es encontrar el área de un triángulo en el plano  $x$ - $y$ .

### Área de un triángulo en el plano $x$ - $y$

El área de un triángulo cuyos vértices son

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ y } (x_3, y_3)$$

está dada por

$$\text{Área} = \pm \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el signo ( $\pm$ ) es elegido para generar un área positiva.

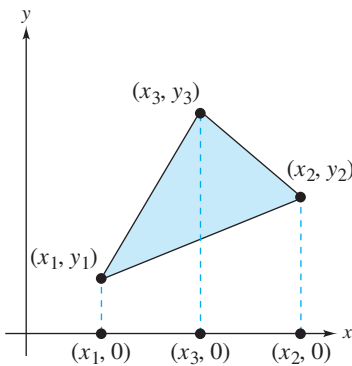


Figura 3.1

### DEMOSTRACIÓN

Pruebe el caso para  $y_i > 0$ . Suponga que  $x_1 \leq x_3 \leq x_2$  y que  $(x_3, y_3)$  descansa sobre el segmento de recta que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  como se muestra en la figura 3.1. Considere los tres trapezoides cuyos vértices son

Trapezoide 1:  $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_3, 0)$

Trapezoide 2:  $(x_3, 0), (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_2, 0)$

Trapezoide 3:  $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, 0)$ .

El área del triángulo es igual a la suma de las áreas de los dos primeros trapezoides menos el área del tercero. Así

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si los vértices no ocurren en el orden  $x_1 \leq x_3 \leq x_2$  o si el vértice  $(x_3, y_3)$  no está sobre el segmento de recta que conecta los otros dos vértices, entonces la fórmula puede generar un valor negativo del área. ■

### Área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo cuyos vértices son

$$(1, 0), (2, 2) \text{ y } (4, 3).$$

### SOLUCIÓN

No es necesario saber la posición relativa de los tres vértices, simplemente evalúe el determinante

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

y concluya que el área del triángulo es  $3/2$  unidades cuadradas. ■

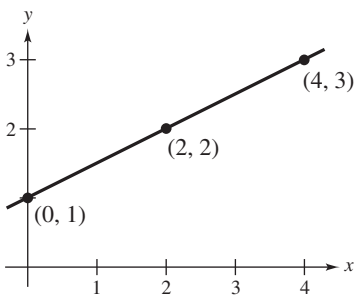


Figura 3.2

Suponga que los tres puntos del ejemplo 5 están en la misma recta. ¿Qué sucedería si aplica la fórmula del área a los tres puntos? La respuesta es que el determinante tendría que ser cero. Considere, por ejemplo, los puntos colineales (0, 1), (2, 2) y (4, 3) mostrados en la figura 3.2. El determinante que genera el área del triángulo que tiene estos tres puntos como vértices es

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si tres puntos en el plano de  $xy$  yacen en la misma recta, entonces el determinante en la fórmula para el área del triángulo será cero. Este resultado se generaliza en el siguiente análisis.

### Análisis de puntos colineales en el plano de $xy$

Tres puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  son colineales si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

La prueba para puntos colineales puede adaptarse para otro uso. Es decir, cuando se tienen dos puntos en el plano de  $xy$ , usted puede encontrar una ecuación de la recta que pasa por los dos puntos, como sigue.

### Forma de dos puntos de la ecuación de una recta

La ecuación de la recta que pasa por puntos distintos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  está dada por

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

### Búsqueda de una ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos

$$(2, 4) \text{ y } (-1, 3).$$

### SOLUCIÓN

Sean  $(x_1, y_1) = (2, 4)$  y  $(x_2, y_2) = (-1, 3)$ . Aplicando la fórmula del determinante para la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para evaluar este determinante, expanda por cofactores a lo largo del renglón superior para obtener

$$\begin{aligned} x \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} &= 0 \\ x(1) - y(3) + 1(10) &= 0 \\ x - 3y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta es  $x - 3y = -10$ .

La fórmula para el área de un triángulo en el plano tiene una generalización directa para el espacio en tres dimensiones, la cual se presenta sin demostración como sigue.

### Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro cuyos vértices son  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  y  $(x_4, y_4, z_4)$  está dado por

$$\text{Volumen} = \pm \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el signo ( $\pm$ ) se elige para tener un volumen positivo.

### Volumen de un tetraedro

Encuentre el volumen del tetraedro cuyos vértices son  $(0, 4, 1)$ ,  $(4, 0, 0)$ ,  $(3, 5, 2)$  y  $(2, 2, 5)$ , como se muestra en la figura 3.3.

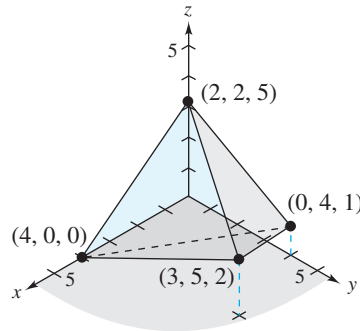


Figura 3.3

### SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula del determinante para un volumen tenemos

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-72) = -12.$$

El volumen del tetraedro es 12 unidades cuadradas. ■

Si cuatro puntos en un espacio de tres dimensiones yacen en el mismo plano, entonces el determinante en la fórmula del volumen se vuelve cero. Así, usted tiene el análisis siguiente.

### Análisis para puntos coplanares en el espacio

Cuatro puntos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  y  $(x_4, y_4, z_4)$  son coplanares si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Este análisis proporciona la forma de un determinante para la ecuación de un plano que pasa por tres puntos en el espacio, como se muestra a continuación.

**Forma de tres puntos de la ecuación de un plano**

Una ecuación de un plano que pasa por tres puntos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  y  $(x_3, y_3, z_3)$  está dada por

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

**Búsqueda de la ecuación del plano que pasa por tres puntos**

Encuentre la ecuación del plano que pasa por tres puntos  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1, 3, 2)$  y  $(-2, 0, 1)$ .

**SOLUCIÓN**

Usando la forma del determinante de un plano que pasa a través de tres puntos, tenemos

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para evaluar este determinante, reste la cuarta columna de la segunda para obtener

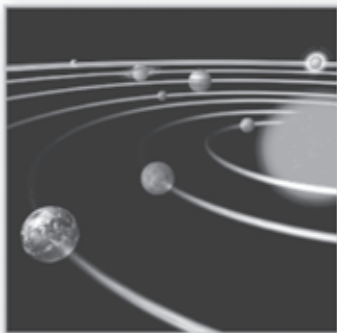
$$\begin{vmatrix} x & y - 1 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora, expandiendo por cofactores a lo largo del segundo renglón resulta

$$x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y - 1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(4) - (y - 1)(3) + z(5) = 0.$$

lo que genera la ecuación  $4x - 3y + 5z = -3$ .



**ÁLGEBRA LINEAL APLICADA**

De acuerdo con la Primera Ley de Kepler del Movimiento Planetario, las órbitas de los planetas son elipses, con el sol como uno de los focos de la elipse. La ecuación general de una sección cónica (como una elipse) es

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Para determinar la ecuación de la órbita de una planeta, un astrónomo puede encontrar las coordenadas del planeta junto con su órbita en cinco puntos diferentes  $(x_i, y_i)$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ , y entonces usar el determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## 3.8 Ejercicios

Consulte [www.CalcChat.com](http://www.CalcChat.com) para las soluciones de los ejercicios noes.

**Encontrar la adjunta e inversa de una matriz** En los ejercicios 1 a 8, encuentre la adjunta de la matriz  $A$ . Después úsela para encontrar la inversa de  $A$ , si es posible.

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**9. Prueba** Demuestre que si  $|A| = 1$  y todos los elementos de  $A$  son enteros, entonces todos los elementos de  $|A^{-1}|$  también deben ser enteros.

**10. Prueba** Demuestre que si una matriz  $A$  de  $n \times n$  no es invertible, entonces  $A[\text{adj}(A)]$  es la matriz cero.

**Demostración** En los ejercicios 11 y 12, demuestre la fórmula para una matriz  $A$  no singular de  $n \times n$ . Suponga  $n \geq 2$ .

$$11. |\text{adj}(A)| = |A|^{n-1} \quad 12. \text{adj}[\text{adj}(A)] = |A|^{n-2}A$$

**13.** Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 11 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**14.** Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 12 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**15. Prueba** Demuestre que si  $A$  es una matriz invertible de  $n \times n$ , entonces  $\text{adj}(A^{-1})[\text{adj}(A)]^{-1}$ .

**16.** Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 15 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Uso de la Regla de Cramer** En los ejercicios 17 a 30, utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales, si es posible.

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad 18. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 18x_1 + 12x_2 = 13 \\ 30x_1 + 24x_2 = 23 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 20x_1 + 8x_2 = 11 \\ 12x_1 - 24x_2 = 21 \end{cases} \quad 22. \begin{cases} 13x_1 - 6x_2 = 17 \\ 26x_1 - 12x_2 = 8 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -0.4x_1 + 0.8x_2 = 1.6 \\ 2x_1 - 4x_2 = 5.0 \end{cases} \quad 24. \begin{cases} -0.4x_1 + 0.8x_2 = 1.6 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 = 0.6 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16 \\ 8x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11 \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 11 \\ 6x_1 - 6x_2 = 3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = -21 \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 56x_1 - 21x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 7 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 13 \end{cases}$$



**Uso de la Regla de Cramer** En los ejercicios 31 a 34, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidades matriciales y la regla de Cramer para resolver para  $x_1$ , si es posible.

$$31. \begin{cases} \frac{5}{6}x_1 - x_2 = -20 \\ \frac{4}{3}x_1 - \frac{7}{2}x_2 = -51 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} -8x_1 + 7x_2 - 10x_3 = -151 \\ 12x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 86 \\ 15x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 187 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 35 \\ -x_1 - 9x_3 - 6x_4 = -17 \\ 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_4 = -4 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 24 \\ 2x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -15 \end{cases}$$

$$35. \text{Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales para } x \text{ y } y.$$

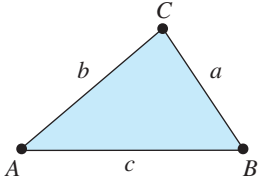
$$\begin{cases} kx + (1 - k)y = 1 \\ (1 - k)x + ky = 3 \end{cases}$$

¿Para qué valor(es) de  $k$  el sistema puede ser inconsistente?

36. Verifique el siguiente sistema de ecuaciones lineales en  $\cos A$ ,  $\cos B$  y  $\cos C$  para el triángulo mostrado en la figura.

$$\begin{aligned} c \cos B + b \cos C &= a \\ c \cos A + a \cos C &= b \\ b \cos A + a \cos B &= c \end{aligned}$$

Después utilice la regla de Cramer para resolver para  $\cos C$  y use el resultado para verificar la ley de los cosenos  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .



**Encontrar el Área de un triángulo** En los ejercicios 37 a 40, encuentre el área del triángulo que tiene los vértices dados.

37. (0, 0), (2, 0), (0, 3)      38. (1, 1), (2, 4), (4, 2)  
 39. (-1, 2), (2, 2), (-2, 4)      40. (1, 1), (-1, 1), (0, -2)

**Prueba de puntos colineales** En los ejercicios 41 a 44, determine si los puntos son colineales.

41. (1, 2), (3, 4), (5, 6)      42. (-1, 0), (1, 1), (3, 3)  
 43. (-2, 5), (0, -1), (3, -9)  
 44. (-1, -3), (-4, 7), (2, -13)

**Encontrar la ecuación de una recta** En los ejercicios 45 a 48, encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

45. (0, 0), (3, 4)      46. (-4, 7), (2, 4)  
 47. (-2, 3), (-2, -4)      48. (1, 4), (3, 4)

**Encontrar el volumen de un tetraedro** En los ejercicios 49 a 52, encuentre el volumen del tetraedro que tiene los vértices dados.

49. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)  
 50. (1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 1, -1), (-1, 1, 2)  
 51. (3, -1, 1), (4, -4, 4), (1, 1, 1), (0, 0, 1)  
 52. (0, 0, 0), (0, 2, 0), (3, 0, 0), (1, 1, 4)

**Prueba de puntos coplanares** En los ejercicios 53 a 56, determine si los puntos son coplanares.

53. (-4, 1, 0), (0, 1, 2), (4, 3, -1), (0, 0, 1)  
 54. (1, 2, 3), (-1, 0, 1), (0, -2, -5), (2, 6, 11)  
 55. (0, 0, -1), (0, -1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 2)  
 56. (1, 2, 7), (-3, 6, 6), (4, 4, 2), (3, 3, 4)

**Encontrar una ecuación de una recta** En los ejercicios 57 a 60, encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

57. (1, -2, 1), (-1, -1, 7), (2, -1, 3)  
 58. (0, -1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 2)

59. (0, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)  
 60. (1, 2, 7), (4, 4, 2), (3, 3, 4)

**Uso de la Regla de Cramer** En los ejercicios 61 a 62 se ha aplicado la regla de Cramer para resolver una de las variables indicadas en un sistema de ecuaciones  $3 \times 3$ . Determine en cuál se aplicó correctamente la regla para resolver esa variable. Si no, identifique el error.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= 4 \\ 4x + y - z &= 6 \end{aligned} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 15 \\ 3x - 3y - z &= -7 \\ 2x - y - 7z &= -3 \end{aligned} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -2 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}}$$

63. **Publicación de libros de texto** La siguiente tabla muestra el número de suscriptores y (en millones) de una compañía de comunicaciones en los Estados Unidos para los años 2007 a 2009. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año, $t$	Suscriptores, $y$
2007	10,697
2008	11,162
2009	9891

- (a) Genere un sistema de ecuaciones lineales para los datos que se ajusten a la curva  $y = at^2 + bt + c$  donde  $t$  es el año y  $t = 7$  corresponde a 2007, e  $y$  es el número de suscriptores.  
 (b) Utilice la regla de Cramer para resolver su sistema.  
 (c) Use una aplicación gráfica para graficar los datos y su función de regresión polinomial.  
 (d) Describa brevemente qué tan bien la función polinomial se ajusta a los datos.

64. **REMATE** Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  representan números reales. ¿Qué debe ser cierto de las rectas representadas por las ecuaciones cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0?$$