

UNIDAD III

ESPACIOS VECTORIALES

Ing. Luisa Leonor Rivero
Departamento de Matemática

Contenido

ESPACIOS VECTORIALES	3
Subespacios de espacios vectoriales.....	4
INTERSECCIÓN ENTRE SUBESPACIOS vectoriales	6
COMBINACIÓN LINEAL.....	9
CONJUNTO GENERADOR.....	12
ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES	12
CONJUNTO GENERADOR LINEALMENTE INDEPENDIENTE.....	14
RELACION CON UN SISTEMA HOMOGÉNEO DE ECUACIONES	15
COMO DETERMINAR SI UN CONJUNTO GENERADOR ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE	17
RELACION ENTRE INDEPENDENCIA LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR	18
TRABAJO PRACTICO COMBINACION LINEAL, ESPACIO GENERADO, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL	19
MATRIZ DE COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE	24
CAMBIO DE BASE	26
CAMBIO DE BASE ESTÁNDAR A OTRA BASE	26
MATRICES DE CAMBIO DE BASE – MATRIZ DE TRANSICIÓN	26
Método de matriz inversa para calcular la matriz de cambio de base	29
TRABAJO PRÁCTICO: MATRIZ DE COORDENADAS CAMBIO DE BASE	31

ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: Sea V un conjunto no vacío de objetos que se denominan vectores, y sobre el cual están definidas dos operaciones: una ley de composición interna o de cerradura bajo la suma de vectores y una ley de composición externa o de cerradura bajo el producto de un escalar por un vector, y sean los escalares elementos de un cuerpo denotado como k , entonces la cuaterna $(V, +, R, \cdot)$; tiene estructura de espacio vectorial, si siendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores cualesquiera se cumplen los siguientes axiomas. :

Axioma I: Si $\vec{u} \in V$ y $\vec{v} \in V \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$ *Ley de cerradura bajo la suma*

Axioma II: Asociatividad: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Axioma III: Existe elemento neutro, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Axioma IV: para cada $\vec{u} \in V$ existe un vector $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Axioma V: Conmutatividad: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Axioma VI: si $\vec{u} \in V \wedge \alpha \in \mathcal{R}$ entonces $\alpha\vec{u} \in V$ *Ley de cerradura bajo la multiplicación*

Axioma VII: Distributividad respecto de la suma de escalares $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Axioma VIII: Distributividad respecto de la suma de vectores $(\vec{u} + \vec{v})\alpha = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Axioma IX: Asociatividad respecto de los escalares: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Axioma X: Identidad $1\vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$

Es importante advertir que un espacio vectorial consta de cuatro elementos un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones.

PROPUESTA 1: Determina si son espacios vectoriales (se desarrolla en clase teórica)

- Espacio $\mathbb{R}^n$
- Espacio vectorial trivial $V = \{0\}$
- Espacio cuyo único elemento es el número $V = \{1\}$
- El conjunto de los números enteros
- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números naturales
- El conjunto de puntos $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que pasa por el origen de coordenadas $y = mx$
- El conjunto de puntos $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que no pasa por el origen de coordenadas $y = mx + b$
- El conjunto de puntos $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en una plano que pasa por el origen de coordenadas $ax + by + cz = 0$
- El conjunto de puntos $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en una plano que no pasa por el origen de coordenadas $ax + by + cz = d$
- El espacio vectorial $\mathbb{P}^n$
- El espacio vectorial $M^{m \times n}$

SUBESPACIOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Todos los espacios vectoriales tienen además subconjuntos que son también espacios vectoriales, denominados **Subespacios Vectoriales**

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial se denomina **subespacio** de V si H es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V , es decir si se cumplen las dos leyes de cerradura

I) Si $\vec{u} \in H$ y $\vec{v} \in H \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H$ Ley de cerradura bajo la suma

VI) Si $\vec{u} \in H$ y $\alpha \in \mathcal{R} \rightarrow (\alpha\vec{u}) \in H$ Ley de cerradura bajo la multiplicación

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ demuestra que es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

Demostración

El subespacio vectorial H está formado por puntos que están sobre la recta que tienen pendiente m y pasan por el origen, tomando dos vectores genéricos tendremos :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ mx' \end{pmatrix}$$

Axioma I
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ mx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ m(x + x') \end{pmatrix} \text{ si } x + x' = x''$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x'' \\ mx'' \end{pmatrix} \text{ se obtiene una recta que pasa por el origen}$$

Axioma VI
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \text{ entonces } \alpha\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ m\alpha x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto queda demostrado que toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial.

Demuestra que un plano que pasa por el origen es un subespacio vectorial

$$H = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$$

Sea $H = \{(x, y): y = x + 3\}$ comprueba que NO es un subespacio vectorial.

Solución: La manera más fácil de comprobar que H no es un subespacio vectorial es observar que $\vec{0} = (0, 0)$ no se encuentra en H porque $0 = 0 + 3 \rightarrow 0 \neq 3$

Otra posibilidad es tomar dos vectores que pertenezcan a la recta por ejemplo

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ están en } H \text{ pero } \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ no está en } H$$

porque al sustituir los valores en la recta nos queda $6 \neq 0 + 3$

Comprueba que un plano que NO pasa por el origen no es un subespacio vectorial

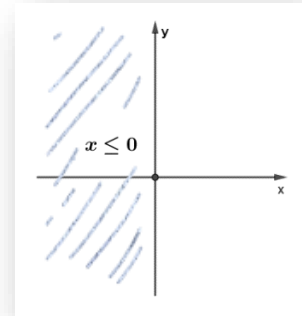
$$H = \{(x, y, z): x + y - z = 3\}$$

Sea $H = \{(x, y): x \leq 0\}$ comprueba si es o no un subespacio vectorial

Solución: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha = -4 \rightarrow -4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \notin H$

No se cumple el axioma VI de la cerradura bajo la multiplicación

¿Se cumple el axioma I?



Comprueba que el conjunto de puntos $x^2 + y^2 = 1$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

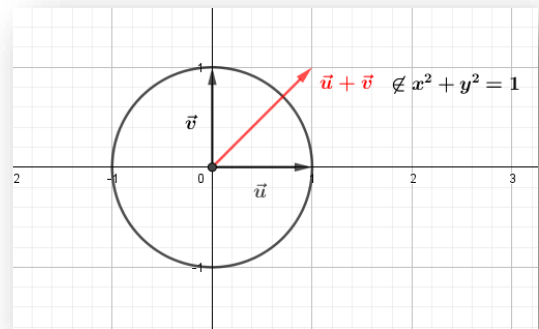
Solución: sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$

Por el axioma I: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H$

Porque $1 + 1 \neq 1$

También se podría demostrar por el axioma VI

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 4 \rightarrow 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H$



El conjunto de los polinomios de segundo grado no es un subespacio vectorial

$$p(x) = x^2 \quad y \quad q(x) = -x^2 + x + 4$$

Aplicando el Axioma I $p(x) + q(x) = x + 4$

La suma de ambos polinomios no satisface el axioma 1, porque no se obtiene un polinomio de grado 2

¿El conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos, sería un subespacio vectorial?

El conjunto de matrices singulares (sin inversa) no es un subespacio de $M_{2 \times 2}$

Demostración

Elegimos dos matrices cualesquiera que no tengan inversa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por el axioma I de la ley de cerradura bajo la suma

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz resultante es no singular, es decir tiene inversa por lo tanto no se comprueba el axioma I

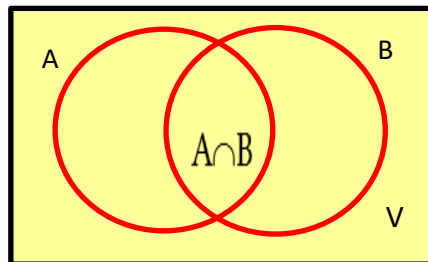
El conjunto de matrices diagonales ¿sería un subespacio vectorial?

INTERSECCIÓN ENTRE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean A y B dos subespacios del espacio vectorial $(V; +; \cdot)$

La intersección de los subespacios es el conjunto de los vectores del espacio vectorial $(V; +; \cdot)$ que pertenecen, simultáneamente, a los subespacios vectoriales A y B

Para encontrar la intersección de dos subespacios se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo



$$A \cap B = \{\vec{v} \in V / \vec{v} \in A \wedge \vec{v} \in B\}$$

Determina la intersección entre los siguientes subespacios

- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

Solución: es la intersección entre dos planos, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{parametrizando } y = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$H \cap H_1 = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}^3 / \lambda \in \mathbb{R} \text{ es una recta que pasa por el origen}$$

- $H_2 = \{A \in M^{2 \times 2} / a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$ y $H_3 = \{A \in M^{2 \times 2} / -a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0\}$

Solución: para encontrar la solución debemos encontrar la matriz que cumpla simultáneamente con las condiciones de los dos subespacios

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de Gauss- Jordan nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases} \rightarrow a_{11} = -a_{21} \quad a_{12} = -a_{22}$$

$$H_2 \cap H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\lambda & -\mu \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} / \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

PROPUESTA 2:

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ y $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$
- $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \wedge y - z = 0\}$
- $H_3 = \{p(x) \in P^3 / a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0\}$ y $H_4 = \{p(x) \in P^3 / a_3 + a_2 + a_1 = 0 \wedge a_3 + a_1 + a_0 = 0\}$

TRABAJO PRACTICO ESPACIO Y SUBESPACIO VECTORIAL

1. Define que es un Espacio Vectorial
2. En los siguientes ítems, determina si el conjunto dado, junto con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, es un espacio vectorial. Si no lo es, enumera todos los axiomas donde no son válidos
 - a. El conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ de la forma (x, x)
 - b. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(x, 0)$
 - c. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(1, y)$
 - d. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(x, y) / y \geq 0$
 - e. El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma (y, y, y) .
 - f. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de 2×2 , con las operaciones habituales de suma y multiplicación

g. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ donde $a \cdot d = 0$

h. El conjunto de todas las matrices de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

3. Define que es un Subespacio Vectorial.
4. ¿Cuáles son los posibles subespacios de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$ y $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$
5. ¿Por qué solamente las rectas que pasan por el origen son subespacios de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$?
6. ¿Por qué solamente las rectas o los planos que pasan por el origen son subespacios $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$
7. Investiga si el conjunto de todas las matrices de 2×2 cuyo determinante es nulo, es un subespacio vectorial
8. Investiga cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial P_3
 - a. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ para los cuales $a_0 = 0$
 - b. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ para los cuales $a_0 = 8$
 - c. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que tienen como coeficientes a números naturales
9. Analiza cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de las $M^{2 \times 2}$

a. $H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : a + b = 0 \wedge c = d \right\}$

b. $H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : |A| = 0 \right\}$

$$c. \ H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : a = 3b = 0 \wedge c = d = 0 \right\}$$

10. Analiza cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial dado

$$a. \ H = \{(x, y) \in R^2 : y = 2x\}$$

$$b. \ H = \{(x, y) \in R^3 : x = y = z - 2\}$$

$$c. \ H = \{(x, y, z) \in R^3 : 2x + y = 0\}$$

$$d. \ H = \{(x, y) \in R^2 : (x - 2)^2 + (y)^2 \leq 4\}$$

$$e. \ H = \{(x, y, z) \in R^3 : \sqrt{x + y + z} = 0\}$$

$$f. \ H = \{(x, y) \in R^2 : (x)^2 + (y)^2 \leq 9\}$$

$$g. \ H = \{(x, y) \in R^2 : y \leq 0\}$$

$$h. \ H = \{(x, y, z) \in R^3 : 2x + y + z - 4 = 0\}$$

$$i. \ H = \{(x, y, z) \in R^3 : x = 2y \wedge z = y\}$$

j. H es el conjunto de vectores de R^2 cuya segunda componente es el cuadrado de la primera

k. El conjunto de puntos de R^2 que se encuentran en el primer y tercer cuadrante

COMBINACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN Siendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ escalares, una expresión de la forma $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3, \dots, \alpha_n \vec{v}_n$ se llama **combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$

Si $(V, +, R, \cdot)$ es un EV, $\vec{v} \in V$ es combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ si existen

$$\alpha_n \in R : \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

Ejemplos:

- $(2,6)$ es CL de $\{(1,0), (0,2)\}$ porque $(2,6) = 2(1,0) + 3(0,2)$
- $(2,6)$ no es CL de $\{(1,0), (2,0)\}$ porque no existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in R$: $(2,6) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(2,0)$ (comprueba)
- $(2,2,2)$ es CL de $(1,1,1)$ ya que $(2,2,2) = 2(1,1,1)$
- $(1,1,1)$ es CL de $\vec{v}_1 = (2,1,3)$ y $\vec{v}_2 = (1,0,2)$ ya que $(1,1,1) = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$ (comprueba)

Ejemplo 1

Determina si el vector $(1,1,1)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$; $\vec{v} = (0,1,2)$; $\vec{w} = (-1,0,1)$

Solución: $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(-1,0,1) = (1,1,1) \rightarrow$

Luego de aplicar el producto de escalares por vectores, la suma y la igualdad de vectores en R^3 se obtiene el siguiente sistema

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 1 \\ 2(\alpha_3 + 1) + \alpha_2 = 1 \rightarrow \alpha_2 = -1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Esta igualdad indica que existen infinitas CL

- Otra manera de resolver es por eliminación de renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 2 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 = -1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 \in R \end{cases}$$

A partir del tercer renglón se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones. Por lo tanto el vector $(1,1,1)$ se puede escribir como CL de los vectores dados y dicha combinación no es única

Si $\alpha_3 = 0$ tendremos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -1$. Por lo tanto para este valor de α_3 tenemos

$$1(1,2,3) - 1(0,1,2) + 0(-1,0,1) = (1,1,1)$$

Otras elecciones para α_3 producen otras maneras de escribir el vector $(1,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $(1,2,3)$; $(0,1,2)$; $(-1,0,1)$

Ejemplo 2

Determina si el vector $(1, -2, 3)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores del ejemplo 1

Solución:

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, 1, 2) + \alpha_3(-1, 0, 1) = (1, -2, 3)$$

Luego de aplicar el producto de escalares por vectores, la suma entre vectores y la igualdad de vectores en $\mathbb{R}^3$ se obtiene el siguiente sistema

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 1 \\ 2(\alpha_3 + 1) + \alpha_2 = -2 \rightarrow \alpha_2 = -4 - 2\alpha_3 \\ 3\alpha_3 + 3 - 8 - 4\alpha_3 + \alpha_3 = 3 \rightarrow -8 \neq 0 \end{cases}$$

Esta desigualdad indica que NO existe CL

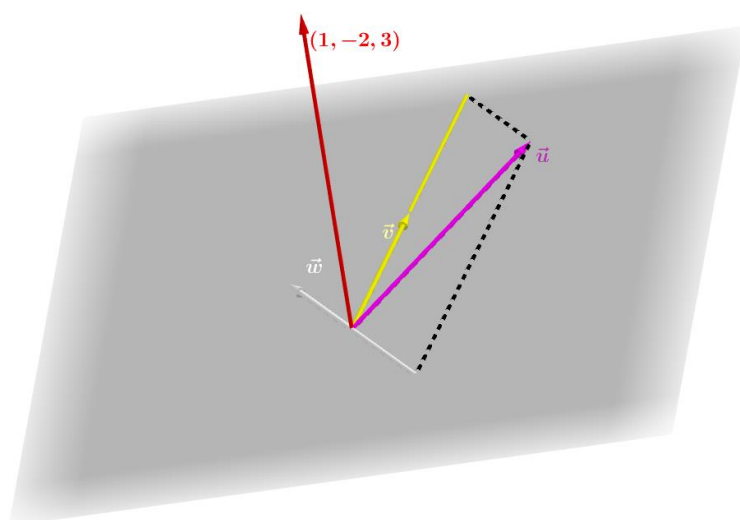
- Otra manera de resolver es por eliminación de renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

A partir del tercer renglón se concluye que el sistema al ser incompatible, no tiene solución. Así que el vector $(1, -2, 3)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores dados

En forma geométrica, podemos ver que el vector $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$, los mismos son coplanares, entonces si el vector $(1, -2, 3)$ no es combinación lineal significa que no es coplanar con los demás vectores.



Ejemplo 3

Halla el valor de k para que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$ sea combinación lineal de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos la operación entre matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos el concepto de igualdad de matrices para obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\text{lineales} \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = k \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = k^2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de α_1 en la cuarta ecuación despejamos $\alpha_2 = 1$, reemplazando en la segunda ecuación obtenemos el valor de $k = 1$

Validación

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: un vector se puede escribir como combinación lineal de manera única, de infinitas maneras o de ninguna.

CONJUNTO GENERADOR

DEFINICIÓN se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n$ generan el espacio vectorial V , cuando todo vector de V puede expresarse como la combinación lineal de dichos vectores $\vec{v} \in V \rightarrow \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3, \dots \dots \alpha_n \vec{v}_n$

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

DEFINICIÓN El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n$ se llama **espacio generado** por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n$ y se representa por $gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n\}$. Si $V = Gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n\}$ se dice que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n$ **generan** a V , y que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n\}$ es un **conjunto generador** de V .

Para obtener el espacio generado por un conjunto de vectores, se debe resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de la combinación lineal de los vectores propuestos, donde las incógnitas son los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \dots \alpha_n$. Analizando la solución del sistema, obtenemos el espacio vectorial generado.

$$V = gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n\} = \{\vec{v}: \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3, \dots \dots \alpha_n \vec{v}_n\}$$

Por ejemplo:

1. $gen\{(1,0)\} = \{(x,y) \in R^2 / y = 0\}$
2. $gen\{(1,0); (0,1)\} = R^2$
3. $gen\{(1,0,0); (0,1,0)\} = \{(x,y,z) \in R^3 / z = 0\}$
4. $gen\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R^{n \times n} / b = d = 0\right\}$
5. $gen\{(1, t, t^2)\} = P_2$ genera todos los polinomios de grado menor o igual a 2, ya que todo polinomio se obtiene combinando linealmente los polinomios $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$.

Por ejemplo: $1 + 2t - t^2 = 1p_1 + 2p_2 - 1p_3$

Ejemplo 2

Defina el espacio generado por los vectores

- $\vec{v}_1 = (1,0,0) \quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \quad \vec{v}_3 = (0,1,1)$

Solución: $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (x,y,z) \rightarrow$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, \alpha_3, \alpha_3) = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_3 = z \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & 1 & | & z \end{bmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 0 & | & z - y \\ 0 & 0 & 1 & | & z \end{bmatrix}$ SCD, esto indica que se genera todo el espacio

$$V = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3\right\} \text{ se lee el conjunto generado por los vectores } \dots\dots\dots$$

genera todo R^3

Teorema: Si uno de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ es combinación lineal de los restantes, el generador permanece igual si se elimina ese vector


IMPORTANTE

Ejemplo 3

Calcula el $gen\{\vec{v}_1\}$

- $\vec{v}_1 = (2,4)$

Solución: $\alpha(2,4) = (x,y) \rightarrow (2\alpha, 4\alpha) = (x,y) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = x \\ 4\alpha = y \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{x}{2} \rightarrow y = 2x$

$$H = gen\{(2,4)\} = \{(x,y) \in R: y = 2x\}$$

- Calcula el $gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\vec{v}_1 = (2,4) \quad \vec{v}_2 = (4,8)$$

Solución: $\alpha_1(2,4) + \alpha_2(4,8) = (x,y) \rightarrow (2\alpha_1, 4\alpha_1) + (4\alpha_2, 8\alpha_2) = (x,y) \rightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = x \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = y \end{cases} \text{ resolviendo en forma matricial } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 4 & 8 & y \end{array} \right) R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 2 & 4 & \frac{y}{2} \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & 0 & \frac{y}{2} - x \end{array} \right) \rightarrow \text{SCI tiene solución si y sólo si } y = 2x$$

$$H = gen\{(2,4); (4,8)\} = \{(x,y) \in R^2: y = 2x\}$$

Nota que $\vec{v}_2$ es el escalado de $\vec{v}_1$, de acuerdo al teorema si se elimina el vector $\vec{v}_2$ el espacio generado es el mismo

- Calcula el $gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ siendo $\vec{v}_1 = (1,0)$; $\vec{v}_2 = (0,2)$

Solución: $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,2) = (x,y) \rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, 2\alpha_2) = (x,y) \rightarrow$

$$(\alpha_1, 2\alpha_2) = (x,y) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

en forma matricial $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \end{array} \right) \rightarrow \text{SCD } \begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_2 = y \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in R^2) \rightarrow$

$$V = gen\{(1,0), (0,2)\} = \{(x,y) \in R^2\}$$

¿Qué pasaría si se agregara un vector más?

- $\vec{v}_1 = (1,0) \quad \vec{v}_2 = (0,2) \quad \vec{v}_3 = (2,4)$

Solución: $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,2) + \alpha_3(2,4) = (x,y) \rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, 2\alpha_2) + (2\alpha_3, 0) = (x,y) \rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = x \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = y \end{cases} \text{ en forma matricial } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & 4 & y \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2/2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2 & \frac{y}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = y/2 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^2 \rightarrow \text{se genera todo } R^2)$$

$$V = gen\{(1,0); (0,2); (2,4)\} = \{(x,y) \in R^2\}$$

Propiedad

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \subset V \rightarrow$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ es un subespacio de V .

CARACTERIZACIÓN

En $\mathbb{R}^2$

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{u}\}$ geométricamente es una recta que contiene al origen, cuyo vector director es $\vec{u}$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}\}$ geométricamente es una recta que contiene al origen, si $\vec{u} \nparallel \vec{v}$, o caso contrario todo $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^3$

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{u}\}$ geométricamente es una recta que contiene al origen, cuyo vector director es $\vec{u}$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}\}$ geométricamente es
 - $\rightarrow$ Una recta que contiene al origen, si $\vec{u} \nparallel \vec{v}$
 - $\rightarrow$ Un plano que contiene al origen y es paralelo a ambos vectores
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w}\}$ geométricamente es
 - una recta que contiene al origen, si $\vec{u} \nparallel \vec{v} \nparallel \vec{w}$
 - un plano que contiene al origen si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$
 - $\mathbb{R}^3$ si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$

CONJUNTO GENERADOR LINEALMENTE INDEPENDIENTE

Un conjunto de vectores se dice que es linealmente independiente, cuando ninguno de los vectores que forman el conjunto puede expresarse como combinación lineal de los otros. Eso indica que se cumple:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{Únicamente para } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n = 0$$

Como consecuencia de esto, se puede demostrar que todo conjunto de vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ contiene a lo más “n” vectores.

Por el contrario, si uno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros, entonces conforman un conjunto de vectores **linealmente dependiente**

CARACTERIZACIÓN

En $\mathbb{R}^2$

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow LD$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow Si \vec{u} = \lambda \vec{v} \rightarrow LD$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \rightarrow Si \vec{u} // \vec{v} // \vec{w} \text{ es LD}$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \vec{v} \neq \vec{w} \text{ es LD}$

En $\mathbb{R}^3$

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow LD$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow Si \vec{u} = \lambda \vec{v} \rightarrow LD$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \rightarrow si \vec{u} // \vec{v} // \vec{w} \text{ es LD}$
 $\rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \text{ son coplanares A es LD}$
 $\rightarrow si \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0 \text{ no son coplanares es LI}$

Teorema: Dado $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_r\} \subset V$ tal que A es LD $\Leftrightarrow \exists$ un vector $\vec{v}$ de A que es combinación lineal de los restantes

Propiedades

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_r\} \subset \mathbb{R}^n$ es LD $\Leftrightarrow r > n$ (r número de vectores)

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{0}, \vec{v}_r\} \subset V$ es LD

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots k\vec{v}_3, \vec{v}_r\} \subset V$ es LD

IMPORTANTE

RELACION CON UN SISTEMA HOMOGENEO DE ECUACIONES

Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ un sistema de dos vectores independientes, para que se cumpla

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}, \text{ es decir } \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{en que sabemos que si tomamos como incógnitas}$$

α_1 y α_2 y el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ la única solución es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$ y los dos vectores serán linealmente independientes.

Observación: por lo tanto una ecuación vectorial de este tipo

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0$ nos lleva a resolver un sistema homogéneo

- Si dicho sistema es compatible determinado (solución trivial) entonces será LI
- Si es compatible indeterminado (solución no trivial) entonces el conjunto de vectores es LD

Ejemplo 4

Prueba si los vectores son LI o LD

- $\vec{u} = (-2, 0, 0)$; $\vec{v} = (-3, -1, 0)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

Solución:

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2c_1 - 3c_2 + 3c_3 \\ -c_2 - 9c_3 \\ -6c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2c_1 - 3c_2 + 3c_3 = 0 \\ -c_2 - 9c_3 = 0 \\ -6c_3 = 0 \end{cases}$$

despejando $c_3 = 0$, haciendo sustitución hacia atrás $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Los vectores son LI

Otra posibilidad es analizar si los vectores son o no coplanares

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{los vectores no son coplanares}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ los vectores son linealmente independientes

- $\vec{u} = (-2, 6, 4)$; $\vec{v} = (-3, -1, 2)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

Solución: $\vec{u} = (-2, 6, 4)$; $\vec{v} = (-3, -1, 2)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 6 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{los vectores son coplanares} \rightarrow \text{linealmente dependientes}$$

Aplicando el Teorema si un vector es CL de los otros $\rightarrow$ LD haciendo la CL

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 3 \\ 6 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{-2} \\ R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{3}{2} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores son LD

- $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Solución: $c_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ realizando la distributiva y sumando

$$\begin{bmatrix} c_1 & -1c_1 \\ 4c_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3c_2 \\ c_2 & 5c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 - 3c_2 \\ 4c_1 + c_2 & c_1 + 5c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ igualando las componentes}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 - 3c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ 4c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 5c_2 = 0 \end{cases} \text{ las matrices son LI}$$

COMO DETERMINAR SI UN CONJUNTO GENERADOR ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE

Debemos resolver el sistema homogéneo que se obtiene de la combinación lineal de los vectores para obtener el vector “cero”. Como la condición para que sea LI es que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ dicho sistema debe tener única solución, es decir la trivial.

Ejemplo 5

Verifica si son o no linealmente independientes los vectores

- $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,2,0)$; $\vec{w} = (0,0,3)$

Solución:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ 3c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{los vectores son LI}$$

- $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-3,-1,2)$

Solución: $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-3,-1,2)$

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2c_1 - 3c_2 \\ 6c_1 - 1c_2 \\ 4c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2c_1 - 3c_2 = 0 \\ 6c_1 - 1c_2 = 0 \\ 4c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1]{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{-2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1]{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

del 2do.renglón $c_2 = 0$; $\rightarrow$ haciendo sustitución hacia atrás

$c_1 = 0 \rightarrow$ los vectores son LI

PROPUESTA

a) $\vec{u} = (-2,-4)$; $\vec{v} = (3,6)$

b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u} = 2x^2 + 4x + 8$; $\vec{v} = -2x^2 + x + 1$; $\vec{w} = x^2 + x$

RELACION ENTRE INDEPENDENCIA LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es distinto de cero.

Nota: *Si el $\det A \neq 0$, siendo las columnas de A los vectores del conjunto generador, entonces estos son LI ¿Por qué?

*Si $\det A \neq 0$, los vectores no son coplanares, tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$

*Si $\det A \neq 0$, dos vectores de $\mathbb{R}^2$ generan $\mathbb{R}^2$

Puede generalizarse: Todo conjunto de “n” vectores LI de $\mathbb{R}^n$ generan $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 6

Prueba si el conjunto es LI y si genera el espacio o un sub espacio de este

- De polinomios P_2 : $1 - x$; $1 + x$; $1 + x^2$

Luego de plantear la combinación lineal e igualar las componentes homólogas

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ -c_1 + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{haciendo sustitución hacia atrás} \begin{cases} c_2 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ c_1 = c_2 \rightarrow c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ los vectores son linealmente independientes}$$

Para saber que espacio o subespacio generan se hace la combinación lineal con (a_0, a_1, a_2)

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ -c_1 + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right] R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 2 & 1 & a_1 + a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right] R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{a_1 + a_0}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 &\rightarrow R_2 - \frac{1}{2} R_3 \end{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1 + a_0}{2} - \frac{a_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right]$$

Se generan todos los polinomios de P_2

TRABAJO PRACTICO COMBINACION LINEAL, ESPACIO GENERADO, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Define que es Combinación Lineal.

1. ¿Es el vector $(-1,5)$ combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-2,2)$
2. En caso de ser posible expresa el vector $(1, -2,2)$ como combinación lineal de los vectores $(1,2,3)$; $(0,1,2)$ y $(-1,0,1)$
3. Determina si la matriz $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ puede expresarse como combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$
4. Determina si el polinomio $P(x) = 2x^2 + 3x + 3$ se puede escribir como CL de los polinomios $\{x + 1; x^2 + 1; 7\}$
5. Determina si el polinomio $P(x) = 5x^2 + x + 1$ se puede escribir como CL de los polinomios $\{2x^2 + 5; 3x + 2, 5x^2 + x + 1\}$
6. Considera las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Determina todas las combinaciones lineales de A, B y C que den como resultado la matriz nula de $M_{2 \times 2}$
7. Dado el conjunto de vectores del EVR indicado, comprueba si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se pueden expresar como combinación lineal de dicho conjunto.
 - 5.1) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} de R^2, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} : u = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$
 - 5.2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} de R^2, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - 5.3) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} de R^3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - 5.4) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} de R^3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
8. Una empresa de artículos deportivos tiene dos fábricas, y en cada una se ensamblan bicicletas de montaña fabricadas en aluminio y titanio. La primera planta produce 150 bicicletas de aluminio y 15 de titanio por día, la segunda, 220 y 20, respectivamente. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 150 \\ 15 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \end{pmatrix}$, calcula e interpreta el significado de las siguientes combinaciones:
 - a) $\vec{u} + \vec{v}$
 - b) $\vec{v} - \vec{u}$
 - c) $10\vec{u}$
 - d) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
 - e) $10\vec{u}$
9. ¿Cuántos días debe trabajar cada fábrica para que la empresa entregue 2600 bicicletas de aluminio y 250 de titanio?
10. Demuestra que cualquier vector de $R^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
11. Calcula el o los valores de k tales que $\begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -2k \end{pmatrix}$ sea una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$
12. ¿Para qué valores de k el vector $(1,2,3)$ es una combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$; $(0,0,1)$ $(1,2,k)$?
13. Halla los valores de k para los cuales el vector $\vec{u}$ es combinación lineal del conjunto A
 - a) $\vec{u} = (k, k^2)$ A = $\{(1, -1); (-1, 1)\}$

$$b) U = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

14. Define que se entiende por **Espacio Generado y Conjunto Generador**

15. Define los espacios vectoriales generados por la combinación lineal de los vectores.

Nota: en todos los casos debes primero hacer la combinación lineal

$$a) \vec{v}_1 = (1,0,0) \quad \vec{v}_2 = (0,1,0)$$

$$b) \vec{v}_1 = (1,0,0) \quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \quad \vec{v}_3 = (1,1,0)$$

$$c) \text{ Los polinomios } x^0, x^1, x^2, 4x^2$$

$$d) \text{ Las matrices } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. ¿Está el vector $(2,3)$ en $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$? Demuestra que el conjunto dado genera todo $\mathbb{R}_2$

17. Demuestra que $\text{Gen}\{\vec{i}, \vec{j}\} = \mathbb{R}^2$

18. ¿Está el vector $(2,0)$ en $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$? Demuestra que el conjunto dado no genera todo $\mathbb{R}_2$

19. Determina $\text{Gen}\{\vec{i}; \vec{k}\}$ en $\mathbb{R}^3$ (se lee: determina el espacio generado por los versores $\vec{i}; \vec{k}$)

20. Determina si el conjunto dado genera el espacio vectorial indicado y en caso negativo indicar si genera algún sub espacio de V

$$a) \text{ En } \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e) \text{ En } \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b) \text{ En } \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f) \text{ En } \mathbb{P}^3, \{x^3 - 2x + 3, x^2 + 4x\}$$

$$c) \text{ En } \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g) \text{ En } M_{3 \times 3}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$d) \text{ En } M_{2 \times 2},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$h) \text{ En } \mathbb{P}^2 \{1-x, 3-x^2, x\}$$

$$i) \text{ En } M_{2 \times 3}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

21. Muestra que dos polinomios no pueden generar a $\mathbb{P}_2$

$$22. \text{ Sean } \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$a. \text{ ¿está } \vec{w} \text{ en el espacio generado } \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\},?$$

$$e. \text{ ¿está } \vec{v} \text{ en el } \text{Gen}\{\vec{u}; \vec{w}\}$$

$$b. \text{ ¿está } \vec{u} \text{ en el } \text{Gen}\{\vec{v}; \vec{w}\}$$

$$c. \text{ ¿está } \vec{z} \text{ en el } \text{Gen}\{\vec{u}\}$$

$$d. \text{ ¿está } \vec{z} \text{ en el } \text{Gen}\{\vec{v}; \vec{w}\}$$

23. a. ¿es cierto que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$?

$$a) \text{ ¿Es verdad que el } \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^2?$$

$$b) \text{ ¿Es verdad que el } \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{z}\} = \text{Gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}?$$

$$c) \text{ Compare el } \text{Gen}\{\vec{u}\} \text{ con el } \text{Gen}\{\vec{z}\}$$

- d) ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
- e) ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
- f) ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
- g) ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$?

24. Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

- a) ¿ $\vec{t}$ está en el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{s}\}$?
- b) ¿ $\vec{t}$ está en el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}\}$?
- c) ¿ $\vec{t}$ está en el $\text{Gen}\{\vec{r}, \vec{s}\}$?
- d) Demuestra que el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{s}\} = \mathbb{R}^3$
- e) Demuestra que el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{t}\} = \mathbb{R}^3$
- f) Determina el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}\}$
- g) Determina el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{t}\}$

25. Supóngase lo siguiente: que si $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $u = (x_2, y_2, z_2)$ están en $\mathbb{R}^3$. Muestre que si $V_2 = \alpha V_1$ entonces $\text{gen}\{V_1, V_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

26. Proponga un conjunto de vectores que genere los EVR indicados y luego verifique lo propuesto

- h) Todos polinomios de tercer grado.
- i) El conjunto de matrices diagonales de 2×2 .
- j) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$.
- k) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$.

27. Verificar si son o no linealmente independientes los vectores:

- a) $\vec{u} = (0,0)$
- b) $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (0,0)$
- c) $\vec{u} = (1,3)$; $\vec{v} = (2,6)$
- d) $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (-3,1)$
- e) $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (-3,1)$; $\vec{w} = (1,0)$
- f) $\vec{u} = (1,3)$; $\vec{v} = (2,6)$; $\vec{w} = (1,0)$
- g) $\vec{u} = (0,0,0)$
- h) $\vec{u} = (1,0,4)$; $\vec{v} = (3,-1,2)$
- i) $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-1,3,2)$
- j) $\vec{u} = (1,2,3)$; $\vec{v} = (1,0,-2)$; $\vec{w} = (-1,0,2)$
- k) $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,1,0)$; $\vec{w} = (0,0,1)$
- l) $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,1,0)$; $\vec{w} = (0,0,1)$; $\vec{w} = (3,0,-1)$;

28. En el ítem j el conjunto de vectores es LD, pero $(1,2,3)$ no puede expresarse como una combinación lineal de $(1,0,-2)$ y $(-1,0,2)$. ¿Esto no contradice el teorema?

29. Prueba si el conjunto es LI y si genera el espacio o un sub espacio de este

- a) De polinomios P_2 : $(1 - x ; 1 + x; 1 + x^2)$

- b) $\vec{u} = 2x^2 + 4x + 8$; $\vec{v} = -2x^2 + x + 1$
- c) De matrices $M_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- d) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

30. Sea $A = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestra que el conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ es linealmente independiente.
31. Determina los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:
- $\{(1, k), (2, 3)\}$
 - $\{(1+k, 1-k), (1-k, 1+k)\}$
 - $\{(1, 2, 2), (2, 1, 1), (3, 3, k)\}$
 - $\{(1, 1, 1), (k, k, 0), (1, 0, k)\}$
32. Determina k para que el siguiente conjunto de polinomios $\{x^2 + x + 1, kx^2 + kx, x^2 + k\}$ sea linealmente independiente.
33. Encuentre condiciones sobre a, b, c y d en $\mathbb{R}$ de modo que: $A = \{(a, b), (c, d)\}$ sea LD.
34. Sea $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tres vectores cualesquiera de un espacio vectorial. Determina si el conjunto de vectores $\{\vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{w}\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.
35. Encuentre condiciones sobre α, β para que $A = \{(1, \beta, 0), (0, 1, \alpha), (2, 1, 1)\}$ sea LI
36. De acuerdo a lo realizado en el ejercicio 22, analiza en cada caso la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsas da un contraejemplo.
- Si $\vec{u}$ es vector no nulo de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\vec{u}\}$ es L. D.
 - Si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.
 - Si $\vec{u} = k\vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.
 - Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es L. D.
 - Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ es L. I.
 - Si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.
37. a. ¿es cierto que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$?
- ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^2$?
 - ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{z}\} = \text{Gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$?
 - Compare el $\text{Gen}\{\vec{u}\}$ con el $\text{Gen}\{\vec{z}\}$
- ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
 - ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
 - ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
 - ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
38. Supóngase lo siguiente: que si $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $u = (x_2, y_2, z_2)$ están en $\mathbb{R}^3$. Muestre que si $V_2 = \alpha V_1$ entonces $\text{gen}\{V_1, V_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

39. Proponga un conjunto de vectores que genere los EVR indicados y luego verifique lo propuesto

.

- s) Todos polinomios de tercer grado.
- t) El conjunto de matrices diagonales de 2×2 .
- u) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$.
- v) El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$.