

## VECTORES GEOMÉTRICOS

Definimos vectores como un conjunto ordenado de números que pueden escribirse en forma horizontal o vertical. Aquí trabajaremos con una aplicación de los vectores en el campo geométrico, que son usados además en la física en conceptos como los de fuerza, velocidad, trabajo, etc.

### CONCEPTO DE VECTOR GEOMÉTRICO

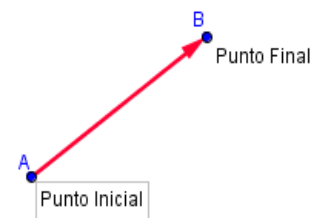
**Definición:** Llamamos vector o segmento orientado, a todo segmento en el que se ha establecido un orden  $\overrightarrow{AB}$  para sus extremos, se suele decir también que un vector es un par ordenado de números reales. Al primer punto extremo lo denominamos punto inicial, y al segundo punto extremo, punto final del mismo. La recta que contiene al vector determina la *dirección* del mismo. Un vector queda determinado si se conoce su módulo, es decir la distancia entre los puntos extremos y su dirección, por lo tanto *un vector es un ente matemático que se caracteriza por tener **módulo** y **dirección***

**Notación:** Los vectores se indicarán con una letra minúscula con una flecha arriba o también, con el nombre del punto inicial y final (Fig. 1)

Ejemplo:  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

**MÓDULO DE UN VECTOR:** Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. Es siempre un número positivo. Dado el vector  $\vec{v}$ , el módulo se representa por cualquiera de las siguientes maneras:  $|\overrightarrow{AB}|$ ;  $|\vec{v}|$

Fig. 1



**CLASIFICACIÓN DE VECTORES** los vectores podemos clasificarlos en:

- ✓ **Vectores libres** no están aplicados en ningún punto en particular
- ✓ **Vectores fijos** están aplicados en un punto particular

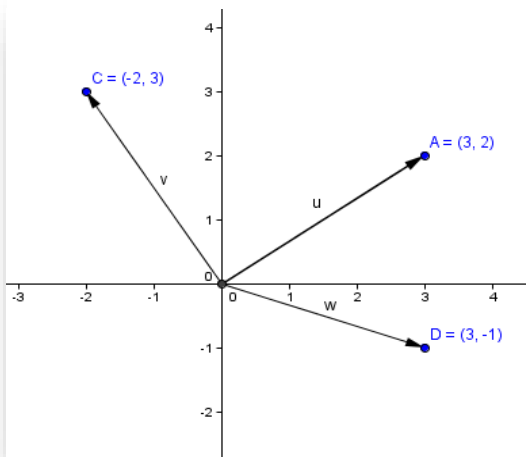
Según su dirección y módulo:

- ✓ módulo igual a cero **vectores nulos**
- ✓ módulo igual a uno **vectores unitarios**
- ✓ el mismo módulo y sentido contrario **vectores opuestos**
- ✓ el mismo módulo y la misma dirección **vectores equivalentes**
- ✓ direcciones perpendiculares **vectores perpendiculares**
- ✓ direcciones paralelas **vectores paralelos**
- ✓ están contenidos en un mismo plano **vectores coplanares**
- ✓ están contenidos en una misma recta **vectores colineales**

**VECTORES EN  $\mathbb{R}^2$**  El conjunto de todos los puntos en el plano corresponde al conjunto de todos los vectores cuyos puntos iniciales se encuentran en el origen de coordenadas O. Para el punto A, corresponde el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ , para el punto C, el vector  $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ , estos vectores se conocen con el nombre de **vectores estándar**.

*Observación:* en esta situación las coordenadas del punto coinciden con las componentes del vector

Fig. 2



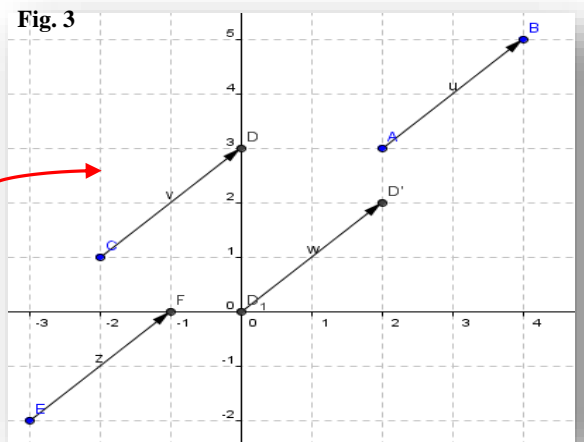
$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (3,2)$  3 y 2 son las componentes del vector y las coordenadas del punto A Fig. 2

Se dice que el vector  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$  son vectores posición o vectores en posición estándar

Si dos segmentos de recta dirigidos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  tienen la misma magnitud y dirección se dice que son **equivalentes**. (fig.3), sin importar donde se localice el origen. Lo dicho anteriormente corresponde a **vectores libres**.

*Representante*

Cuando consideramos un vector, designándolo por los puntos origen y extremo, en realidad estamos considerando un representante del mismo. Hay infinitos otros puntos que definen representantes del mismo vector, ya que debemos tener en cuenta que consideramos vectores libres. Fig 3



Si  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$  entonces  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Como los vectores se encuentran en posición estándar coinciden con las coordenadas de los puntos

$\overrightarrow{OB} = B$  y  $\overrightarrow{OA} = A$

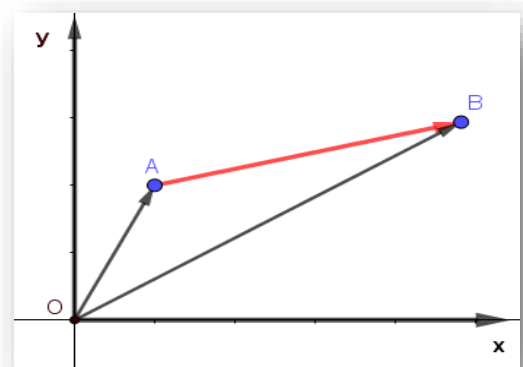


Fig. 4

Podemos decir entonces que el vector

$$\overrightarrow{AB} = \text{coordenadas del punto final (B)} - \text{coordenadas del punto inicial (A)}$$

En la fig. 3 tenemos los puntos A (2,3) y B (4,5) por lo tanto el vector  $\overrightarrow{AB}$  que registra el desplazamiento desde A (punto Inicial) hasta B (punto final), es precisamente la diferencia de las respectivas coordenadas de los puntos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,5) - (2,3) = (4 - 2; 5 - 3) = (2; 2)$$

De manera similar,  $C(-2,1)$  y  $D(0,3) \rightarrow \overrightarrow{CD} = [0 - (-2); 3 - 1] = (2; 2)$  y entonces  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  son equivalentes.

### COMPONENTES DE UN VECTOR

Dados los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , las componentes del vector  $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$  definido por dichos puntos, serán las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados Fig. 5

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (v_x, v_y) \text{ donde}$$

$$v_x = x_2 - x_1 \text{ Proyección sobre el eje } x$$

$$v_y = y_2 - y_1 \text{ Proyección sobre el eje } y$$

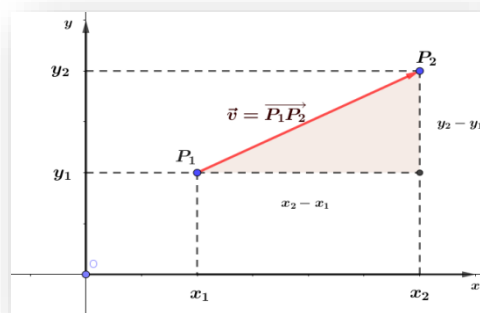


Fig. 5

**Observación:** no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

### MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  el módulo o longitud de  $\vec{v}$ , será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

\*Dados  $P_1(2,1)$  y  $P_2(-3,5)$ , encontrar un vector  $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$  y hallar su módulo  $|\vec{v}|$

**Solución:**

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1) = (-3,5) - (2,1) = (-3 - 2, 5 - 1) = (-5,4)$$

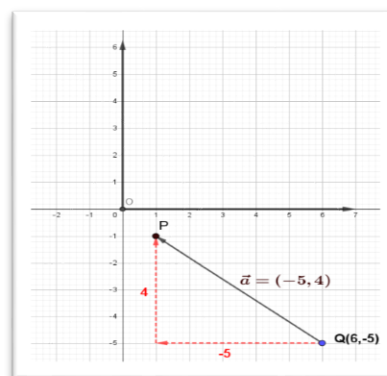
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

\*Sea el vector  $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$ , donde Q (6, -5) es el origen del vector  $\vec{a} = (-5, 4)$  ¿Cuál es el extremo de ese representante? Ayuda  $P(x_2, y_2)$

**Solución:**

$$a_x = x_2 - x_1 \quad -5 = x_2 - 6 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$a_y = y_2 - y_1 \quad 4 = y_2 + 5 \quad \rightarrow \quad y_2 = -1$$



1. ¿ El representante de  $\vec{b}$  en el origen tiene por extremo al punto M (-5, 4) ¿Cuáles son las componentes del vector  $\vec{b}$ ?
2. ¿ Dado  $\vec{a} = (3, -3)$ 
  - 2.1 Si P (-3, 2) es el origen del representante, hallar el otro extremo
  - 2.2 Hallar el origen del representante, cuyo extremo es Q (2, -5)
  - 2.3 Hallar componentes de  $-\vec{a}$

### VECTOR UNITARIO O VERSOR

Es un vector en la misma dirección de  $\vec{v}$ , pero de módulo uno y se obtiene dividiendo  $\vec{v}$  por su módulo  $|\vec{v}|$ .

$$\check{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- \*¿Es unitario el vector  $\vec{v} = (1, -1)$ ?
- \*\*Halla un vector unitario en la dirección de  $\vec{v}$

#### Solución:

\*NO, porque su módulo no es 1  $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

\*\*  $\check{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$  porque si sacamos el  $|\check{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

### VERSORES EN EL PLANO

Son los vectores  $\check{i} = (1, 0)$  ;  $\check{j} = (0, 1)$ ; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

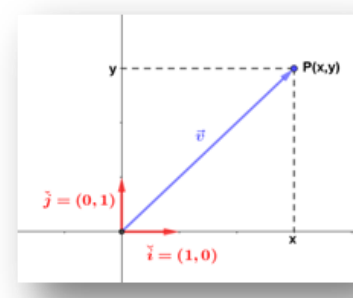
Todo vector de  $R^2$  es una **combinación lineal** de los versores  $\check{i}, \check{j}$

Sea  $\vec{v} = (x, y)$  se tiene entonces

$$\vec{v} = (x, 0) + (0, y)$$

$$\vec{v} = x(1,0) + y(0,1)$$

$$\vec{v} = x\check{i} + y\check{j}$$



### VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado  $\vec{v} \neq \vec{0}$  para hallar un vector unitario ( $\check{u}$ ) que tenga igual dirección que  $\vec{v}$  basta hallar un escalar  $\lambda > 0$  tal que  $\check{u} = \lambda \vec{v}$  y  $|\lambda \vec{v}| = 1$

Como  $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$ , entonces  $|\lambda \vec{v}| = 1 \leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{v}|}$  por lo tanto un vector unitario es el cociente entre el vector y su módulo:

$$\check{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

**Observaciones:** si  $\lambda = -\frac{1}{|\vec{v}|}$  se obtiene  $-\check{v}$  (versor con dirección opuesta a la de  $\vec{v}$ )

\*Dados  $A(1,2)$  y  $B(5,5)$  halla un vector de módulo 1, que tenga la misma dirección que  $\overline{AB}$ .

**Solución:**

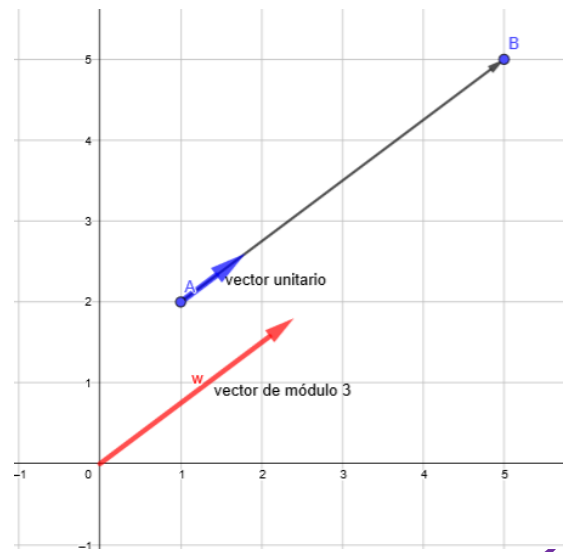
$$\overline{AB} = (5 - 1, 5 - 2) = (4, 3)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \check{u} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{5}(4, 3)$$

\* Halla un vector de módulo 3 y en la misma dirección de  $\overline{AB}$ .

$$\vec{w} = 3 \cdot \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = 3 \cdot \check{u} = \frac{3}{5}(4, 3)$$

$$\text{Verificación } |\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$$



### ANGULOS DIRECTORES

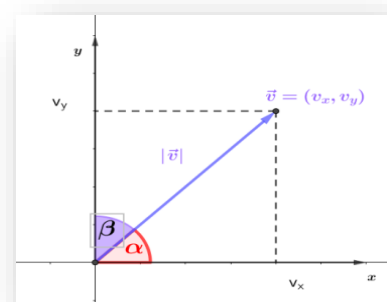
Dado un vector no nulo  $\vec{v}$ , se llaman ángulos directores de  $\vec{v}$ , a los ángulos  $\alpha, \beta$  que forma  $\vec{v}$  con los versores  $\vec{i}, \vec{j}$  respectivamente. Los ángulos directores son mayores que  $0^\circ$  y menores que  $180^\circ$

Se llaman cosenos directores de  $\vec{v}$ , a los cosenos de sus ángulos directores:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

¿Cómo es  $\vec{v}$  si  $\alpha = 0^\circ$ ? , ¿Si  $\alpha = \pi$ ?

¿Cómo es  $\vec{v}$  si  $\beta = 0^\circ$ ? , ¿Si  $\beta = \pi$ ?



**Observaciones:** Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo. También se puede utilizar la función trigonométrica de la tangente

### OPERACIONES

**Suma o diferencia:** se realiza componente a componente. Sea  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  y  $\vec{v} = (v_1; v_2)$  entonces la suma o diferencia de  $\vec{u} \pm \vec{v}$  es el vector

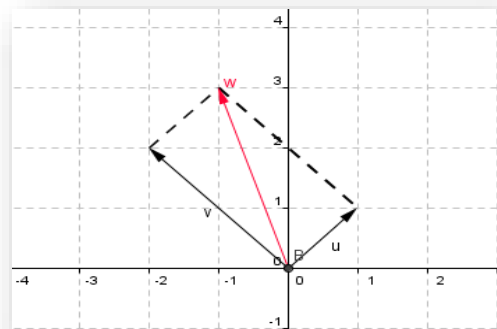
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1; u_2 \pm v_2)$$

Si  $\vec{u} = (1,1)$  y  $\vec{v} = (-2,2)$

Entonces  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1, 3)$

Utilizando el método del paralelogramo.

Si la diagonal principal representa la suma, ¿qué representa la contradiagonal?



¿Dados los vectores  $\vec{a} = (1,2)$ ,  $\vec{b} = (4,-3)$  y  $\vec{d} = (-2,1)$ . Hallar escalares  $\alpha$  y  $\beta$  tales que:  
 $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

**Observación:** Debes plantear la igualdad en términos de las componentes y resolver el sistema de ecuaciones obtenido al igualar las respectivas componentes. Se dice que  $\vec{d}$  es combinación lineal de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

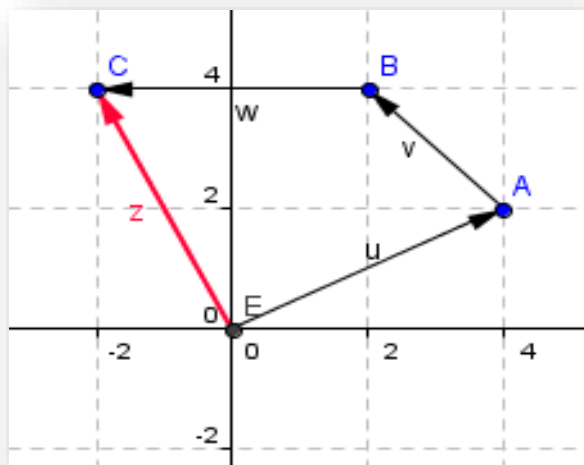
Sean  $A(4,2)$ ;  $B(2,4)$  y  $C(-2,4)$ .

Entonces  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \rightarrow$

$$\vec{OC} = (4,2) + (-2,2) + (-4,0) =$$

$$\vec{OC} = (-2,4)$$

**EL VECTOR RESULTANTE VA DESDE EL ORIGEN DEL PRIMER VECTOR HASTA EL EXTREMO DEL ULTIMO VECTOR**



### MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

El escalamiento de un vector, se logra multiplicando cada componente del vector por un número  $\lambda \in \mathbb{R}$  (se lee lambda perteneciente a los reales)

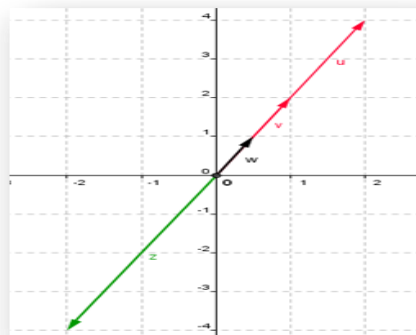
Dado  $\vec{v} \neq 0$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el producto de  $\lambda\vec{v}$  tiene:

- la misma dirección de  $\vec{v}$ , si  $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si  $\lambda < 0$
- el vector nulo si  $\lambda = 0$

Si  $\vec{v} = (1,2)$  entonces si se multiplica a  $\vec{v}$  por un escalar  $\lambda$ :

- si  $0 < \lambda < 1$   $\vec{v}$  se comprime  $\vec{w}$
- si  $\lambda > 1$  se dilata  $\vec{u}$
- si  $\lambda < 0$  cambia de sentido  $\vec{z}$

El módulo de  $\lambda \vec{v}$  es el módulo de  $\vec{v}$  multiplicado por el valor absoluto de  $\lambda$



Sea  $\vec{v} = (v_1, v_2)$      $\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2) \rightarrow |\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$

¿ Si se aplican dos operaciones consecutivas al vector  $(-1,3)$  en  $\mathbb{R}^2$ , primero se lo multiplica por un escalar fijo y luego se le suma un vector fijo, ¿es posible llegar al vector  $\vec{w} = (2,3)$

## CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES

**Propiedad:** dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos si y sólo si existe un número real  $\lambda \neq 0$  tal que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

Dos vectores son paralelos cuando tienen igual dirección o direcciones opuestas (se dice también que son colineales porque están sobre la misma línea)

## PRODUCTO ESCALAR O PUNTO

Las versiones vectoriales de *longitud, distancia y ángulo* pueden describirse a través del empleo de la noción del producto escalar de dos vectores

Dados  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  no nulos, se define producto escalar de  $\vec{a}$  con  $\vec{b}$  al número real:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta^{**}$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

**Observación:** \*\* se obtiene aplicado la Ley de los cosenos Grossman Cap. IV pág. 248 7ma. Ed.

## PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

Teniendo en cuenta que  $\check{i}$  y  $\check{j}$  son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es  $\frac{\pi}{2}$ , reemplazando en \*\* podemos observar lo siguiente

$$\check{i} \cdot \check{j} = |\check{i}| |\check{j}| \cos 90^\circ \rightarrow \check{i} \cdot \check{j} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

El producto escalar de un vector por sí mismo será:

$$\check{i} \cdot \check{i} = |\check{i}| |\check{i}| \cos 0^\circ = 1 \quad \check{j} \cdot \check{j} = |\check{j}| |\check{j}| \cos 0^\circ = 1$$

Expresando  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  en función de las componentes canónicas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \check{i} + a_2 \check{j}) \cdot (b_1 \check{i} + b_2 \check{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\check{i} \cdot \check{i}) + a_1 \cdot b_2 \cdot (\check{i} \cdot \check{j}) + a_2 \cdot b_1 \cdot (\check{j} \cdot \check{i}) + a_2 \cdot b_2 \cdot (\check{j} \cdot \check{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\check{i} \cdot \check{i}) + a_2 \cdot b_2 \cdot (\check{j} \cdot \check{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

**Importante** para realizar el producto en primer lugar  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  deben tener igual cantidad de componentes y en segundo lugar **el producto escalar de dos vectores es un número** no otro vector, por eso se denomina producto escalar

Dados  $\vec{a} = (1,2)$  ,  $\vec{b} = (4,-3)$   $\vec{c} = (0,-5)$  realizar el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1,2) \cdot (4,-3) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (1,2) \cdot (0,-5) = 1 \cdot 0 + 2(-5) = -10$$

*¿El producto escalar de tres vectores será un también un escalar?*

## ANGULO ENTRE DOS VECTORES

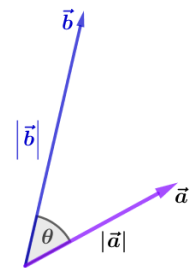
A partir del producto escalar se puede calcular el ángulo entre dos vectores no nulos  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  cuyos orígenes coinciden

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

\*Si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera  $\theta = 0^\circ$

\*Si tienen dirección opuesta, se considera  $\theta = \pi = 180^\circ$

\* En ambos casos ¿cómo serían los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  ?



**VECTORES ORTOGONALES** Dos vectores no nulos,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son ortogonales si el ángulo  $\theta$  que forman es  $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  y por lo tanto se cumple

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Demostración:

Si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son ortogonales  $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  por lo tanto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  ya que  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Si  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

\*Decidir si los vectores  $\vec{a} = (-1, 2)$  y  $\vec{b} = (6, 3)$  son ortogonales.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 2) \cdot (6, 3) = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 0$  por lo tanto son ortogonales.

\*Determinar el valor de x, para que los vectores  $\vec{a} = (x, 5)$  y  $\vec{b} = (3, -3)$  sean ortogonales

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, 5) \cdot (3, -3) = x \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow \vec{a} = (5, 5)$

**PROYECCIÓN ESCALAR** Dados dos vectores no nulos  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , la proyección escalar o componente escalar de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$  se define como el producto del módulo de  $\vec{b}$  por el coseno del ángulo  $\theta$  que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

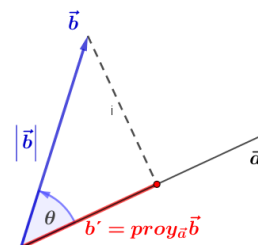
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \mathbf{b}' = |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Como

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

entonces la proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$  será

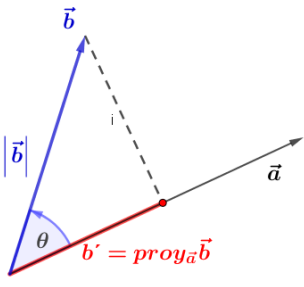
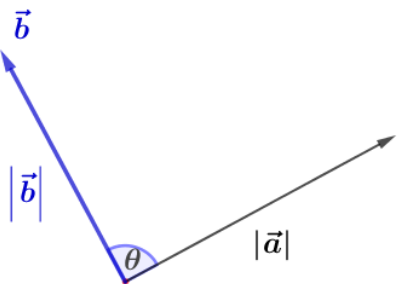
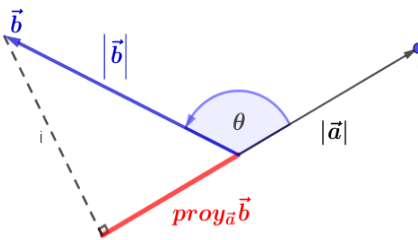
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$



Siendo  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \check{a}$  (versor con la dirección de  $\vec{a}$ ), implica que la proyección escalar de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \check{a}$$

Se suele también decir  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$ , o “la componente de  $\vec{b}$  en la dirección de  $\vec{a}$ ”

Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$	Si $\theta = \frac{\pi}{2}$	Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
		
$proy_{\vec{a}} \vec{b} > 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$proy_{\vec{a}} \vec{b} = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$proy_{\vec{a}} \vec{b} < 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

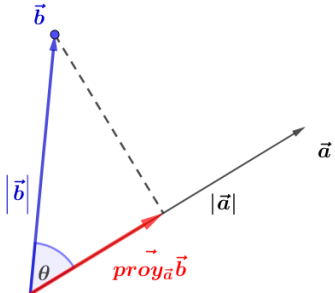
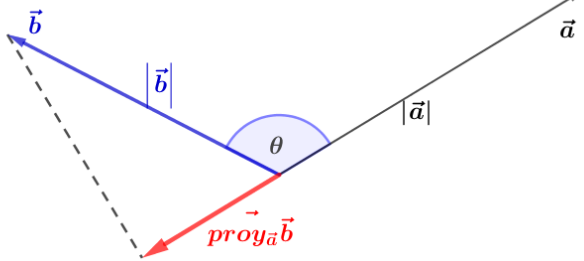
✓ Prueba que las proyecciones de  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  en las direcciones de  $\hat{i}, \hat{j}$  son las componentes del vector  $\vec{a}$

### PROYECCIÓN VECTORIAL

La proyección vectorial del vector  $\vec{b}$  sobre el vector  $\vec{a}$  es un vector que es múltiplo escalar del vector  $\vec{a}$  y lo indicamos  $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$

$$\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow \overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

- ✓ La  $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$  está en la misma dirección que el vector  $\vec{a}$  si  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
- ✓ La  $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$  está en dirección opuesta al vector  $\vec{a}$  si  $\theta > \frac{\pi}{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
	

Dados  $\vec{u} = (3, -1)$  y  $\vec{v} = (2, 2)$ , calcula y grafica:

- La proyección escalar de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$
- La proyección vectorial de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$
- Grafica ambas proyecciones
- La proyección escalar de  $\vec{u}$  sobre el vector  $\vec{v}$
- La proyección vectorial de  $\vec{u}$  sobre el vector  $\vec{v}$
- Grafica ambas proyecciones
- Es indistinto  $proj_{\vec{u}} \vec{v}$  que  $proj_{\vec{v}} \vec{u}$

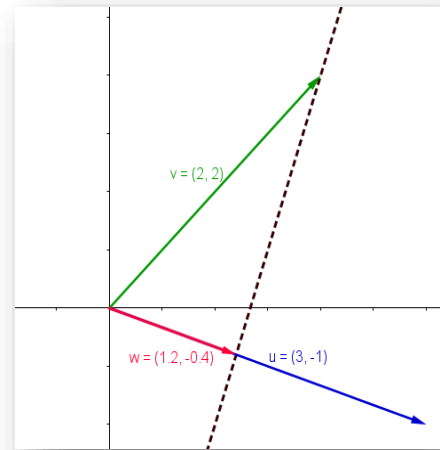
**Solución:**

$$a) \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{6-2}{\sqrt{10}}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$b) \vec{w} = \overline{\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{(\sqrt{3^2+(-1)^2})^2} \cdot (3, -1)$$

$$\vec{w} = \overline{\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{4}{10} (3, -1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$



¿Cuál es el vector  $proj_{\vec{a}} \vec{b}$  cuando  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son perpendiculares?

Dibuja un par de vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de modo que la  $proj_{\vec{a}} \vec{b}$  resulte:

- de igual dirección que  $\vec{b}$
- de distinta dirección que  $\vec{b}$

(Los temas tratados están ampliamente desarrollados en el libro Grossman 7ma Edición -Capítulo 4 Vectores en  $R^2$  y  $R^3$ , se recomienda su lectura y estudio)

**TRABAJO PRÁCTICO: VECTORES EN  $\mathbb{R}^2$** 

1. Dados los puntos  $P(3,0)$ ;  $Q(2,3)$ ;  $R(-2,3)$ ;  $S(3,-2)$ ;  $T(0,-2)$  encuentra:
  - a) el vector en posición estándar  $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ;  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ ;  $\vec{w} = \overrightarrow{OR}$ ;  $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$ ;  $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$ . ¿Qué tienen en común el vector en posición estándar y las coordenadas de los puntos?
  - b) escribe estos vectores como una combinación lineal de los versores  $\vec{i}, \vec{j}$
  - c) la magnitud o módulo de  $|\vec{u}|, |\vec{v}|, |\vec{w}|, |\vec{s}|$
  - d) la dirección de cada uno de los vectores (o sea en que cuadrante se encuentran)
  - e) un vector en la misma dirección de cada uno de ellos, pero de módulo 1 (vector unitario)
  - f) grafica cada uno de estos y sus respectivos vectores unitarios
  - g) calcula y representa gráficamente  $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$
  - h) ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la primera coordenada de cada vector?
  - i) ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la segunda coordenada de cada vector?
  - j) ¿qué efecto geométrico produce multiplicar a cada vector por  $-1$ ?
  
2. Dibuja los vectores hallados en el ítem 1.a con sus puntos iniciales situados en el punto  $(-2,5)$ , determina los puntos finales
  
3. Si los vectores en el ejercicio 1 se trasladan de modo que sus extremos finales se ubiquen en el punto  $(5,7)$ ; determina los puntos que correspondan a sus puntos iniciales
  
4. Dados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  (ejercicio 1) dibuja los siguientes vectores:
 
$$\vec{j} = \vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{l} = \vec{u} - \vec{v} \quad \vec{p} = \vec{v} - 2\vec{u} \quad \vec{q} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$$
5. Calcula el producto escalar e indica si son ortogonales o paralelos
 
$$\vec{u} \cdot \vec{t} \quad \vec{w} \cdot \vec{s} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (5\vec{v}) \cdot \vec{s}$$
6. Dados los siguientes puntos  $A(1, -1)$ ,  $B(4, 2)$ ;  $C(0, -2)$ ,  $D(2, -1)$ . Calcula y comprueba que la resultante está en función del origen del primer vector y el extremo del último
  - a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
  - b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
  - c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
  - d)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$
  - e)  $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})$
  
7. Dados los puntos  $A(4,2)$ ,  $B(10,5)$ ,  $C(2,6)$  y  $D(x,9)$ , se pide:
  - a) Calcula  $x$  para que  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  sean paralelos.
  - b) Calcula  $x$  para que  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{DA}$  tengan el mismo módulo.
  
8. Dados los vectores  $\vec{u} = (x, 5)$  y  $\vec{v} = (8, 4)$ , ¿Qué valor debe tomar  $x$  para que: a) sean paralelos. b) sean perpendiculares .c) verifiquen que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 42$
  
9. Demuestra que no hay vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , tales que el módulo de  $\vec{a}$  sea igual a 1, el módulo de  $|\vec{b}| = 2$  y  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$
  
10. Dados los puntos  $A(2, 6)$ ;  $B(4, 8)$ ;  $C(3, 2)$  y  $D(7, 1)$ , se pide:
  - a) Calcula el ángulo que forman los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$

b) Calcula el ángulo que forman los vectores  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  y  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

11. a) Si  $\vec{u} = -i + 5j$  y  $\vec{v} = ki + j$ , el ángulo entre dichos vectores es  $\pi/3$ , determina k.  
 b) Si  $\vec{u} = 3i - j$  y  $\vec{v} = i + kj$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , son perpendiculares, determina k  
 c) Si  $\vec{u} = ki - j$  y  $\vec{v} = 2i + kj$ , determina k, si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos

12. *Más de lo mismo, comprueba si aprendiste*

En la siguiente figura encuentra el vector y sus opuestos

- a.  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CG}$ ,  $\overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{GD}$   
 b. Escríbelos en forma canónica  
 c. Calcula el módulo de ellos  
 d. Escribe un vector unitario en la dirección de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{GD}$  y  $\overrightarrow{FG}$   
 e. Ahora escribe un vector de módulo 2 con la dirección de los vectores del ítem d. Grafica  
 f. Realiza los siguientes productos escalares:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GF}$  ¿Qué te da como resultado multiplicar dos vectores? ¿Y si multiplicaras escalarmente 3 vectores?  
 g. Utilizando la definición de producto escalar halla los ángulos entre  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AF}$   
 h. Propón un vector paralelo a  $\overrightarrow{AG}$ , con origen en el punto B, ¿es único?  
 i. Encuentra la proyección escalar y vectorial de por lo menos tres vectores sobre los ejes coordenados ¿a qué conclusión puedes llegar?  
 j. Calcula las siguientes proyecciones escalares y vectoriales  
 $Proy_{\overrightarrow{AF}}\overrightarrow{AB}$ ,  $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$ ,  $Proy_{\overrightarrow{GD}}\overrightarrow{AG}$

