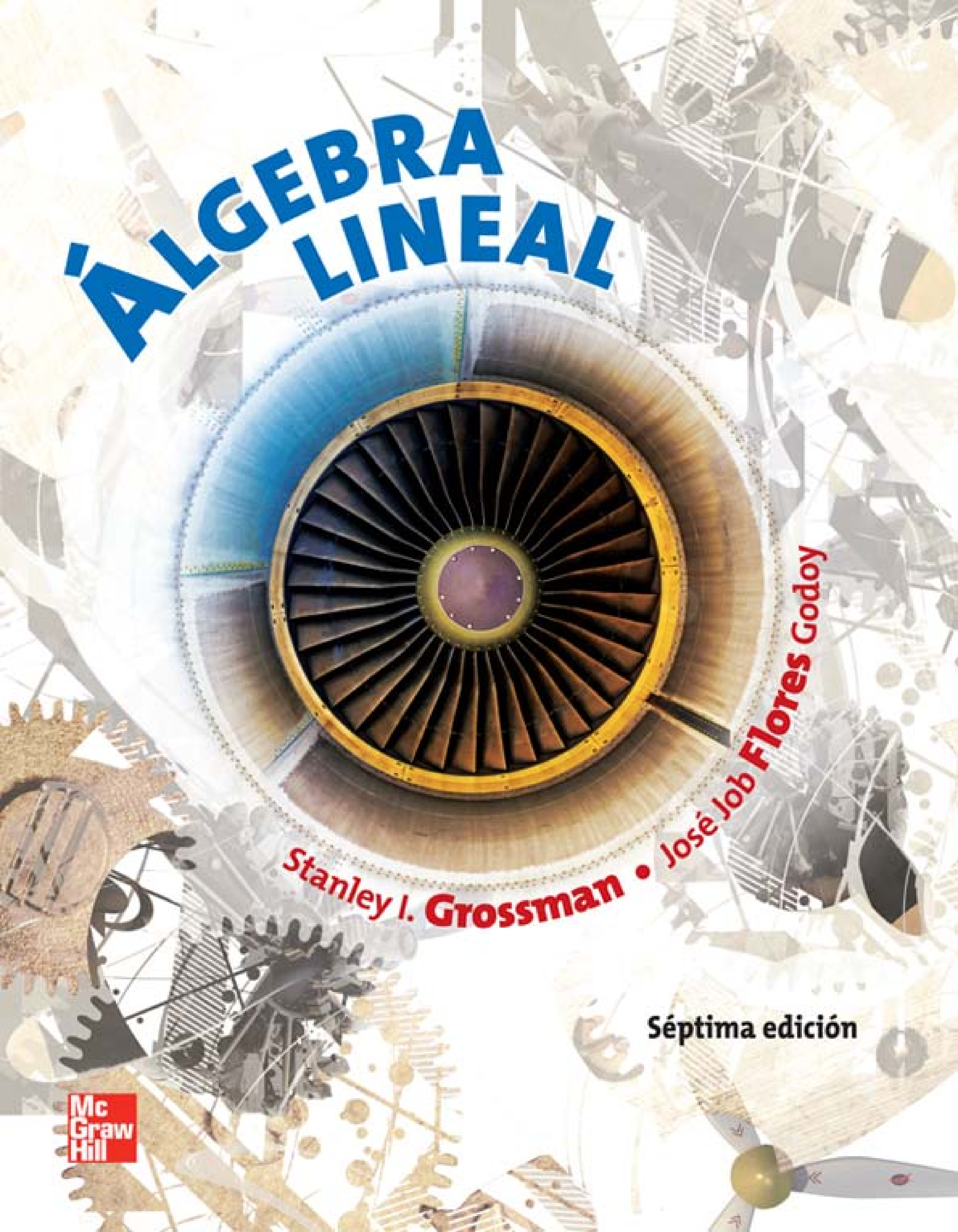


ÁLGEBRA LINEAL

Stanley I. Grossman • José Job Flores Godoy

Séptima edición

Mc Graw Hill

ÁLGEBRA LINEAL

Séptima edición

Stanley I. Grossman S.
University of Montana
University College London

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana
Ciudad de México

Revisión técnica:

Elsa Fabiola Vázquez Valencia
Universidad Iberoamericana
Ciudad de México

Eleazar Luna Barraza
Universidad Autónoma de Sinaloa, México

María del Pilar Goñi Vélez
Universidad Autónoma de Nuevo León, México

Carmen Judith Vanegas
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

M. Rosalba Espinoza Sánchez
Universidad de Guadalajara
México

Adrián Infante
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÂO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

ÁLGEBRA LINEAL

Séptima edición

McGraw Hill **Educación**

DERECHOS RESERVADOS © 2012, respecto a la séptima edición por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
*A Subsidiary of **The McGraw-Hill** Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0760-0
ISBN (edición anterior): 978-970-10-6517-4

1234567890 1345678902

Impreso en México *Printed in Mexico*

Contenido

Prefacio

Anteriormente el estudio del álgebra lineal era parte de los planes de estudios de los alumnos de matemáticas y física, principalmente, y también recurrían a ella aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como la estadística multivariable. Hoy en día, el álgebra lineal se estudia en diversas disciplinas gracias al uso de las computadoras y al aumento general en las aplicaciones de las matemáticas en áreas que, por tradición, no son técnicas.

Prerrequisitos

Al escribir este libro tuve en mente dos metas. Intenté volver accesibles un gran número de temas de álgebra lineal para una gran variedad de estudiantes que necesitan únicamente conocimientos firmes del álgebra correspondientes a la enseñanza media superior. Como muchos estudiantes habrán llevado un curso de cálculo de al menos un año, incluí también varios ejemplos y ejercicios que involucran algunos temas de esta materia. Éstos se indican con el símbolo Cálculo. La sección 8.7 es opcional y sí requiere el uso de herramientas de cálculo, pero salvo este caso, *el cálculo no es un prerrequisito* para este texto.

Aplicaciones

Mi segunda meta fue convencer a los estudiantes de la importancia del álgebra lineal en sus campos de estudio. De este modo el contexto de los ejemplos y ejercicios hace referencia a diferentes disciplinas. Algunos de los ejemplos son cortos, como las aplicaciones de la multiplicación de matrices al proceso de contagio de una enfermedad (página 67). Otros son un poco más grandes; entre éstos se pueden contar el modelo de insumo-producto de Leontief (páginas 18 a 19 y 111 a 113), la teoría de gráficas (sección 2.8), la aproximación por mínimos cuadrados (sección 6.2) y un modelo de crecimiento poblacional (sección 8.2).

Además, se puede encontrar un número significativo de aplicaciones sugestivas en las secciones de MATLAB®.

Teoría

Para muchos estudiantes el curso de álgebra lineal constituye el primer curso real de *matemáticas*. Aquí se solicita a los estudiantes no sólo que lleven a cabo cálculos matemáticos sino también que desarrollen demostraciones. Intenté, en este libro, alcanzar un equilibrio entre la técnica y la teoría. Todas las técnicas importantes se describen con minucioso detalle y se ofrecen ejemplos que ilustran su utilización. Al mismo tiempo, se demuestran todos los teoremas que se pueden probar utilizando los resultados dados aquí. Las demostraciones más difíciles se dan al final de las secciones o en apartados especiales, pero *siempre se dan*. El resultado es un libro que proporcionará a los estudiantes tanto las habilidades algebraicas para resolver los problemas que surjan en sus áreas de estudio como una mayor apreciación de la belleza de las matemáticas.

Características

La séptima edición ofrece nuevas características y conserva la estructura ya probada y clásica que tenía la edición anterior. Las nuevas características se enumeran en la página XIV.

Examen diagnóstico

El examen diagnóstico, nuevo en esta edición, busca identificar si el alumno posee las nociones mínimas necesarias para un curso exitoso de álgebra lineal. Este examen se compone de 36 reactivos divididos en 7 problemas, cada uno de los cuales evalúa alguna habilidad matemática especifíca. En la pregunta 1 se evalúa la habilidad de manipular operaciones aritméticas simples. En la pregunta 2 se estima el concepto de conjuntos, que son los elementos que tienen una o varias propiedades en común. En la pregunta 3 se aprecia la manipulación de conjuntos con sus operaciones de unión, intersección y complemento. En el problema 4 se revisan las habilidades básicas de álgebra. En el problema 5 se evalúa la habilidad de factorizar expresiones algebraicas simples. En la pregunta 6 se calcula la habilidad para resolver ecuaciones lineales simples. Finalmente, en la pregunta 7 se estima la habilidad para encontrar raíces de polinomios.

Ejemplos

Los estudiantes aprenden matemáticas mediante ejemplos completos y claros. La séptima edición contiene cerca de 350 ejemplos, cada uno de los cuales incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución. En muchos casos se proporcionaron secciones de ayuda didáctica para facilitar el seguimiento de esos pasos. Adicionalmente, se otorgó un nombre a los ejemplos con el objeto de que resulte más sencillo entender el concepto esencial que ilustra cada uno.

Ejercicios

El texto contiene cerca de 2750 ejercicios. Al igual que en todos los libros de matemáticas, éstos constituyen la herramienta más importante del aprendizaje. Los problemas conservan un orden de acuerdo con su grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones. Los problemas más complicados se encuentran marcados con un asterisco (*) y unos cuantos excepcionalmente difíciles con dos (**). Éstos se complementan con ejercicios de problemas impares, incluyendo aquellos que requieren demostraciones. De los 2750 ejercicios, alrededor de 300 son nuevos. Muchos son aportaciones de profesores destacados en la materia. También hay varios problemas en las secciones "Manejo de calculadora" y "MATLAB".

Teorema de resumen

Una característica importante es la aparición frecuente del teorema de resumen, que une temas que en apariencia no tienen nada en común dentro del estudio de matrices y transformaciones lineales. En la sección 1.1 (página 5) se presenta el teorema por vez primera. En las secciones 2.4 (p. 114), 2.6 (p. 138), 3.3 (p. 215), 5.4 (p. 337), 5.7 (p. 395), 7.4 (p. 529) y 8.1 (p. 557) se encuentran versiones cada vez más completas de dicho teorema.

Autoevaluación

Los problemas de autoevaluación están diseñados para valorar si el estudiante comprende las ideas básicas de la sección, y es conveniente que los resuelva antes de que intente solucionar los problemas más generales que les siguen. Casi todos ellos comienzan con preguntas de opción múltiple o falso-verdadero que requieren pocos o ningún cálculo.

Manejo de calculadora

En la actualidad existe una gran variedad de calculadoras graficadoras disponibles, con las que es posible realizar operaciones con matrices y vectores. Desde la edición anterior, el texto incluye secciones de "manejo de calculadora" que tienen por objeto ayudar a los estudiantes a usar sus calculadoras en este curso. Para esta edición se han actualizado estas secciones con uno de los modelos de vanguardia.

Se presentan secciones donde se detalla el uso de la calculadora Hewlett-Packard HP 50g para la resolución de problemas. Se han incluido problemas cuyo objetivo es utilizar la calculadora para encontrar las soluciones.

Sin embargo, debe hacerse hincapié en que *no se requiere que los alumnos cuenten con una calculadora graficadora para que el uso de este libro sea efectivo*. Las secciones de manejo de calculadora son una característica *opcional* que debe usarse a discreción del profesor.

Resúmenes de secciones

Al final de cada sección aparece un repaso detallado de los resultados importantes hallados en ésta. Incluye referencias a las páginas de la sección en las que se encuentra la información completa.

Geometría

Algunas ideas importantes en álgebra lineal se entienden mejor observando su interpretación geométrica. Por esa razón se han resaltado las interpretaciones geométricas de conceptos importantes en varios lugares de esta edición. Éstas incluyen:

- La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (p. 20)
- La interpretación geométrica de un determinante de 2×2 (pp. 183, 272)
- La interpretación geométrica del triple producto escalar (p. 273)
- Cómo dibujar un plano (p. 282)
- La interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$ (p. 334)
- La geometría de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (pp. 510-517)
- Las isometrías de $\mathbb{R}^2$ (p. 536)

Semblanzas históricas

Las matemáticas son más interesantes si se conoce algo sobre el desarrollo histórico del tema. Para estimular este interés se incluyen varias notas históricas breves, dispersas en el libro. Además, hay siete semblanzas no tan breves y con más detalles, entre las que se cuentan las de:

- Carl Friedrich Gauss (p. 21)
- Sir William Rowan Hamilton (p. 54)

- Arthur Cayley y el álgebra de matrices (p. 76)
- Breve historia de los determinantes (p. 228)
- Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial (p. 274)
- Historia de la inducción matemática (p. 651)

Características nuevas de la séptima edición

Gracias a la participación de profesores y revisores, la nueva edición se ha enriquecido con diversos cambios, como son:

- Se ha renovado el diseño de las páginas con la finalidad de que la obra posea una estructura más organizada y amable para el lector.
- La mayoría de las notas y las observaciones se reubicaron al margen a fin de resaltar su importancia y evitar distraer al lector en el discurso del tema.
- Algunos capítulos de la edición anterior fueron reorganizados con objeto de proporcionar flexibilidad a los profesores en cuanto a los temas que habrán de abordar.
- Se incluye un breve examen diagnóstico cuya finalidad es ayudar a los estudiantes a identificar las habilidades mínimas necesarias para aprovechar de la mejor manera el contenido de este libro.
- Las tutorías y problemas de MATLAB también se han actualizado, incluyendo ahora mayores referencias e incluso muchos de los códigos necesarios.
- Gran cantidad de problemas nuevos, además de otros actualizados, que permitirán ejercitar y aplicar las habilidades adquiridas. Por ende, la sección de respuestas al final del libro ha cambiado por completo.

MATLAB®

El texto cuenta con más de 230 problemas opcionales para MATLAB®, muchos de los cuales tienen varios incisos, que aparecen después de la mayoría de las secciones de problemas (MATLAB® es una marca registrada de The Math Works, Inc.). MATLAB® es un paquete poderoso pero amigable, diseñado para manejar problemas de una amplia variedad que requieren cálculos con matrices y conceptos de álgebra lineal. Se puede ver mayor información sobre este programa en la sección de apéndices. Los problemas relacionados directamente con los ejemplos y los problemas normales exhortan al estudiante a explotar el poder de cálculo de MATLAB® y explorar los principios del álgebra lineal mediante el análisis y la obtención de conclusiones. Además, se cuenta con varios incisos de "papel y lápiz" que permiten que el alumno ejercite su juicio y demuestre su aprendizaje de los conceptos.

La sección 1.3 es la primera que contiene problemas de MATLAB®; antes de estos problemas se presenta una introducción y una tutoría breve. Los problemas de MATLAB® en cada sección están diseñados para que el usuario conozca los comandos de MATLAB® a medida que se van requiriendo para la resolución de problemas. Se cuenta con numerosas aplicaciones y problemas proyecto que demuestran la relevancia del álgebra lineal en el mundo real; éstos pueden servir como trabajos de grupo o proyectos cortos.

Muchos de los problemas de MATLAB® están diseñados para animar a los estudiantes a describir teoremas de álgebra lineal. Por ejemplo, un estudiante que genere varias matrices triangulares superiores y calcule sus inversas obtendrá la conclusión natural de que la inversa de una matriz triangular superior es otra triangular superior. La demostración de este resultado no es trivial, pero tendrá sentido si el estudiante "ve" que el resultado es aceptable. Prácticamente todos los conjuntos de problemas de MATLAB® contienen algunos que llevan a resultados matemáticos.

Lo mismo que en el caso del manejo de calculadora, se resalta aquí el hecho de que el material de MATLAB® es *opcional*. Se puede asignar o no según el profesor lo considere conveniente.

En lugar de colocar la sección de MATLAB a manera de suplemento, se decidió conservarlo dentro de los capítulos para que la integración fuera mayor y más efectiva. Además, se ha cuidado que primero se enseñe a los estudiantes la manera de resolver los problemas "a mano", comprendiendo los conceptos, para después poder incorporar el uso de otras herramientas.

Álgebra lineal conserva el diseño de un libro para cubrirse en *un* semestre. Es de esperarse que, al utilizarlo, el material de MATLAB se cubra en un laboratorio separado que complemente el trabajo del salón de clase.

Numeración

La numeración de este libro es estándar. Dentro de cada sección, los ejemplos, problemas, teoremas y ecuaciones se encuentran numerados consecutivamente a partir del número 1, y siempre se incluye el capítulo y la sección. De esta forma, el ejemplo 4 en la sección 3.2 siempre se denomina ejemplo 3.2.4. Además, con frecuencia se proporciona el número de la página para que resulte sencillo encontrar referencias.

Organización

El enfoque que se ha utilizado en este libro es gradual. Los capítulos 1 al 3 contienen el material computacional básico común para la mayor parte de los libros de álgebra lineal. El capítulo 1 presenta los sistemas de ecuaciones lineales. El capítulo 2 introduce los conceptos de matrices y vectores, y presenta la relación de éstos con los sistemas de ecuaciones, estudiados en el capítulo 1. Esta presentación proporciona una mayor motivación para el estudiante y sigue el orden de la mayoría de los temarios del curso. También se incluyó una sección (2.8) en la que se aplican matrices a la teoría de gráficas. El capítulo 3 proporciona una introducción a los determinantes e incluye un ensayo histórico sobre las contribuciones de Leibniz y Cauchy al álgebra lineal (sección 3.5).

Dentro de este material básico, incluso hay secciones opcionales que representan un reto un poco mayor para el estudiante. Por ejemplo, la sección 3.5 proporciona una demostración completa de que $\det AB = \det A \det B$. La demostración de este resultado, mediante el uso de matrices elementales, casi nunca se incluye en libros introductorios.

El capítulo 4 analiza los vectores en el plano y el espacio. Muchos de los temas de este capítulo se cubren según el orden con el que se presentan en los libros de cálculo, de manera que es posible que el estudiante ya se encuentre familiarizado con ellos. Sin embargo, como una gran parte del álgebra lineal está relacionada con el estudio de espacios vectoriales abstractos, los alumnos necesitan un acervo de ejemplos concretos que el estudio de los vectores en el plano y el espacio proporciona de manera natural. El material más difícil de los capítulos 5, 6 y 7 se ilustra con ejemplos que surgen del capítulo 4. La sección 4.4 incluye un ensayo histórico sobre Gibbs y el origen del análisis vectorial.

El capítulo 5 contiene una introducción a los espacios vectoriales generales y es necesariamente más abstracto que los capítulos anteriores. No obstante, intentamos presentar el material como una extensión natural de las propiedades de los vectores en el plano, que es en realidad la forma en que surgió el tema. Se ha modificado el orden entre el estudio de cambios de base (sección 5.6) y los conceptos de rango y nulidad de matrices (sección 5.7), por considerar que ésta es una secuencia de conceptos más clara. En la sección opcional (5.8) se demuestra que todo espacio vectorial tiene una base. Al hacerlo se analizan los conjuntos ordenados y el lema de Zorn. Dicho material es más complicado que cualquier otro tema en el libro y se puede omitir. Sin embargo, como el álgebra lineal a menudo se considera el primer curso en el que las demostraciones son tan importantes como los cálculos, en mi opinión el estudiante interesado debe disponer de una demostración de este resultado fundamental. En el capítulo 6 se presenta la relación existente entre los espacios vectoriales y los productos internos, y se incluye una sección (6.2) de aplicaciones interesantes sobre la aproximación por mínimos cuadrados.

El capítulo 7 continúa el análisis que se inició en el capítulo 5 con una introducción a las transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro. Comienza con dos ejemplos que muestran la manera natural en la que pueden surgir las transformaciones. La sección 7.3 describe de manera detallada la geometría de las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, e incluye expansiones, compresiones, reflexiones y cortes. La sección 7.5 ahora contiene un estudio más detallado de las isometrías de $\mathbb{R}^2$.

El capítulo 8 describe la teoría de los valores y vectores característicos o valores y vectores propios. Se introducen en la sección 8.1 y en la sección 8.2 se da una aplicación biológica minuciosa del crecimiento poblacional. Las secciones 8.3, 8.4 y 8.5 presentan la diagonalización de una matriz, mientras que la sección 8.6 ilustra, para unos cuantos casos, cómo se puede reducir una matriz a su forma canónica de Jordan. La sección 8.7 estudia las ecuaciones diferenciales matriciales y es la única sección del libro que requiere conocimiento del primer curso de cálculo. Esta sección proporciona un ejemplo de la utilidad de reducir una matriz a su forma canónica de Jordan (que suele ser una matriz diagonal). En la sección 8.8 introduje dos de mis resultados favoritos acerca de la teoría de matrices: el teorema de Cayley-Hamilton y el teorema de los círculos de Gershgorin. El teorema de los círculos de Gershgorin es un resultado muy rara vez estudiado en los libros de álgebra lineal elemental, que proporciona una manera sencilla de estimar los valores propios de una matriz.

En el capítulo 8 tuve que tomar una decisión difícil: si analizar o no valores y vectores propios complejos. Decidí incluirlos porque me pareció lo más adecuado. Algunas de las matrices "más agradables" tienen valores propios complejos. Si se define un valor propio como un número real, sólo en un principio se pueden simplificar las cosas, aunque esto sea un error. Todavía más, en muchas aplicaciones que involucran valores propios (incluyendo algunas de la sección 8.7), los modelos más interesantes se relacionan con fenómenos periódicos y éstos requieren valores propios complejos. Los números complejos no se evitan en este libro. Los estudiantes que no los han estudiado antes pueden encontrar las pocas propiedades que necesitan en el apéndice B.

El libro tiene cinco apéndices, el primero sobre inducción matemática y el segundo sobre números complejos. Algunas de las demostraciones en este libro hacen uso de la inducción matemática, por lo que el apéndice A proporciona una breve introducción a esta importante técnica para los estudiantes que no la han utilizado.

El apéndice C analiza el concepto básico de la complejidad de los cálculos que, entre otras cosas, ayudará a los estudiantes a entender las razones por las cuales quienes desarrollan software eligen algoritmos específicos. El apéndice D presenta un método razonablemente eficiente para obtener la solución numérica de los sistemas de ecuaciones. Por último, el apéndice E incluye algunos detalles técnicos sobre el uso de MATLAB® en este libro.

Una nota sobre la interdependencia de los capítulos: este libro está escrito en forma secuencial. Cada capítulo depende de los anteriores, con una excepción: el capítulo 8 se puede cubrir sin necesidad de gran parte del material del capítulo 7. Las secciones marcadas como "opcional" se pueden omitir sin pérdida de la continuidad.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como facilitan su evaluación, los cuales se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Agradecimientos

Estoy agradecido con muchas personas que me ayudaron cuando escribía este libro. Parte del material apareció primero en *Mathematics for the Biological Sciences* (Nueva York, Macmillan, 1974) escrito por James E. Turner y por mí. Quiero agradecer al profesor Turner por el permiso que me otorgó para hacer uso de este material.

Gran parte de este libro fue escrita mientras trabajaba como investigador asociado en la University College London. Deseo agradecer al departamento de matemáticas de UCL por proporcionarme servicios de oficina, sugerencias matemáticas y, en especial, su amistad durante mis visitas anuales.

El material de MATLAB® fue escrito por Cecelia Laurie, de la University of Alabama. Gracias a la profesora Laurie por la manera sobresaliente en que utilizó la computadora para mejorar el proceso de enseñanza. Éste es un mejor libro debido a sus esfuerzos.

También me gustaría extender mi agradecimiento a Cristina Palumbo, de The MathWorks, Inc., por proporcionarnos la información más reciente sobre MATLAB®.

La efectividad de un libro de texto de matemáticas depende en cierto grado de la exactitud de las respuestas. Ya en la edición anterior del libro se hicieron esfuerzos considerables para tratar de evitar los errores al máximo. Las respuestas fueron verificadas por varios profesores, entre los que cabe destacar la importantísima labor de Sudhir Goel, de Valdosta State College, y David Ragozin, de la University of Washington, quien elaboró el Manual de Soluciones del libro. Cecelia Laurie preparó las soluciones a los problemas de MATLAB®. En el caso de esta nueva edición, las soluciones a los problemas nuevos están elaboradas por los profesores que los aportaron. Dado que hay gran cantidad de problemas nuevos, la sección de respuestas al final del libro se modificó casi por completo.

Agradezco a aquellas personas que hicieron comentarios a la edición anterior. Todos ellos son muy valiosos. En esta edición fue posible incorporar muchos de ellos.

Mi agradecimiento a los siguientes usuarios experimentados de MATLAB® por la revisión de los problemas de MATLAB®:

Thomas Cairns, University of Tulsa
Karen Donelly, Saint Joseph's College
Roger Horn, University of Utah
Irving Katz, George Washington University
Gary Platt, University of Wisconsin-Whitewater

Stanley I. Grossman
Missoula, Montana

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana

Agradecimientos

De manera especial agradecemos a los siguientes profesores sus contribuciones y revisiones de la sexta edición de esta obra:

- Abelardo Ernesto Damy Solís, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Guadalajara*
- Dax André Pinseau Castillo, *Universidad Católica de Honduras; Universidad Pedagógica Nacional de Honduras*
- Eduardo Soberanes Lugo, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa*
- Erik Leal Enríquez, *Universidad Iberoamericana, Ciudad de México; Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco*
- Irma Patricia Flores Allier, *Instituto Politécnico Nacional*
- Israel Portillo Arroyo, *Instituto Tecnológico del Parral, Chihuahua*
- Iván Castañeda Leyva, *Universidad de Occidente, unidad Culiacán*
- Kristiano Racanello, *Fundación Universidad de las Américas, Puebla*
- María Asunción Montes Pacheco, *Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla*
- María Eugenia Noriega Treviño, *Universidad Autónoma de San Luis Potosí*
- Martha Patricia Meléndez Aguilar, *Instituto Tecnológico de Celaya*

La división de Ingenierías, Matemáticas y Ciencias de McGraw-Hill agradece también a todos los profesores que han contribuido con este importante proyecto:

- Adán Medina, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Alfonso Bernal Amador, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Alfredo Gómez Rodríguez, *Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería*
- Andrés Basilio Ramírez y Villa, *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*
- Arturo Astorga Ramos, *Instituto Tecnológico de Mazatlán*
- Arturo Fernando Quiroz, *Tecnológico Regional de Querétaro*
- Arturo Muñoz Lozano, *Universidad La Salle del Bajío*
- Arturo Valenzuela Valenzuela, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Aureliano Castro, *Escuela de Ingeniería, Universidad Autónoma de Sinaloa*
- Beatriz Velazco, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Culiacán*
- Benigno Valez, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Culiacán*
- Bertha Alicia Madrid, *Universidad Iberoamericana, campus Cuidad de México*

- Carlos Camacho Sánchez, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Carlos Garzón, *Universidad Javeriana, Cali, Colombia*
- Carlos Rodríguez Provenza, *Universidad Politécnica de Querétaro*
- César Meza Mendoza, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Dinaky Glaros, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Culiacán*
- Edgar Hernández López, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Edith Salazar Vázquez, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*
- Edmundo Barajas Ramírez, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Eduardo Miranda Montoya, *Iteso*
- Eréndira Gabriela Avilés Rabanales, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*
- Erik Norman Guevara Corona, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Esperanza Méndez Ortiz, *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*
- Fernando López, *Escuela de Ingenierías Químico-Biológicas, Universidad Autónoma de Sinaloa*
- Gabriel Martínez, *Instituto Tecnológico de Hermosillo*
- Gerardo Campos Carrillo, *Instituto Tecnológico de Mazatlán*
- Gonzalo Veyro Santamaría, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Guillermo Luisillo Ramírez, *ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional*
- Héctor Escobosa, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Hortensia Beltrán Ochoa, *Instituto Tecnológico de Los Mochis*
- Irma Yolanda Paredes, *Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara*
- Javier Núñez Verdugo, *Universidad de Occidente, unidad Guamúchil*
- Jesús Gamboa Hinojosa, *Instituto Tecnológico de Los Mochis*
- Jesús Manuel Canizalez, *Universidad de Occidente, unidad Mazatlán*
- Jesús Vicente González Sosa, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Jorge Alberto Castellón, *Universidad Autónoma de Baja California*
- Jorge Luis Herrera Arellano, *Instituto Tecnológico de Tijuana*
- José Alberto Gutiérrez Palacios, *Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*
- José Antonio Castro Inzunza, *Universidad de Occidente, unidad Culiacán*
- José Carlos Ahumada, *Instituto Tecnológico de Hermosillo*
- José Carlos Aragón Hernández, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- José Espíndola Hernández, *Tecnológico Regional de Querétaro*
- José González Vázquez, *Universidad Autónoma de Baja California*
- José Guadalupe Octavio Cabrera Lazarini, *Universidad Politécnica de Querétaro*
- José Guadalupe Torres Morales, *ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional*
- José Guillermo Cárdenas López, *Instituto Tecnológico de Tijuana*
- José Luis Gómez Sánchez, *Universidad de Occidente, unidad Mazatlán*
- José Luis Herrera, *Tecnológico Regional de San Luis Potosí*
- José Noé de la Rocha, *Instituto Tecnológico de Culiacán*

- Juan Carlos Pedraza, *Tecnológico Regional de Querétaro*
- Juan Castañeda, *Escuela de Ingenierías Químico-Biológicas, Universidad Autónoma de Sinaloa*
- Juan Leoncio Núñez Armenta, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Juana Murillo Castro, *Escuela de Ingeniería, UAS*
- Leonel Monroy, *Universidad del Valle, Cali, Colombia*
- Linda Medina, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México*
- Lorenza de Jesús, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Lucía Ramos Montiel, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Lucio López Cavazos, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro*
- Luis Felipe Flores, *Instituto Tecnológico de Los Mochis*
- Luis López Barrientos, *EPCA*
- Marco Antonio Blanco Olivares, *Tecnológico Regional de San Luis Potosí*
- Marco Antonio Rodríguez Rodríguez, *Instituto Tecnológico de Los Mochis*
- María Sara Valentina Sánchez Salinas, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Maritza Peña Becerril, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*
- Martha Gutiérrez Munguía, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Martín Muñoz Chávez, *UNIVA*
- Michell Gómez, *Universidad ICESI, Cali, Colombia*
- Miguel Ángel Aguirre Pitol, *Universidad Autónoma del Estado de México*
- Nasario Mendoza Patiño, *Tecnológico Regional de Querétaro*
- Norma Olivia Bravo, *Universidad Autónoma de Baja California*
- Oscar Guerrero, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Culiacán*
- Oscar René Valdez Casillas, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Oswaldo Verdugo Verdugo, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Porfirio López, *Universidad de Occidente, unidad Guamúchil*
- Ramón Duarte, *Escuela de Ingeniería, Universidad Autónoma de Sinaloa*
- Raúl Soto López, *Universidad de Occidente, Unidad Culiacán*
- Ricardo Betancourt Riera, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Hermosillo*
- Ricardo Martínez Gómez, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Roberto Guzmán González, *Universidad Nacional Autónoma de México*
- Roberto Robledo Pérez, *Instituto Tecnológico de León*
- Rosa María Rodríguez González, *Universidad Iberoamericana, campus León*
- Rosalba Rodríguez Chávez, *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*
- Salvador Rojo Lugo, *Instituto Tecnológico de Culiacán*
- Sithanatham Kanthimathinathan, *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro*
- Susana Pineda Cabello, *ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional*
- Walter Magaña, *Universidad de Sanbuenaventura, Cali, Colombia*

Examen diagnóstico

Problema 1. Realice la siguientes operaciones.

a) $53 + 35 - 28$

b) $8(7 - 16)$

c) $-5(6) - 8$

d) $\frac{4}{7} + \frac{12}{5} - \frac{3}{2}$

e) $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\right)$

f) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{10}}$

Problema 2. Enumere los elementos de los siguientes conjuntos.

a) $B = \{x|x$ es vocal de la palabra albaricoque$\}$

b) $Q = \{x|x$ es un mes del año$\}$

c) $L = \{x|x$ es par y divide a 10$\}$

c) $P = \left\{(x, y)|x \text{ es impar y divide a 21 y } y = \frac{x}{3}\right\}$

Problema 3. Considere los siguientes conjuntos.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. 16, 17, 18\}$

$A = \{x \in U|x$ es par menor que 10$\}$

$B = \{x \in U|x$ es divisor de 12$\}$

$C = \{x \in U|x < 6\}$

$D = \{x \in U|5 < x < 16\}$

$E = \{x \in U|x$ es un dígito$\}$

Determine los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$

b) $C \cap B$

c) $E \cup (D \cap B)$

d) $D - B$

e) $B - D$

f) A'

g) E'

h) $(D \cap A)'$

i) $(B - D)'$

Problema 4. Simplifique las siguientes expresiones.

a) $4x - [2y - (5x - 4y)]$

b) $(a - 4b)(3a + 2b)$

c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

d) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{c}{a+b}$

Problema 5. Factorice las siguientes expresiones.

a) $m^2 - 9m + 20$

b) $m^2 - 4mn - 21n^2$

c) $4x^2 + 8xy + 4y^2$

d) $3x^2 + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{8}$

Problema 6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 6 = -4x - 8$

b) $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{2x}{3}=3x-\dfrac{5}{12}+\dfrac{x}{3}$

c) $y^2 + a^2 = (a + y)^2 - a(a + 1)$

d) $\dfrac{z+a}{a-b}+\dfrac{z-a}{a+b}-\dfrac{z+b}{a+b}=\dfrac{z-b}{a-b}$

Problema 7. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios.

a) $5x^2 + 3x - 2$

b) $x^2 + 8x - 240$

c) $\dfrac{17}{10}x^2 + 3x + 5$

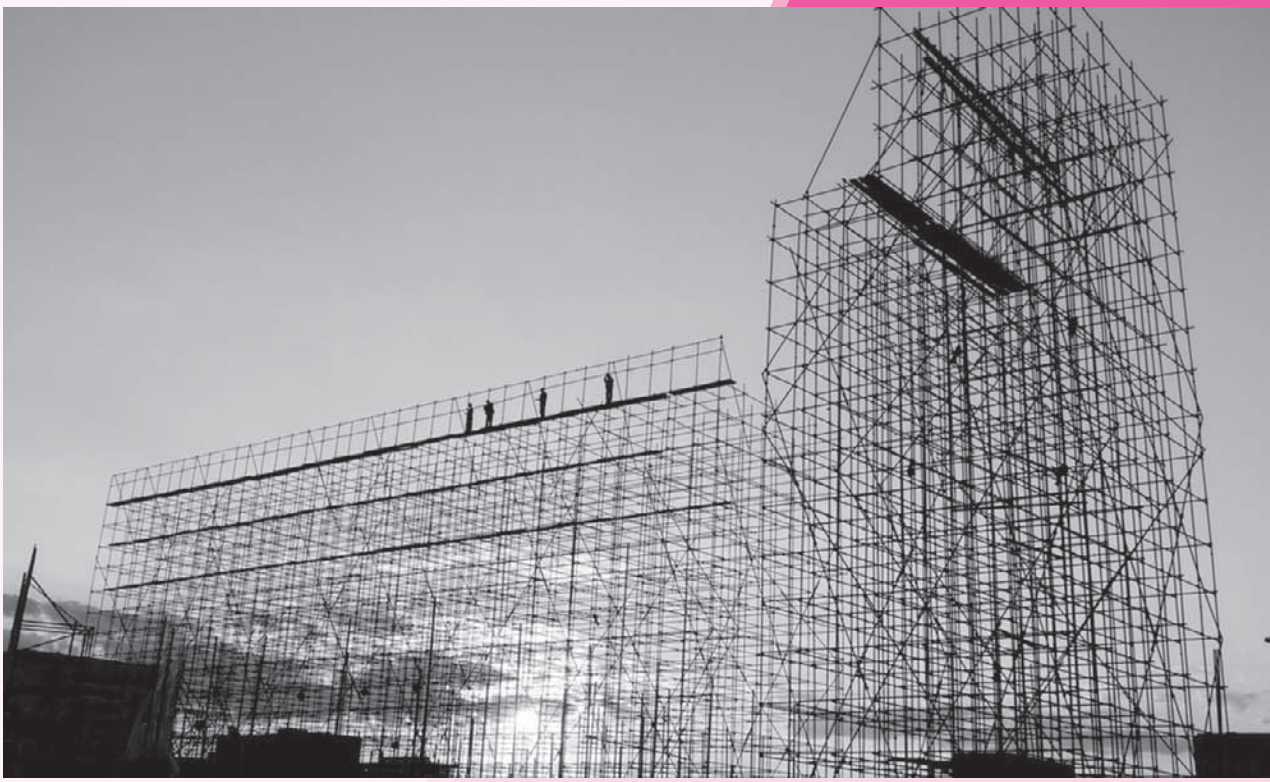
d) $3x^2 + 27$

e) $4x^2 - 20$

Sistemas de ecuaciones lineales

Capítulo

1



▲ En ingeniería civil, al diseñar y analizar estructuras se resuelven sistemas de ecuaciones que describen los esfuerzos que tendrá que soportar la construcción.

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Recordará algunos conceptos asociados con rectas en el plano y un método de solución de ecuaciones algebraicas simultáneas con dos variables (sección 1.1).
- Estudiará el método de la reducción gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas, junto con términos que se usarán a lo largo del texto (sección 1.2).
- Se familiarizará con el programa Matlab, a fin de resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones (sección 1.3).
- Aprenderá los sistemas homogéneos y las características de su solución (sección 1.4).

Este libro trata del álgebra lineal. Al buscar la palabra “lineal” en el diccionario se encuentra, entre otras definiciones, la siguiente: lineal: (del lat. *linealis*). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la línea.[1] Sin embargo, en matemáticas la palabra “lineal” tiene un significado mucho más amplio. Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso se mencionan algunas propiedades fundamentales sobre las líneas rectas:

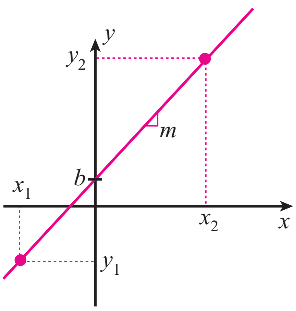


Figura 1.1
Descripción de una recta.

i) La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii) Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.[2]

iii) Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

iv) Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v) Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como $m = -a/b$.

vi) Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii) Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero.

viii) Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

En la siguiente sección se ilustrará la relación que existe entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

1.1 Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Nota

De forma breve también suele referirse al sistema (1.1.1) como un sistema de 2×2.

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales (x, y) que satisface el sistema (1.1.1) se denomina como **solución**. Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene este sistema varias soluciones y, de ser así, cuántas? Se responderán estas preguntas después de ver algunos ejemplos, en los cuales se usarán propiedades importantes del álgebra elemental:

Propiedad A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
Propiedad B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

La propiedad A establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. La propiedad B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una

[1] *Diccionario de la Lengua Española*, vigesimasegunda edición, Real Academia Española. Madrid: Espasa Calpe, 2001.
[2] Indefinida o infinita, como también se le denomina en otros libros.

constante se obtiene una segunda ecuación válida. Los casos más interesantes de la propiedad B se presentan cuando $c \neq 0$, ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1.1.1 Sistema con una solución única

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 5x + 2y &= 12 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad A, la siguiente ecuación: $8x = 16$ (es decir, $x = 2$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $2y = 12 - 5x = 12 - 10 = 2$, entonces $y = 1$. Así, el par (2, 1) satisface el sistema (1.1.2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (1.1.2) tiene una **solución única**.

Solución única

EJEMPLO 1.1.2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2, esto está permitido por la propiedad B. Al ser ambas ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (1.1.3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (1.1.3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: $(7, 0)$, $(0, -7)$, $(8, 1)$, $(1, -6)$, $(3, -4)$ y $(-2, -9)$.

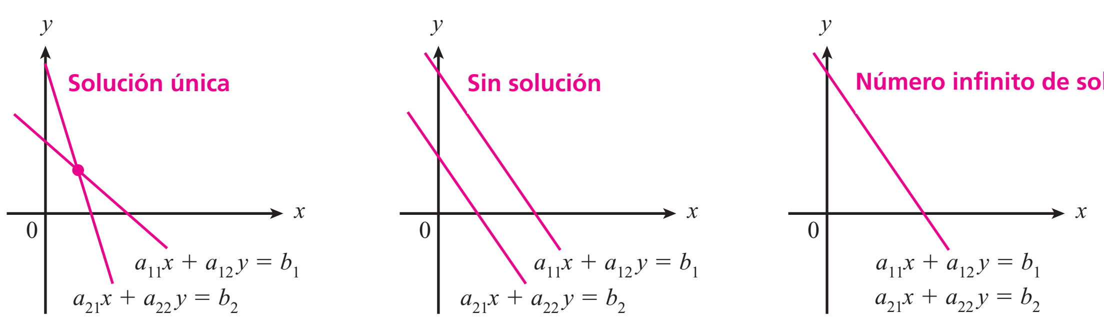
Número infinito de soluciones

EJEMPLO 1.1.3 Sistema sin solución

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por la propiedad B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (1.1.4) **no tiene solución**.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Figura 1.2

Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o (si coinciden) en un número infinito de puntos.

Sistema inconsistente

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1.1.1) son de líneas rectas. Una solución a (1.1.1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1.1.1 las rectas tienen pendientes de $\frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común (2, 1). En el ejemplo 1.1.2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 1.1.3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.2.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1.1.1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Se deben analizar los siguientes casos:

Caso I Si $a_{12} = a_{22} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es x.

Caso II Si $a_{11} = a_{21} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es y.

Caso III Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Caso IV Si $a_{22} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_2}{a_{21}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Caso V Si $a_{11} = 0$ y $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_1}{a_{12}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar x.

Caso VI Si $a_{21} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{22}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar x.

El último caso necesita un desarrollo más detallado, de modo que consideremos que todos los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son diferentes a cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

Sistemas equivalentes

Antes de continuar observe que los sistemas (1.1.1) y (1.1.5) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1.1.1) es una solución del sistema (1.1.5) y viceversa. Ello se concluye directamente de la propiedad B, suponiendo que la constante c sea diferente de cero. Después, si en (1.1.5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

Observe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1.1.1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

Se ha demostrado lo siguiente:

> Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1.1.1) tiene una **solución única**.

¿Cómo se relaciona esta afirmación con lo que se analizó anteriormente? En el sistema (1.1.1) se puede ver que la pendiente de la primera recta es $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$ y que la pendiente de la segunda es $-\frac{a_{21}}{a_{22}}$. En los problemas 41, 42 y 43 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (es decir, tienen la misma pendiente). De esta manera se sabe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Lo que se acaba de analizar puede formularse en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los siguientes se harán generalizaciones de este teorema, y se hará referencia a él como el "teorema de resumen" conforme se avance en el tema. Una vez que se hayan demostrado todas sus partes, se podrá estudiar una relación asombrosa entre varios conceptos importantes de álgebra lineal.

Teorema 1.1.1 Teorema de resumen (punto de vista 1)

El sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i) Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas se estudian en la sección 1.2 y se verá que siempre ocurre lo mismo con respecto a su solución, es decir, que no tienen solución, o que tienen una solución única o un número infinito de soluciones.

Autoevaluación 1.1

I) De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Su gráfica consiste en el (los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.
d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.
b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.
c) La gráfica de la solución es una recta.
d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III) ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a) El sistema es inconsistente.
b) La solución es $(-1, 2)$.
c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV) De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$ *b*) $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ *d*) $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a) $3x - 2y = 7$
$4y = 6x - 14$

b) $x - 2y = 7$
$3x = 4 + 6y$

c) $2x + 3y = 7$
$3x - 2y = 6$

d) $5x + y = 1$
$7y = 3x$

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*) **II)** *a*) **III)** *c*) **IV)** *a*) **V)** *b*)

Problemas 1.1

En los problemas 1 a 18 encuentre las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $x + y = 3$
$x + 2y = -8$

2. $2x + 3y = 3$
$-2x - 3y = -3$

3. $4x + 5y = 0$
$-2x - y = 3$

4. $-2x = 1$
$4x - 3y = 0$

5. $7x + 3y = 0$
$-5x + 10y = 0$

6. $3x - 7y = -5$
$4x - 3y = -2$

7. $7x + 4y = 1$
$-7x - 4y = -3$

8. $7x + 4y = 0$
$-7x - 4y = 0$

9. $-13x + 3y = 7$
$5x + 22y = 9$

10. $9x - 3y = -3$
$-2x + 4y = 1$

11. $-2x + 3y = 3$
$2x - 3y = -3$

12. $x + 2y = 5$
$3x + 4y = 6$

13. $y = -3$
$-2x + 4y = 8$

14. $-7x + 2y = -9$
$2y = -6$

15. $\begin{aligned} -5x + 7y &= 3 \\ -4x &= -8 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} ax + by &= c \\ ax - by &= c \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} ax + by &= c \\ bx + ay &= c \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} ax - by &= c \\ bx + ay &= d \end{aligned}$

19. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 16 tenga una solución única.

20. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema en el problema 17 tenga un número infinito de soluciones.

21. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el sistema en el problema 18 no tenga solución.

En los problemas 22 a 28 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

22. $-x + 2y = 1; \quad 3x - 5y = 1$

23. $-4x + 2y = 1; \quad 4x - 2y = 1$

24. $-4x + 2y = -1; \quad 4x - 2y = 1$

25. $7x - 3y = -3; \quad -9x + 5y = -2$

26. $-2y - 3x = 7; \quad -9y + 5y = -2$

27. $\pi x + y = 0; \quad \sqrt{2}x - 5y = -1$

28. $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 1; \quad \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$

Sea L una recta y $L_\perp$ la recta perpendicular L que pasa a través de un punto P. La **distancia** de la recta L al punto P se define como la distancia* entre P y el punto de intersección de L y $L_\perp$ (ver figura 1.2).

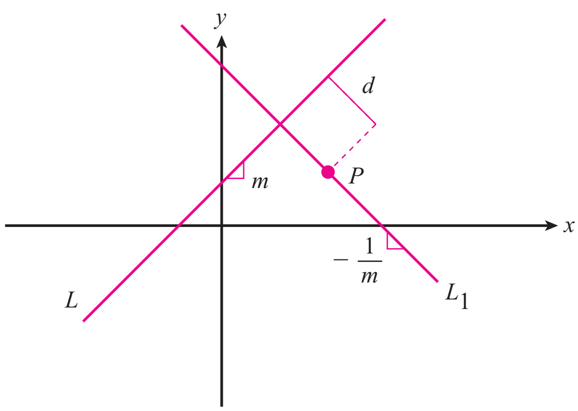


Figura 1.3
Distancia de la recta L al punto P.

En los problemas 29 a 34 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

29. $2x - 3y = 4; \quad (-7, -2)$

30. $-5x + 6y = 2; \quad (1, 3)$

31. $2x - 4y = -42; \quad (7, -21)$

32. $7x + 5y = 6; \quad (0, 0)$

33. $3x + 7y = 0; \quad (-2, -8)$

34. $11x - 12y = 5; \quad (0, 4)$

35. Encuentre la distancia entre la recta $2x - y = 6$ y el punto de intersección de las rectas $3x - 2y = 1$ y $6x + 3y = 32$.

* Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy, entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

36. Encuentre la distancia entre la recta paralela a $-3x + 4y = -5$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$, y el punto de intersección de las rectas $-7x + 2y = 4$ y $2x - 8y = -1$.

*37. Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

38. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1.1.1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

39. Si existe una solución única al sistema (1.1.1), muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

40. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ demuestre que el sistema (1.1.1) tiene una solución única.

41. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él?

42. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [***Sugerencia:*** 1 cuarto = 32 onzas, 1 galón = 4 cuartos.]

43. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta ¢25 y el material para un plato cuesta ¢20. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

44. Conteste la pregunta del problema 43 si los materiales para una taza y un plato cuestan ¢15 y ¢10, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

45. Conteste la pregunta del problema 44 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

1.2 *m* ecuaciones con *n* incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y gaussiana

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2×2, estos sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución única o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etc., en lugar de x, y, z, . . . porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices.

EJEMPLO 1.2.1 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1.2.1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.1, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \quad (1.2.2a)$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \quad (1.2.2b)$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \quad (1.2.2c)$$

Como se vio en la sección 1.1, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación equivalente. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (1.2.2) multiplicando ambos lados de la ecuación (1.2.2*a*) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (1.2.2*b*). Esto da

$$\begin{array}{r} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 = -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva ecuación (1.2.2*b*) y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (1.2.2*a*) se multiplica por -3 y se suma a la ecuación (1.2.2*c*), lo que da por resultado:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \quad (1.2.3a)$$
$$-3x_2 - 6x_3 = -12 \quad (1.2.3b)$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \quad (1.2.3c)$$

Observe que en el sistema (1.2.3) se ha eliminado la variable x_1 de las ecuaciones (1.2.3*b*) y (1.2.3*c*). Después se divide la ecuación (1.2.3*b*) por -3:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \quad (1.2.4a)$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \quad (1.2.4b)$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \quad (1.2.4c)$$

Se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.4*a*); después se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por 5 y se suma a la ecuación (1.2.4*c*):

$$x_1 - x_3 = 1 \quad (1.2.5a)$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \quad (1.2.5b)$$
$$x_3 = -3 \quad (1.2.5c)$$

Ahora se multiplica la ecuación (1.2.5*c*) por -1:

$$x_1 - x_3 = 1 \quad (1.2.6a)$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \quad (1.2.6b)$$
$$x_3 = 3 \quad (1.2.6c)$$

Nota

Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Por último, se suma la ecuación (1.2.6*c*) a la ecuación (1.2.6*a*) y después se multiplica la ecuación (1.2.6*c*) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.6*b*) para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1.2.1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, -2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[3]

Eliminación de Gauss-Jordan

Antes de seguir con otro ejemplo es conveniente resumir lo que se hizo en éste:

i) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii) Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de las propiedades A y B de la página 2.

Matriz

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 2.1. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1.2.1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.2.7}$$

Matriz de $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1.2.1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{1.2.8}$$

[3] Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 21. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando en cuenta la curvatura de la Tierra. Su trabajo sobre la solución de sistemas de ecuaciones apareció en 1888 en su libro *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual de geodesia).

Ahora es posible introducir cierta terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva ecuación equivalente. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales por renglones**.

Operaciones elementales por renglones

Operaciones elementales por renglones

Las tres operaciones elementales por renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales por renglones

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

Reducción por renglones

Notación

1. $R_i \rightarrow cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \rightarrow B$ indica que las matrices aumentadas A y B son **equivalentes**; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Matrices aumentadas equivalentes

En el ejemplo 1.2.1 se vio que al usar las operaciones elementales por renglones i) y ii) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1.2.1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 1.2.2 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + \ \ 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1.2.1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \ \ x_3 &= 1 \\ x_2 + \ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución (1, 4, 0). Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución (11, −16, 10), y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 1.2.3 Sistema inconsistente

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= \ \ 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.9)}$$

Solución La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real el resultado es 0. En su lugar se puede usar la operación elemental por renglones iii) intercambiar dos renglones, para obtener un número distinto a cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Es necesario detenerse aquí porque, como se ve, las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo cual es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4), por lo que no existe alguna solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (1.2.9) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

D Definición 1.2.1

Sistemas inconsistentes y consistentes

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1.2.1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2, R_3 se denominan **formas escalonadas reducidas por renglones** de las matrices A_1, A_2 y A_3, respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.2

Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota

La condición iii) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

EJEMPLO 1.2.4 Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **iv)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices i) y ii) tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes.

Definición 1.2.3

Forma escalonada por renglones

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones i), ii) y iii) de la definición 1.2.2.

EJEMPLO 1.2.5 Cinco matrices en la forma escalonada por renglones

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\textbf{i)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{ii)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{iv)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{v)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo dos matrices en forma escalonada por renglones son equivalentes entre sí. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Esto significa que cualquier matriz que sea equivalente por renglones a la matriz A también lo es a la matriz B.

Como se vio en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1.2.1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en las primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

Nota

Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones.

Observación 1

La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2

Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales por renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3.

EJEMPLO 1.2.6 Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana

Resuelva el sistema del ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

Solución

Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (-5) que está debajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación gaussiana

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i) Eliminación de Gauss-Jordan
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 10.

ii) Eliminación gaussiana
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende; al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales por renglones. De hecho, como se verá en el apéndice C, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $\frac{n^3}{2}$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $\frac{n^3}{3}$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice D. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz (una de éstas se estudia en la sección 2.4). En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora estudiaremos la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan debido a que en la sección 2.4 esto se necesitará. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ (de m ecuaciones con n incógnitas) está dado por

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2.10}$$

En el sistema (1.2.10) todos los coeficientes a_{ij} y b_i son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (1.2.10). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Es posible resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas haciendo uso de la eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. En seguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 1.2.7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas, es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de "redondeo". Este problema se analiza en el apéndice C.

EJEMPLO 1.2.8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento A, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento A y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento A. Entonces,

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento A. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

Utilizando reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nota

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 1.2.9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[4] Suponga un sistema económico que tiene *n* industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

[4] Así llamado en honor del economista estadounidense Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel de Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Sea x_1 la producción de la industria i. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

O bien, reescribiendo el sistema (1.2.11) en la forma del sistema (1.2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}
(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\
-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &= e_n
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

El sistema (1.2.12) de n ecuaciones con n incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 1.2.10 El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

Solución En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (1.2.12) es

$$\begin{aligned}
0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\
-0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25 \\
-0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20
\end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema por método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora o computadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 110.30442 \\
0 & 1 & 0 & 118.74070 \\
0 & 0 & 1 & 125.81787
\end{array}\right)$$

Se concluye que la producción necesaria para que la oferta sea (aproximadamente) igual a la demanda es $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (opcional)

En la figura 1.2, de la página 3, se observó que se puede representar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección, el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar ocurre cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como se verá en la sección 4.5, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= d \\ ex - fy - gz &= h \\ jx - ky - lz &= m \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (1.2.13) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

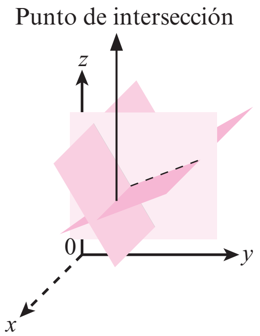


Figura 1.4
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.4).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.5).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.6).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos, por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.7).
6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.8).

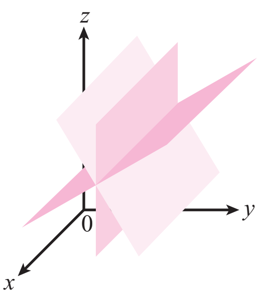


Figura 1.5
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

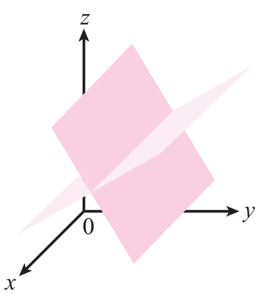


Figura 1.6
Dos planos se intersecan en una recta.

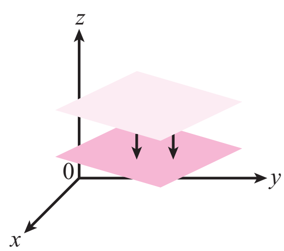


Figura 1.7
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

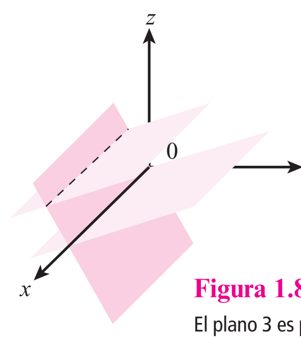


Figura 1.8
El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2.

Semblanza de...

Carl Friedrich Gauss
(Library of Congress)

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Carl Friedrich Gauss es considerado el matemático más grande del siglo XIX, además de uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (Arquímedes y Newton son los otros dos).

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, e hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a la edad de 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los tres años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Hay una anécdota famosa de Carl, cuando tenía apenas 10 años de edad y asistía a la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos y un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra boca abajo con la palabra "listo". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5 050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 ($1 + 100$, $2 + 99$, etc.) y $50 \times 101 = 5\,050$. Años más tarde, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

A la edad de 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la Universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y filosofía, Gauss eligió las matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con tan sólo una regla y un compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.*

El 30 de marzo de 1796, fecha de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es unos de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Tras un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la Universidad de Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra que indica que todo polinomio de grado n tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del asteroide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, la que resultó asombrosa fue la producción matemática de Gauss. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría y en 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de la variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana: una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas de Göttingen en 1807 e impartió clase hasta su muerte en 1855. Aún después de su muerte, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último gran matemático que conocía prácticamente todo acerca de su área. Al afirmar que una catedral no era una catedral hasta que se quitara el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas debían reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa que llevaba la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

* De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de la forma $n = 2^k p_2 \cdot p_3 \ldots p_m$ donde $k \geq 0$ y las p_i son números primos de Fermat distintos. Los números primos de Fermat son aquellos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537.

Resumen 1.2

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

es la matriz (p. 10)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada** (p. 10)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

También se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde (p. 87)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 14. (p. 14)
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la página 15. (p. 15)
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el renglón de una matriz. (p. 14)
- Las tres **operaciones elementales por renglones** son (p. 11)

1. Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \to cR_i$, donde $c \neq 0$.

2. Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \to R_j + cR_i$.

3. Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.

- El proceso de aplicación de operaciones elementales con renglones a una matriz se denomina **reducción por renglones**. (p. 11)

- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la página 11. (pp. 10, 16)
- La **eliminación gaussiana** es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones al reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la **sustitución hacia atrás**. (p. 16)
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente**. (p. 13)
- Un sistema lineal que no tiene solución se denomina **inconsistente**. (pp. 4, 13)
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una **solución única** o un **número infinito de soluciones**. (p. 3)

AUTOEVALUACIÓN 1.2

I) ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b) $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c) $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d) $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II) ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental por renglones?

a) Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.
b) Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.
c) Intercambiar dos columnas.
d) Reemplazar un renglón con una suma de renglones y una constante diferente de cero.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.
b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.
d) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

a) Tiene una solución única $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
b) Es inconsistente.
c) Tiene un número infinito de soluciones.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *a*) **III)** *c*) **IV)** *b*)

MANEJO DE LA CALCULADORA 1.2

La calculadora HP50g puede resolver en forma numérica sistemas de *m* ecuaciones con *n* incógnitas. Cuando el sistema tiene soluciones infinitas, la solución reportada es la solución de norma mínima. Cuando el sistema es inconsistente, la solución reportada es la solución de mínimos cuadrados.

Una posible secuencia de pasos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones se observa en el siguiente procedimiento (no es el único; en el capítulo 11 de la Guía del usuario* de la HP50g Calculadora Gráfica se incluyen otros procedimientos).

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 14 \\ 3x - 2y + z &= -3 \\ 4x + 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

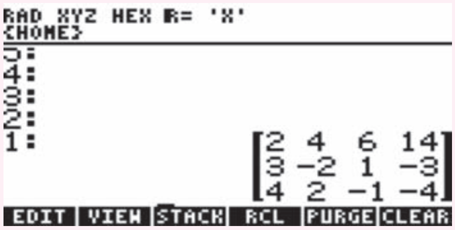
1. Existen diferentes formas de introducir una matriz aumentada; la más sencilla es la siguiente:

$$[[2,\ 4,\ 6,\ 14],\quad [3,\ -2,\ 1,\ -3],\quad [4,\ 2,\ -1,\ -4]]$$

que se obtiene con la siguiente secuencia de comandos:

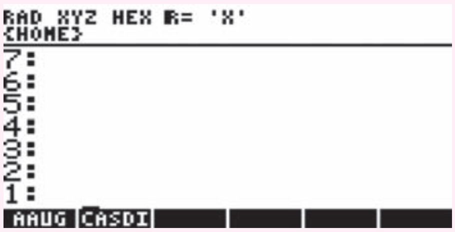
↰ [] ↰ [] 2 4 SPC 6 SPC 1 4 ▶
↰ [] 3 SPC 2 +/– SPC 1 SPC 3 +/– ▶
↰ [] 4 SPC 2 SPC 1 +/– SPC 4 +/– ENTER

* En el resto del libro nos referiremos a esta guía sólo como *Guía del usuario*.



Guardamos a la matriz en la variable AAUG con el siguiente comando

ALPHA ALPHA A A U G ENTER STO▶



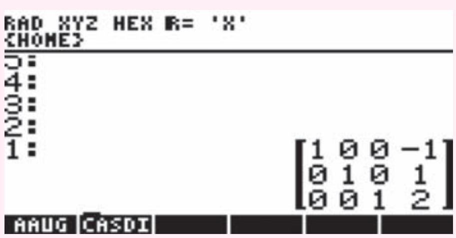
2. Se encuentra la forma escalonada reducida por renglones de AAUG.

FI ↰ MATRICES

Seguido de la tecla 5 para seleccionar a sistemas lineales:

y luego la tecla 4

para encontrar la forma escalonada reducida por renglones (RREF), donde el resultado es



De lo anterior puede observarse que $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$.

Problemas 1.2

En los problemas del 1 al 27 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados.

1.
$$\begin{aligned} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= 6 \\ -7x_1 - x_3 &= -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 45 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 9x_2 - 7x_3 &= 2 \\ - x_3 &= -2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} -1x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -3x_1 + x_4 &= 1 \\ 5x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

En los problemas 28 a 39 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **37.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 40 a 48 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -14 & -1 \end{pmatrix}$

49. En el ejemplo 1.2.8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 del segundo y 44 000 del tercero. Considerando que todo alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

50. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 1.2.9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = \frac{1}{6}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, $a_{22} = \frac{1}{4}$, $a_{23} = \frac{1}{8}$, $a_{31} = \frac{1}{12}$, $a_{32} = \frac{1}{3}$, $a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

51. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó \$1 por cada una, mientras que las de Hilton Hotels bajaron \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros \$0.50 por acción y las de McDonald's subieron \$1. Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice tener 200 acciones de McDonald's, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Delta y en Hilton.

52. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

53. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de \$250 000, en radio \$5 000 y en revista \$30 000. En el segundo presupuesto \$310 000, \$4 000 y \$15 000 y en el último presupuesto \$560 000, \$10 000 y \$35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: \$21 795 000, \$31 767 000 y \$61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

54. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

55. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

56. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

***57.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

En los problemas 58 a 62 utilice una calculadora para resolver cada sistema.

58.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

59.
$$\begin{aligned} 5.31x_1 + 1.14x_2 + 2.34x_3 &= -3.2 \\ -6.44x_1 - 3.12x_2 - 1.97x_3 &= 1.1 \\ 2.67x_1 + 4.32x_2 + 8.65x_3 &= -2.4 \end{aligned}$$

60.
$$\begin{aligned} 23.42x_1 - 16.89x_2 + 57.31x_3 + 82.6x_4 &= 2\,158.36 \\ -14.77x_1 - 38.29x_2 + 92.36x_3 - 4.36x_4 &= -1\,123.02 \\ -77.21x_1 + 71.26x_2 - 16.55x_3 + 43.09x_4 &= 3\,248.71 \\ 91.82x_1 + 81.43x_2 + 33.94x_3 + 57.22x_4 &= 235.25 \end{aligned}$$

61.
$$\begin{aligned} 2.6x_1 - 4.3x_2 + 9.6x_3 &= 21.62 \\ -8.5x_1 + 3.6x_2 + 9.1x_3 &= 14.23 \\ 12.3x_1 - 8.4x_2 - 0.6x_3 &= 12.61 \end{aligned}$$

62.
$$\begin{aligned} 6.1x_1 - 2.4x_2 + 23.3x_3 - 16.4x_4 - 8.9x_5 &= 121.7 \\ -14.2x_1 - 31.6x_2 - 5.8x_3 + 9.6x_4 + 23.1x_5 &= -87.7 \\ 10.5x_1 + 46.1x_2 - 19.6x_3 - 8.8x_4 - 41.2x_5 &= 10.8 \\ 37.3x_1 - 14.2x_2 + 62.0x_3 + 14.7x_4 - 9.6x_5 &= 61.3 \\ 0.8x_1 + 17.7x_2 - 47.5x_3 - 50.2x_4 + 29.8x_5 &= -27.8 \end{aligned}$$

En los problemas 63 a 68 encuentre todas las soluciones, si las hay, para cada sistema. Redondee todas las respuestas a tres lugares decimales. [***Sugerencia:*** Primero obtenga la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada.]

63.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 12.9 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 9.8x_3 &= -1.6 \end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= -19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 34.3 \end{aligned}$$

65.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 35.3 \end{aligned}$$

66.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \end{aligned}$$

67.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= -63 \end{aligned}$$

68.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= 63 \end{aligned}$$

1.3 Introducción a MATLAB

Ejemplos de comandos básicos de MATLAB

MATLAB distingue minúsculas y mayúsculas. Esto quiere decir que a y A representan variables diferentes.

Introducción de matrices. Los elementos de un renglón se separan por espacios y/o comas, y las columnas se separan por ";" :

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```
Produce la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

```
A = [1 2 3;
     4 5 6;
     7 8 9]
```
También produce la matriz A anterior

```
B = [3;6;1]
```
Produce la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas.

`f = A(2,3)`	f es el elemento en el segundo renglón, tercera columna de A.
`d = A(3,:)`	d es el tercer renglón de A.
`d = A(:,3)`	d es la tercera columna de A.
`C = A([2 4]),:)`	C es la matriz que consiste del segundo y cuarto renglones de A.
`C = [A b]`	Forma una matriz aumentada $C = (A\|b)$.

Ejecución de operaciones por renglones.

`A(2,:) = 3*A(2,:)`	$R_2 \to 3R_2$
`A(2,:) = A(2,:)/4`	$R_2 \to \frac{1}{4}R_2$
`A([2 3],:) = A([3 2],:)`	Intercambia los renglones 2 y 3
`A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)`	$R_3 \to R_3 + 3R_2$

Nota. Todos estos comandos cambian a la matriz A. Si se quiere conservar la matriz original y llamar a C a la matriz cambiada,

`C = A`	
`C(2,:) = 3*C(2,:)`	
`C = rref(A)`	C = forma escalonada reducida por renglones de A.

Generación de matrices aleatorias.

`A = rand(2,3)`	matriz 2×3 con elementos entre 0 y 1
`A = 2*rand(2,3)-1`	matriz 2×3 con elementos entre -1 y 1
`A = 4*(2*rand(2)-1)`	matriz 2×2 con elementos entre -4 y 4
`A = round(10*rand(3))`	matriz 3×3 con elementos enteros entre 0 y 10
`A = 2*rand(3)-1+i*(2*rand(3)-1)`	matriz 3×3 con elementos complejos $a + bi$, a y b entre -1 y 1

Otras características usuales

Help. Si se teclea `help` seguido de un comando MATLAB en la ventana de comandos de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de comandos.

Doc. Si se teclea `doc` seguido de un comando de MATLAB en la ventana de comando de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de ayuda.

EJEMPLO 1.3.1

`help :` o `doc :` dará una descripción de cómo se pueden usar "**:**" en MATLAB.

`help rref` o `doc rref` dará una descripción del comando `rref`.

Uso de las flechas. En la ventana de comandos de MATLAB, al usar la flecha hacia arriba se desplegarán los comandos anteriores. Se pueden usar las flechas para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

Comentarios. Si se inicia una línea con el símbolo `%`, MATLAB interpretará esto como una línea de comentario.

EJEMPLO 1.3.2

```
% Éste es un comentario.
```

Supresión de pantalla. Uso de ;. Si se quiere realizar un comando de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un `;` (punto y coma).

Para líneas largas. Para extender una línea se usa "`...`".

```
a= [ 1 2 3 4 5 6 7 8 ...
   9 10]
```

Para desplegar dígitos adicionales. Por lo general MATLAB despliega sólo 4 dígitos después del punto decimal. De esta forma, $\frac{4}{3}$ aparece como 1.3333. El comando `format long` hace que se desplieguen de 14 a 15 dígitos después del punto decimal. Así, si se da `format long` y después $\frac{4}{3}$, en la pantalla aparecerá 1.33333333333333. Para regresar al despliegue normal de 4 dígitos después del punto decimal se da el comando `format short`.

Tutoría de MATLAB

1. Dé las siguientes matrices de dos maneras diferentes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Forme C como la matriz aumentada $(A|b)$, es decir, $C = (A|b)$ para las matrices A y **b** anteriores.

3. Forme D, una matriz aleatoria de 3×4 con elementos entre -2 y 2.

4. Forme B, una matriz aleatoria de 4×4 con elementos enteros entre -10 y 10.

5. Forme K, la matriz obtenida a partir de B intercambiando los renglones 1 y 4. No cambie B (primero haga $K = B$. Después cambie K).

6. Realice la operación por renglones $R_3 \rightarrow R_3 + (-\frac{1}{2})R_1$, sobre la matriz C.

7. Dé el comando `B([2 4],[1 3])`. Use una línea de comentario para describir la submatriz de B que se produce.

8. Forme U, la matriz que consiste sólo en la tercera y cuarta columnas de D.

9. ***(Ventana de comandos.)*** Use la flecha hacia arriba para localizar el comando que utilizó para realizar la operación por renglones en **6**. Modifique la línea para realizar la operación con renglones $R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1$ y después ejecútela.

10. Forme T, una matriz aleatoria de 8×7 con elementos entre 0 y 1. Dé el comando `doc colon`. A partir de la información dada en la descripción que aparece, determine el uso de la notación ":" para formar, tan eficientemente como sea posible, la matriz S que consiste en los renglones 3 al 8 de la matriz T.

11. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de C usando el comando `rref`. Use este comando para escribir un sistema equivalente de ecuaciones.

EJERCICIOS CON MATLAB 1.3

1. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 1, 2, 5, 8 y 16 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene una solución única y que la solución está contenida en la última columna de esta forma escalonada de la matriz aumentada. Use la notación ":" para asignar la variable x a la solución, es decir, a la última columna de esta forma escalonada por renglones de la matriz aumentada. [***Sugerencia:*** Puede emplear el comando `end`, utilice `doc end` para obtener información acerca del comando.]

2. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 4, 7, 13 y 18 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Concluya que ninguno de estos sistemas tiene solución.

3. Las matrices siguientes son matrices aumentadas de los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones.

a) Para cada una, dé la matriz y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones.

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \\ 8 & 3 & -18 & 0 \end{array}\right)$ ii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 27 & 3 & 3 & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{array}\right)$

iii) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 21 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ iv) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 7 & 5 & 15 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 7 & -1 & 7 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 22 & 8 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} & 9 & -12 & -2 \end{array}\right)$

El resto de este problema necesita trabajo con papel y lápiz.

b) Para cada forma escalonada reducida por renglones, localice los pivotes dibujando un círculo a su alrededor.

c) Para cada forma escalonada reducida, escriba el sistema de ecuaciones equivalente.

d) Resuelva cada uno de estos sistemas equivalentes eligiendo variables arbitrarias que serán las variables correspondientes a las columnas que no tienen pivote en la forma escalonada reducida por renglones (estas variables son las variables naturales que han de escogerse de manera arbitraria).

4. Los siguientes sistemas representan la intersección de tres planos en el espacio de tres dimensiones. Use el comando `rref` como herramienta para resolver los sistemas. ¿Qué se puede concluir sobre la categoría de los planos?

i) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -3x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$ ii) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$

iii) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 17 \end{aligned}$ iv) $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$

5. Utilice MATLAB para reducir las matrices aumentadas siguientes a la forma escalonada reducida por renglones paso por paso realizando las operaciones por renglones (vea los ejemplos de comandos para operaciones por renglones en la introducción a MATLAB en la página 30). Verifique sus resultados usando el comando `rref`.

Nota

Si llamó A a la matriz original, haga $D = A$ al principio y verifique `rref(D)`.

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$ ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

iii) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 & -19 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 & -34 \end{array}\right)$

Vea en el problema 1 de la sección 2.1 de MATLAB del siguiente capítulo más opciones sobre la realización de operaciones por renglones.

6. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ *b*) $= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$

Muestre que el sistema con la matriz aumentada [A **b**] no tiene solución.

b) Sea `b = 2*A(:,1)+A(:,2)+3*A(:,3)-4*A(:,4)`. Recuerde que `A(:,1)` es la primera columna de `A`. Así se están sumando múltiplos de columnas de `A`. Use `rref [A b]` para resolver este sistema.

c) Utilice la flecha hacia arriba para regresar a la línea de `b = 2*A(:,1) +` etc. y edítela para obtener un nuevo conjunto de coeficientes. Una vez más, resuelva el sistema con la matriz aumentada `[A b]` para esta nueva `b`. Repita dos nuevas elecciones de coeficientes.

d) ¿Sería posible poner coeficientes para los que no tengan una solución? La pregunta se refiere a si la siguiente conjetura es cierta: un sistema `[A b]` tiene solución si `b` es una suma de múltiplos de las columnas de `A`. ¿Por qué?

e) Pruebe esta conjetura para `A` formada por:

```
A = 2*rand(5)-1
A(:,3) = 2*A(:,1)-A(:,2)
```

7. Suponga que se quieren resolver varios sistemas de ecuaciones en los que las matrices de coeficientes (los coeficientes de las variables) son los mismos pero tienen lados derechos diferentes. Formando una matriz aumentada más grande se podrán resolver varios lados derechos. Suponga que `A` es la matriz de coeficientes y que `b` y `c` son dos lados derechos diferentes; asigne `Aug = [A b c]` y encuentre `rref(Aug)`.

a) Resuelva los dos sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 16 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b) Resuelva los tres sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned}$$

c) Sea A la matriz de coeficientes del inciso *a*). Elija cualesquiera tres lados derechos de su preferencia. Resuelva.

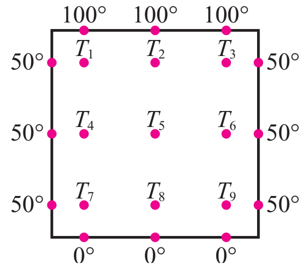
d) Es necesario hacer una observación sobre las soluciones de sistemas *cuadrados*, es decir, sistemas con tantas ecuaciones como variables. Conteste las siguientes preguntas basando sus conclusiones en los incisos *a*) a *c*). (Ponga especial atención a la forma de la parte de los coeficientes de `rref`.)

i) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y un número infinito de soluciones con otro lado derecho? ¿Por qué?

ii) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y no tenga solución con otro?

iii) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga un número infinito de soluciones para un lado derecho y no tenga solución para otro? ¿Por qué?

8. Distribución de calor. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Nos interesa encontrar la temperatura en los puntos interiores. Considere el siguiente diagrama. Hay que encontrar aproximaciones para los puntos T_1 a T_9, o sea, la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



a) Con esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones, considerando primero el punto T_1, después el punto T_2, etc. Reescriba el sistema de manera que todas las variables se encuentren de un lado de la ecuación. Por ejemplo, para T_1 se tiene

$$T_1 = \frac{(100 + T_2 + T_4 + 50)}{4}$$

que se puede reescribir como $4T_1 - T_2 - T_4 = 150$.

Encuentre la matriz de coeficientes y la matriz aumentada. Describa el patrón que observe en la forma de la matriz de coeficientes. Dicha matriz se llama **matriz de banda**. ¿Puede ver de dónde viene el nombre?

b) Resuelva el sistema usando el comando `rref`. Observe que se obtiene una solución única. Use la notación ":" para asignar la solución a la variable `x`.

c) Suponga que `A` es la matriz de coeficientes y `b` es el lado derecho del sistema anterior. Dé el comando `y = A\b`. (La diagonal aquí se llama **diagonal invertida**. No es la diagonal de división.) Compare `y` y `x`.

9. Modelo de insumo-producto de Leontief

a) Haga referencia al ejemplo 1.2.10. Resuelva el sistema dado usando el comando `rref` y el comando "\". Observe nuevamente que existe una solución única.

b) Suponga que se tienen tres industrias independientes. La demanda externa para el producto 1 es 300 000; para el producto 2, 200 000, y para el producto 3, 200 000. Suponga que las demandas internas están dadas por

$$a_{11} = .2,\quad a_{12} = .1,\quad a_{13} = .3,\quad a_{21} = .15,\quad a_{22} = .25,\quad a_{23} = .25,$$
$$a_{31} = .1,\quad a_{32} = .05,\quad a_{33} = 0$$

i) ¿Qué le dice $a_{32} = 0.5$?; ¿qué le dice $a_{33} = 0$?

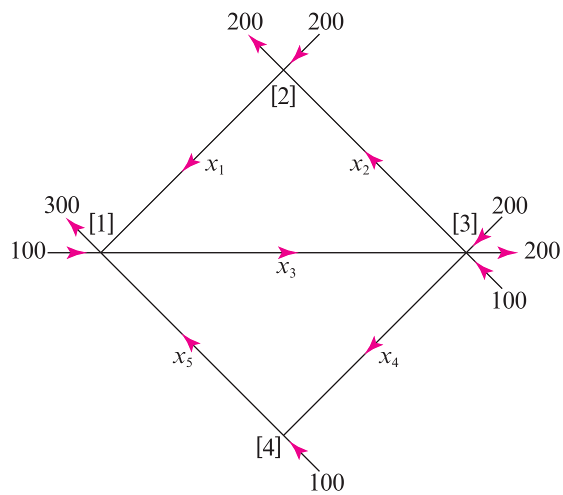
ii) Establezca la matriz aumentada para que el sistema de ecuaciones encuentre que x_1 es la producción del artículo i para $i = 1, 2, 3$. PRIMERO VUELVA A LEER EL EJEMPLO 1.2.10.

iii) Resuelva el sistema usando MATLAB. Interprete la solución, es decir, ¿cuánto de cada artículo debe producirse para tener una oferta igual a la demanda?

iv) Suponga que x_1 se midió en \$ (dólares de producción) y que está interesado en interpretar la solución en centavos. Serán necesarios más dígitos en la respuesta desplegada que los cuatro dígitos normales después del punto decimal. Suponga que ha asignado la variable `x` a la solución. Dé el comando `format long` (vea la página 31) y después en la ventana de comandos escriba `x seguido de` "`enter`". Esto desplegará más dígitos (cuando termine esta parte, dé el comando `format short` para regresar a la forma normal).

10. Flujo de tráfico

a) Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por [k]. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_i el número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección [1], $x_1 + x_5 + 100 = x_3 + 300$, esto es, el tráfico que entra es igual al tráfico que sale, lo que da $x_1 - x_3 + x_5 = 200$.



b) Resuelva el sistema usando el comando `rref`. Habrá un número infinito de soluciones. Escríbalas en términos de las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

c) Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir, $x_3 = 0$. ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$) sin modificar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

11. Ajuste de polinomios a puntos. Si se tienen dos puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una recta única $y = c_1x + c_2$ que pasa por ambos puntos. Si se tienen tres puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una parábola única

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

que pasa por los tres puntos. Si se tienen $n + 1$ puntos en el plano con coordenadas x distintas, entonces existe un polinomio de grado n único que pasa a través de los $n + 1$ puntos:

$$y = c_1x^n + c_2x^{(n+1)} + \cdots + c_{n+1}$$

los coeficientes $c_1, \ldots, c_{n+1}$ se pueden encontrar resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1.3.3

$$P_1 = (2, 5) \qquad P_2 = (3, 10) \qquad P_3 = (4, -3)$$

Se quiere encontrar c_1, c_2 y c_3, de manera que $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ pase por los puntos P_1, P_2 y P_3.

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 2^2 + c_2 2 + c_3 \\ 10 &= c_1 3^2 + c_2 3 + c_3 \\ -3 &= c_1 4^2 + c_2 4 + c_3 \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 50 \\ -59 \end{pmatrix}$ que indica que la parábola que pasa por cada uno de los puntos es $y = -9x^2 + 50x - 59$. Se dice que la parábola *se ajusta* a los puntos.

a) Para $P_1 = (1, -1)$, $P_2 = (3, 3)$ y $P_3 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones para encontrar los coeficientes de la parábola que se ajusta a los puntos. Sea A la matriz de coeficientes y b el lado derecho. Resuelva el sistema. En un comentario escriba la ecuación de la parábola que se ajusta a los puntos, es decir, que pasa por los tres.

Dé `x = [1;3;4]` y `V = vander(x)`. Compare V con A.

Utilizando `doc vander` describa el funcionamiento del comando `vander`.

b) Para $P_1 = (0, 5)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (3, 3)$ y $P_4 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones, dé la matriz aumentada y utilice MATLAB para resolver el sistema.

Escriba, en un comentario, la ecuación del polinomio cúbico que se ajusta a los cuatro puntos.

Sea `x` el vector columna que contiene las coordenadas x de los puntos P_1 a P_4. Dé `x` y encuentre `V = vander(x)`. Compare `V` con la matriz de coeficientes que encontró al establecer el sistema.

c) Usando algunas características gráficas de MATLAB se pueden visualizar los resultados con los comandos siguientes. Siga estos comandos para los puntos en *a*) y de nuevo para los cuatro puntos en *b*).

Dé `x` como el vector columna de las coordenadas x de los puntos.

Dé `y` como el vector columna de las coordenadas y de los puntos.

Dé los siguientes comandos:

```
V = vander (x)
c = V\y
s = min(x):.01:max(x);
yy = polyval(c,s);
plot(x,y'*',s,yy)
```

El primer comando crea la matriz de coeficientes deseada `(doc vander)`.

El segundo resuelve el sistema obteniendo los coeficientes del polinomio `(doc mldivide)`.

El tercero crea un vector `s` que contiene múltiples elementos, cada uno entre el valor mínimo y máximo de las coordenadas `x`, de manera que se pueda evaluar el polinomio en muchos puntos para crear una buena gráfica `(doc min, doc max, doc :)`.

El cuarto crea un vector `yy` que contiene las coordenadas y obtenidas evaluando el polinomio en los elementos de `s (doc polyval)`.

El quinto produce una gráfica de los puntos originales (con un símbolo "*") y un dibujo de la gráfica del polinomio `(doc plot)`.

Debe observarse que la gráfica del polinomio pasa a través de los puntos originales (etiquetados con "*").

d) Genere `x = rand(7,1)` y `y = rand(7,1)` o genere un vector de coordenadas `x` y un vector de coordenadas `y` de su preferencia. Asegúrese de cambiar (o elegir) las coordenadas `x` de manera que sean distintas. Siga los comandos del inciso *c*) para visualizar el ajuste polinomial.

1.4 Sistemas homogéneos de ecuaciones

Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.2.10), página 16] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots b_m$, son cero; si alguna o algunas de las constantes $b_1, \ldots, b_m$ es o son diferentes de cero, decimos que el sistema lineal es **no homogéneo**. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Los sistemas homogéneos surgen de diferentes formas. Se estudiará un sistema homogéneo en la sección 5.3. En dicha sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nueva cuenta, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Como se vio en la sección 1.2, con respecto a las soluciones de los sistemas lineales no homogéneos existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla.

Solución trivial o solución cero

Para sistemas generales no homogéneos, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), por lo que sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales**.

Soluciones no triviales

EJEMPLO 1.4.1 Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.2.1 en la página 8. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 1.4.2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones, y, como tenemos un reglón de ceros, esto nos indica que existe un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 1.4.3 Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

Solución Al reducir por renglones, utilizando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

En esta ocasión tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que hay un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{-5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3\right)$.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1.4.1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto observe que si sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \vdots \qquad & \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y, posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.1 Sistemas homogéneos: condición para tener un número infinito de soluciones

El sistema homogéneo (1.4.1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$.

Resumen 1.4

- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma (p. 38)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**) (p. 38)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales**. (p. 38)
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$). (p. 40)

AUTOEVALUACIÓN 1.4

I) ¿Cuáles de los siguientes sistemas deben tener soluciones no triviales?

a) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II) ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* -3 *f)* 0

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*) **II)** *e*)

Problemas 1.4

En los problemas 1 a 20 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -8x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} -2x_1 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -7x_1 + 21x_2 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_2 - 10x_4 &= 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 9x_2 - 9x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

21. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

22. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

***23.** Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

24. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema tiene solución única; justifique su solución.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \\ x + y + Kz &= 1 \end{aligned}$$

25. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y - Kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2z &= K \end{aligned}$$

determine para qué valores de K el sistema:

a) No tiene solución.
b) Tiene un número infinito de soluciones.
c) Tiene solución única.

Los sistemas homogéneos se pueden resolver con la calculadora HP50g al utilizar la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes (RREF).

En los problemas 26 al 30 encuentre todas las soluciones para cada sistema.

26. $$\begin{aligned} 4.23x_1 + 10.28x_2 - 6.36x_3 &= 0 \\ 3.28x_1 - 5.39x_2 + 4.25x_3 &= 0 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 0 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 0 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 0 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 8.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 0 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 11x_2 - 9x_3 + 13x_4 - 20x_5 &= 0 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} 25x_1 - 16x_2 + 13x_3 + 33x_4 - 57x_5 &= 0 \\ -16x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + 12x_5 &= 0 \\ -18x_2 \qquad + 16x_4 - 26x_5 &= 0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS CON MATLAB 1.4

1. *a*) Genere cuatro matrices aleatorias con más columnas (incógnitas) que renglones (ecuaciones).

b) Use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones de cada una de las matrices aleatorias.

c) Para cada matriz aleatoria use la fórmula escalonada reducida por renglones para escribir la solución a los sistemas homogéneos asociados. Verifique el teorema 1.4.1, es decir, que en este caso siempre hay un número infinito de soluciones.

(Para usar MATLAB para la generación de matrices aleatorias, remítase a la sección anterior a los problemas de MATLAB de la sección 1.2.)

2. ¿Cuál es su conclusión acerca de la solución de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficiente tiene más renglones (ecuaciones) que columnas (incógnitas)? Resuelva los sistemas homogéneos cuyas matrices de coeficientes se dan en seguida. ¿Los resultados conforman su conclusión?

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

3. Balanceo de reacciones químicas. Al balancear reacciones químicas tales como la de la fotosíntesis

$$CO_2 + H_2O \quad \rightarrow \quad C_6H_{12}O_6 + O_2$$

se buscan enteros positivos x_1, x_2, x_3 y x_4, que no tengan un divisor común diferente de 1, de manera que en

$$x_1(CO_2) + x_2(H_2O) \quad \rightarrow \quad x_3(C_6H_{12}O_6) + x_4(O_2)$$

el número de átomos de cada elemento químico involucrado es el mismo en cada lado de la reacción. El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en CO_2 hay un átomo de C (carbono) y dos átomos de O (oxígeno). Esto nos lleva a un sistema homogéneo de ecuaciones. ¿Por qué se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones como resultado del "balanceo"?

$$\begin{array}{llcl} \text{C:} & x_1 = 6x_3 & & x_1 - 6x_3 = 0 \\ \text{O:} & 2x_1 + x_2 = 6x_3 + 2x_4 & \text{o} & 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ \text{H:} & 2x_2 = 12x_3 & & 2x_2 - 12x_3 = 0 \end{array}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que se espera un número infinito de soluciones. Para resolver el sistema se introduce la matriz aumentada, se usa el comando `rref` y se escribe la solución en términos de las variables arbitrarias. Uno de los requerimientos será elegir las variables arbitrarias de manera que x_1, x_2, x_3 y x_4 sean enteros sin un divisor común diferente de 1.

Para los sistemas que aquí se presentan habrá una variable arbitraria correspondiente a la última columna de la `rref` (forma escalonada reducida por renglones) de la matriz de coeficientes. La notación "`:`" se utiliza para encontrar la elección correcta de variables arbitrarias para producir enteros y asignar la variable `z` a la última columna de la `rref` de la matriz de coeficientes. Se da el comando `xx = rats(z)`. Éste desplegará los números de la columna en forma de fracciones en lugar de decimales. También se puede dar el comando `format rat` y después se despliega `xx` (asegúrese de dar el comando `format short` para regresar a la forma normal).

***a*)** Resuelva el sistema anterior para la reacción de fotosíntesis y encuentre los enteros x_1 a x_4 sin común divisor diferente de 1 que la balancean.

***b*)** Establezca el sistema de ecuaciones homogéneas que balancea la reacción entre:

$$Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \quad \rightarrow \quad Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$$

Resuelva el sistema y encuentre los enteros x_1 a x_6 sin divisor común diferente de 1 que balancea la reacción.