
MATRICES Y DETERMINANTES

1. INTRODUCCIÓN

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton.

Las matrices se encuentran en aquellos ámbitos en los que se trabaja con datos regularmente ordenados y aparecen en situaciones propias de la ingeniería, como así también en Ciencias Sociales, Económicas y Biológicas.

2. MATRICES. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Filas de la matriz } A$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \text{Columnas de la matriz } A \end{matrix}$$

Cada elemento de la matriz a_{ij} lleva dos subíndices. El primero de ellos “ i ”, indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, “ j ”, la columna.

Así el elemento a_{23} está en la fila 2 y columna 3. Las matrices siempre se representarán con letras mayúsculas.

Ejemplos: Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1/5 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su tamaño es 2×2 . ¿Qué elemento es a_{21} ?

B tiene 2 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 2×3 . ¿Qué elemento es b_{23} ?

C tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 4×3 . ¿Qué elemento es c_{42} ?

En general, si una matriz A tiene m filas y n columnas, diremos que su tamaño o dimensión es $m \times n$ (se lee “ m por n ”), siempre en primer lugar el número de filas y en segundo lugar el de columnas.

3. TIPOS DE MATRICES

1. Se llama **matriz nula** a la que tiene todos los elementos cero. Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz nula de tamaño 2×5 .

2. Se llama **matriz fila** a la que solo tiene una fila, es decir su dimensión es $1 \times n$. Por ejemplo,

$$B = [1 \quad 0 \quad -4 \quad 9]$$

es una matriz fila de tamaño 1×4 .

3. Se llama **matriz columna** a la que solo consta de una columna, es decir su dimensión será $m \times 1$, como por ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{bmatrix}$$

es una matriz columna de tamaño 3×1 .

4. Una matriz es **cuadrada** cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es $n \times n$. La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2×2 o simplemente de orden 2.

Otro ejemplo de matriz cuadrada es:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

de orden 3.

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos **diagonal principal** a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ siendo la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

En la matriz D del ejemplo anterior, su **diagonal principal** estaría formada por 1, 5, 0.

Se llama **traza de la matriz** a la suma de los elementos de la diagonal. Es decir,

$$\text{Traza}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}, \text{ y en el caso de } D, \text{Traza}(D) = 1 + 5 + 0 = 6.$$

La **diagonal secundaria** es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}$.

En la matriz D estaría formada por 3, 5, -3.

Una clase especial de matrices cuadradas es el de las **matrices triangulares**.

Una matriz es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y **triangular inferior** si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Son ejemplos de estas matrices:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{bmatrix}$$

Triangular inferior

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1/3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Triangular superior

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal.

Una matriz de este tipo se denomina **matriz diagonal**. Un ejemplo de matriz diagonal sería:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina **matriz unidad o identidad**. Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz. Algunas matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Son el elemento neutro en el producto de matrices.

4. APLICACIONES DE LAS MATRICES

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0,04	0,08	0,12
Color F	0,03	0,05	0,08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B , de tamaño respectivo 2×3 y 3×2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. Si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

$$\begin{array}{ccc}
 2\ U & 5\ U & 10\ U \\
 A = \begin{bmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ F \end{matrix} & B = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,03 \\ 0,08 & 0,05 \\ 0,12 & 0,08 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2\ U \\ 5\ U \\ 10\ U \end{matrix} &
 \end{array}$$

Estas matrices se denominan **matrices de información**, y simplemente recogen los datos numéricos del problema en cuestión.

5. OPERACIONES CON MATRICES

5.1. SUMA Y DIFERENCIA

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices *del mismo tamaño*, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{bmatrix} \\
 2 \times 3 & & 2 \times 3 \qquad \qquad 2 \times 3
 \end{array}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices:

- a) Conmutativa: $A + B = B + A$
- b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.
- d) Elemento opuesto de A : La matriz $-A$, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A .

Ejemplo si:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Porqué:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

- Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z , en los años 2018 y 2019 vienen dadas por las matrices:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\
 \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 11 & 6,7 & 0,5 \\ 14,5 & 10 & 1,2 \\ 20,9 & 3,2 & 2,3 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\
 \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13,3 & 7 & 1 \\ 15,7 & 11,1 & 3,2 \\ 21 & 0,2 & 4,3 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Calcula y expresa en forma de matriz el total de exportaciones para el conjunto de los dos años.

¿Cuántos millones ha exportado el país B al Z en total?

Calcula el incremento de las exportaciones del año 2018 al 2019 con los datos del ejemplo anterior.

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\begin{bmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calcula a, b, c para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{bmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5.2. PRODUCTO POR UN NÚMERO REAL

Dada una matriz cualquiera A y un número real k , el producto $k \cdot A$ se realiza multiplicando todos los elementos de A por k , resultando otra matriz de igual tamaño. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real). Por ejemplo:

$$-5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

Propiedades:

- a) Distributiva respecto de la suma de matrices: $k(A + B) = kA + kB$
- b) Distributiva respecto de la suma de números: $(k + d)A = kA + dA$
- c) Asociativa: $k(dA) = (kd)A$
- d) Elemento neutro, el número 1: $1A = A$

Ejercicios:

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

halla una matriz X que verifique la ecuación: $2 \cdot X - 4 \cdot A = B$

2. Determina las matrices X e Y sabiendo que:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

5.3. TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Dada una matriz cualquiera A , se llama matriz traspuesta de A , y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A .

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, entonces la matriz traspuesta de A es: $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Evidentemente, si A es una matriz de tamaño $m \times n$, su traspuesta A^t tendrá tamaño $n \times m$, pues el número de columnas pasa a ser el de filas y viceversa.

Si la matriz A es cuadrada, su traspuesta tendrá el mismo tamaño.

Propiedades (importante)

- a) $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.
- b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

En base a esta nueva operación, podemos definir otras dos clases de matrices, que son:

Matriz simétrica, que es aquella para la que se cumple que $A^t = A$, por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

es simétrica (compruébalo).

En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

Ejercicio: ¿Puede ser simétrica una matriz que no sea cuadrada? ¿Por qué?

Matriz antisimétrica, es aquella para la que se cumple que $A^t = -A$. Por ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica (comprueba).

En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos (¿por qué?), y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

Ejercicios:

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcula $3A^t - B^t$.

2. Obtener las matrices X e Y que verifiquen los sistemas:

$$a) \begin{cases} 2X - 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ X + Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{cases} \quad b) \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ X + 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

5.4. PRODUCTO DE MATRICES

Hay que dejar claro ya, desde el principio, que **no todas** las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

“Para multiplicar dos matrices A y B , en este orden, $A \cdot B$, es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B ”

Si no se cumple esta condición, el producto $A \cdot B$ no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Una vez comprobado que el producto $A \cdot B$ se puede realizar, si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$ (observemos que el N° de columnas de $A = n = N^\circ$ de filas de B), entonces:

el producto $A \cdot B$ da como resultado una matriz C de tamaño $m \times p$ del siguiente modo:

“El elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz $C = A \cdot B$, se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por la columna j de B y sumando los resultados”

Veámoslo mediante un ejemplo muy sencillo:

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, el tamaño de A es 1×3 , y el tamaño de B es 3×1 , por lo tanto, el tamaño del producto $A \cdot B$ será de 1×1 , que no es otra cosa que la operación del producto escalar, o sea:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6] = [2 + 8 + 18] = [28]$$

Otro ejemplo, para multiplicar las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 4 \qquad \qquad \qquad 4 \times 3$

primero comprobamos que se puede realizar el producto $A \cdot B$, pues el número de columnas de A es 4 y el número de filas de B también es 4, y el resultado, según lo dicho será una matriz de tamaño 2×3 , tiene 2 filas y 3 columnas:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$2 \times 4 \qquad \qquad 4 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

El siguiente es un esquema que nos ayudará a entender el algoritmo del producto, ya que muchas veces es difícil de comprenderlo:

En el esquema, cada elemento de la matriz C , se genera por el producto escalar entre la fila de la primera matriz y la columna de la segunda matriz (intersección de las líneas verdes), por eso la cantidad de elementos de la fila y la columna, deben ser iguales.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
 $\downarrow$

Sólo nos falta completar los elementos de la matriz producto. Para ello, seguimos la regla anterior:

El elemento de la fila 1 y columna 1 de $A \cdot B$ proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A por la columna 1 de B y sumar, es decir:

$$c_{11} = (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

El elemento de la fila 1 y columna 2 de $A \cdot B$ proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 2 de B y sumar:

$$c_{12} = (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

El elemento de la fila 1 y columna 3 de $A \cdot B$ proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 3 de B y sumar:

$$c_{13} = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

Así sucesivamente se obtienen los demás elementos (comprueba):

$$\begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1. Para las matrices A y B anteriores, calcula $B \cdot A$
2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcula si es posible $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Coinciden?
3. Lo mismo si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.
4. Calcula todos los productos posibles entre las siguientes matrices y además A^2 y A^3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

calcular:

$$A + B, \quad 3A - 4B, \quad A \cdot B, \quad A \cdot D, \quad B \cdot C, \\ C \cdot D, \quad A^t \cdot C, \quad D^t \cdot A^t, \quad B^t \cdot A, \quad D^t \cdot D, \quad D \cdot D^t$$

Propiedades del producto de matrices:

a) Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) Distributiva respecto de la suma: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

c) Elemento neutro, la matriz identidad correspondiente, si A es $m \times n$:

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_m \cdot A = A$$

d) En general el producto de matrices no es conmutativo:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Pueden verse ejemplos en los ejercicios anteriores. Esta es una propiedad muy importante.

e) El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2x3 3x1 2x1

Ejercicios:

1. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿son ciertas las propiedades siguientes, que son ciertas para las operaciones con números reales?:

a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$

b) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

2. Determina los valores de a y b de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$ para que $A^2 = A$.

3. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

6. LA MATRIZ INVERSA

Sabemos ya multiplicar matrices y hemos visto algunas de las propiedades de esta operación.

Recordemos, en primer lugar, que no siempre es posible efectuar la multiplicación de dos matrices y, en segundo lugar, que, aunque sea posible hacer esta multiplicación, en general no es conmutativo, es decir $A \cdot B$ es distinto de $B \cdot A$.

En el caso particular de que tratemos con *matrices cuadradas del mismo orden* A y B , es claro que podemos efectuar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, que darán como resultado otra matriz del mismo orden, aunque, como ya se ha dicho, las matrices resultantes serán, en general, distintas.

Sabemos también que el elemento neutro del producto de matrices es la matriz identidad I_n . Por analogía con el caso de los números reales, podemos plantearnos la siguiente cuestión:

Si tenemos un número real, por ejemplo, el 2, podemos interesarnos en buscar el inverso del 2 para el producto, es decir un número real x tal que $2 \cdot x = 1$, el producto de 2 por x sea igual al elemento neutro, el 1.

Evidentemente, en el caso de los números reales es muy fácil despejar x para obtener, en nuestro caso, $x = \frac{1}{2}$, es decir, el inverso de un número real es otro número que, multiplicado por él, da el elemento neutro, el 1.

Todo número real, salvo el 0, tiene inverso.

Trasladando esto a las matrices, nos podemos plantear si dada una matriz cuadrada A de orden n , cualquiera, existe su inversa X para el producto de matrices, tal que:

$$A \cdot X = I_n$$

es decir, el producto de A por su inversa produce el elemento neutro matricial, la matriz identidad I_n . Sin embargo, hay algunas diferencias con respecto al caso de los números reales:

- 1) No podemos “despejar” la matriz X del modo $X = \frac{I_n}{A}$, porque no hemos definido la división de matrices.
- 2) No todas las matrices cuadradas no nulas tienen matriz “inversa” (sea lo que sea, por analogía con los números).

Definamos, en primer lugar, el termino de matriz inversa:

Dada una matriz cuadrada de orden n , se dice que A es *invertible* (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada por A^{-1} y tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

y

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es *singular* o *no invertible*.

Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una). Para calcular dicha matriz inversa, podemos utilizar dos vías:

6.1. MÉTODO DIRECTO:

Consiste en determinar A^{-1} planteando un sistema de ecuaciones, es decir, si por ejemplo queremos determinar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, lo que estamos buscando, es otra matriz de igual tamaño (orden 2) tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \quad \text{y} \quad A^{-1} \cdot A = I_2$$

es decir, si $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, se tiene que cumplir que:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2z & y + 2t \\ -x + z & -y + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y + t = 1 \end{cases}$$

Es decir, hemos de resolver un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, aunque en realidad son 2 sistemas de dos incógnitas cada uno (uno con x y z y otro con y y t).

Resolviendo el sistema se obtiene que:

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{3}$$

por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que también se cumple que $A^{-1} \cdot A = I_2$, luego A es invertible, tiene inversa. Si el sistema no tiene solución, la matriz no tiene inversa.

Verificación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Por ejemplo, en el caso en que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, del mismo modo:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + z & y + t \\ 2x + 2z & 2y + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + 2t = 1 \end{cases}$$

Y por ejemplo de $2x + 2z = 0$ se obtiene $x = -z$, si se sustituye en la primera ecuación es

$-z + z = 1$, es decir $0z = 1$ (imposible, no existe valor de z que multiplicado por 0 nos dé 1). El sistema no tiene solución.

Por tanto, A no es invertible, es *singular*.

Este método directo sólo se suele utilizar para matrices cuadradas de tamaño 2, puesto que para las de tamaño 3 obtenemos un sistema de *9 ecuaciones con 9 incógnitas!* que realmente es difícil de resolver.

6.2. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN:

Consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz para llegar a obtener la matriz identidad. Realizando estas mismas transformaciones con la matriz identidad llegamos a la matriz A^{-1} .

Se llama transformación elemental en una matriz a:

- T1) Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.
- T2) Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número real no nulo.
- T3) Intercambiar el lugar de dos filas entre sí.

Notación:

- 1) $R_i \rightarrow cR_i$ quiere decir “reemplaza el i -ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c ”. (Para multiplicar el i -ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i -ésimo renglón por c .)
- 2) $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ significa sustituye el j -ésimo renglón por la suma del renglón j , más el renglón i multiplicado por c .
- 3) $R_i \rightleftharpoons R_j$ quiere decir “intercambiar los renglones i y j ”
- 4) $A \rightarrow B$ indica que las matrices aumentadas A y B son equivalentes; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Veamos cómo se realiza el método de Gauss-Jordan, realizándolo a la vez con la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- i) Consideramos la matriz formada por A y la matriz identidad correspondiente. En nuestro caso:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El objetivo es llegar a la transformación final que tendrá la forma:

$$(I_2|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & t \end{array} \right)$$

- ii) Aunque no es el único camino se comienza transformando el elemento de la diagonal de la primera fila en 1. Eso se logra dividiendo toda la primera fila por ese elemento. En nuestra matriz, ese elemento ya es 1 por lo tanto, se omite este paso.

- iii) El próximo paso es completar la columna con ceros, por lo que se busca la operación por eliminación:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

iv) Ahora hay que convertir en uno el segundo elemento de la diagonal, por lo que se divide el segundo renglón por 3:

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2}{3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

v) Por último, se completa con cero la segunda columna, con que quedaría completa la matriz identidad. Para eso se busca la operación adecuada.

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

vi) En esta instancia, con la matriz identidad completa, la matriz de la derecha es la matriz inversa.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz que habíamos obtenido antes por el método directo.

Si al realizar el método de *Gauss-Jordan* en algún momento alguna fila es de ceros, la matriz no tiene inversa.

Si calculamos por este método la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, resulta:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Como aparece una fila de ceros, la matriz A no tiene inversa.

Cuanto mayor sea el orden de la matriz, mejor es este método frente al directo. Veamos otro ejemplo:

Calcular la inversa de la matriz por el método de *Gauss-Jordan*.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo los pasos anteriores:

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \quad R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la inversa de B .

Ejercicios:

1. Calcular por el método de *Gauss-Jordan* la inversa de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Dada la matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ calcula su inversa. ¿Como calcularías de forma rápida la inversa de una matriz diagonal cualquiera?

Es importante que realicen las siguientes autoevaluaciones tomadas del Grossman:



AUTOEVALUACIÓN 2.1

I) ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1 , el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2 .

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} -8 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

d) Esta operación no se puede realizar.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesaria cuando se encuentra la diferencia (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.

b) Las matrices deben ser cuadradas.

c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.

d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV) ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$

b) $4, -8$

c) $2, 8, -1$

d) $-4, 8$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1 , el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2 .

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} -8 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

d) Esta operación no se puede realizar.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesaria cuando se encuentra la diferencia (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.

b) Las matrices deben ser cuadradas.

c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.

d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV) ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$

b) $4, -8$

c) $2, 8, -1$

d) $-4, 8$

**AUTOEVALUACIÓN 2.2**

- I)** De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es cierta para la multiplicación de las matrices A y B ?
- a) Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.
 - b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij} .
 - c) $AB = BA$.
 - d) Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B .
- II)** ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3 ?
- a) 2×3
 - b) 3×2
 - c) 4×4
 - d) Este producto no se puede calcular.
- III)** Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto para las matrices A y B si AB es un vector columna.
- a) B es un vector columna.
 - b) A es un vector renglón.
 - c) A y B son matrices cuadradas.
 - d) El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B .
- IV)** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5 ?
- a) B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.
 - b) B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.
 - c) B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.
 - d) B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

7. DETERMINANTES

Introduciremos a continuación el concepto de determinante asociado a una matriz cuadrada. Este concepto permite simplificar operaciones matriciales tales como el cálculo del rango o de la matriz inversa.

Definición:

Determinante es una función que asigna un número a una matriz cuadrada.

Si es una matriz 2×2 se define el determinante de la matriz A , y se expresa como $\det A$ o bien $|A|$, como el *número*:

Ejemplos: El cálculo de los determinantes de orden 2 es bien sencillo, por ejemplo:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 7$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = -4$

Para definir determinantes de matrices de orden mayor que 2 es necesario introducir previamente algunos conceptos.

Dada una matriz cuadrada A de orden n , definimos el *menor complementario* de un elemento a_{ij} de A , como la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij} . Se representa por M_{ij}

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, los menores complementarios de cada uno de los elementos de la primera fila son:

Menor complementario de -2:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Menor complementario de 4:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Menor complementario de 5:

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Y así sucesivamente.

Ejercicio: Obtener los restantes menores complementarios de los elementos de la matriz A .

Estrechamente ligado al concepto de menor complementario se encuentra el de adjunto de una matriz.

Dada una matriz cuadrada A de orden n , definimos el *adjunto de un elemento* a_{ij} de A como el número llamado **cofactor**:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene, tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observa que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

es decir, no es más que el menor complementario correspondiente acompañado de un signo más o menos, dependiendo de la fila y la columna en la que se encuentre el elemento en cuestión.

Por ejemplo, para la matriz anterior, los cofactores de los elementos de la primera fila son:

$$\text{Cofactor de } -2: A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 = 14$$

$$\text{Cofactor de } 4: A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 21 = -21$$

$$\text{Cofactor de } 5: A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-21) = -21$$

Ejercicio: Obtener los restantes adjuntos de los elementos de la matriz A .

En general puede saberse si el signo del menor complementario y del adjunto coinciden o no utilizando una sencilla regla gráfica, por ejemplo, para matrices 3×3 y 4×4 basta fijarse en las matrices:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

donde el $+$ significa que el adjunto coincide con el menor complementario y el $-$ indica que tienen signo contrario.

Una vez vistos estos conceptos se puede definir ya:

Determinante $n \times n$: Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A , denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado por la suma del producto de los elementos de una *línea* cualquiera de la matriz (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos o cofactores:

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}$$

Esta expresión se llama **expansión por cofactores**.

El valor del determinante *no depende de la fila o columna elegida* para calcularlo.

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, aplicando la definición, si elegimos la **tercera fila** queda:

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) = -141 + 0 - 76 = -217 \end{aligned}$$

Si hubiésemos elegido otra fila o columna, por ejemplo, la columna 2, quedaría:

$$\begin{aligned} \det A &= 4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(-\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}\right) = \\ &= 4 \cdot (-(12 + 9)) + 7 \cdot (-4 - 15) + 0 \cdot (-(6 - 30)) = -84 - 133 + 0 = -217 \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula, desarrollando por la fila que tú elijas, los determinantes de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

7.1. LA REGLA DE SARRUS: SOLAMENTE PARA MATRICES DE 3x3

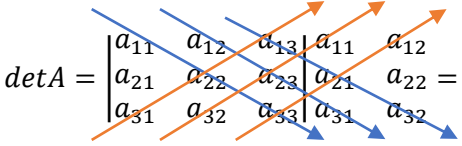
La definición de determinante es bastante engorrosa y se hace mucho más pesada a medida que aumenta el orden de la matriz A .

En el caso de las matrices cuadradas de orden 3, esta regla facilita el cálculo de dichos determinantes.

Si la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

entonces el determinante de A se calcula mediante la resta de dos expresiones obtenidas del siguiente modo:



$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

Por ejemplo, en el caso de la matriz anterior:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -3 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-28 - 36 + 0) - (105 + 0 + 48) = -64 - 153 = -217$$

Ejercicio: Comprobar, mediante la regla de Sarrus, los determinantes de orden 3 obtenidos en el ejercicio anterior.

7.2 UNA VARIANTE ENTRE LA REGLA DE SARRUS Y EL MÉTODO DE COFACTORES (SOLO PARA MATRICES DE 3x3)

Solo para el caso de las matrices cuadradas de orden 3, se puede hacer una pequeña modificación que facilita el cálculo de dichos determinantes.

Si la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ la modificación es la siguiente:}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

Ahora no hay que considerar el cambio de signo en el cofactor, haciendo el desarrollo de la siguiente manera:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

Por ejemplo, en el caso de la matriz anterior:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(14 - 0) + 4(-9 - 12) + 5(0 - 21) = -28 - 84 - 105 = -217$$

7.3 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Algunas propiedades importantes que tienen los determinantes, y que se enuncian sin demostración, son:

1. Si una matriz *tiene una línea (fila o columna) de ceros*, el determinante vale cero.
Esta propiedad es evidente, puesto que, por definición de determinante, basta elegir dicha línea para desarrollar y el determinante será 0.
2. Si una matriz *tiene dos filas iguales o proporcionales (escaladas)*, su determinante es nulo.
3. Si *permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada*, su determinante cambia de signo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -217 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 217$$

4. Si *multiplicamos todos los elementos de una línea de un determinante por un número*, el determinante queda multiplicado por ese número. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -217 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -8 & -10 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 434 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -8 & -10 \\ 6 & 7 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -434$$

5. Si a una línea de una matriz se le suma otra línea multiplicada por un número, el determinante no cambia.

Esta propiedad permite utilizar un método más sencillo para calcular determinantes de orden mayor que 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 12 = 4 \rightarrow R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

6. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta:

$$|A| = |A^t|$$

7. Si A tiene matriz inversa A^{-1} , se verifica que:

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Una estrategia a tener en cuenta en este caso de determinantes de orden 4 o superior, o incluso de orden 3 si la matriz es compleja, es el método de “hacer ceros”, puesto que el valor del determinante no varía al realizar a la matriz ciertas transformaciones elementales en filas, como indica la propiedad 5 anterior, si bien hemos de ser cuidadosos al aplicar dicha propiedad.

Así pues, la mejor forma de calcular un determinante es hacer ceros en una fila o columna y desarrollar por dicha fila o columna, porque entonces sólo tendremos que calcular un adjunto. Por ejemplo, si calculamos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \\ 0 & -11 & -14 & 16 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la columna 1:

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{vmatrix} \right) = - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -11 & -14 \end{vmatrix} \right) = \\ &= -[(-16 - 242 - 84) - (-33 - 154 - 64)] = 91 \end{aligned}$$

Como hemos dicho, debemos tener especial cuidado al aplicar esta regla con determinantes, puesto que no podemos hacer las mismas operaciones que con las matrices, lo que puede confundir. Por ejemplo, si queremos calcular el determinante por *Sarrus*:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (5 + 16 + 0) - (12 + 2 + 0) = 21 - 14 = 7$$

Si hiciésemos ceros en la primera columna, y desarrollásemos nos debería dar lo mismo. Ahora bien, podemos hacer cero el 4 de la primera columna mediante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 14 = 7$$

lo que es correcto. Sin embargo, si queremos hacer cero el 1 de la primera columna sería un error hacer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow 4R_1 - R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (14 - 7) = 28$$

no obtenemos lo mismo, *porque hemos multiplicado la fila sustituida por un número* y eso altera el valor del determinante. Luego la fila a sustituir conviene no multiplicarla, como en el primer ejemplo, puesto que, si no nos damos cuenta, podemos variar el valor del determinante.

7.4. RELACIÓN ENTRE LA INVERSA Y LOS DETERMINANTES

Hay una estrecha relación entre la inversa de una matriz cuadrada y su determinante. De hecho, se verifica que:

Propiedad: Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Además, en este caso, la matriz inversa de A , A^{-1} se calcula de la manera:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

donde $Adj(A)$ denota la *matriz adjunta de A* , es decir, aquella que se obtiene de sustituir cada elemento de A por su adjunto o cofactor.

Como consecuencia de esto, la inversa de una matriz cuadrada de orden 2, es muy sencilla de calcular:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo: sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, para calcular su inversa primero probamos si es invertible, eso se logra calculando el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$$

Es invertible, así que calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Si calculamos el determinante de la matriz inversa:

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{vmatrix} = \frac{2}{25} - \left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Con lo que se verifica la propiedad ya mencionada antes:

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Calcular, si es posible, la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En primer lugar, calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (1 - 3 + 0) = 2$$

Se verifica que tiene inversa, por lo que podemos continuar:

Calculando $Adj(A)$, se obtiene:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo que finalmente podemos calcular la inversa, tomando en cuenta la $Adj(A^t)$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

Finalmente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

8. EJERCITACIÓN MATRICES Y DETERMINANTES

1. Siendo las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & a & 2a \\ b & 2 & a \\ 2b & b & 3 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Identificar matrices cuadradas, simétricas, diagonales, triangulares y nulas.
- Para las matrices que sea posible, calcular los determinantes.
- Mencionar todos los productos que se pueden realizar entre matrices diferentes, incluyendo matrices transpuestas.
- Utilizando al menos cuatro matrices distintas, plantear dos operaciones combinadas usando suma y producto de matrices.
- De las siguientes operaciones, realizar las que sean posibles:
 - $H \cdot G + I - I_3 =$ con $b = 0$ (Recordar que I_3 significa matriz identidad de 3×3)
 - $E \cdot C^t - A^2 =$
 - $A \cdot J =$
 - $I \cdot C =$

2. Calcular los valores de a, b, c y d para que se verifique la siguiente ecuación:

$$2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{bmatrix}$$

3. Si A es una matriz tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, determinar B^2 .

4. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{a) } 2A = A \cdot X + B, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } X \cdot A + X = 2B, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

- Calcular $C_1 = A^{-1} \cdot B$ y $C_2 = B^{-1} \cdot A$
- Analizar si existe alguna relación entre C_1 y C_2 . Justificar analíticamente usando propiedades.

6. Siendo las matrices $A = \begin{bmatrix} x & 2x \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x \end{bmatrix}$, determinar el o los valores de x para que se cumpla que $|A| = |B|$.

7. Hallar el valor de k para que se verifique que:

a) $|A \cdot B| = -11$

b) $|B \cdot A| = 8$

Siendo: $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. Siendo las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar: $|\lambda I_3 - A|$ (λ es un número real)

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$, hallar sin desarrollar, el valor de los siguientes determinantes:

9.1 $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ 9.2 $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ 9.3 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =$

10. Nicolás y Andrea planean ir a comprar frutas para la semana próxima. Cada uno de ellos desea comprar algunas manzanas, naranjas y bananas, pero en diferentes cantidades (*tabla 1*) y en diferentes lugares (*tabla 2*). Existen dos verdulerías, “El Tomate Vergonzoso” y “La Manzana de Newton” con los precios dados en la *tabla 2*. ¿Cuánto costará a Nicolás y a Andrea hacer sus compras en cada uno de los mercados? Determinar los resultados en forma matricial.

Tabla 1	Manzanas	Naranjas	Bananas
Nicolás	6	3	10
Andrea	4	8	5

Tabla 2	El Tomate Vergonzoso	La manzana de Newton
Manzana	17,60	15,50
Naranja	10,50	12,40
Bananas	14,50	13,10

11. Un negocio tiene para la venta televisores LCD Sony Bravia de varios tamaños. Tiene 5 de 40 pulgadas; 8 de 37 pulgadas; 4 de 32 pulgadas y 10 de 26 pulgadas. Los de 40 pulgadas se venden a \$240.000, los de 37 pulgadas \$200.000, los de 32 pulgadas \$150.000 y los de

26 pulgadas a \$120.000. Expresa el total de la venta de los televisores como un producto de dos matrices e indica el ingreso total.

12. Un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por $d = (30 \ 20 \ 40 \ 10)$. El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el vector de precios \$20, \$15, \$18, \$40. Si se cumple la demanda ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?
13. Una fábrica elabora tres productos (ollas, sartenes y pavas) y los envía a dos depósitos para su almacenamiento. El número de unidades de cada producto enviado a cada depósito está dado por la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix} \text{ donde } a_{ij} \text{ es el número de unidades del } \textit{producto } i \text{ enviado al}$$

depósito j. El costo del envío de una unidad de cada producto por camión es de \$ 150 para ollas, \$ 100 por sartén y \$ 200 por pava. Los correspondientes costos por unidad en el ferrocarril son \$175, \$ 150 y \$ 100 respectivamente. Organice estos costos en una matriz B y después utilice la multiplicación de matrices para mostrar cómo la fábrica puede comparar el costo del envío de sus productos a cada uno de los depósitos por camión o por ferrocarril.