

Determinantes- Propiedades- Cramer- Inversa

1. a) Define que es el menor de una matriz $n \times n$ y el cofactor A_{ij}
b) dados los determinantes

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

- b.1 Indica el menor M_{21} de cada una de ellas y el orden de dicha matriz
- b.2 Resuelve el cofactor A_{21} , B_{21} , C_{21} , D_{21}
- b.3 Resuelve el determinante por expansión por cofactores en el renglón/columna que consideres más conveniente

2. Resuelve el determinante de cada una de las matrices dadas.

¿qué tienen en común todas éstas matrices?

Explica con tus palabras que propiedad se cumple en cada una de ellas

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

3. Marca cuáles son los renglones o columnas que hacen el determinante nulo

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 2b & e \\ f & 0 & h & 0 & j \\ k & l & m & 2l & o \\ f+a & b & c+h & 2b & e+j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Resuelve el determinante haciendo operaciones entre renglones

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

5. ¿Cuáles son los cofactores de 3 y -2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$?

6. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, verifica que $|A \cdot A^T| = |A|^2$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ y $|C| = 8$. Resuelve $\begin{cases} |A|x + |B^{-1} \cdot C|y = 28 \\ |C \cdot A|x + |B \cdot A^{-1}|y = 176 \end{cases}$

Practicando más propiedades !!!

8. Escribe las propiedades de los determinantes que nos permiten decir que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 0$

9. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$, calcula

a) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2d & 2e & 2f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$

10. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, halla $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2d & b-2e & c-2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

11. Encuentra el valor de x que satisfaga:

a) $\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 7 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 1 \\ x & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

12. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & 1 & 2 \end{bmatrix}$, si $C = A \cdot B$; halla x para los cuales C es inversible

13. Resuelve aplicando Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

¿Qué relación existe entre el resultado del determinante de la matriz de coeficientes y el tipo de solución?

¿Qué podrías afirmar si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo?

!!!Surtidos de inversas!!!

1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ encuentra su adjunta y comprueba que sus inversas son iguales

2. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ verificar que $(A \cdot B)^{-1} = (B^{-1} A^{-1})$

3. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ determinar X^2 si $(X \cdot A^{-1})^{-1} = B^{-1} \cdot X$

4. Hallar todas las matrices no nulas $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} /$

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Hallar todas las matrices no nulas $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$