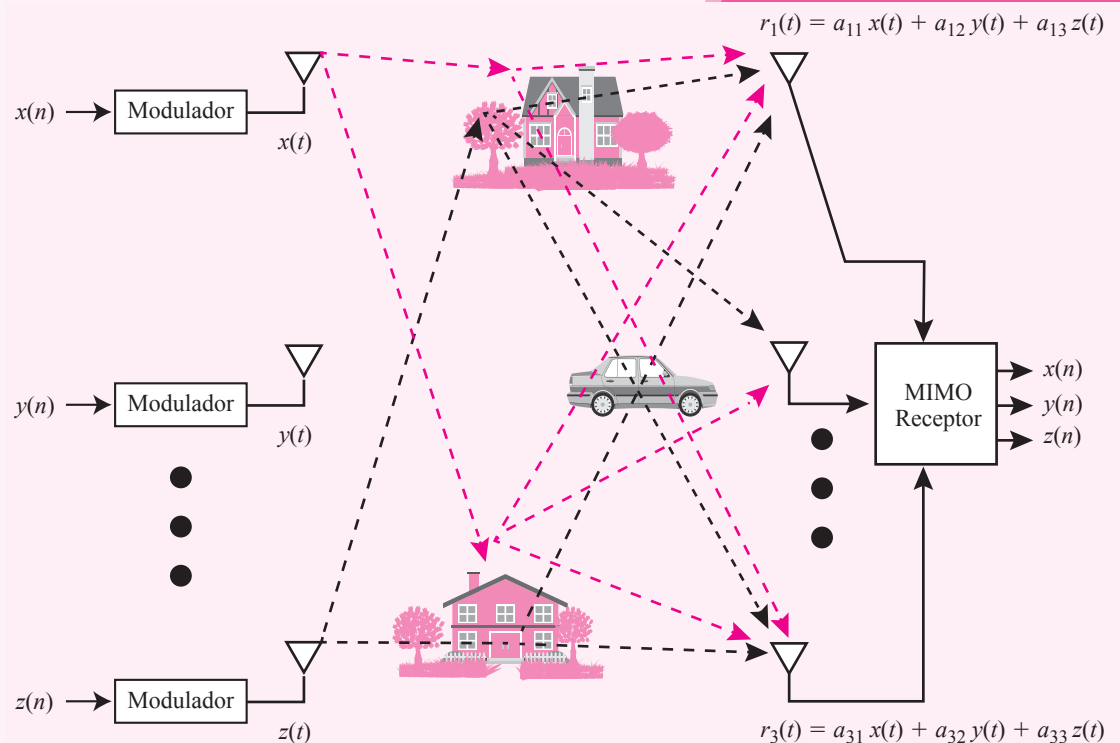




▲ En el estudio de sistemas de comunicaciones inalámbricas con múltiples entradas y múltiples salidas, información diversa es transmitida de forma simultánea por cada una de las antenas de transmisión. Los determinantes juegan un papel importante en las estrategias de codificación de la información transmitida y recibida. [Fuente: http://rfdesign.com/military_defense_electronics/0408DE-MIMO-wireless-revolution-Figure01.jpg.]

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante . . .

- Estudiará la definición inductiva de los determinantes y el caso particular para matrices triangulares y su interpretación como área de un paralelogramo (sección 3.1).
- Aprenderá las propiedades fundamentales de los determinantes relacionadas con la multiplicación entre matrices y factorizaciones *LUP*, así como las propiedades para simplificar su evaluación sin tener que hacer uso de la definición inductiva (sección 3.2).
- Relacionará la determinante de una matriz con la existencia de su inversa (sección 3.3).
- Se familiarizará con el uso de los determinantes para encontrar fórmulas cerradas para la solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas (sección 3.4).
- Aprenderá las definiciones de los teoremas relacionados con las propiedades de los determinantes (sección 3.2).

3.1 Definiciones

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2 . En la sección 2.4 en la página 107 se definió el determinante de A como

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.1.1)$$

Con frecuencia se denotará $\det A$ por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3.1.2)$$



Observación

No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota $\det A$ si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Como se verá más adelante, este importante teorema es válido para las matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden utilizar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usará lo que se sabe sobre un determinante de 2×2 para definir un determinante de 3×3 , que a su vez se usará para definir un determinante de 4×4 , y así sucesivamente. Se comienza por definir un determinante de 3×3 .[†]



Definición 3.1.1

Determinante de 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det A = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (3.1.3)$$



Nota

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3.1.3).



EJEMPLO 3.1.1 Cálculo de un determinante de 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.



[†] Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que “det” es una función que asigna un número a una matriz cuadrada.

▲▲ Solución

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 4((-5)(9) - (6)(1)) - 7((3)(9) - (-8)(1)) + (-2)((3)(6) - (-8)(-5)) \\
 &= 4(-51) - 7(35) - 2(-22) \\
 &= -405
 \end{aligned}$$

● EJEMPLO 3.1.2 Cálculo de un determinante de 3×3

Calcule $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$.

▲▲ Solución

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0
 \end{aligned}$$

Hay otro método con el que se pueden calcular determinantes de 3×3 . De la ecuación (3.1.3) se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

es decir

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} \quad (3.1.4)$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:

A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (3.1.4).

● EJEMPLO 3.1.3 Cálculo de un determinante de 3×3 usando el nuevo método

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

▲▲ Solución

Si se escribe

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

y se multiplica como lo indican las flechas se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5) \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$



Advertencia

Este método *no* funciona para determinantes de $n \times n$ si $n > 3$. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Antes de definir los determinantes de $n \times n$ debe observarse que la ecuación (3.1.3) está formada por tres determinantes de 2×2 , si definimos las siguientes matrices: $M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

(es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la primera columna de la matriz A);

$M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ (es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la segunda columna de la matriz A), y $M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ (es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la

tercera columna de la matriz A). Si ahora definimos a $A_{11} = \det M_{11}$, $A_{12} = -\det M_{12}$ y $A_{13} = \det M_{13}$, podemos escribir la ecuación (3.1.3) como

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (3.1.5)$$

Utilizando las observaciones del párrafo anterior podemos definir ahora el caso general de estas matrices, resultado de eliminar algún renglón o columna de una matriz.



Definición 3.1.2

Menor

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j . M_{ij} se llama el **menor ij** de A .

Menor ij de A



EJEMPLO 3.1.4 Cálculo de dos menores de una matriz de 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32} .

▲▲ Solución

Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene

$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 3.1.5 Cálculo de dos menores de una matriz de 4×4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24} .

Solución Al quitar el tercer renglón y la segunda columna de A se encuentra que

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \text{ De igual manera, } M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D Definición 3.1.3

Cofactor

Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor ij** de A , denotado por A_{ij} , está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad (3.1.6)$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Cofactor ij de A

EJEMPLO 3.1.6 Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4×4

En el ejemplo 3.1.5 se tiene

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$



Observación

La definición 3.1.3 tiene sentido a partir de la definición de un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n-1) \times (n-1)$.

Con las definiciones anteriores de cofactores estamos en posibilidad de considerar el caso general de matrices de $n \times n$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

Definición 3.1.4



Observación

En la ecuación (3.1.8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A . En la siguiente sección se verá (teorema 3.2.5) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

Determinante $n \times n$

Sea A una matriz de $n \times n$ como en (3.1.7). Entonces el determinante de A , denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado por

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

La expresión en el lado derecho de (3.1.8) se llama **expansión por cofactores**.

Expansión por cofactores

EJEMPLO 3.1.7 Cálculo del determinante de una matriz de 4×4

Calcule $\det A$, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160 \end{aligned}$$

Es obvio que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser laborioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3 . Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4 , lo que equivale a calcular veinte determinantes de 3×3 . Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las cuales es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la página 139.

Definición 3.1.5

Matriz triangular

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Matriz triangular superior

Matriz triangular inferior

Matriz diagonal

EJEMPLO 3.1.8 Seis matrices triangulares

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores;

$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

EJEMPLO 3.1.9 El determinante de una matriz triangular inferior

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ es triangular inferior. Calcule $\det A$.

Solución $\det A = a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} = a_{11}A_{11}$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

El ejemplo 3.1.9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

T Teorema 3.1.1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} \quad (3.1.9)$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*



Demostración

La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 3.1.9. Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una

matriz triangular superior de 2×2 , entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}$, de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n-1) \times (n-1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices, excepto la primera, tienen una columna de ceros, por lo que por lo menos una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes, excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} \cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$.

EJEMPLO 3.1.10 Determinantes de seis matrices triangulares

Los determinantes de las seis matrices triangulares en el ejemplo 3.1.8 son $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $|B| = (-2)(0)(1)(-2) = 0$; $|C| = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$; $|D| = 0$; $|I| = 1$; $|E| = (2)(-7)(-4) = 56$.

El siguiente teorema será de gran utilidad.

Teorema 3.1.2

Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.



Demostración

Sea

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Del teorema 3.1.1,

$$\det T = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Así, $\det T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si $\det T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera.

Para $i = 1, 2, \dots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la forma escalonada por renglones de T , que tiene n pivotes, y por el teorema de resumen (2.6.4) de la página 138, T es invertible.

Suponga que $\det T = 0$. Entonces al menos una de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes, y por el teorema de resumen se puede concluir que T no es invertible.

Interpretación geométrica del determinante de 2×2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 3.1 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y se dibujaron los segmentos de recta de $(0, 0)$ a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto equivale a suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c) .

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con tres vértices en $(0, 0)$, (a, c) y (b, d) .

Área generada por A

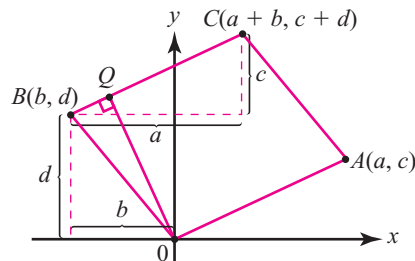


Figura 3.1

Q está en el segmento de línea BC y también en la recta perpendicular a BC que pasa por el origen. El área del paralelogramo es $\overline{OQ} \times \overline{BC}$.

Teorema 3.1.3

El área generada por $A = |\det A|$.[†]



Demostración

Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se dejará como ejercicio (vea el problema 21 de esta sección).

El área del paralelogramo = base $\times$ altura. La base del paralelogramo en la figura 3.1 tiene longitud $\overline{OA} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{OQ}$, de donde OQ es el segmento perpendicular a BC . De la figura se ve que las coordenadas de C , el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así,

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d)-d}{(a+b)-b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{c}{a} \quad \text{o} \quad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

Propiedad iv), página 2

$$\text{Pendiente de } OQ = -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y Q es

$$\frac{(y-0)}{(x-0)} = -\frac{a}{c} \quad \text{o} \quad y = -\frac{a}{c}x$$

Q es la intersección de BC y OQ , por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} &= -\frac{a}{c}x \\ \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)x &= \frac{bc}{a} - d \\ \frac{a^2 + c^2}{ac}x &= \frac{bc - ad}{a} \\ x &= \frac{ac(bc - ad)}{a(a^2 + c^2)} = \frac{c(bc - ad)}{a^2 + c^2} = -\frac{c(ad - bc)}{a^2 + c^2} = -\frac{c \det A}{a^2 + c^2} \end{aligned}$$

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c} \cdot -\frac{c \det A}{a^2 + c^2} = \frac{a \det A}{a^2 + c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\frac{-c \det A}{a^2 + c^2}, \frac{a \det A}{a^2 + c^2}\right)$

[†] Aquí $|\det A|$ denota el valor absoluto del determinante de A .

y

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{c^2(\det A)^2}{(a^2 + c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2 + c^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(c^2 + a^2)(\det A)^2}{(a^2 + c^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2 + c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2 + c^2}}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{área del paralelogramo} = \overline{OA} \times \overline{OQ} = \sqrt{a^2 + c^2} \times \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = |\det A|$$

Se podrá dar una demostración mucho más sencilla de este teorema cuando se analice el producto cruz de dos vectores en la sección 4.4.

Resumen 3.1

- El **determinante** de una matriz de 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por (p. 176)

$$\text{Determinante de } A = \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3×3**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{p. 176})$$

- El **menor ij** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij} , es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A . (p. 178)
- El **cofactor ij** de A , denotado por A_{ij} , está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} \quad (\text{p. 179})$$

- **Determinante de $n \times n$**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces (p. 180)

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}$$

La suma anterior se denomina la **expansión de $\det A$ por cofactores en el primer renglón**. (p. 180)

- Si A es una matriz de $n \times n$, **triangular superior**, **triangular inferior** o **diagonal**, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, entonces (p. 181)

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

**AUTOEVALUACIÓN 3.1**

I) ¿Cuál de los siguientes es el cofactor de 3 en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

- a) 8 b) -8 c) 3
d) 6 e) -10 f) 0

II) ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b ?

- a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d) Los determinantes no se pueden establecer porque no se parecen los valores de a y b .

III) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\det A =$ _____.

- a) 0 b) 12 c) -12 d) 6 e) -6

IV) ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

**Respuestas a la autoevaluación**

- I) a) II) b) III) c) IV) b), c)

**MANEJO DE LA CALCULADORA 3.1**

Se puede calcular el determinante de una matriz de una forma sencilla, como se muestra a continuación. Una vez que se tiene una matriz en la pila, se da el comando DET, segui-

do de la tecla Enter. Por ejemplo, sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$; calcule $\det A$.

$\leftarrow [] \leftarrow [] / +/ - \text{SPC} 3 \text{SPC} 5 \rightarrow$
 $\leftarrow [] 4 \text{SPC} 2 +/ - \text{SPC} 8 \rightarrow \rightarrow$
 $\leftarrow [] 3 \text{SPC} 2 +/ - \text{SPC} 7 +/ - \text{ENTER ALPHA D E T}$
ENTER

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
4:
3:
2:
1:
      [-1  3  5]
      [ 4 -2  8]
      [ 3 -2 -7]
DET
CASIO

```

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
7:
6:
5:
4:
3:
2:
1:
      116
CASIO

```



Problemas 3.1

En los problemas 1 al 16 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ -8 & -8 & 10 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -6 & 8 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -7 \\ 9 & -9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

17. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces $\det AB = \det A \det B$.

*18. Demuestre que si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces $\det AB = \det A \det B$.

19. Demuestre que, en general, no se cumple que $\det(A + B) = \det A + \det B$.

20. Muestre que si A es triangular, entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

21. Pruebe el teorema 3.1.3 cuando A tiene coordenadas $(0, c)$ o $(a, 0)$.

**22. Más sobre la interpretación geométrica del determinante: sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores y sean $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$. Demuestre que (área generada por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) = (área generada por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) $|\det A|$.



En los problemas 23 al 28 utilice una calculadora para encontrar el determinante de cada matriz.

23.
$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 9 & -2 \\ -6 & -6 & -4 & 10 & 2 \\ -4 & -6 & 9 & -1 & -5 \\ -1 & -7 & -1 & -8 & 2 \\ -6 & -6 & -7 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

24.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 16 & 4 \\ 37 & -6 & 0 & 23 \\ 14 & 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

25.
$$\begin{pmatrix} -238 & -159 & 146 & 382 & -189 \\ -319 & 248 & -556 & 700 & 682 \\ 462 & 96 & -331 & 516 & -322 \\ 511 & 856 & 619 & 384 & 906 \\ 603 & -431 & -236 & 692 & -857 \end{pmatrix}$$

26.
$$\begin{pmatrix} 0.62 & 0.37 & 0.42 & 0.56 & 0.33 \\ 0.29 & 0.46 & 0.33 & 0.48 & 0.97 \\ 0.81 & 0.37 & 0.91 & 0.33 & 0.77 \\ 0.35 & 0.62 & 0.73 & 0.98 & 0.18 \\ 0.29 & 0.08 & 0.46 & 0.71 & 0.29 \end{pmatrix}$$

27.
$$\begin{vmatrix} -5.565 & 0 & 8.577 & -0.823 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.261 & 0 \\ -4.066 & 0 & -0.227 & 0.936 & 3.582 \\ -3.624 & 6.020 & 0 & 0 & -2.089 \\ -1.516 & 0 & -5.254 & -5.368 & 0 \end{vmatrix}$$

28.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1.534 & 0 & 0 & 0.432 \\ 2.197 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.353 & 0 & 0 & 3.639 & 0 \\ 7.188 & 7.730 & 4.253 & 0 & 0 \\ 6.109 & 0 & 0.009 & -8.571 & 4.448 \end{vmatrix}$$



EJERCICIOS CON MATLAB 3.1

Información de MATLAB

El comando `det(A)` encuentra el determinante de A (doc `det`). Al igual que antes se puede utilizar MATLAB para generar matrices aleatorias de $n \times n$. Por ejemplo,

`A=2*rand(n)-1`

(con elementos entre -1 y 1)

`A=2*rand(n)-1+i*(2*rand(n)-1)`

(con elementos reales e imaginarios entre -1 y 1)

`A=round(10*(2*rand(n)-1))`

(con elementos enteros entre -10 y 10)

1. En este problema deberá investigar la relación entre $\det(A)$ y la invertibilidad de A .

a) Para cada matriz, determine si A es o no invertible (utilizando `rref`) y encontrando $\det(A)$. ¿De qué forma puede usar `det(A)` para determinar si A es o no invertible?

$$\text{i)} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -9 & 9 & 7 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{pmatrix} -9 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -9 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \\ -10 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{pmatrix} 23 & 19 & 11 \\ 5 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 & -9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & -5 \\ -9 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

b) Los incisos i) y ii) que se muestran a continuación prueban su conclusión del inciso a) con varias matrices aleatorias (elija por lo menos cuatro matrices en i) de distintos tamaños y al menos cuatro matrices en ii). Incluya cuando menos una matriz con elementos complejos para cada inciso.

i) Sea A una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre $\det(A)$. Utilice los conocimientos anteriores para determinar si A es o no es invertible. ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

ii) Sea B una matriz aleatoria de $n \times n$, pero para alguna j arbitraria, sea $B(:, j)$ igual a una combinación lineal de algunas columnas de B (de su elección). Por ejemplo, $B(:, 3) = B(:, 1) + 2 \cdot B(:, 2)$. Determine si B es o no invertible y encuentre $\det(B)$. ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

2. Para seis matrices aleatorias A con elementos reales (para valores diferentes de n), compare $\det(A)$ con $\det(A')$ donde A' denota (en MATLAB) la transpuesta de A . Incluya por lo menos dos matrices no invertibles (vea la descripción en el problema 1 b) ii) de MATLAB en esta sección). ¿Qué le indica su comparación? Repita el mismo procedimiento para matrices con elementos complejos.

3. Construya seis pares de matrices aleatorias, A y B , de $n \times n$ (use valores de n). Para cada par, sea $C = A + B$. Compare $\det(C)$ y $\det(A) + \det(B)$. Obtenga una conclusión sobre la afirmación

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

4. a) Haciendo uso de los pares de matrices (A y B) dados, formule una conclusión respecto a $\det(A * B)$ en términos de los determinantes de A y B .

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

- b)** Pruebe también su conclusión generando matrices aleatorias de $n \times n$ (genere cuando menos seis pares con diferentes valores de n . Incluya un par en el que una de las matrices sea no invertible. Incluya matrices con elementos complejos).
- 5. a)** Para las siguientes matrices, formule una conclusión respecto a $\det(A)$ y $\det(\text{inv}(A))$.

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

- b)** Pruebe su conclusión con varias (cuando menos seis) matrices aleatorias invertibles de $n \times n$ para diferentes valores de n . Incluya matrices con elementos complejos.
- c) (Lápiz y papel)** Pruebe su conclusión utilizando la definición de la inversa (es decir, considere AA^{-1}) y la propiedad descubierta en el problema 4 de MATLAB de esta sección.
- 6.** Sea $A = 2 * \text{rand}(6) - 1$.
- a)** Elija i, j y c y sea B la matriz obtenida al realizar la operación con renglones $R_j \rightarrow cR_i + R_j$ sobre A . Compare $\det(A)$ y $\det(B)$. Repita para cuando menos otros cuatro valores de i, j y c . ¿A qué conclusión llega sobre la relación entre el determinante de A y el determinante de la matriz obtenida a partir de A realizando el tipo de operación con renglones dada?
- b)** Siga las instrucciones del inciso a) pero para la operación con renglones $R_i \rightarrow cR_i$.
- c)** Siga las instrucciones del inciso a) pero para la operación con renglones que intercambia R_i y R_j .
- d)** Para cada operación con renglones realizada en a), b) y c) encuentre la matriz elemental F tal que FA sea la matriz obtenida al realizar la operación sobre los renglones de A . Encuentre $\det(F)$. Explique los resultados obtenidos en los incisos a), b) y c) utilizando su observación sobre $\det(F)$ y su conclusión del problema 4 de MATLAB en esta sección.
- 7.** Es sabido que si A es una matriz triangular superior, entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal. Considere la siguiente matriz M , donde A , B y D son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz que consiste sólo de ceros:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

¿Puede obtener una relación entre $\det(M)$ y los determinantes de A , B y D ?

- a)** Introduzca matrices aleatorias de $n \times n$, A , B y D . Sea $C = \text{zeros}(n)$. A partir de la matriz bloque, $M = [A, B; C, D]$. Pruebe su conclusión (si todavía no ha formulado una conclusión, encuentre los determinantes de M , A , B y D y busque patrones). Repita para otros n , A , B y D .
- b)** Repita el proceso anterior para

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

donde A , B , C , D , E y F son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz de $n \times n$ cuyos elementos son todos cero (es decir $\text{zeros}(n)$).

M

- 8. (Este problema usa el archivo con extensión *m*, *ornt.m*)** Una aplicación geométrica de los determinantes de 2×2 hace referencia a la orientación. Si se viaja por las aristas de un paralelogramo, se va en el sentido (orientación) de las manecillas del reloj o en sentido contrario. La multiplicación por una matriz de 2×2 puede afectar dicha orientación.

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, suponga que se traza el paralelogramo formado al comenzar en $(0, 0)$, recorrer hasta el final de $\mathbf{u}$, después hasta el final de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, luego hasta el final de $\mathbf{v}$ y después de regreso a $(0, 0)$; se lleva a cabo esto mismo para el paralelogramo formado por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$, donde A es una matriz de 2×2 (el cual se recorre primero a lo largo de $A\mathbf{u}$).

¿Cuándo se invertirá la orientación (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) del paralelogramo formado por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$ respecto a la orientación del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?

La siguiente función de MATLAB, de nombre *ornt.m*, se puede utilizar para investigar esta pregunta. Una vez que haya escrito la función en el archivo de nombre *ornt.m*, dé `doc ornt` para obtener una descripción de lo que hace este archivo.

```
function ornt(u,v,A)

% ORNT grafica paralelogramos formados por u,v y Au, Av con
% la orientacion descrita en la pantalla.
%
% u: vector de 2x1
% v: vector de 2x1
% A: Matriz 2x2

% paralelogramo del origen->u->u+v->v->origen
PP=[0;0],u,u+v,v,[0;0];
PP1=PP(:,1:4);
% datos originales
subplot(121)
pplot(PP,PP1)
axis square
title('Orientacion Inicial')
xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')

% datos despues de la multiplicacion por A
subplot(122)
pplot(A*PP,A*PP1)
axis square
title(['Despues de la mult por A=[',...
    num2str(A(1,:))',';',num2str(A(2,:))',''])
xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')

% funcion auxiliar unicamente visible dentro de ornt
function pplot(PP,PP1)
plot(PP(1,:),PP(2,:), 'b', PP1(1,:),PP1(2,:), '*');
text(PP1(1,:),PP1(2,:),num2str((1:4)'));
grid

%Fin de función ORNT
```

Para cada uno de los siguientes problemas, introduzca $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y A (aquí $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de 2×1 y A es una matriz de 2×2). Encuentre $\det A$. Dé `ornt(u, v, A)`. En una pantalla de gráficas aparecerán los paralelogramos formados por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$ con la orientación descrita en la misma. ¿Se modificó la orientación? Después de resolver el siguiente problema, formule una conclusión respecto a la forma en la cual se puede utilizar $\det(A)$ para determinar si cambiará o no la orientación. Pruebe su conclusión con más ejemplos (cambie A y/o $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$).

Para cada A utilice $\mathbf{u} = [1; 0]$ y $\mathbf{v} = [0; 1]$, y después $\mathbf{u} = [-2; 1]$ y $\mathbf{v} = [1; 3]$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Nota importante. Cuando termine con este problema, asegúrese de dar el comando `clf` (`doc clf`) para limpiar la ventana de gráficas antes de comenzar otro problema.

3.2 Propiedades de los determinantes

Existen algunos problemas en matemáticas que, en estricta teoría, son sencillos pero que en la práctica son imposibles. Piense por ejemplo en el caso de un determinante de una matriz de 50×50 . Se puede calcular expandiendo por **cofactores**. Esto implica 50 determinantes de 49×49 , que a su vez implican $50 \cdot 49$ determinantes de 48×48 , que implican a su vez... $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \dots \cdot 3$ determinantes de 2×2 . Ahora bien, $50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 3 = 50!/2 \approx 1.5 \times 10^{64}$ determinantes de 2×2 . Suponga que se cuenta con una computadora que puede calcular un millón $= 10^6$ determinantes de 2×2 por segundo. Tomaría alrededor de 1.5×10^{58} segundos $\approx 4.8 \times 10^{50}$ años terminar el cálculo (el universo tiene alrededor de 15 000 millones de años $= 1.5 \times 10^{10}$ años según la versión teórica más reciente). Es obvio que, si bien el cálculo de un determinante de 50×50 , siguiendo la definición, es teóricamente directo, en la práctica es imposible.

Por otra parte, la matriz de 50×50 no es tan rara. Piense en 50 tiendas en las que se ofrecen 50 productos diferentes. De hecho, las matrices de $n \times n$ con $n > 100$ surgen con frecuencia en la práctica. Por fortuna, existen cuando menos dos maneras de reducir de forma significativa la cantidad de trabajo necesaria para calcular un determinante.

El primer resultado que se necesita es quizá el teorema más importante sobre determinantes. Este teorema establece que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.



Teorema 3.2.1

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B$$

(3.2.1)

Es decir, *el determinante del producto es el producto de los determinantes*.



Observación

Note que el producto de la izquierda es un producto de matrices mientras que el de la derecha es de escalares.



Demostración

Si se utilizan matrices elementales, la prueba está dada en la sección 3.5. En el problema 49 de esta sección se pide que verifique este resultado para el caso 2×2 .

EJEMPLO 3.2.1 Ilustración de la propiedad $\det AB = \det A \det B$

Verifique el teorema 3.2.1 para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

▲▲ Solución Det $A = 16$ y $\det B = -8$. Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

y $\det AB = -128 = (16)(-8) = \det A \det B$.

**Advertencia**

El determinante de la suma no siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A y B ,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Por ejemplo, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\det A = -2 \quad \det B = 6 \quad \text{y} \quad \det(A + B) = 22 \neq \det A + \det B = -2 + 6 = 4$$

Utilizando la factorización LU de una matriz cuadrada A de $n \times n$ se tiene $A = LU$ (vea la página 148). Entonces, por el teorema 3.2.1,

$$\det A = \det LU = \det L \det U$$

Pero L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, así

$$\det L = \text{producto de los elementos en la diagonal} = 1$$

De manera similar, como U es triangular superior,

$$\det U = \text{producto de los elementos en la diagonal}$$

Entonces se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.2**

Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU , $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$\det A = \det U = \text{producto de los elementos de la diagonal de } U$$

**EJEMPLO 3.2.2** Uso de la factorización LU para calcular el determinante de una matriz de 4×4

Calcule $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.



Solución Del ejemplo 2.7.1 en la página 147, $A = LU$, donde $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$ por lo que $\det A = \det U = (2)(4)(3)(-49) = -1176$.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

Si A no se puede reducir a la forma triangular sin hacer permutaciones, por el teorema 2.7.3 en la página 151, existe una matriz permutación P tal que

$$PA = LU$$

Es sencillo probar que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \pm 1$ (vea el problema 53 de esta sección). Entonces

$$\begin{aligned}\det PA &= \det LU \\ \det P \det A &= \det L \det U = \det U \\ \pm \det A &= \det U \\ \det A &= \pm \det U\end{aligned}$$

$$\det L = 1$$

Teorema 3.2.3

Si $PA = LU$, donde P es una matriz permutación y L y U son como antes, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$

EJEMPLO 3.2.3 Uso de la factorización $PA = LU$ para calcular el determinante de una matriz de 3×3

Encuentre $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

 **Solución** Del ejemplo 2.7.3 en la página 151, se encontró que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\det P = 1$ y $\det U = (1)(2)(-3)$, de manera que $\det A = \frac{-6}{1} = -6$.
Se establecerá un importante teorema sobre determinantes.

Teorema 3.2.4 $\det A^T = \det A$

Demostración

Suponga que $A = LU$. Entonces $A^T = (LU)^T = U^T L^T$ por el teorema 2.5.1 ii) en la página 128. Se calcula

$$\det A = \det L \det U = \det U$$

$$\det A^T = \det U^T \det L^T = \det U^T = \det U = \det A$$

$$\det L = 1$$

El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en el hecho de que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU , entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)^T = \det (A^T P^T)$$

y por el teorema 3.2.1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A^T P^T) = \det A^T \det P^T$$

No es complicado probar (vea el problema 54 de esta sección) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P^T$. Como $\det P = \det P^T = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A^T$.

EJEMPLO 3.2.4 Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A^T| = 16$.

En primera instancia se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen diversos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.



Observación

Dado que los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes comprenden una segunda forma de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

T Teorema 3.2.5 Teorema básico

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (3.2.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (3.2.3)$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (3.2.3) indica que **se puede calcular det A**

expandiendo por cofactores en cualquier columna de A.

EJEMPLO 3.2.5 Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna

En el ejemplo 3.1.1 de la página 176 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = -405$. Expandiendo en el segundo renglón se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= (3)A_{21} + (-5)A_{22} + (1)A_{23} \\ &= (3)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-5)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (3)(-75) + (-5)(20) + (1)(80) = -405 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si se expande en la tercera columna se obtiene

$$\begin{aligned}\det A &= (-2)A_{13} + (1)A_{23} + (9)A_{33} \\ &= (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (9)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(-22) + (1)(-80) + (9)(-41) = -405\end{aligned}$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna.

Ahora se presentan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada paso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se observará que estas propiedades se pueden utilizar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

Propiedad 3.2.1

Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$.



Demostración

Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces, $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero.

EJEMPLO 3.2.6 Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces $\det A = 0$

Es fácil verificar que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Propiedad 3.2.2

Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c , entonces $\det A$ se multiplica por c . Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c |A| \quad (3.2.4)$$



Demostración

Para probar (3.2.4) se expande el renglón i de A para obtener

$$\det B = ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \dots + ca_{in}A_{in} = c(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) = c \det A$$

En el caso de las columnas se puede hacer una prueba similar.

EJEMPLO 3.2.7 Ilustración de la propiedad 3.2.2

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el segundo renglón

por 4 se tiene $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $\det B = 64 = 4 \det A$. Si se multiplica la tercera columna por

-3 se obtiene $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$ y $\det C = -48 = -3 \det A$.

**Observación**

Al utilizar la propiedad 3.2.2 se puede probar (vea el problema 3.2.37) que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$, $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

**Propiedad 3.2.3**

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & + & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & + & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & + & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det C = \det A + \det B$$

(3.2.5)

En otros términos, suponga que A , B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j -ésimas columnas de A y B . Entonces, $\det C = \det A + \det B$. La misma afirmación es cierta para renglones.

**Demostración**

Se expande $\det C$ respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + \alpha_{1j}) A_{1j} + (a_{2j} + \alpha_{2j}) A_{2j} + \cdots + (a_{nj} + \alpha_{nj}) A_{nj} \\ &= (a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}) \\ &\quad + (\alpha_{1j} A_{1j} + \alpha_{2j} A_{2j} + \cdots + \alpha_{nj} A_{nj}) = \det A + \det B \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.8 Ilustración de la propiedad 3.2.3

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$.

Propiedad 3.2.4

El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1 .



Demostración

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Es decir, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i + 1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo $\det A$ respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i + 1)$ se obtiene

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (3.2.6)$$

$$\det B = a_{i1}B_{i+1,1} + a_{i2}B_{i+1,2} + \cdots + a_{in}B_{i+1,n}$$

Aquí, $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, donde M_{ij} se obtiene eliminando el renglón i y la columna j de A . Observe ahora que si se elimina el renglón $(i + 1)$ y la columna j de B se obtiene el mismo M_{ij} . Entonces

$$B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j} |M_{ij}| = -(-1)^{i+j} |M_{ij}| = -A_{ij}$$

de manera que, de la ecuación (3.2.6), $\det B = -\det A$.

Ahora, suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j . Esto se puede llevar a cabo intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambios para mover el renglón j al renglón i . Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ y pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j . Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:[†]

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	6	6	6	6
3	3	3	6	2	3	3	3
4	→ 4	→ 6	→ 3	→ 3	→ 2	→ 4	→ 4
5	6	4	4	4	4	2	5
6	5	5	5	5	5	5	2
7	7	7	7	7	7	7	7

$6 - 2 = 4$ intercambia para
mover el 6 a la posición 2

$6 - 2 - 1 = 3$ intercambia para
mover el 2 a la posición 6

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, $\det A$ se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar.

[†] Observe que todos los números se refieren a renglones.

EJEMPLO 3.2.9 Ilustración de la propiedad 3.2.4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que, haciendo los cálculos directos, se encuentra que $\det A = 16$ y $\det B = \det C = -16$.

P Propiedad 3.2.5

Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det A = 0$.



Demostración

Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar dichos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que $\det B = -\det A$ (de la propiedad 3.2.4). Pero como renglón $i =$ renglón j , al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y $\det A = \det B = -\det A$. Por lo tanto, $2 \det A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si $\det A = 0$.

EJEMPLO 3.2.10 Ilustración de la propiedad 3.2.5

Mediante el cálculo directo se puede verificar que para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [dos renglones iguales] y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ [dos columnas iguales], $\det A = \det B = 0$.

P Propiedad 3.2.6

Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.



Demostración

Sea $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) = c(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Entonces por la propiedad 3.2.2,

$$\det A = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{renglón } j \rightarrow a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{de la propiedad 3.2.5})$$

 EJEMPLO 3.2.13 Ilustración de la propiedad 3.2.7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el tercer renglón por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene una nueva matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 + 4(0) & 1 + 4(-2) & 4 + 5(4) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y $\det B = 16 = \det A$.

Las propiedades que se acaban de presentar simplifican la evaluación de determinantes de alto orden. Se “reduce por renglones” el determinante, usando la propiedad 3.2.7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar con facilidad. La meta más común será utilizando la propiedad 3.2.7 de manera repetida hasta que 1) el nuevo determinante tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro —en cuyo caso el determinante es cero—, o 2) que la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante será el producto de sus elementos en la diagonal.

 EJEMPLO 3.2.14 Utilice las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de 4×4

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

 **Solución** (Vea el ejemplo 3.1.7, página 180.)

Ya existe un cero en la primera columna, por lo que lo más sencillo es reducir otros elementos de la primera columna a cero. Se puede continuar la reducción buscando una matriz triangular.

Se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al tercer renglón; se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por -5 y -7 y se suma el tercer y cuarto renglones, respectivamente.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza -16 del tercer renglón (utilizando la propiedad 3.2.2).

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y $|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = (-16)(-10) = 160$.

 EJEMPLO 3.2.15 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4×4

Calcule $|A|$, si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

 **Solución** Existen varias formas de proceder en este caso y no es evidente cuál de ellas será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya existe un cero en el primer renglón, se comienza la reducción en ese renglón.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por -4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda columna por -5 y por -6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna 4 = $\frac{99}{57} \times$ columna 3) se ve que $|A| = 0$.

 EJEMPLO 3.2.16 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 5×5

Calcule $|A|$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

 **Solución** Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{por la propiedad 3.2.1})$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

Existe una propiedad adicional sobre determinantes que resultará de gran utilidad.

 Teorema 3.2.6



Demostración

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (3.2.7)$$

Nota. Del teorema 3.2.5, la suma en la ecuación (3.2.7) es igual a $\det A$ si $i = j$.

**Demostración**

Sea

renglón $j \rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, como dos renglones de B son iguales, $\det B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón j . De esta forma se calcula $\det B$ expandiendo en el renglón j de B , se obtiene la suma en (3.2.7) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón j , este renglón se elimina al calcular los cofactores de B . Así, $B_{jk} = A_{jk}$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

**Resumen 3.2**

• Si $A = LU$ es una factorización LU de A , entonces $\det A = \det U$ (p. 193)

• Si $PA = LU$ es una factorización LU de PA , entonces $\det A = \det U / \det P = \pm \det U$ (p. 194)

• **Teorema básico**

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

y

(p. 195)

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier renglón o columna de A .

• Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = 0$. (p. 196)

• Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces $\det A$ se multiplica por c . (p. 196)

• Si A y B son dos matrices de $n \times n$ que son iguales excepto por la columna j (renglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna j (renglón i) de C es la suma de la columna j de A y la columna j de B (renglón i de A y renglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$. (p. 197)

• El intercambio de cualesquiera dos columnas o renglones distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1 . (p. 198)

• Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro renglón (columna) de A , entonces $\det A$ no cambia. (p. 200)

• Si un renglón (columna) de A es un múltiplo de otro renglón (columna) de A , entonces $\det A = 0$. (p. 199)

• $\det A = \det A^T$. (p. 194)

**AUTOEVALUACIÓN 3.2**

I) ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

II) ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

III) El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es _____.

a) 4

b) 10

c) -10

d) 8

e) 6

**Respuestas a la autoevaluación**

I) b)

II) c)

III) a)

**Problemas 3.2**

De los problemas 1 al 27 evalúe el determinante usando los métodos de esta sección.

1. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -8 & 10 & 10 \\ -5 & 10 & 10 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 3 \\ -8 & 6 & -10 \end{vmatrix}$

$$10. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & -7 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 0 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -6 \\ 10 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ -28 & 0 & -13 & 6 \\ -10 & -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -7 \\ -25 & -1 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 0 & 9 & -3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

De los problemas 28 al 36 calcule el determinante suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

$$28. \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$31. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$32. \begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$33. \begin{vmatrix} 4a_{11} & -2a_{12} & 3a_{13} \\ 4a_{21} & -2a_{23} & 3a_{22} \\ 4a_{31} & -2a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix}$$

$$34. \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \quad 35. \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$36. \begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

37. Usando la propiedad 3.2.2, demuestre que si α es un escalar y A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, entonces $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

*38. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

*39. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

40. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$.

*41. Una matriz A es **antisimétrica** si $A^T = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que $\det A^T = (-1)^n \det A$.

Matriz antisimétrica

42. Usando el resultado del problema 41, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det A = 0$.

43. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^T$, es decir, $A^T A = A A^T = I$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

Matriz ortogonal

**44. Sea Δ el triángulo del plano con vértices en (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) . Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias este determinante será igual a cero?

- **45.** Tres rectas que no son paralelas por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

- 46.** El **determinante de Vandermonde**[†] de 3×3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Demuestre que $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

- 47.** $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de 4×4 . Demuestre que

$$D_4 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

- **48. a)** Defina el determinante de Vandermonde de $n \times n$, D_n .
b) Demuestre que $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$, donde $\prod$ representa la palabra “producto”. Observe que el producto en el problema 47 se puede escribir $D_4 = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^3 (a_j - a_i)$.

- 49.** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

- a)** Escriba el producto AB .
b) Calcule $\det A$, $\det B$ y $\det AB$.
c) Demuestre que $\det AB = (\det A)(\det B)$.

Matriz nilpotente

- 50.** La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes al encontrar la k más pequeña tal que $A^k = 0$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 51.** Demuestre que si A es nilpotente, entonces $\det A = 0$.

[†] A.T. Vandermonde (1735-1796) fue un matemático francés.

52. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para $\det A$ si A es idempotente?
53. Sea P una matriz permutación. Demuestre que $\det P = \pm 1$. [**Sugerencia:** Por la definición en la página 151, $P = P_n P_{n+1} \dots P_2 P_1$, donde cada P_i es una matriz permutación elemental. Utilice la propiedad (3.2.4) para demostrar que $\det P_i = -1$ y después calcule $\det P$ usando el teorema 3.2.1.]
54. Sea P una matriz permutación. Demuestre que $P^\top$ también es una matriz permutación y que $\det P = \det P^\top$. [**Sugerencia:** Si P_i es una matriz permutación elemental, demuestre que $P_i^\top = P_i$.]



EJERCICIOS CON MATLAB 3.2

1. **a)** Sea $A = \text{round}(10 * (2 * \text{rand}(n) - 1))$ para $n = 2$. Encuentre $\det(A)$. Ahora encuentre $\det(2 * A)$. Repita para $n = 3$ y $n = 4$.
b) (*Papel y lápiz*) Concluya una fórmula para $\det(2A)$ en términos de n y $\det(A)$. Concluya una fórmula para $\det(kA)$ para k general.
c) Use MATLAB para probar su fórmula para $\det(3A)$.
d) (*Papel y lápiz*) Pruebe la fórmula utilizando las propiedades aprendidas en esta sección.
2. Para las siguientes matrices, primero encuentre $\det(A)$. Después reduzca A a la forma triangular superior U , utilizando operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + cR_i$, o intercambiando R_i y R_j . Encuentre $\det(U)$ y verifique que $\det(A) = (-1)^k \det(U)$, donde k es el número de intercambios de renglones realizado en el proceso de reducción.

$$\mathbf{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- c)** Para esta matriz, antes de cada operación con renglones, intercambie los renglones de manera que el elemento en la posición pivote sea el de mayor valor absoluto de los elementos posibles a usar como ese pivote:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- d)** Elija una matriz aleatoria A de $n \times n$ y redúzcala a la forma triangular superior encontrando la descomposición LU de A mediante el comando $[L, U, P] = \text{l u}(A)$. Use P para determinar el número de intercambios de renglones realizados y verifique que $\det(A) = (-1)^k \det(U)$, donde k es el número de intercambios de renglones. Describa el papel de $\det(P)$. Repita para otras dos matrices A .

3.3 Determinantes e inversas

En esta sección se analiza la forma en que se pueden calcular las inversas de las matrices haciendo uso de los determinantes. Más aún, se completa la tarea iniciada en el capítulo 2, de probar el importante teorema de resumen (vea los teoremas 2.4.7 en la página 114 y 2.6.4 en la página 138), que muestra la equivalencia de varias propiedades de las matrices. Se comienza con un resultado sencillo.

Teorema 3.3.1

Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (3.3.1)$$



Demostración

Suponga que A es invertible. Por el teorema del resumen (punto de vista 4) de la sección 2.7, página 153, si A es invertible es equivalente a decir que existe una descomposición LUP de A tal que $\det A = \pm \det U$ (teorema 3.2.3, página 194) con U es triangular superior e invertible, lo que implica que U tiene n pivotes, por lo que $\det U \neq 0$; por lo tanto, $\det A \neq 0$. Del teorema 3.2.1, página 192,

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} \quad (3.3.2)$$

lo que implica que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Antes de utilizar determinantes para calcular las inversas es necesario definir la *adjunta* de una matriz $A = (a_{ij})$. Sea $B = (A_{ij})$ la matriz de cofactores de A (recuerde que un cofactor, definido en la página 179, es un número). Entonces

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

Definición 3.3.1

La adjunta

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B , dada por (3.3.3), la matriz de sus cofactores. Entonces, la **adjunta** de A , escrito $\text{adj } A$, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir,

$$\text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$



Observación

En algunos libros se usa el término **adjugada** de A en lugar de **adjunta**, ya que adjunta tiene un segundo significado en matemáticas. En este libro se usará la palabra adjunta.

EJEMPLO 3.3.1 Cálculo de la adjunta de una matriz de 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule $\text{adj } A$.

▲▲▲ Solución Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$, $A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$,

$A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y $A_{33} = 2$. Así, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

y $\text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3.3.2 Cálculo de la adjunta de una matriz de 4×4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\text{adj } A$.

▲▲▲ Solución Esto es más laborioso ya que se tienen que calcular dieciséis determinantes de 3×3 . Por ejemplo, se tiene

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Al comparar estos cálculos se encuentra que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3.3.3 La adjunta de una matriz de 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces $\text{adj } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.



Advertencia

Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

Teorema 3.3.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \quad (3.3.5)$$



Demostración

Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } \text{adj } A) \\ &= (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} \quad (3.3.7)$$

Ahora, si $i = j$, la suma en (3.3.7) es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de $\det A$ sobre el renglón i de A . Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 3.2.6 en la página 203, la suma en (3.3.7) es igual a cero. Por lo tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema.

Ahora se puede establecer el resultado principal.

Teorema 3.3.3

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A \quad (3.3.8)$$

**Demostración**

La primera parte de este teorema es el teorema 3.5.2. Si $\det A \neq 0$, entonces se demuestra que $\left(\frac{1}{\det A}\right)(\text{adj } A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A) \left(\frac{1}{\det A} \text{adj } A \right) = \frac{1}{\det A} [A(\text{adj } A)] \stackrel{\text{teorema 3.3.2}}{=} \frac{1}{\det A} (\det A) I = I$$

Pero por el teorema 2.4.8, de la página 115, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$\left(\frac{1}{\det A} \right) \text{adj } A = A^{-1}$$

**Nota**

Observe que el teorema 2.4.5, en la página 107, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

EJEMPLO 3.3.4 Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1} .

 **Solución** Como $\det A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 3.3.1,

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así
$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

EJEMPLO 3.3.5 Cálculo de la inversa de una matriz de 4×4 usando el determinante y la adjunta

Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1} .

▲▲▲ **Solución** Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, se calcula $\det A = -1 \neq 0$ y por lo tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 3.3.2 se tiene

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así} \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota 1. Como ya se habrá observado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que utilizando $\text{adj } A$; aun para el caso de 4×4 es necesario calcular 17 determinantes (16 para la adjunta de A más $\det A$). Sin embargo, el teorema 3.3.3 es de suma importancia ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de $\det A$ (si se puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no existe.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Así, la mejor forma de proceder será considerando muchas veces el cálculo de los determinantes. Esto es particularmente cierto en algunas aplicaciones de ingeniería, como la teoría de control.

En la sección 2.6 se presentó el teorema de resumen (teoremas 1.1.1, 2.4.7, 2.6.4 y 2.7.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

T Teorema 3.3.4 Teorema de resumen (punto de vista 5)

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas lo son).

- i) A es invertible.
- ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.
- iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n .
- v) A es el producto de matrices elementales.
- vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- vii) $\det A \neq 0$.

En el teorema 2.4.7 se demostró la equivalencia de los incisos i), ii), iii), iv) y vi). En el teorema 2.6.3 se demostró la equivalencia de los incisos i) y v). El teorema 3.3.1 (o teorema 3.5.2) demuestra la equivalencia de i) y vii).

R Resumen 3.3

- La matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. (p. 212)
- $\det AB = \det A \det B$. (p. 192)
- Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (\text{p. 210})$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. La **adjunta** o **adjugada** de A , denotada por $\text{adj } A$, es la matriz de $n \times n$ cuya componente ij es A_{ji} , el cofactor ji de A . (p. 210)
- Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y (p. 212)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

• Teorema de resumen

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes: (p. 215)

- i) A es invertible.
- ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.
- iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n .
- v) A es el producto de matrices elementales.
- vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- vii) $\det A \neq 0$.

A AUTOEVALUACIÓN 3.3

I) El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es -149 . La componente 2, 3 de A^{-1} está dada por

a) $-\frac{1}{49} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix},$

b) $\frac{1}{49} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix},$

c) $-\frac{1}{49} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix},$

d) $\frac{1}{49} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix},$

II) El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es 468. La componente 3, 1 de A^{-1} es

a) $-\frac{26}{468}$

b) $\frac{26}{468}$

c) $\frac{46}{468}$

d) $\frac{46}{468}$



Respuestas a la autoevaluación

I) d)

II) a)



Problemas 3.3

De los problemas 1 al 16 utilice los métodos de esta sección para determinar si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

17. Utilice determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A^T es invertible.

18. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

19. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

20. ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?
21. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?
22. Suponga que la matriz A de $n \times n$ es no invertible. Demuestre que $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.
23. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.
24. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.
25. Sea t un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} -\frac{15}{e^{3t}} & 0 \\ \frac{25}{e^{4t}} - \frac{25}{e^{3t}} & -\frac{15}{e^{4t}} \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.



EJERCICIOS CON MATLAB 3.3

1. Genere una matriz aleatoria de $n \times m$ con $A = 2 * \text{rand}(n, m) - 1$ para algunos valores de n y m tales que $m > n$. Encuentre el determinante de $A^T A$. ¿Cuál es su conclusión acerca de $A^T A$? Pruebe su conclusión para otras tres matrices A . ¿Es válida su conclusión si $m < n$?
2. La siguiente secuencia de instrucciones de MATLAB calcula la matriz adjunta de una matriz aleatoria A de orden n

```
% Orden de la matriz de interes
n=4;
% Define matriz de interes
A = rand(n);
% Inicializa matriz que al final sera la matriz adjunta de A
C = zeros(size(A));
% Ciclo para obtener la matriz de cofactores
for i=1:n
    vec_renglon=1:n;
    vec_renglon(i)=[]; % excluir el renglon i
    for j=1:n
        vec_columna=1:n;
        vec_columna(j)=[]; % excluir la columna j
        C(i,j)=det(A(vec_renglon,vec_columna))*(-1)^(i+j);
    end
end
% Matriz Adjunta, es la transpuesta de la matriz de
% cofactores
C=C';
```

Escriba estas instrucciones en el archivo tipo `m` `adjunta.m`

- a) Modifique el orden de la matriz A dado en la segunda línea a 50. En la pantalla de comando escriba la siguiente secuencia de instrucciones

```
tic;adjunta;toc
tic;adjunta;t_adjunta=toc
```

En la variable $t_adjunta$ se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar el programa `adjunta.m`

- b) Calcule la adjunta como

```
tic;D = det(A)*inv(A);toc
tic; D = det(A)*inv(A);t_det_inv=toc.
```

En la variable t_det_inv se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar los comandos que producen la matriz adjunta de A .

- c) Compare $\text{adj}(A)$, calculada en el inciso a), con D , calculada en el inciso b). ¿Por qué esperaría eso? [**Sugerencia:** Encuentre la máxima variación entre los elementos de C y D , los comandos `abs`, `max` le pueden ser útiles.]
- d) Compare los tiempos de ejecución. ¿Qué descubrió al comparar estos tiempos?
3. Se ha demostrado que A no es invertible si $\det(A) = 0$. Una suposición natural es que si A es cercana a ser no invertible, entonces $\det(A)$ estará cerca de 0.

Considere la siguiente matriz C . Verifique que C es no invertible. Dé $A = C; A(3,3) = C(3,3) + 1.e-10$. Verifique que A es invertible y observe que A es cercana a la matriz no invertible C . Encuentre $\det(A)$. ¿Qué puede concluir sobre la “suposición natural” que se mencionó?

$$C = 20 * \begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 9 & 10 & 8 \\ 1 & 9 & -17 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA PROYECTO

4. a) Introduzca una matriz A triangular superior de 5×5 con elementos enteros de manera que el determinante de A sea 1. Elija valores de c (entero), i y j y realice varias operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ de manera que la matriz esté completa, es decir, que tenga el menor número de ceros posible. Llame A a la nueva matriz.
- b) Verifique que $\det(A)$ es todavía igual a 1. ¿Por qué es esto de esperarse? Encuentre $\text{inv}(A)$ y verifique que tiene elementos enteros. ¿Por qué es esto de esperarse?
- c) Consulte el problema 9 de MATLAB 2.4 sobre encriptar y decodificar los mensajes. Este problema le pide que encripte un mensaje para su profesor haciendo uso de la matriz A creada anteriormente.
- i) Cree un mensaje para su profesor. Utilizando números en lugar de letras, tal y como se describió en el problema 9 de MATLAB 2.4, escriba el mensaje en forma matricial para que pueda multiplicarlo por la derecha por A para codificar el mensaje (puede ser que necesite colocar espacios adicionales al final del mensaje).
- ii) Utilice A para encriptar el mensaje.
- iii) Entregue el mensaje encriptado a su profesor (como una cadena de números) y la matriz A .

3.4 Regla de Cramer

En la presente sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.4.2)$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (3.4.2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar dicha solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1} .

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_i = \det A_1, D_2 = \det A_2, \dots, D_n = \det A_n$.

Teorema 3.4.1 Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_i = \frac{D_i}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D} \quad (3.4.3)$$



Demostración

La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

Ahora bien, $(\text{adj } A)\mathbf{b}$ es un vector de dimensión n cuya componente j es

$$(A_{1j} A_{2j} \dots A_{nj}), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \quad (3.4.5)$$

Considere la matriz

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

↑
columna j



Nota histórica

La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizá el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se utiliza muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy determinante en su tiempo.

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j , se obtiene

$$D_j = b_1 (\text{cofactor de } b_1) + b_2 (\text{cofactor de } b_2) + \cdots + b_n (\text{cofactor de } b_n) \quad (3.4.7)$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i , por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es $\mathbf{b}$, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij , M_{ij} , de A . Entonces

$$\text{cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

De manera que (3.4.7) se convierte en

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \quad (3.4.8)$$

Por esta razón se trata de lo mismo que el lado derecho de (3.4.5). Por lo tanto, la componente i de $(\text{adj } A)\mathbf{b}$ es D_i y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{D} (\text{adj } A) \mathbf{b} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa.

EJEMPLO 3.4.1 Solución de un sistema de 3×3 utilizando la regla de Cramer

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

▲▲▲ Solución El presente ejemplo ya se resolvió en el ejemplo 1.2.1 de la página 8 haciendo uso de la reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 2.4.6, página 109) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

de manera que el sistema (3.4.9) tiene una solución única. Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \quad \text{y} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18. \text{ Por lo tanto, } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{12}{6} = -2 \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3.$$

EJEMPLO 3.4.2 Solución de un sistema de 4×4 usando la regla de Cramer

Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

tiene una solución única y encuéntrela utilizando la regla de Cramer.

 **Solución** En el ejemplo 3.2.14 de la página 201 se vio que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene una solución única. Para encontrarla se calcula $D_1 = -464$; $D_2 = 280$; $D_3 = -56$; $D_4 = 112$. Así, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-464}{160}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{280}{160}$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-56}{160}$ y $x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{112}{160}$. Estas soluciones se pueden verificar por sustitución directa en el sistema 3.4.10.

Resumen 3.4

• Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

(p. 219)

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por el vector columna $\mathbf{b}$.

**AUTOEVALUACIÓN 3.4**

I) Considere el sistema

$$2x + 3y + 4z = 7$$

$$3x + 8y - z = 2$$

$$-5x - 12y + 6z = 11$$

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -12 & 6 \end{vmatrix}, \text{ entonces } y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$a) \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -1 \\ 11 & -12 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ -5 & -12 & 11 \end{vmatrix}$$

$$c) \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 6 \end{vmatrix}$$

$$d) \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

**Respuesta a la autoevaluación**

I) c)

**Problemas 3.4**

De los problemas 1 al 9 resuelva el sistema dado usando la regla de Cramer.

1. $7x_1 - 8x_2 = 3$

$9x_1 + 9x_2 = -8$

2. $3x_1 - x_2 = 0$

$4x_1 + 2x_2 = 5$

3. $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$

$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$

4. $-5x_1 + 8x_2 + 10x_3 = -8$

$x_1 - 7x_2 = -2$

$10x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 9$

5. $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

6. $2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1$

$4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$

$-2x_1 + 2x_2 = 0$

7. $6x_1 - 10x_2 + 4x_3 = -2$

$10x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3$

$3x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -7$

8. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

$2x_1 - x_3 - x_4 = 4$

$3x_3 + 6x_4 = 3$

$x_1 - x_4 = 5$

9. $x_1 - x_4 = 7$

$2x_2 + x_3 = 2$

$4x_1 + x_2 = -3$

$3x_3 - 5x_4 = 2$

*10. Considere el triángulo en la figura 3.2

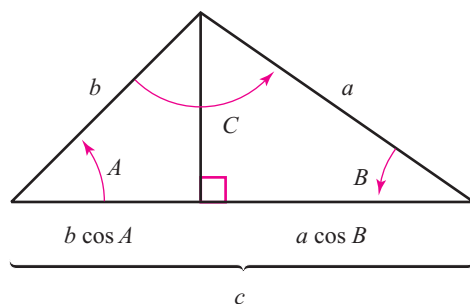


Figura 3.2

a) Demuestre, utilizando la trigonometría elemental, que

$$\begin{aligned} c \cos A + a \cos C &= b \\ b \cos A + a \cos B &= c \\ c \cos B + b \cos C &= a \end{aligned}$$

b) Si se piensa que el sistema del inciso a) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la regla de Cramer para despejar $\cos C$.

d) Utilice el inciso c) para probar la **ley de cosenos**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.



EJERCICIOS CON MATLAB 3.4

1. Las siguientes instrucciones resuelven el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ utilizando la regla de Cramer

```
% Orden del sistema a resolver
n=50;
% Generar matriz A y vector b;
A=rand(n);
b=rand(n,1);
% Inicializacion del vector de resultados
x=zeros(n,1);
% Calculo del determinante de A
detA=det(A);
% Ciclo para encontrar vector x utilizando
% regla de Cramer
for i=1:n
    C=A;
    C(:,i)=b;
    x(i)=det(C)/detA;
end
```

Guarde las instrucciones en un archivo tipo *m* con nombre `cramer.m`

a) Ejecute las siguientes instrucciones desde la línea de comando de MATLAB

```
tic;cramer;toc
tic;cramer;t_cramer=toc
```

En la variable `t_cramer` se guarda el tiempo de ejecución de este programa.

b) Resuelva el sistema usando $\mathbf{z}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$. Dé los siguientes comandos

```
tic;z=A\b;toc
tic;z=A\b;t_lu=toc
```

En la variable `t_1u` se guarda el tiempo de ejecución.

- c) Compare `x` y `z` calculando `x-z` y despliegue el resultado utilizando `format short e`. Compare los tiempos de ejecución. ¿Cuáles fueron sus hallazgos con estas comparaciones?
- d) Repita para una matriz aleatoria de 70×70 . ¿Qué otras afirmaciones puede hacer sobre los tiempos de ejecución?

3.5 Demostración de tres teoremas importantes y algo de historia

Antes se citaron tres teoremas que resultan de fundamental importancia en la teoría de matrices determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se analizaron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes acerca del álgebra lineal.



Teorema 3.5.1 Teorema básico

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (3.5.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 3.1.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. De acuerdo con la observación de la página 199 se necesita, únicamente, probar el teorema para los renglones [ecuación (3.5.1)].



Demostración

Se probará la igualdad (3.5.1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2×2 , primero se expande por cofactores el primer renglón: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De este modo, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier renglón de una matriz de 2×2 , y esto prueba la igualdad (3.5.1) en el caso 2×2 .

Ahora se supone que la igualdad (3.5.1) se cumple para todas las matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores los renglones 1 e i , y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

$$a_{1k}A_{1k} = (-1)^{1+k}a_{1k}|M_{1k}| \quad (3.5.3)$$

Observe que éste es el único lugar en la expansión de $|A|$ en el cual aparece el término a_{1k} ya que otro término general sería $a_{1m}A_{1m} = (-1)^{1+m}a_{1m}|M_{1m}|$, con $k \neq m$ y M_{1m} se obtiene eliminando el primer renglón y la m -ésima columna de A (y a_{1k} está en el primer renglón de A). Como M_{1k} es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, por la hipótesis de inducción se puede calcular $|M_{1k}|$ expandiendo en el renglón i de A [que es el renglón $(i-1)$ de M_{1k}]. Un término general de esta expansión es

$$a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \quad (3.5.4)$$

Por las razones descritas, éste es el único término en la expansión de $|M_{1k}|$ en el i -ésimo renglón de A que contiene el término a_{il} . Sustituyendo (3.5.4) en la ecuación (3.5.3) se encuentra que

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \quad (3.5.5)$$

es la única ocurrencia del término $a_{1k}a_{il}$ en la expansión por cofactores de $\det A$ en el primer renglón.

Ahora, si se expande por cofactores en el renglón i de A (donde $i \neq 1$), el término general es

$$(-1)^{i+l}a_{il}|M_{il}| \quad (3.5.6)$$

y el término general en la expansión de $|M_{il}|$ en el primer renglón de M_{il} es

$$a_{1k}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \quad (3.5.7)$$

Si se inserta (3.5.7) en el término (3.5.6) se encuentra que la única ocurrencia del término $a_{il}a_{1k}$ en la expansión del renglón i de $\det A$ es

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \quad (3.5.8)$$

Si se puede demostrar que las expansiones (3.5.5) y (3.5.8) son la misma, entonces (3.5.1) quedará demostrada, ya que el término en (3.5.5) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del primer renglón, el término en (3.5.8) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del i -ésimo renglón, y k, i y l , son arbitrarios. Lo que demostrará que las sumas de términos en las expansiones en los renglones 1 e i son iguales.

Ahora, sea $M_{1i,kl}$ la matriz de $(n-2) \times (n-2)$ obtenida al eliminar los renglones 1 e i y las columnas k y l de A (esto se llama **menor de segundo orden** de A). Primero se supone que $k < l$. Después

$$M_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.5.9)$$

$$M_{il} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.5.10)$$

De (3.5.9) y (3.5.10) se aprecia que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)} |M_{1i,kl}| \quad (3.5.11)$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k} |M_{1i,kl}| \quad (3.5.12)$$

Entonces (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+(l-1)} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \quad (3.5.13)$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \quad (3.5.14)$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1} = (-1)^{i+k+l+1}$, de modo que los lados derechos de las ecuaciones (3.5.13) y (3.5.14) son iguales. Así, las expresiones (3.5.5) y (3.5.8) son iguales y (3.5.1) queda demostrado en el caso $k < l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k > l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l} |M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)} |M_{1i,kl}|$$

de manera que (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+l} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k-1} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (3.5.1).

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B , $\det AB = \det A \det B$. La prueba es más compleja e incluye varios pasos. Se usarán diversos hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 2.6.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.



Lema 3.5.1

Sea E una matriz elemental:

- i) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_i \leftrightarrow R_j$, entonces $\det E = -1$. (3.5.15)
- ii) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ entonces $\det E = 1$. (3.5.16)
- iii) Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \rightarrow cR_i$, entonces $\det E = c$. (3.5.17)



Demostración

- i) $\det I = 1$. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I . Por la propiedad 3.2.4 de la página 198, $\det E = (-1) \det I = -1$.
- ii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j . Entonces por la propiedad 3.2.7 de la página 200, $\det E = \det I = 1$.

- iii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c . Así, por la propiedad 3.2.2 en la página 196, $\det E = c \det I = c$.

Lema 3.5.2

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \quad (3.5.18)$$

La prueba de este lema se deduce del lema 3.5.1 y los resultados presentados en la sección 3.2 que relacionan las operaciones elementales con renglones en los determinantes. Los pasos de la prueba se indican en los problemas 1 al 3 de la sección que nos ocupa.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

Teorema 3.5.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.



Demostración

Del teorema 2.6.5 en la página 139, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_m$ y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1 E_2 \cdots E_m T \quad (3.5.19)$$

Usando el lema 3.5.2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det A &= \det E_1 \det (E_2 E_3 \cdots E_m T) \\ &= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_m T) \\ &\quad \vdots \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_m T) \end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \quad (3.5.20)$$

Por el lema 3.5.1, $\det E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Se concluye que $\det A \neq 0$ si y sólo si $\det T \neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Al usar (3.5.19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible $E_m^{-1} \cdots E_1^{-1} A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 3.1.2 en la página 183, $\det T \neq 0$. Por lo tanto, $\det A \neq 0$.

Si $\det A \neq 0$ entonces (3.5.20), $\det T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 3.1.2). Entonces el lado derecho de (3.5.20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración.

Al fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.