

MATRICES

Este tema fue desarrollado en base al libro Grossmann, es simplemente un compendio de las partes más importantes.

¿Para qué sirven las matrices?

Para ordenar datos relacionados entre sí y que dependen de varios parámetros; además son de gran importancia a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué es una matriz?

Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

Se designan con letras mayúsculas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

componente o elemento a_{ij}

Renglón i

Columna j

Tamaño de la matriz $m \times n$

La **componente o elemento** ij de A , se denota por a_{ij} , es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A . Otra forma de referirnos a una matriz es $A = (a_{ij})$

Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**. Si todos los elementos de la matriz son iguales a cero se denomina **matriz cero o nula** de $m \times n$

Se dice que una matriz de $m \times n$ tiene **tamaño** $m \times n$ (se lee m por n)

Se presentan cinco matrices de diferentes tamaños

- i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 (cuadrada).
- ii) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2 .
- iii) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3 .
- iv) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

Los vectores son matrices de un renglón o de una columna.

Cada vector es un tipo especial de matriz. Así por ejemplo, el vector renglón $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una matriz de $1 \times n$, mientras que el vector columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ es una matriz de } m \times 1$$

1 x 4

3 x 1

$$[1 \quad 0 \quad 2 \quad 5]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tiene 3 renglones por tres columnas, tamaño 3x3 (es cuadrada), la localización de las componentes es por ejemplo:

$a_{12} = 2$ componente que se encuentra en la fila 1, columna 2

$a_{23} = -3$ componente que se encuentra en la fila 2, columna 3

¿Cuándo dos matrices son iguales?

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si

- 1) son del mismo tamaño y
- 2) las componentes correspondientes son iguales.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 8 \\ 1 & 3+2 \\ 9-3 & 3 \end{bmatrix}$$

¶ 1. Encuentra los valores de a y b para que las matrices sean iguales $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$

OPERACIONES

¿Cómo se suman dos matrices?

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B .

Advertencia

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ o las}$$

$$\text{matrices (vectores)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Es}$$

decir, son incompatibles bajo la suma.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{NO SE PUEDEN SUMAR SON DE DIFERENTES TAMAÑOS!!!}$$

2 x 3 3 x 2

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA , está dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α . Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces } 2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ entonces } \frac{1}{2} B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

¶ 2. Realiza cuando sea posible las siguientes operaciones

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad D = [2] \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, F = [5 \quad 3]; \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) $2A - 3B$, c) $2D - E$ d) $E + 2G - F$ e) $-2E + F$ f) $-A - 2C$ g) $-E - G$

b) Indica el tamaño de las matrices resultantes

**Teorema****IMPORTANTE!!!!**

Sean A , B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i) $A + 0 = A$

ii) $0A = 0$

iii) $A + B = B + A$

(ley conmutativa para la suma de matrices)

iv) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ley asociativa para la suma de matrices)

v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)

vi) $1A = A$

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

¶ 3. Dadas las siguientes matrices comprueba que se cumple la propiedad conmutativa y la asociativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el neutro en la multiplicación de matrices?

PRODUCTO DE MATRICES

El resultado de multiplicar dos matrices da como resultado nuevamente una matriz. A pesar de ser una multiplicación, no comparte la mayoría de las propiedades de la multiplicación con números reales que conocemos. Por ejemplo, no cualesquiera dos matrices pueden ser multiplicadas entre sí (existen ciertas restricciones de tamaño para poder multiplicar matrices). Además, la matriz que resulta de la multiplicación, no tiene en general el mismo tamaño que ninguna de ellas. Lo más importante es que el producto de matrices **NO ES CONMUTATIVO**.

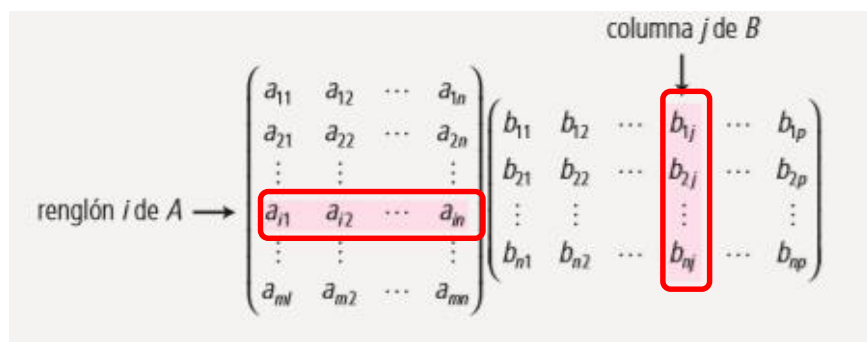
¿Cuál es la condición para multiplicar una matriz A con una matriz B?

La cantidad de columnas de A debe ser igual a la cantidad de filas de B, es decir

$$A \in R^{m \times n} \text{ y } B \in R^{n \times p} \rightarrow AB \in R^{m \times p}$$

TAMAÑO DE LA MATRIZ A.B

$$\begin{matrix} \overbrace{m \times n} & \overbrace{n \times p} \\ \text{DEBEN SER IGUALES} \end{matrix}$$



¿Cómo se multiplican dos matrices?

Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B . Si esto se extiende, se obtiene

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

Ejemplo 1: Calcular el producto $A \cdot B$ entre las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2$

La multiplicación se puede llevar a cabo ya que A tiene 3 columnas y B tiene 3 filas . Por lo tanto al hacer el producto entre A y B la matriz $A \cdot B$ será una matriz cuadrada (C)

$$A \cdot B = C \quad \rightarrow C \in R^{2 \times 2} \rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

¿Qué entrada es c_{11} ? Es el renglón 1 de A y la columna 1 de B

$$c_{11} = [1 \quad 3 \quad -2] \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5 - 3 - 4 = -12 \quad \text{sería como multiplicar escalarmente dos}$$

vectores!!!

$$c_{12} = [1 \quad 3 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + 21 - 2 = 21$$

$$c_{21} = [4 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -20 + 0 + 10 = -10$$

$$c_{22} = [4 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 + 0 + 5 = 13$$

c_{12} es el renglón 1 de A y la columna 2 de B

c_{21} es el renglón 2 de A y la columna 1 de B

c_{22} es el renglón 2 de A y la columna 2 de B

Hemos calculado entonces que $A \cdot B = \begin{bmatrix} -12 & 21 \\ -10 & 13 \end{bmatrix}$

Recordar: no siempre se puede hacer el producto entre dos matrices (la cantidad de columnas de la primera matriz debe coincidir con la cantidad de filas de la segunda)

El producto **no es conmutativo** (sale de lo anterior) no es cierto que $A \cdot B = B \cdot A$, podría no ser posible de calcular al no cumplirse los requisitos de la cantidad de columnas de B con las de A. Por ejemplo si $A \in R^{2 \times 4}$ y $B \in R^{4 \times 3}$, A B se puede llevar a cabo, pero el producto de B A no. Pero este no es el único motivo por el que no es conmutativo el producto: puede suceder que tanto A B como B A sean válidas, pero que de todas formas $A \cdot B \neq B \cdot A$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ entonces $A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ -4 & 29 \end{bmatrix}$ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -14 & 18 \end{bmatrix}$

Y4. Con las matrices dadas en el Ejemplo 1, realiza $B \cdot A$ y comprueba que no se cumple la conmutatividad

Las siguientes propiedades si se cumplen:

• **Ley asociativa de la multiplicación de matrices**

Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C$$

y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$.

• **Leyes distributivas de la multiplicación de matrices**

Si todos los productos están definidos, entonces

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (A + B)C = AC + BC$$

TIPOS DE MATRICES

Transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A , que se escribe A^T , es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A . De manera breve, se puede escribir $A^T = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de A^T y la columna j de A como el renglón j de A^T .

Ejemplo

Obtención de las transpuestas de tres matrices

Encuentre las transpuestas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 de C mientras que 4 es la componente en el renglón 3 y la columna 2 de C^T . Esto significa que el elemento 2,3 de C es el elemento 3,2 de C^T .

Teorema: si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz $m \times p$. Entonces

- i. $(A^T)^T = A$
- ii. $(AB)^T = B^T A^T$
- iii. Si A y B son dos de $n \times m$, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T$



Matriz identidad

Nota

La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33} , etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal** son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Ejemplo

Dos matrices identidad

LA MATRIZ IDENTIDAD SE DESIGNA CON LA LETRA I

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$AI_n = I_n A = A$$

Es decir, I_n conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

Matriz diagonal

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama diagonal si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior /inferior

Una matriz cuadrada se llama triangular superior(inferior) si todos sus elementos abajo(arriba) de la diagonal principal son cero

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ matriz triangular sup} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ matriz triangular inferior}$$

Matriz simétrica

La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se denomina **simétrica** si $A^T = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A .

Las siguientes cuatro matrices son simétricas:

$$I \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

TRABAJO PRACTICO MATRICES

Operaciones con matrices

1. Dadas las siguientes matrices indica:

- Tamaño (cuadrada, rectangular)
- Tipo de matriz (simétrica, antisimétrica, identidad, triangular superior, triangular inferior, nula)
- Menciona entre qué matrices se pueden realizar las operaciones de suma y multiplicación, considerando la posibilidad de trabajar con la transpuesta

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad B = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1] \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = [2] \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Si $K = C \cdot H$ indica el elemento k_{32} , k_{13} , k_{22}

e) ¿Es $B \cdot (A \cdot E) = (B \cdot A) \cdot E$? ¿Qué propiedad se cumple?

f) Si a una matriz 2x3 le multiplico por el escalar 0, ¿Qué obtengo como resultado?

g) ¿Qué pasa si realizas $F \cdot I$? ¿qué vendría a ser la matriz identidad entonces?

h) Observando los resultados de los ejercicios anteriores

¿Es siempre posible el producto entre matrices? Justifique.

¿La multiplicación entre matrices es conmutativa? Justifique.

¿La multiplicación de matrices es asociativa?

¿Para sumar dos matrices es necesario que sean cuadradas?

2. Calcula el producto $A \cdot B$ entre las siguientes matrices y demuestra que la conmutatividad entre matrices no se cumple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Si $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, encuentra las condiciones para a,b,c y d tal que $A \cdot B = B \cdot A$ (es decir que matrices conmutan con la matriz A).

4. a) Verifica la ley asociativa de la multiplicación de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) A pesar de que los productos de las matrices dadas en el ejercicio anterior están definidas ¿por qué no se cumple en este caso la distributividad respecto de la suma en la multiplicación de matrices?

c) Verifica que a pesar de que los productos están definidos $A \cdot C \neq C \cdot A$

d) Si $A \cdot B = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ indica el elemento en la renglón 2 col 3, renglón 1 col 2

5. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ halla una matriz C que verifique la ecuación $2C - 4 \cdot A = B$

6. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿son ciertas las propiedades siguientes, que son ciertas para las operaciones con números reales?:

a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$

b) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

7. Determina los valores de a y b de la matriz Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$ para que $A^2 = A$

8. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$?

9. Determina las matrices A y B sabiendo que :

$$a. \begin{cases} A + 3B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad b. \begin{cases} 2A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

10. Si A es una matriz tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, determina B^2

11. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcula $C_1 = A^{-1} \cdot B$ y $C_2 = B^{-1} \cdot A$

b) Analiza si existe alguna relación entre C_1 y C_2

Aplicaciones de las matrices

1. Una firma de automóviles dispone de dos plantas de fabricación una en Argentina y otra en Brasil, en los que fabrica dos coches M1 y M2 de tres colores rojo, blanco y gris. Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices (A para argentina y B para Brasil)

$$A = \begin{bmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuántas unidades fabrica Argentina y cuántas Brasil del M1 blanco?

b) ¿Qué modelo es el más fabricado en ambos países?

c) ¿Qué modelo es el que menos se fabrica?

d) Determina la representación matricial de la producción total por día de ambos países

e) Si se eleva la producción en Argentina un 20% y se disminuye la de Brasil en un 10% ¿Qué matriz representa la nueva producción total?

f) ¿cuál es el significado de $A - B$ o de $B - A$?

2. Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea E la matriz de ventas de Enero

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

- Interpreta la matriz E, explicando cómo han sido las ventas
 - Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; y el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero.
 - Halla las ventas conjuntas de mes de enero y febrero
 - Halla la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero
 - ¿cuál sería la matriz de ventas del mes de vacaciones
 - Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo. ¿Cuál habrá sido el total de ventas en el primer cuatrimestre?
3. Un negocio tiene para la venta televisores LCD Sony Bravia de varios tamaños. Tiene 5 de 40 pulgadas; 8 de 37 pulgadas; 4 de 32 pulgadas y 10 de 26 pulgadas. Los de 40 pulgadas se venden a \$50000, los de 32 pulgadas 41895 y los de 26" a \$14500. Expresa el total de la venta de los televisores como un producto de dos matrices e indica el ingreso total.
4. Una fábrica de coches produce tres modelos: suv, utilitario y sedan. Cada coche necesita las cantidades de cada uno de los siguientes conceptos, relacionados a la matriz C, en unidades convenientemente elegidas: materiales, personal, impuestos y transporte.

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P = [20 \quad 40 \quad 60] \quad V = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matriz P indica la producción semanal y la matriz V el valor de la unidad de cada concepto.

Obtén las matrices que representan:

- las unidades semanales necesarias de cada concepto.
- los costes de un coche de cada modelo
- el coste total de producción semanal