

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 1

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$
PLANOS
RECTAS
POSICIÓN Y MAGNITUD

CUADERNO 1

Ing. Luisa Leonor Rivero

Año 2024

Contenido

VECTORES GEOMÉTRICOS	5
CONCEPTO DE VECTOR GEOMÉTRICO	5
MÓDULO DE UN VECTOR:.....	5
CLASIFICACIÓN DE VECTORES los vectores podemos clasificarlos en:	5
VECTORES EN $\mathbb{R}^2$	6
COMPONENTES DE UN VECTOR:.....	7
MODULO DE UN VECTOR:.....	7
VECTOR UNITARIO O VERSOR:	8
VERSORES EN EL PLANO	8
VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA.....	8
ANGULOS DIRECTORES.....	9
OPERACIONES.....	9
MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES.....	10
CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES	11
PRODUCTO ESCALAR O PUNTO	11
PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES ...	11
ANGULO ENTRE DOS VECTORES	12
VECTORES ORTOGONALES:	12
PROYECCIÓN ESCALAR.....	12
PROYECCIÓN VECTORIAL	13
TRABAJO PRÁCTICO: VECTORES EN $\mathbb{R}^2$	15
MODULO DE UN VECTOR.....	17
COMPONENTES DE UN VECTOR.....	17
VERSORES EN EL ESPACIO	19
ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES	19
ÁNGULOS DIRECTORES Y COSENO DIRECTORES DE UN VECTOR.....	19
COSENO DIRECTORES DE UN VECTOR CONOCIENDO SUS COMPONENTES – RELACIÓN FUNDAMENTAL.....	¡Error! Marcador no definido.
COMPONENTES DEL VECTOR SUMA O DIFERENCIA.....	21
COMPONENTES DEL VECTOR $\lambda \mathbf{a}$	21
VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA.....	22
DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR	23
PRODUCTO ESCALAR.....	23
PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES ...	23

VECTORES ORTOGONALES.....	24
PROYECCION ESCALAR o COMPONENTE ESCALAR.....	24
PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES	26
PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES DADOS POR SUS COMPONENTES:.....	26
PRODUCTO MIXTO	27
INTERPRETACION GEOMETRICA	28
VECTORES COPLANARES	28
TRABAJO PRÁCTICO VECTORES EN R^3	29
LA ECUACION DEL PLANO	32
ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO	32
ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO	32
ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO	34
ECUACIÓN DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS.....	35
CASOS PARTICULARES	36
PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN DE COORDENADAS	36
PLANO PARALELO AL EJE Z Si π // al eje z entonces	36
PLANO PARALELO AL EJE Y Si π // al eje y entonces	36
PLANO PARALELO AL EJE X Si π // al eje x entonces	36
ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS	37
ECUACION NORMAL DEL PLANO.....	39
ANGULO ENTRE DOS PLANOS.....	39
CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.....	40
TRABAJO PRÁCTICO: EL PLANO	41
LA ECUACIÓN DE LA RECTA EN R^3	46
ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA.....	46
ECUACIONES PAREMETRICAS DE LA RECTA	46
ECUACIONES SIMETRICAS	47
COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA.....	48
ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS.....	52
POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA EN R^3	¡Error! Marcador no definido.
RECTAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS	49
RECTAS PARALELAS A LOS PLANOS COORDENADOS	49
CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS	52
ECUACIÓN DE LA RECTA EN R^2	54
ECUACIONES PARAMÉTRICAS.....	54

ECUACIONES CARTESIANAS SIMÉTRICAS.....	¡Error! Marcador no definido.
Ecuación De Los Ejes Cartesianos	55
TRABAJO PRÁCTICO: LA RECTA	56
POSICIÓN Y MAGNITUD	58
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS	58
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS sean las rectas	59
INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO	60
INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.....	62
RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS	62
DISTANCIA DE UN PLANO AL ORIGEN DE COORDENADAS	64
DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO	64
DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS	66
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.....	68
DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS	69
TRABAJO PRÁCTICO - POSICIÓN Y MAGNITUD	¡Error! Marcador no definido.

VECTORES GEOMÉTRICOS

Definimos vectores como un conjunto ordenado de números que pueden escribirse en forma horizontal o vertical. Aquí trabajaremos con una aplicación de los vectores en el campo geométrico, que son usados además en la física en conceptos como los de fuerza, velocidad, trabajo, etc.

CONCEPTO DE VECTOR GEOMÉTRICO

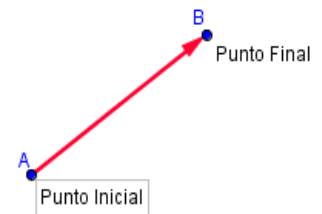
Definición: Llamamos vector o segmento orientado, a todo segmento en el que se ha establecido un orden $\overrightarrow{AB}$ para sus extremos, se suele decir también que un vector es un par ordenado de números reales. Al primer punto extremo lo denominamos punto inicial, y al segundo punto extremo, punto final del mismo. La recta que contiene al vector determina la *dirección* del mismo. Un vector queda determinado si se conoce su módulo, es decir la distancia entre los puntos extremos y su dirección, por lo tanto *un vector es un ente matemático que se caracteriza por tener **módulo** y **dirección***

Notación: Los vectores se indicarán con una letra minúscula con una flecha arriba o también, con el nombre del punto inicial y final (Fig. 1)

Ejemplo: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

MÓDULO DE UN VECTOR: Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. Es siempre un número positivo. Dado el vector $\vec{v}$, el módulo se representa por cualquiera de las siguientes maneras: $|\overrightarrow{AB}|$; $|\vec{v}|$

Fig. 1



CLASIFICACIÓN DE VECTORES los vectores podemos clasificarlos en:

- ✓ **Vectores libres** no están aplicados en ningún punto en particular
- ✓ **Vectores fijos** están aplicados en un punto particular

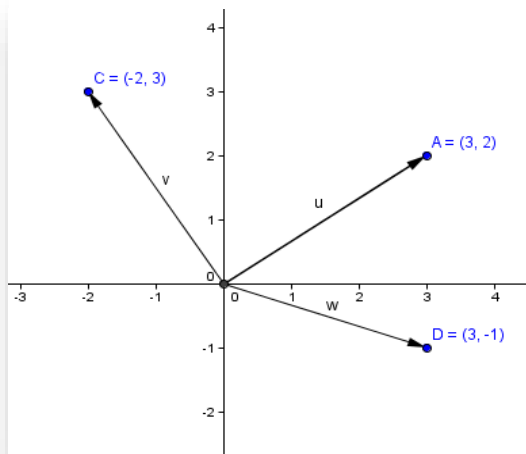
Según su dirección y módulo:

- ✓ módulo igual a cero **vectores nulos**
- ✓ módulo igual a uno **vectores unitarios**
- ✓ el mismo módulo y sentido contrario **vectores opuestos**
- ✓ el mismo módulo y la misma dirección **vectores equivalentes**
- ✓ direcciones perpendiculares **vectores perpendiculares**
- ✓ direcciones paralelas **vectores paralelos**
- ✓ están contenidos en un mismo plano **vectores coplanares**
- ✓ están contenidos en una misma recta **vectores colineales**

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ El conjunto de todos los puntos en el plano corresponde al conjunto de todos los vectores cuyos puntos iniciales se encuentran en el origen de coordenadas O. Para el punto A, corresponde el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, para el punto C, el vector $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, estos vectores se conocen con el nombre de **vectores estándar**.

Observación: en esta situación las coordenadas del punto coinciden con las componentes del vector

Fig. 2



$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (3,2)$ 3 y 2 son las componentes del vector y las coordenadas del punto A Fig. 2

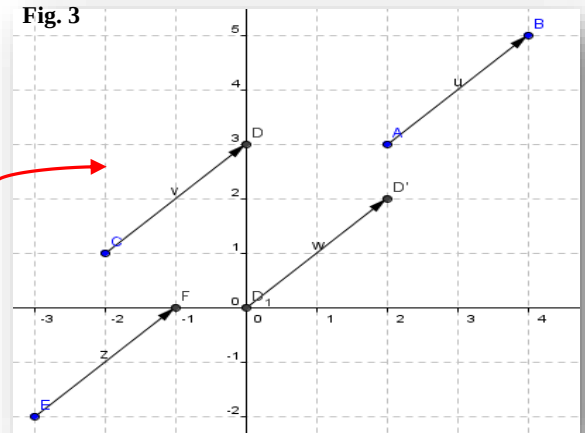
Se dice que el vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ son vectores posición o vectores en posición estándar

Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma magnitud y dirección se dice que son **equivalentes**. (fig.3), sin importar donde se localice el origen. Lo dicho anteriormente corresponde a **vectores libres**.

Representante

Cuando consideramos un vector, designándolo por los puntos origen y extremo, en realidad estamos considerando un representante del mismo. Hay infinitos otros puntos que definen representantes del mismo vector, ya que debemos tener en cuenta que consideramos vectores libres. Fig 3

Fig. 3



Si $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Como los vectores se encuentran en posición estándar coinciden con las coordenadas de los puntos

$$\overrightarrow{OB} = B \quad y \quad \overrightarrow{OA} = A$$

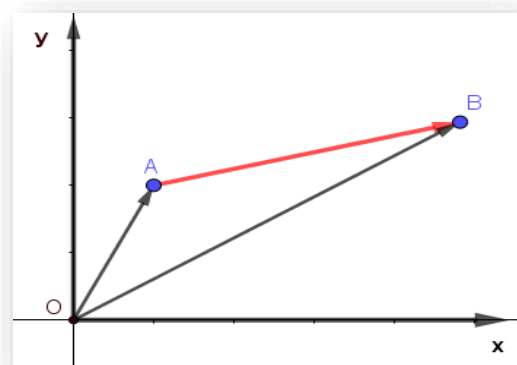


Fig. 4

Podemos decir entonces que el vector

$$\overrightarrow{AB} = \text{coordenadas del punto final (B)} - \text{coordenadas del punto inicial (A)}$$

En la fig. 3 tenemos los puntos A (2,3) y B (4,5) por lo tanto el vector $\overrightarrow{AB}$ que registra el desplazamiento desde A (punto Inicial) hasta B (punto final), es precisamente la diferencia de las respectivas coordenadas de los puntos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,5) - (2,3) = (4 - 2; 5 - 3) = (2; 2)$$

De manera similar, $C(-2,1)$ y $D(0,3) \rightarrow \overrightarrow{CD} = [0 - (-2); 3 - 1] = (2; 2)$ y entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes.

COMPONENTES DE UN VECTOR

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, las componentes del vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ definido por dichos puntos, serán las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados Fig. 5

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (v_x, v_y) \text{ donde}$$

$$v_x = x_2 - x_1 \text{ Proyección sobre el eje x}$$

$$v_y = y_2 - y_1 \text{ Proyección sobre el eje y}$$

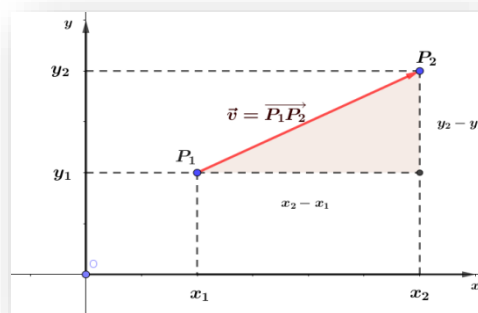


Fig. 5

Observación: no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ el módulo o longitud de $\vec{v}$, será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

*Dados $P_1(2,1)$ y $P_2(-3,5)$, encontrar un vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ y hallar su módulo $|\vec{v}|$

Solución:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1) = (-3,5) - (2,1) = (-3 - 2, 5 - 1) = (-5,4)$$

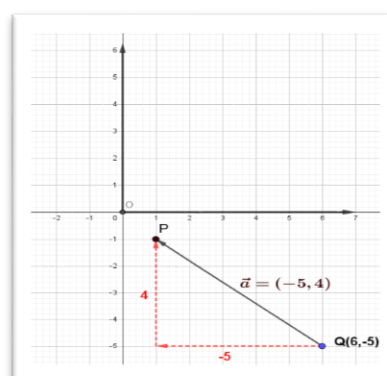
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

*Sea el vector $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$, donde Q (6, -5) es el origen del vector $\vec{a} = (-5, 4)$ ¿Cuál es el extremo de ese representante? Ayuda $P(x_2, y_2)$

Solución:

$$a_x = x_2 - x_1 \quad -5 = x_2 - 6 \rightarrow x_2 = 1$$

$$a_y = y_2 - y_1 \quad 4 = y_2 + 5 \rightarrow y_2 = -1$$



1. ¿El representante de $\vec{b}$ en el origen tiene por extremo al punto M (-5, 4) ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{b}$?
2. ¿Dado $\vec{a} = (3, -3)$
 - 2.1 Si P (-3, 2) es el origen del representante, hallar el otro extremo
 - 2.2 Hallar el origen del representante, cuyo extremo es Q (2, -5)
 - 2.3 Hallar componentes de $-\vec{a}$

VECTOR UNITARIO O VERSOR

Es un vector en la misma dirección de $\vec{v}$, pero de módulo uno y se obtiene dividiendo $\vec{v}$ por su módulo $|\vec{v}|$.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

*¿Es unitario el vector $\vec{v} = (1, -1)$?

**Halla un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$

Solución:

*NO, porque su módulo no es 1 $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

** $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ porque si sacamos el $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

VERSORES EN EL PLANO

Son los vectores $\vec{i} = (1, 0)$; $\vec{j} = (0, 1)$; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

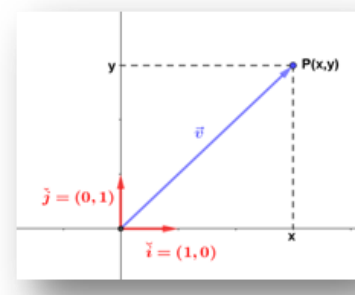
Todo vector de $\mathbb{R}^2$ es una **combinación lineal** de los versores $\vec{i}, \vec{j}$

Sea $\vec{v} = (x, y)$ se tiene entonces

$$\vec{v} = (x, 0) + (0, y)$$

$$\vec{v} = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado $\vec{v} \neq \vec{0}$ para hallar un vector unitario ($\vec{u}$) que tenga igual dirección que $\vec{v}$ basta hallar un escalar $\lambda > 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ y $|\lambda \vec{v}| = 1$

Como $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$, entonces $|\lambda \vec{v}| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{v}|}$ por lo tanto un vector unitario es el cociente entre el vector y su módulo:

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

Observaciones: si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{v}|}$ se obtiene $-\vec{v}$ (versor con dirección opuesta a la de $\vec{v}$)

*Dados $A(1,2)$ y $B(5,5)$ halla un vector de módulo 1, que tenga la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

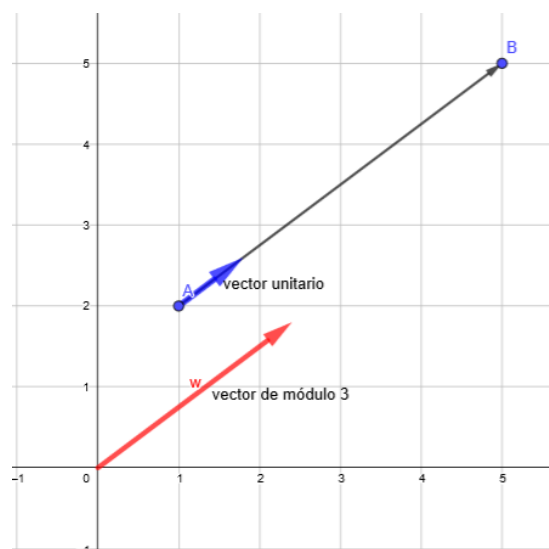
$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 5 - 2) = (4, 3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \tilde{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}(4, 3)$$

* Halla un vector de módulo 3 y en la misma dirección de $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{w} = 3 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 3 \cdot \tilde{u} = \frac{3}{5}(4, 3)$$

$$\text{Verificación } |\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$$



ANGULOS DIRECTORES

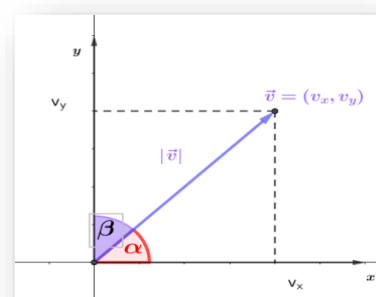
Dado un vector no nulo $\vec{v}$, se llaman ángulos directores de $\vec{v}$, a los ángulos α , β que forma $\vec{v}$ con los versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ respectivamente. Los ángulos directores son mayores que 0° y menores que 180°

Se llaman cosenos directores de $\vec{v}$, a los cosenos de sus ángulos directores:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

¿Cómo es $\vec{v}$ si $\alpha = 0^\circ$?, ¿Si $\alpha = \pi$?

¿Cómo es $\vec{v}$ si $\beta = 0^\circ$?, ¿Si $\beta = \pi$?



Observaciones: Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo. También se puede utilizar la función trigonométrica de la tangente

OPERACIONES

Suma o diferencia: se realiza componente a componente. Sea $\vec{u} = (u_1; u_2)$ y $\vec{v} = (v_1; v_2)$ entonces la suma o diferencia de $\vec{u} \pm \vec{v}$ es el vector

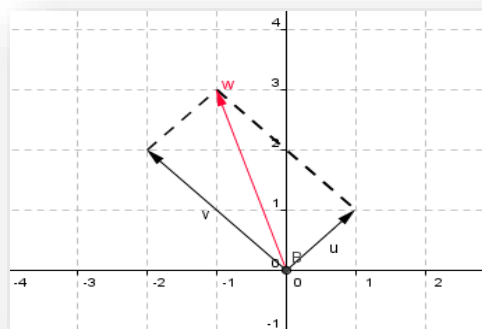
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1; u_2 \pm v_2)$$

Si $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-2,2)$

Entonces $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1, 3)$

Utilizando el método del paralelogramo.

Si la diagonal principal representa la suma, ¿qué representa la contradiagonal?



¶ Dados los vectores $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (4,-3)$ y $\vec{d} = (-2,1)$. Hallar escalares α y β tales que:
 $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

Observación: Debes plantear la igualdad en términos de las componentes y resolver el sistema de ecuaciones obtenido al igualar las respectivas componentes. Se dice que $\vec{d}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

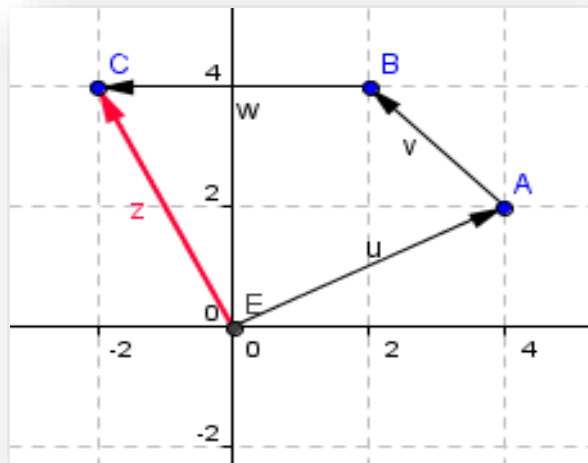
Sean $A(4,2)$; $B(2,4)$ y $C(-2,4)$.

Entonces $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \rightarrow$

$$\vec{OC} = (4,2) + (-2,2) + (-4,0) =$$

$$\vec{OC} = (-2,4)$$

EL VECTOR RESULTANTE VA DESDE EL ORIGEN DEL PRIMER VECTOR HASTA EL EXTREMO DEL ULTIMO VECTOR



MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

El escalamiento de un vector, se logra multiplicando cada componente del vector por un número $\lambda \in \mathbb{R}$ (se lee lambda perteneciente a los reales)

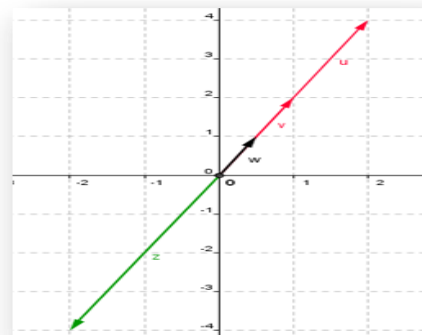
Dado $\vec{v} \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el producto de $\lambda\vec{v}$ tiene:

- la misma dirección de $\vec{v}$, si $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si $\lambda < 0$
- el vector nulo si $\lambda = 0$

Si $\vec{v} = (1,2)$ entonces si se multiplica a $\vec{v}$ por un escalar λ :

- si $0 < \lambda < 1$ $\vec{v}$ se comprime $\vec{w}$
- si $\lambda > 1$ se dilata $\vec{u}$
- si $\lambda < 0$ cambia de sentido $\vec{z}$

El módulo de $\lambda\vec{v}$ es el módulo de $\vec{v}$ multiplicado por el valor absoluto de λ



$$\text{Sea } \vec{v} = (v_1, v_2) \quad \lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2) \rightarrow |\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$$

¶ Si se aplican dos operaciones consecutivas al vector $(-1,3)$ en $\mathbb{R}^2$, primero se lo multiplica por un escalar fijo y luego se le suma un vector fijo, ¿es posible llegar al vector $\vec{w} = (2,3)$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES

Propiedad: dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si y sólo si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Dos vectores son paralelos cuando tienen igual dirección o direcciones opuestas (se dice también que son colineales porque están sobre la misma línea)

PRODUCTO ESCALAR O PUNTO

Las versiones vectoriales de longitud, distancia y ángulo pueden describirse a través del empleo de la noción del producto escalar de dos vectores

Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, se define producto escalar de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ al número real:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta^{**}$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

Observación: ** se obtiene aplicado la Ley de los cosenos Grossman Cap. IV pág. 248 7ma. Ed.

PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

Teniendo en cuenta que $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es $\frac{\pi}{2}$, reemplazando en ** podemos observar lo siguiente

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90^\circ \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

El producto escalar de un vector por sí mismo será:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0^\circ = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \cos 0^\circ = 1$$

Expresando $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en función de las componentes canónicas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + \cancel{a_1 \cdot b_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j})} + \cancel{a_2 \cdot b_1 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i})} + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Importante para realizar el producto en primer lugar $\vec{a}$ y $\vec{b}$ deben tener igual cantidad de componentes y en segundo lugar el producto escalar de dos vectores es un número no otro vector, por eso se denomina producto escalar

Dados $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4, -3)$ $\vec{c} = (0, -5)$ realizar el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (4, -3) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (1, 2) \cdot (0, -5) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) = -10$$

¿El producto escalar de tres vectores será un también un escalar?

ANGULO ENTRE DOS VECTORES

A partir del producto escalar se puede calcular el ángulo entre dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyos orígenes coinciden

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

*Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera $\theta = 0^\circ$

*Si tienen dirección opuesta, se considera $\theta = \pi = 180^\circ$

* En ambos casos ¿cómo serían los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

VECTORES ORTOGONALES Dos vectores no nulos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si el ángulo θ que forman es $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ y por lo tanto se cumple

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Demostración:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ya que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

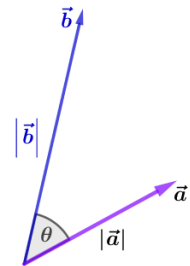
Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

*Decidir si los vectores $\vec{a} = (-1, 2)$ y $\vec{b} = (6, 3)$ son ortogonales.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 2) \cdot (6, 3) = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 0$ por lo tanto son ortogonales.

*Determinar el valor de x , para que los vectores $\vec{a} = (x, 5)$ y $\vec{b} = (3, -3)$ sean ortogonales

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, 5) \cdot (3, -3) = x \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow \vec{a} = (5, 5)$



PROYECCIÓN ESCALAR Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la proyección escalar o componente escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ se define como el producto del módulo de $\vec{b}$ por el coseno del ángulo θ que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = b' = |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Como

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

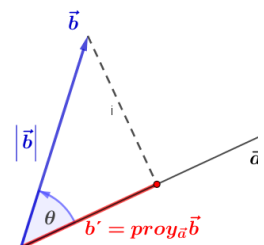
entonces la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ será

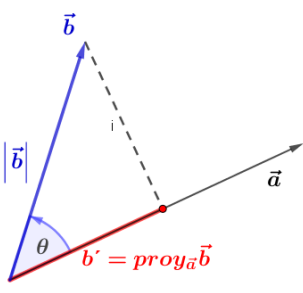
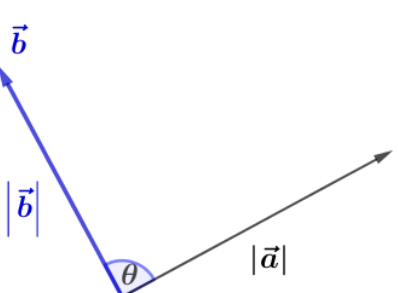
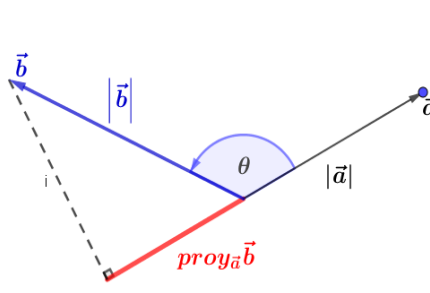
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Siendo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \check{a}$ (versor con la dirección de $\vec{a}$), implica que la proyección escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \check{a}$$

Se suele también decir $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$, o “la componente de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$ ”



Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$	Si $\theta = \frac{\pi}{2}$	Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
		
$proy_{\vec{a}} \vec{b} > 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$proy_{\vec{a}} \vec{b} = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$proy_{\vec{a}} \vec{b} < 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

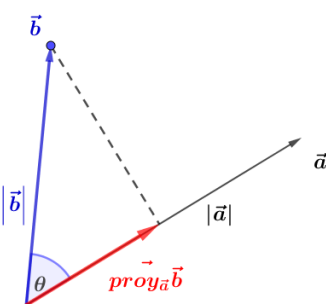
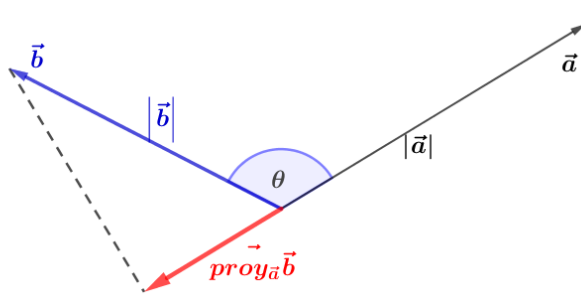
¶ Prueba que las proyecciones de $\vec{a} = (a_x, a_y)$ en las direcciones de $\vec{i}, \vec{j}$ son las componentes del vector $\vec{a}$

PROYECCIÓN VECTORIAL

La proyección vectorial del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$ es un vector que es múltiplo escalar del vector $\vec{a}$ y lo indicamos $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$

$$\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow \overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

- ✓ La $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$ está en la misma dirección que el vector $\vec{a}$ si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
- ✓ La $\overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}}$ está en dirección opuesta al vector $\vec{a}$ si $\theta > \frac{\pi}{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
	

Dados $\vec{u} = (3, -1)$ y $\vec{v} = (2, 2)$, calcula y grafica:

- La proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$
- La proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$
- Grafica ambas proyecciones
- La proyección escalar de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$
- La proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$
- Grafica ambas proyecciones
- Es indistinto $proy_{\vec{u}} \vec{v}$ que $proy_{\vec{v}} \vec{u}$

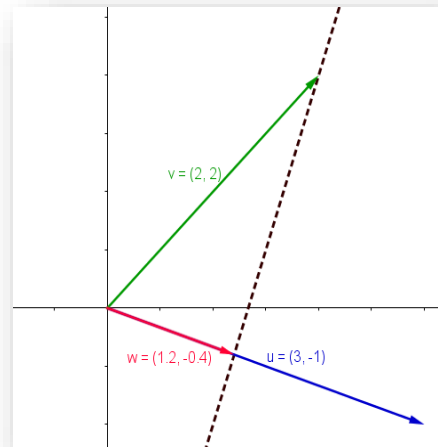
Solución:

$$a) \text{ } proy_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6-2}{\sqrt{10}}$$

$$proy_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$b) \vec{w} = \overrightarrow{proy_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{(\sqrt{3^2 + (-1)^2})^2} \cdot (3, -1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{proy_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{4}{10} (3, -1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$



¿Cuál es el vector $proy_{\vec{a}} \vec{b}$ cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares?

Dibuja un par de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de modo que la $proy_{\vec{a}} \vec{b}$ resulte:

- de igual dirección que $\vec{b}$
- de distinta dirección que $\vec{b}$

(Los temas tratados están ampliamente desarrollados en el libro Grossman 7ma Edición -Capítulo 4 Vectores en R^2 y R^3 , se recomienda su lectura y estudio)

TRABAJO PRÁCTICO: VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

- Dados los puntos $P(3,0)$; $Q(2,3)$; $R(-2,3)$; $S(3,-2)$; $T(0,-2)$ encuentra:
 - el vector en posición estándar $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OR}$; $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$; $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$. ¿Qué tienen en común el vector en posición estándar y las coordenadas de los puntos?
 - escribe estos vectores como una combinación lineal de los versores $\vec{i}, \vec{j}$
 - la magnitud o módulo de $|\vec{u}|, |\vec{v}|, |\vec{w}|, |\vec{s}|$
 - la dirección de cada uno de los vectores (o sea en que cuadrante se encuentran)
 - un vector en la misma dirección de cada uno de ellos, pero de módulo 1 (vector unitario)
 - grafica cada uno de estos y sus respectivos vectores unitarios
 - calcula y representa gráficamente $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$
 - ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la primera coordenada de cada vector?
 - ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la segunda coordenada de cada vector?
 - ¿qué efecto geométrico produce multiplicar a cada vector por -1 ?
- Dibuja los vectores hallados en el ítem 1.a con sus puntos iniciales situados en el punto $(-2,5)$, determina los puntos finales
- Si los vectores en el ejercicio 1 se trasladan de modo que sus extremos finales se ubiquen en el punto $(5,7)$; determina los puntos que correspondan a sus puntos iniciales
- Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ejercicio 1) dibuja los siguientes vectores:

$$\vec{j} = \vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{l} = \vec{u} - \vec{v} \quad \vec{p} = \vec{v} - 2\vec{u} \quad \vec{q} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$$
- Calcula el producto escalar e indica si son ortogonales o paralelos

$$\vec{u} \cdot \vec{t} \quad \vec{w} \cdot \vec{s} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (5 \vec{v}) \cdot \vec{s}$$
- Dados los siguientes puntos $A(1, -1)$, $B(4, 2)$; $C(0, -2)$, $D(2, -1)$. Calcula y comprueba que la resultante está en función del origen del primer vector y el extremo del último
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 - $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
 - $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$
 - $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})$
- Dados los puntos $A(4,2)$, $B(10,5)$, $C(2,6)$ y $D(x,9)$, se pide:
 - Calcula x para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean paralelos.
 - Calcula x para que $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DA}$ tengan el mismo módulo.
- Dados los vectores $\vec{u} = (x, 5)$ y $\vec{v} = (8,4)$, ¿Qué valor debe tomar x para que: a) sean paralelos. b) sean perpendiculares. c) verifiquen que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 42$
- Demuestra que no hay vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que el módulo de $\vec{a}$ sea igual a 1, el módulo de $|\vec{b}| = 2$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$
- Dados los puntos $A(2, 6)$; $B(4, 8)$; $C(3, 2)$ y $D(7, 1)$, se pide:
 - Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$

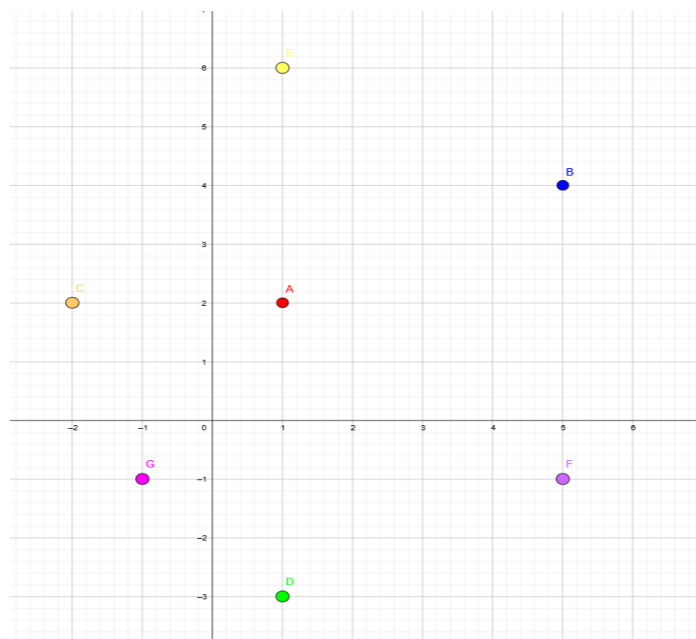
b) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

11. a) Si $\vec{u} = -\hat{i} + 5\hat{j}$ y $\vec{v} = k\hat{i} + \hat{j}$, el ángulo entre dichos vectores es $\pi/3$, determina k .
 b) Si $\vec{u} = 3\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{v} = \hat{i} + k\hat{j}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son perpendiculares, determina k
 c) Si $\vec{u} = k\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{v} = 2\hat{i} + k\hat{j}$, determina k , si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos

12. *Más de lo mismo, comprueba si aprendiste*

En la siguiente figura encuentra el vector y sus opuestos

- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GD}$
- Escríbelos en forma canónica
- Calcula el módulo de ellos
- Escribe un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GD}$ y $\overrightarrow{FG}$
- Ahora escribe un vector de módulo 2 con la dirección de los vectores del ítem d. Grafica
- Realiza los siguientes productos escalares: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GF}$ ¿Qué te da como resultado multiplicar dos vectores? ¿Y si multiplicaras escalarmente 3 vectores?
- Utilizando la definición de producto escalar halla los ángulos entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$
- Propón un vector paralelo a $\overrightarrow{AG}$, con origen en el punto B, ¿es único?
- Encuentra la proyección escalar y vectorial de por lo menos tres vectores sobre los ejes coordenados ¿a qué conclusión puedes llegar?
- Calcula las siguientes proyecciones escalares y vectoriales
 $Proy_{\overrightarrow{AF}}\overrightarrow{AB}$, $Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$, $Proy_{\overrightarrow{GD}}\overrightarrow{AG}$, $Proy_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AC}$



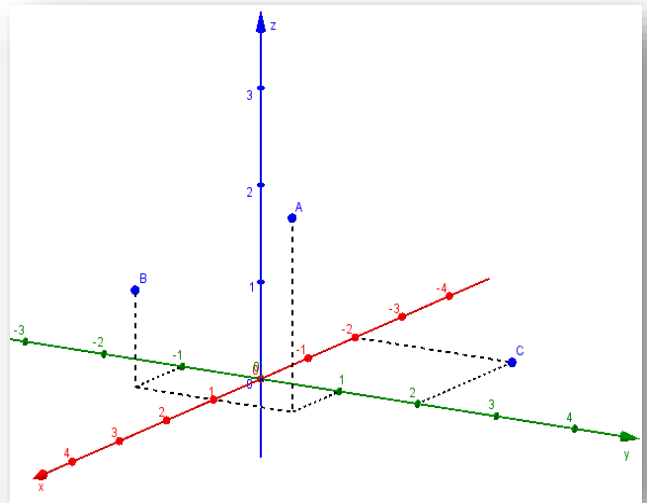
VECTORES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

Designamos con $\mathbb{R}^3$ a los vectores geométricos en el espacio y haremos a continuación un estudio analítico de los mismos.

Así como en el plano hemos visto que un punto puede ser representado conociendo un par ordenado (x, y) , en el espacio, un punto se representa mediante una terna ordenada (x, y, z) en relación a tres ejes perpendiculares entre sí.

Representa gráficamente los puntos

A $(1, 1, 2)$; B $(1, -1, 1)$; C $(-2, 2, 0)$

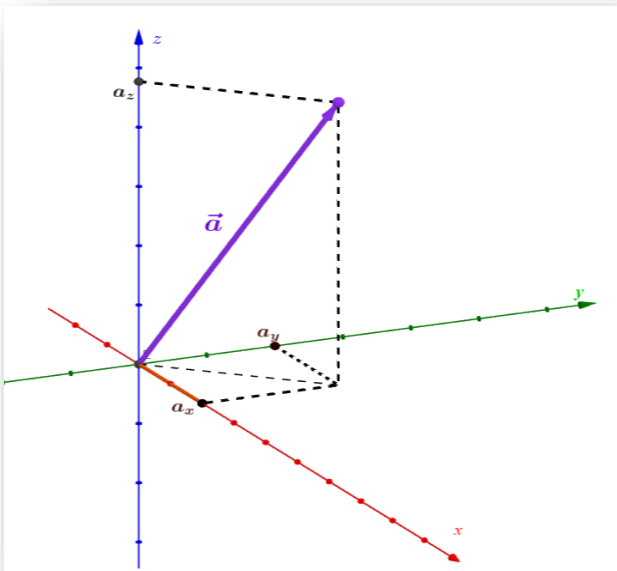


MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ el módulo o longitud de $\vec{a}$, será:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

es decir; el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector.



COMPONENTES DE UN VECTOR

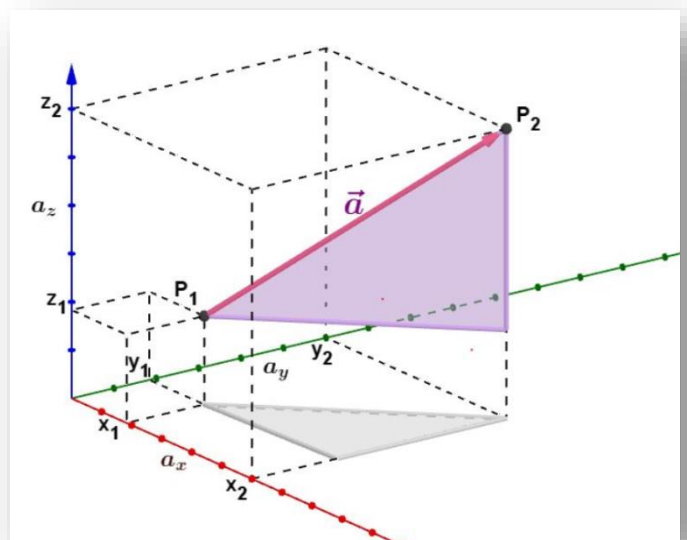
Dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ las componentes del vector $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ serán las proyecciones escalares del vector sobre los ejes coordenados

$$a_x = \text{Proy}_{OX} \overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

$$a_y = \text{Proy}_{OY} \overrightarrow{P_1P_2} = y_2 - y_1$$

$$a_z = \text{Proy}_{OZ} \overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$



Sea $\vec{a}$ un vector que tiene a $\overrightarrow{P_1P_2}$ como representante, siendo $P_1 (2, 1, 3)$ y $P_2 (4, 5, 5)$ tendremos que:

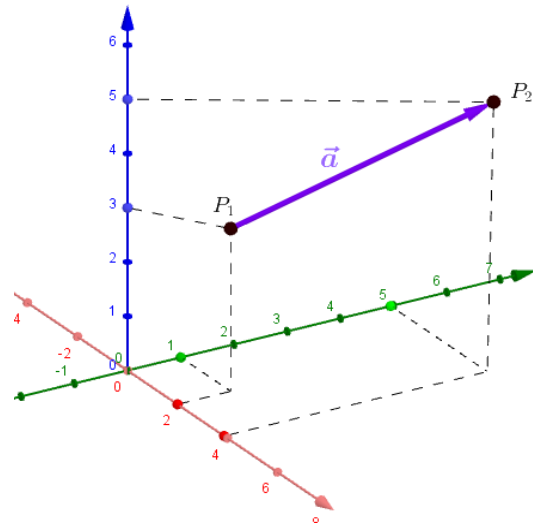
$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1)$$

$$(4 - 2; 5 - 1; 5 - 3)$$

$$\vec{a} = (2, 4, 2)$$

El módulo de $\vec{a}$ es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$



Si $Q (6, -5, 7)$ es el origen del vector $\vec{a} = \overrightarrow{QP} = (-5, 4, 3)$ ¿Cuál es el punto final de ese representante?

Solución:

$$\vec{a} = \overrightarrow{QP} \rightarrow \vec{a} = P - Q \text{ (Coordenadas del Punto Final - coordenadas del Punto Inicial)}$$

$$(-5, 4, 3) = (x_p, y_p, z_p) - (6, -5, 7) \rightarrow \text{Igualando las componentes homólogas}$$

$$-5 = x_p - 6 \quad \rightarrow \quad x_p = -5 + 6 = 1$$

$$4 = y_p + 5 \quad \rightarrow \quad y_p = 4 - 5 = -1$$

$$3 = z_p - 7 \quad \rightarrow \quad z_p = 3 + 7 = 10$$

Las coordenadas del punto final son $P(1, -1, 10)$

¶ Ejercitación 1

- El representante de $\vec{b}$ en el origen tiene por extremo al punto $M (-5, 4, 3)$ ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{b}$?
- Dado $\vec{a} = (3, -3, -7)$
 - Hallar el extremo o punto final del representante en $Q (-3, 2, 5)$
 - Hallar el origen del representante, cuyo extremo es $P (2, -5, 6)$
 - Hallar componentes de $-\vec{a}$

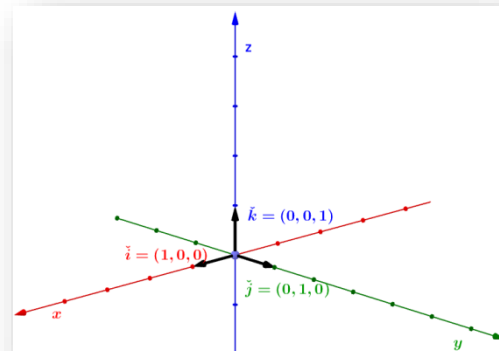
Observación: no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

VERSORES EN EL ESPACIO

Recordemos que un versor es un vector cuyo módulo es igual a 1. $|\vec{v}| = 1$. En el caso de tratarse de un vector unitario, lo indicamos con un arco en vez de una flecha ($\vec{v}$).

Los versores en $\mathbb{R}^3$ son los vectores:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$; $\vec{j} = (0, 1, 0)$; $\vec{k} = (0, 0, 1)$; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente



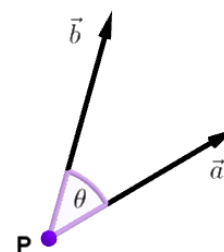
ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES

Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con representantes en un origen común P y no pertenecientes a una misma recta, el ángulo θ de medida positiva y menor que 180° , que forman, es por definición el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

*Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera $\theta = 0^\circ$

*Si tienen dirección opuesta, se considera $\theta = \pi = 180^\circ$



ÁNGULOS DIRECTORES Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Dado un vector no nulo $\vec{a}$, se llaman ángulos directores de $\vec{a}$, a los ángulos α, β, γ que forma $\vec{a}$ con los versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente.

Tomando el representante en el origen de coordenadas, se tiene:

$$0 \leq \alpha \leq \pi ; 0 \leq \beta \leq \pi ; 0 \leq \gamma \leq \pi$$

¿Cómo es $\vec{a}$ si $\alpha = 0$? , ¿Si $\alpha = \pi$?

¿Cómo es $\vec{a}$ si $\beta = 0$? , ¿Si $\beta = \pi$?

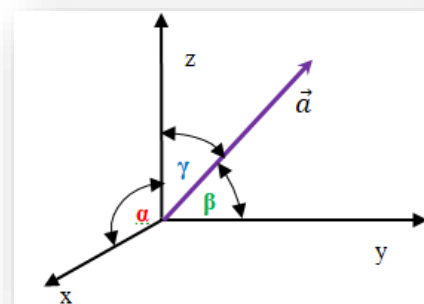
¿Cómo es $\vec{a}$ si $\gamma = 0$? , ¿Si $\gamma = \pi$?

Se llaman cosenos directores de $\vec{a}$, a los cosenos de sus ángulos directores.

Siendo $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y α, β, γ sus ángulos directores se tiene:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha ; a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta ; a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma ; \text{ de donde:}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} ; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} ; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$



$$\text{Luego: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

Esto significa que no cualquier terna de ángulos puede ser una terna de ángulos directores de un vector $\vec{a}$, ya que los tres ángulos directores quedan vinculados por medio de la ecuación (1) que es llamada relación fundamental.

*¿Pueden $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$ ser cosenos directores?

Solución: $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq 1$

Luego, NO pueden ser ángulos directores de ningún vector.

*Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; determinar γ

Solución: aplicando la relación fundamental y despejando γ

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = 60^\circ$$

Verificación: $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Observaciones:

*Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo.

*Si α, β, γ son ángulos directores de $\vec{a}$, $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ son ángulos directores de $-\vec{a}$

*Si $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, como $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ y

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$; $\cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$; se comprueba que las componentes de $-\vec{a}$ son: $(-a_x, -a_y, -a_z)$.

Podemos precisar entonces el concepto de igual dirección para dos vectores, diciendo que tienen los mismos ángulos (cosenos) directores.

¶ Ejercitación 2

1. Dado $\vec{a}$, tal que $|\vec{a}| = 2$ y sus ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{2\pi}{3}$; determinar sus componentes.

1.1. Halla el extremo de su representante en $A(-1, 3, 2)$

1.2. Halla el origen del representante, cuyo extremo es $B(7, -6, 1)$

1.3. Halla los ángulos directores y componentes de un vector de dirección opuesto a $\vec{a}$

2. Calcula los cosenos directores del vector $\vec{b} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$

3. ¿Puede un vector tener los siguientes ángulos directores?:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{3\pi}{4}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$

4. ¿Puede un vector formar con dos ejes coordenados los siguientes ángulos?:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$

b) $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$

c) En caso afirmativo, ¿cuál es el tercer ángulo?

5. Un vector $\vec{a}$ forma con los ejes x e y , respectivamente, ángulos $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Calcula sus componentes sabiendo que $|\vec{a}| = 2$.

6. Halla las coordenadas de un punto M , que es extremo de $\overrightarrow{OM}$, forma ángulos iguales con los tres ejes, y su módulo es 3.

7. Si $|\vec{a}| = 50$ y dos de sus componentes son $a_x = 3$, $a_y = 4$. ¿Cuál es la tercera componente?

8. Halla los cosenos directores de vectores paralelos a los planos coordenados y de vectores paralelos a los ejes coordenados.

COMPONENTES DEL VECTOR SUMA O DIFERENCIA

Dados $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$; el vector suma $\vec{a} \pm \vec{b}$, tiene por componentes

$$(a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

$$\text{*Si } \vec{a} = (1, -3, 2) \text{ y } \vec{b} = (3, -5, 4) \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, -3 - 5, 2 + 4) = (4, -8, 6)$$

$$\text{*Si } \vec{a} = (1, -3, 2) \text{ y } \vec{c} = (7, -5, 3) \rightarrow \vec{a} - \vec{c} = (1 - 7, -3 + 5, 2 - 3) = (-6, 2, -1)$$

COMPONENTES DEL VECTOR $\lambda \vec{a}$

Dado $\vec{a} \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{a}$ tiene:

- la misma dirección de $\vec{a}$, si $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si $\lambda < 0$
- el vector nulo si $\lambda = 0$

El módulo de $\lambda \vec{a}$ es el módulo de $\vec{a}$ multiplicado por el valor absoluto de λ .

$$\text{Sea } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} =$$

$$\lambda \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \lambda |\vec{a}|$$

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector $\vec{v}$ en la misma dirección de $\vec{a}$ pero de módulo 2

Solución: si $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son colineales, entonces $\vec{v}$ es múltiplo de $\vec{a}$ o decimos que $\vec{v}$ es el escalado de $\vec{a}$, se escribe $\vec{v} = \lambda \vec{a}$

$(v_1, v_2, v_3) = \lambda(-3, 2, 6)$ resolviendo componente a componente tendremos

$$\begin{cases} v_1 = -3\lambda \\ v_2 = 2\lambda \\ v_3 = 6\lambda \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

La segunda condición dice que

$$|\vec{v}| = 2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ sustituyendo } \textcircled{1} \text{ en } \textcircled{2}$$

$$2 = \sqrt{(-3\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (6\lambda)^2} =$$

$$2 = \sqrt{\lambda^2(9 + 4 + 36)}$$

$$2 = \lambda\sqrt{49} \rightarrow 2 = \lambda 7 \rightarrow \lambda = \frac{2}{7} \text{ sustituyendo el valor de } \lambda \text{ en } \textcircled{1} \quad \vec{v} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

Verificación: $|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2} = 2$

VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado $\vec{a} \neq \vec{0}$ para hallar un vector unitario ($\vec{a}$) que tengan igual dirección que $\vec{a}$, $\lambda > 0$, basta hallar un vector unitario tal que $\vec{a} = \lambda \vec{a}$ y $|\lambda \vec{a}| = 1$

Como $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, entonces $|\lambda \vec{a}| = 1 \leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$ por lo tanto:

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

Observaciones: si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{a}|}$ se obtiene $-\vec{a}$ (versor con dirección opuesta a la de $\vec{a}$)

Importante: las componentes de un versor (vector unitario) son sus cosenos directores.

- Encuentra un vector de módulo 1 en la misma dirección que el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$
- Comprueba que coincide con sus cosenos directores

Solución: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2 \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)$$

Verificación: $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

b. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \gamma = 0$

El ejercicio resuelto en la página anterior se puede resolver aplicando el concepto de vector unitario

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector $\vec{v}$ en la misma dirección de $\vec{a}$ pero de módulo 2

Solución: datos $\vec{a} = (-3, 2, 6)$ y $|\vec{v}| = 2$

Calculamos $\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ siendo $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7 \rightarrow \vec{a} = \left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$

$\vec{v}$ está en la misma dirección tanto de $\vec{a}$ como también de su versor $\vec{a}$, por lo podemos escribir

$$\vec{v} = \lambda \vec{a}$$

$$|\vec{v}| = \lambda |\vec{a}| \rightarrow \text{sustituyendo los datos } 2 = \lambda |1| \rightarrow \lambda = 2$$

Por lo tanto $\vec{v} = 2 \left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right) = 2\vec{a}$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR

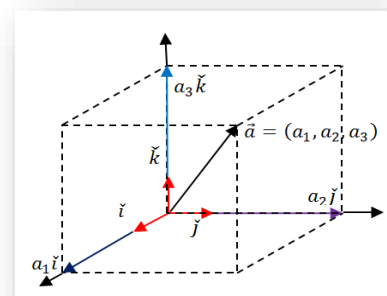
Todo vector del espacio, es una **Combinación Lineal** única de los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Sea $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ se tiene entonces:

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0) + (0, a_y, 0) + (0, 0, a_z)$$

$$\vec{a} = a_x(1, 0, 0) + a_y(0, 1, 0) + a_z(0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$



Dados $\vec{a} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, realiza:

*) $\vec{a} + \vec{b}$ (se obtiene sumando las respectivas componentes)

$$\vec{a} + \vec{b} = (-3 + 6)\hat{i} + (1 - 3)\hat{j} + (2 + 1)\hat{k} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

**) $2\vec{a} + 4\vec{b}$ (se aplica primero propiedad distributiva y luego se realiza la suma)

$$2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(-3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) + 4(6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$2\vec{a} + 4\vec{b} = (-6\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (24\hat{i} - 12\hat{j} + 4\hat{k}) = 18\hat{i} - 10\hat{j} + 8\hat{k}$$

PRODUCTO ESCALAR

Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, se define producto escalar de $\vec{a}$ con $\vec{b}$ a un número real (**escalar**)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

El producto escalar entre los vectores que forman la terna fundamental $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, teniendo en cuenta que son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es $\frac{\pi}{2}$, resulta:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

Expresando $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ en función de las componentes.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + a_y b_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) + a_z b_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Dados $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ $\vec{b} = (6, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, 4, 1)$, calcula el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = -6 - 4 + 15 = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 8 + 3 = 11$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ ¿será un escalar?

ESCALAR

VECTORES ORTOGONALES

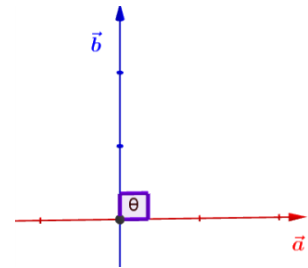
Dos vectores no nulos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si el ángulo θ que forman es $\theta = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Demostración:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ya que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\text{Si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$



¶ Ejercitación 4

1. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|^2$; $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

2. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$ determinar α tal que $\vec{a} + \alpha \vec{b}$ y $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ sean ortogonales.

3. Halla el vector $\vec{x}$, colineal con $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ que satisface la condición $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$

4. Halla el vector $\vec{x}$ que es ortogonal con $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Satisfaciendo además la condición $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$, siendo $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

PROYECCION ESCALAR – PROYECCIÓN VECTORIAL

Este tema está desarrollado en vectores en R^2 pág. 12-13

Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la proyección escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ se define como el producto de modulo de $\vec{b}$ por el coseno del ángulo θ que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (1)$$

Como $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, reemplazando (1) la componente escalar de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$ será:

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Siendo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \check{a}$ el versor con la dirección de $\vec{a}$

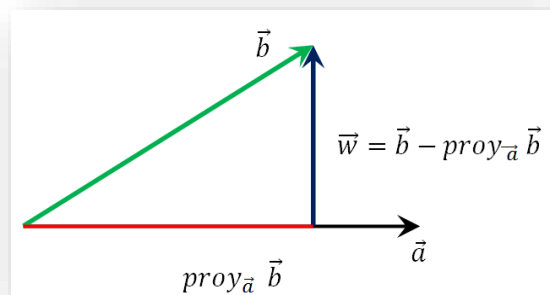
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \check{a}$$

Si $\vec{b} = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} + \vec{w}$ entonces $\vec{w} = \vec{b} - \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$

Se suele también decir que $proy_{\vec{a}} \vec{b}$, es “la componente de $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$ ”

Observación

- Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow proy_{\vec{a}} \vec{b} > 0$
- Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow proy_{\vec{a}} \vec{b} = 0$
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow proy_{\vec{a}} \vec{b} < 0$



Las componentes de un vector $\vec{a}$, son las proyecciones de $\vec{a}$ en las dirección de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x = proy_{\vec{i}} \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = a_y = proy_{\vec{j}} \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = a_z = proy_{\vec{k}} \vec{a}$$

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$ y $\vec{b} = (6, -1, 1)$. Calcula la componente de $\vec{a}$ sobre $\vec{i}$ (proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{i}$) y la proyección vectorial

Solución:

$$proy_{\vec{i}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{i}|} = \vec{a} \cdot \vec{i} = (3, -1, 1) \cdot (1, 0, 0) = 3$$

- Calcula la proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{i}$ (proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{i}$)

$$\overrightarrow{proy_{\vec{i}} \vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{i}|} \cdot \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} = 3 \cdot \vec{i} = 3 \cdot (1, 0, 0) = (3, 0, 0)$$

- Calcula la proyección escalar o componente escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$$proy_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6, -1, 1) \cdot (3, -1, 1)}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} = \frac{18 - 1 + 1}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}}$$

- Calcula la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{proy_{\vec{a}} \vec{b}} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6, -1, 1) \cdot (3, -1, 1)}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} \cdot \frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}} \cdot \frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{16}{11} (3, -1, 1) \end{aligned}$$

¶ Ejercitación 5

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$; $\vec{b} = (6, -1, 1)$ y $\vec{c} = (2, -1, 6)$;

Calcula las proyecciones escalares, vectoriales y normales

1) $proy_{\vec{b}} \vec{a}$

2) $proy_{\vec{b}} \vec{c}$

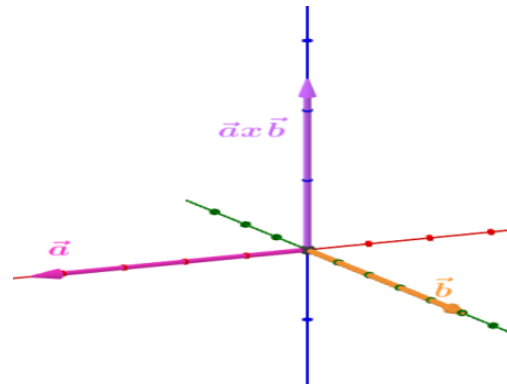
3) $proy_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c})$

4) $proy_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c} + \vec{b})$

PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

Llamamos producto vectorial o producto cruz a la operación que se asocia por las condiciones.

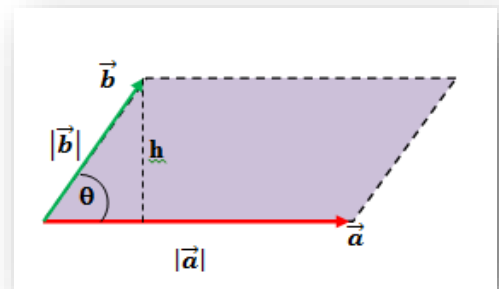
- 1) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ambos no nulos y no colineales, $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal con $\vec{a}$ y con $\vec{b}$, de forma tal que la terna $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ es una terna directa (Igualmente orientada que la terna $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$)



- 2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, siendo θ el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

* La primera condición indica que el producto vectorial es otro vector que define la dirección perpendicular al plano determinado por los vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$

* La segunda condición indica que el módulo del producto vectorial: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ representa el área del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados concurrentes.



* $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$ tienen direcciones opuestas pero el mismo módulo

* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales ($\vec{a} = \lambda \vec{b}$). En consecuencia:

* $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \forall \vec{a}$

* $\vec{0} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \forall \vec{b}$ si uno de los vectores es el vector nulo, el producto vectorial resulta el vector nulo.

* $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

* $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Prop. dist. del producto vectorial con respecto a la suma)

* $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Por lo tanto aplicando las propiedades los productos vectoriales entre los pares de vectores que forman la terna fundamental $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, arrojan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} & \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k} & \hat{i} \times \hat{i} &= 0 \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i} & \hat{j} \times \hat{j} &= 0 \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} & \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j} & \hat{k} \times \hat{k} &= 0 \end{aligned}$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES DADOS POR SUS COMPONENTES:

Si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ y $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$, entonces:

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \rightarrow$ aplicando propiedad distributiva

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x \cancel{\hat{i}\hat{i}} + a_x b_y \hat{i}\hat{x}\hat{j} + a_x b_z \hat{i}\hat{x}\hat{k} + a_y b_x \hat{j}\hat{x}\hat{i} + a_y b_y \cancel{\hat{j}\hat{j}} + a_y b_z \hat{j}\hat{x}\hat{k} + a_z b_x \hat{k}\hat{x}\hat{i} + a_z b_y \hat{k}\hat{x}\hat{j} + a_z b_z \cancel{\hat{k}\hat{k}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \hat{k} + a_x b_z (-\hat{j}) + a_y b_x (-\hat{k}) + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} + a_z b_y (-\hat{i})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Las componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$ se recuerdan fácilmente desarrollando:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Que solo tiene significado mnemotécnico, ya que no se disponen determinantes de matrices cuyo elemento son vectores.

Halla el área del paralelogramo que tiene por lados adyacentes a los vectores

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \text{ y } \vec{b} = (-1, 2, 6)$$

Solución: para calcular el área debemos calcular el módulo del producto vectorial de los vectores

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-6 - 6) - \hat{j}(12 + 3) + \hat{k}(4 - 1) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (-12, -15, 3)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2 + (3)^2} = \sqrt{378}$$

Dados $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$ y $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$; ¿es lo mismo $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$? ¿cómo son estos vectores?

Halla vectores unitarios ortogonales a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Solución:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 - 0) - \hat{j}(1 - 0) + \hat{k}(3 - 2) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 1)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 1) - \hat{j}(0 - 1) + \hat{k}(2 - 3) \Rightarrow \vec{b} \times \vec{a} = (-1, 1, -1)$$

Estos vectores son iguales y opuestos

Un vector unitario ortogonal simultáneamente a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sería $\vec{u} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$

PRODUCTO MIXTO

Combina el producto vectorial con el producto escalar. Es el número real que se obtiene de la siguiente operación: $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Se suele indicar por: $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (verificarlo)}$$

*intercambiando dos filas entre si cambiando el signo del determinante. Por lo tanto:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c})$$

*intercambiando dos veces se conserva el signo: $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a})$

*como el producto escalar es conmutativo, se tiene además. $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

INTERPRETACION GEOMETRICA

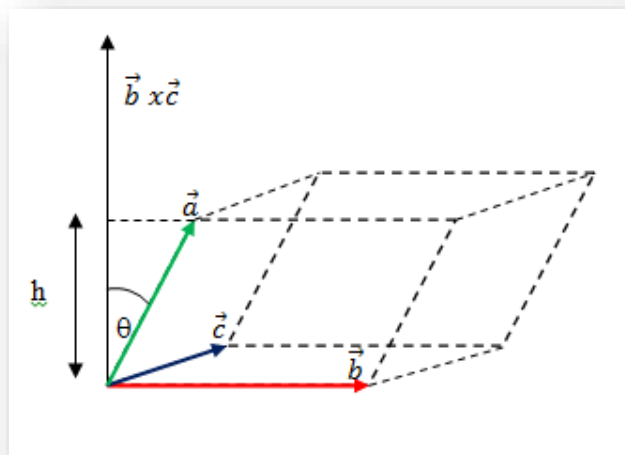
El valor absoluto del producto mixto, representa el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como aristas concurrentes.

(Suponiendo que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares)

$$Vol = base \times altura = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \theta; \quad \text{donde} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|}$$

$$Vol = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|}$$

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



¶ Ejercitación 8

Hallar el volumen del tetraedro que tiene como

arista concurrentes a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ donde $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$.

Observación: el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo.

VECTORES COPLANARES

Tres vectores no nulos son coplanares, si uno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

Supongamos que $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$. En este caso, se anula el producto mixto.

Resumiendo: tres vectores no nulos son coplanares sí y solo sí su producto mixto se anula. A partir de la interpretación geométrica, podemos decir que si los vectores son coplanares cumple que el volumen es cero.

TRABAJO PRÁCTICO VECTORES EN $\mathbb{R}^3$

- En la figura 1, indica las coordenadas de los puntos (con una nomenclatura adecuada) en $\mathbb{R}^3$, situados en cada uno de los vértices, y determina:
 - los vectores $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{BC}$,
 - los vectores $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OA}$ ¿qué posición tienen?
 - Nombra al menos dos vectores que se encuentren en el plano xy, en el plano yz y en el plano zx
 - Nombra al menos dos vectores paralelos a los ejes coordenados
 - Calcula los módulos de los vectores hallados en el ítem a

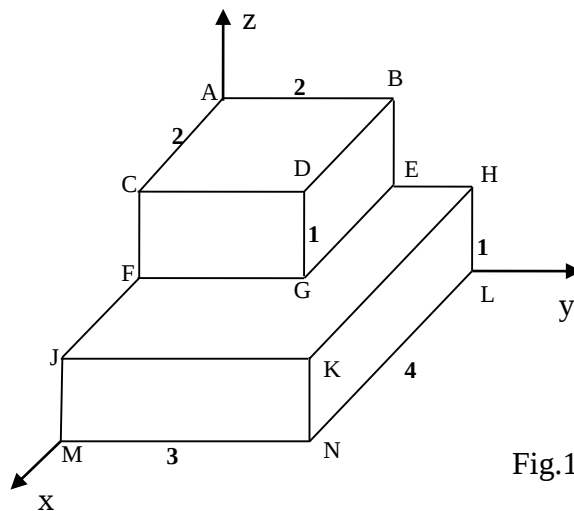


Fig.1

- Analiza previamente como están ubicados los vectores (respecto a los ejes y/o planos coordenados) Luego calcula el módulo y los cosenos directores de los mismos
 - $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
 - $\vec{a} = 3\vec{i}$
 - $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$
 - $\vec{a} = (0,1,3)$
 - $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$
- Dadas las componentes de un vector $\vec{a} = (4, -4, z)$, halla z , sabiendo que el $|\vec{a}| = 6$
- Halla el punto B con el que coincide el extremo del vector $\vec{a} = (3, -1, 4)$ si su origen coincide con el punto $A(1, 2, -3)$
- Determina el origen del vector $\vec{a} = (2, -3, -1)$ si su extremo coincide con el punto $B(1, -1, 2)$
- Si $B = P_m$ es el punto medio del segmento determinado por los puntos $R(2, -2, 4)$ y $Q(1, 3, 6)$, calcula A para que $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al vector $\vec{u} = (4, -3, 1)$
- Un vector forma con los ejes OX y OZ los ángulos $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. ¿Qué ángulo forma con el eje OY?
- Un vector cuya longitud es 6, forma con el eje OY un ángulo de 60° , y con el eje z un ángulo de $\pi/3$. Halla las componentes del vector unitario paralelo al mismo, y comprueba la relación fundamental de los cosenos directores
- Sean $P(-3, 1, 7)$ y $Q(8, 1, 7)$. Determina $|\overrightarrow{PQ}|$ y halla un vector unitario en la misma dirección.
 - Halla un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{b} = 3\overrightarrow{PQ}$

10. Dado el vector $\vec{u} = (-2, -8, 2)$ indica :
- ¿Cuáles de los siguientes vectores son colineales (o paralelos) con él:
 $\vec{r} = (0, -7, 1)$ $\vec{s} = (4, -1, 0)$ $\vec{t} = (1/2, 2, -1/2)$
 - El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{t}$ y entre $\vec{u}$ y $\vec{s}$
 - Un vector paralelo a $\vec{t}$ pero de módulo $\sqrt{72}$
11. Dado el módulo de un vector $|\vec{a}| = 2$ y los ángulos $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Calcula las componentes del vector sobre los ejes coordenados.
12. Si $|\vec{a}| = 4$ y sus ángulos directores son $\alpha = \pi/4$; $\beta = \pi/3$; $\gamma = \pi/3$
- Calcula sus componentes
 - Halla el extremo de su representante en $A(3, 2, 5)$
 - Halla el origen de su representante, cuyo extremo es $B(2, 4, -1)$
13. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\pi/2$. ¿Cuál es el vector?
14. Encuentra un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del problema anterior.
15. Si $\vec{a} = (2, 1, -1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 2)$. Halla un vector no nulo $\vec{c}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
16. Halla un vector $\vec{w} = (x, y, 1)$ que sea ortogonal tanto a $\vec{u} = (3, 1, -1)$ como a $\vec{v} = (-3, 2, 2)$
17. Sean $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$. Halla escalares α y β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ sea un vector no nulo ortogonal a $\vec{u}$.
18. ¿Para qué valor de α si existe, los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{v} = \alpha\vec{i} - \alpha\vec{j} + \vec{k}$ son perpendiculares?
19. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2, 3\beta)$ y $\vec{v} = (4, \alpha, 2)$, determina si existen los valores de α y β tal que a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ y b) $\vec{u} \parallel \vec{v}$
20. Encuentra todos los vectores ortogonales a $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ de segunda componente 4.
21. Encuentra la proyección escalar y el vector de proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$.
- $$\vec{a} = (4, 2, 0), \quad \vec{c} = (1, 1, 1)$$
- $$\vec{a} = (-1, -2, 2) \quad \vec{c} = (3, 3, 4)$$
22. Halla dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y a $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
23. Utiliza el producto cruz para hallar el seno del ángulo formado por los vectores del problema anterior. Verifica el resultado empleando el producto escalar.
24. Calcula el área del paralelogramo cuyos vértices adyacentes son $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$ y $(0, 4, 0)$
25. Dados los puntos $A(2, 3, -1)$; $B(1, 0, 2)$ y $C(3, 1, 1)$, halla $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$ tal que $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinan un paralelogramo de $10\sqrt{2}$.
26. Sean los puntos $A(-1, 2, 3)$; $B(1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 3)$;

- a. Investiga si están o no alineados.
- b. Si no lo están, determina el paralelogramo de lados AB y AC
27. Determina el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores indicados son tres de sus aristas: $\vec{o} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{p} = -\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{q} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
28. El volumen de un paralelepípedo es 18 siendo sus lados los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$; $\vec{v} = (2,3,1)$ y $\vec{w} = (\alpha, 1,2)$. Calcula $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, de modo que se cumpla la proposición precedente.
29. Halla $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, tal que $2\vec{i} + \alpha\vec{j} - 4\vec{k}$; $-3\alpha\vec{j} + \vec{i} + 2\vec{k}$; y $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, sean coplanares.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

30. Encuentra un vector $\vec{w}$ paralelo al eje z, tal que $|Proy_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w})| = 5$, siendo $\vec{u} = (3, -5, 2)$ y $\vec{v} = (2, -1, 2)$
31. Demuestra que siendo $\vec{u}, \vec{v}$ no nulos, es verdadera la siguiente proposición:
 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| \wedge \text{áng.}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Proj_{\vec{v}}(\vec{u} - \vec{v}) = 0$
32. Sean $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$
- i. Halla un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. ¿Hay más de una solución?
- ii. Halla un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. ¿Hay más de una solución?
33. Determina el vector $\vec{x}$ si se sabe que es perpendicular a $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (1, -2, 3)$ y satisface la condición $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$
34. Dado los vectores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{w} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Halla las proyecciones escalares y vectoriales:
a. $Proj_{\vec{u}}(\vec{w} + \vec{v})$ b. $Proj_{\vec{v}}\vec{u}$ c. $Proj_{\vec{w}}\vec{v}$
35. Sean los vectores
- a. $\vec{r} = (1, 0, 6)$ $\vec{s} = (2, 3, -8)$ $\vec{t} = (8, -5, 6)$
b. $\vec{r} = (-2, 3, -2)$ $\vec{s} = (1, -1, 0)$ $\vec{t} = (-1, 2, -2)$
- Encuentra:
- i. el área del paralelogramo determinado por $\vec{r}$ y $\vec{s}$, $\vec{s}$ y $\vec{t}$, $\vec{r}$ y $\vec{t}$
- ii. el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\vec{t}$
36. Sean los vectores $\vec{r} = (5, 0, 1)$, $\vec{s} = (3, -2, 0)$, $\vec{t} = (-4, 1, x)$. Halla x, de modo que:
- a. los tres vectores determinen un paralelepípedo de volumen 5.
- b. los tres vectores resulten coplanares

LA ECUACION DEL PLANO

Mientras que una ecuación con dos variables corresponde a una curva en dos dimensiones, una ecuación con tres variables define una superficie en el espacio tridimensional. La ecuación más sencilla de tres variables es la ecuación lineal del plano

$$ax + by + cz + d = 0.$$

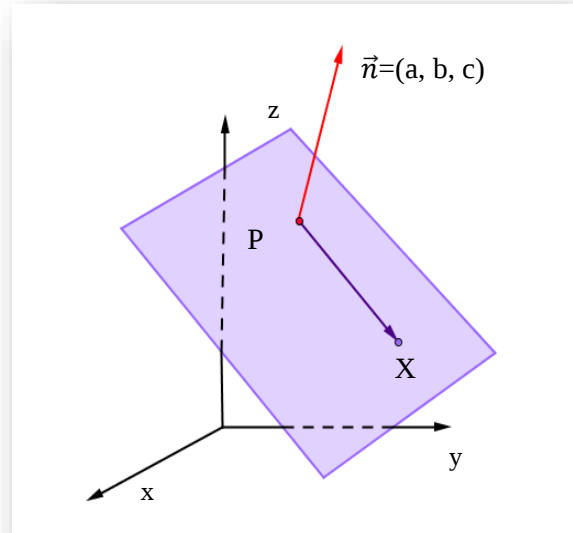
Esta ecuación puede tomar varias formas, dependiendo de la información dada o de la información requerida.

Consideremos el plano que contiene el punto $P(x_p, y_p, z_p)$, un punto variable $X(x, y, z)$ y un vector $\vec{n}$ no nulo, normal al plano de componentes $\vec{n} = (a, b, c)$.

Entre los puntos P y X queda determinado un vector contenido en el plano.

$$\overrightarrow{PX} = (x, y, z) - (x_p, y_p, z_p)$$

$$\overrightarrow{PX} = (x - x_p, y - y_p, z - z_p)$$



En consecuencia ambos vectores, el normal al plano $\vec{n}$ y el contenido en el plano $\overrightarrow{PX}$ serán perpendiculares y por lo tanto su producto escalar dará cero. De modo que la ecuación vectorial del plano puede escribirse

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \text{ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO}$$

Realizando el producto escalar entre ambos vectores tendremos

$$(x - x_p, y - y_p, z - z_p) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) \text{ Aplicando la propiedad distributiva y agrupando términos } (-)$$

$$ax + by + cz - ax_p - by_p - cz_p = 0$$

$$ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p \text{ siendo } d = ax_p + by_p + cz_p$$

$$ax + by + cz = d \rightarrow \text{ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO}$$

- Otra forma de llegar a la misma ecuación es:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ Aplicando propiedad distributiva y pasaje de términos}$$

$$\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} \rightarrow (x, y, z) \cdot (a, b, c) = (x_p, y_p, z_p) \cdot (a, b, c)$$

$$ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p \text{ donde } ax_p + by_p + cz_p = d$$

Es decir dado un plano π determinado por un punto P y un vector normal $\vec{n}$, le podemos hacer corresponder una ecuación de este tipo, donde los coeficientes de las variables x, y, z corresponden al vector normal y el término independiente será $d = ax_p + by_p + cz_p$

La terna ordenada (a, b, c) que define el vector normal $\vec{n}$, recibe el nombre de sistema de números directores del plano. Cualquier otra terna del tipo $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ con $\lambda \neq 0$, también constituye un sistema de números directores del plano, pues el vector $\vec{n} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ es también normal al plano.

Halla la ecuación vectorial y la ecuación general del plano al cual pertenece el punto $P(4, -2, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1, 1, 3)$. Da el conjunto solución de todos los puntos que pertenecen al plano y luego elige un punto en particular.

Solución: $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = (x, y, z) - (4, -2, 7) = (x - 4, y + 2, z - 7)$

Se tiene la ecuación vectorial $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

$$[(x - 4)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} + (z - 7)\vec{k}] \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 0$$

que en coordenadas cartesianas puede escribirse:

$$(x - 4, y + 2, z - 7) \cdot (-1, 1, 3) = 0$$

Realizando el producto entre las componentes respectivas

$$-(x - 4) + (y + 2) + 3(z - 7) \text{ de la cual se obtiene}$$

$$-x + y + 3z + 4 + 2 - 21 = 0$$

Se tiene la ecuación general del plano

$$-x + y + 3z = 15$$

Validación: los coeficientes de las variables x, y, z son $-1, 1$ y 3 que corresponden al vector normal, si reemplazamos el punto $P(4, -2, 7)$ en dicha ecuación debe cumplirse la igualdad

$$-(4) + (-2) + 3(7) = 15$$

Para determinar todos los puntos que pertenezcan al plano, despejamos en la Ecuación General una de las variables (la más fácil, en nuestro caso x)

$$x = y + 3z - 15 \quad \text{¿Qué significado tiene esta ecuación?}$$

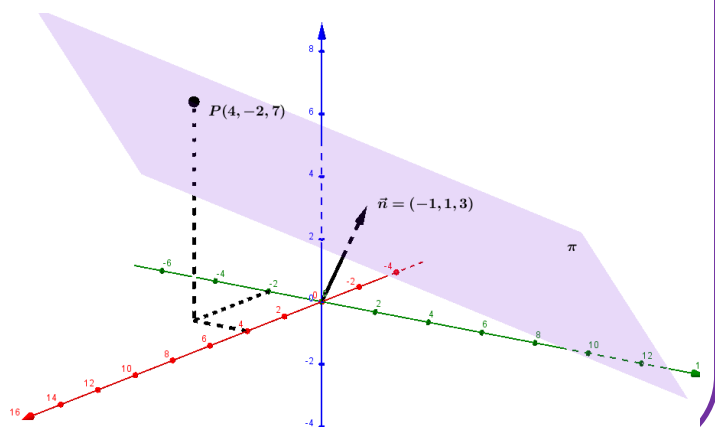
x depende de los valores de y, z por lo tanto es la variable dependiente, las variables y, z son las variables independientes (*que asumen cualquier valor*) por lo tanto el conjunto solución será la terna:

$$S = \{(y + 3z - 15, y, z)\}$$

para determinar otro punto del plano, basta darle valores a y, z por ejemplo

$$y = 0; z = 3 \rightarrow x = -6 \rightarrow$$

$$S = \{(-6, 0, 3)\}$$



ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO

Para representar un plano se necesita conocer la intersección del plano con cada uno de los ejes coordenados.

Si el plano no es paralelo a planos ni a ejes coordenados, corta a los ejes en tres puntos $P_1(p,0,0)$; $P_2(0,q,0)$ y $P_3(0,0,r)$. Entonces la ecuación segmentaria del plano estará en función de p , q y r .

$ax + by + cz = d$ dividiendo ambos miembros por d

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = \frac{d}{d} \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Demostración:

Intersección eje x las coordenadas de un punto en el eje x tienen $a: y = z = 0$ sustituyendo en la ecuación

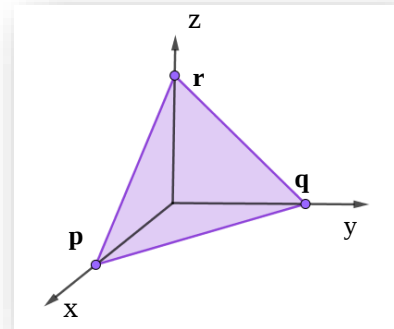
$$a \cdot x + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \quad a \cdot x = d \quad x = \frac{d}{a} \quad P(p,0,0)$$

Intersección eje y las coordenadas de un punto en el eje y tienen a $x = z = 0$ sustituyendo en la ecuación

$$a \cdot 0 + b \cdot y + c \cdot 0 = d \quad b \cdot y = d \quad y = \frac{d}{b} \quad Q(0,q,0)$$

Intersección eje z las coordenadas de un punto en el eje z tienen a $x = y = 0$ sustituyendo en la ecuación

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot z = d \quad c \cdot z = d \quad z = \frac{d}{c} \quad R(0,0,r)$$

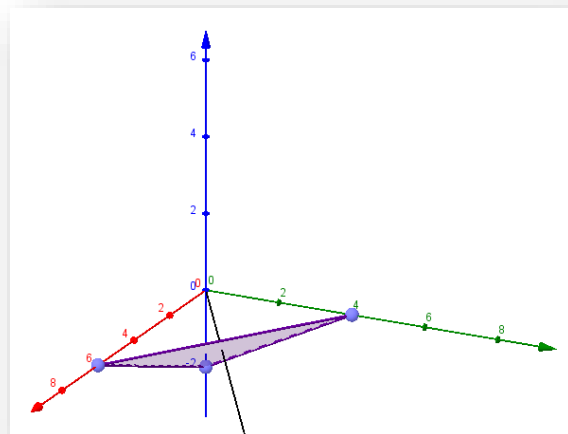


Dado el plano $\pi: 2x + 3y - 6z = 12$, escríbelo en forma segmentaria y grafica

Solución: dividiendo ambos miembros por 12

$$\begin{aligned} \frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} - \frac{6z}{12} &= \frac{12}{12} \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} &= 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-2} &= 1 \end{aligned}$$

Siendo 6, 4 y -2 las intersecciones en los ejes coordenados



Determina la ecuación general y segmentaria del plano cuyas intersecciones con los ejes coordenados son los puntos P(2,0,0) , Q (0,4,0) y R (0,0, 6) respectivamente.

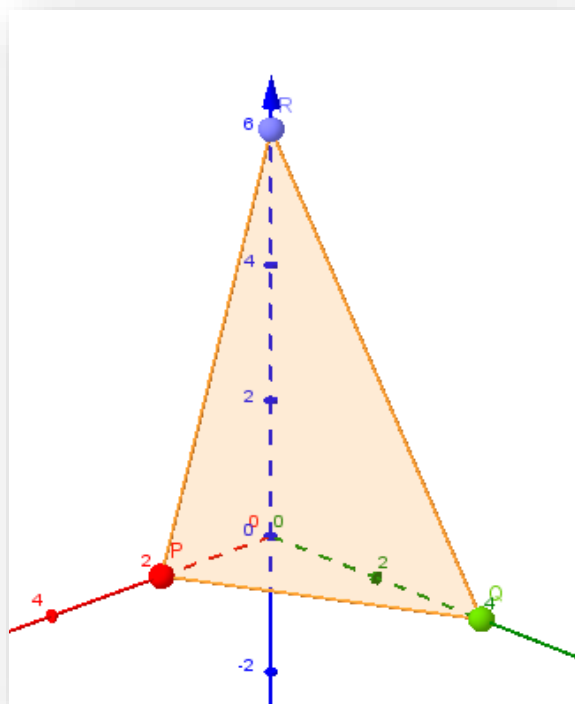
Solución: ya que sabemos las intersecciones en los ejes coordenados, primero determinamos la ecuación segmentaria

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$$

Sacando común denominador 12

$$\frac{6x + 3y + 2z}{12} = 1 \rightarrow$$

$$6x + 3y + 2z = 12 \text{ ec. gral.}$$



ECUACIÓN DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS

Procedimiento:

- Si $P, Q, R \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \subset \pi \wedge \overrightarrow{PR} \subset \pi$ (se lee vectores incluidos en el plano)
- $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (a, b, c) \Rightarrow \vec{n} \perp \pi$ (se lee el vector normal es perpendicular al plano)
- Si $P(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ reemplazando en la ecuación del plano $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ se calcula “d”

Dados P(2,0,0) , Q (0,4,0) y R (0,0, – 6) que pertenecen al plano π , calcula la ecuación general del plano.(Observa que son los mismos puntos del ejemplo anterior)

Solución: entre los puntos dados se determinan dos vectores $\overrightarrow{PQ} = (-2,4,0)$; $\overrightarrow{PR} = (-2,0,6)$, los cuales estarán incluidos en el plano. Luego se realiza el producto vectorial entre ellos para obtener el vector normal.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i} - 12\hat{j} + 8\hat{k} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-24, -12, 8) \Rightarrow$$

$$\vec{n} = (6, 3, -2)$$

$$6x + 3y - 2z = d$$

Reemplazando P en la ecuación del plano se calcula “d” $6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = d$

$$6x + 3y - 2z = 12 \quad \text{Comprueba que sucede si reemplazas por los otros puntos}$$

Observación: se puede ver que en los dos últimos ejercicios los dos planteos son válidos y se llega a la misma ecuación.

CASOS PARTICULARES

PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN DE COORDENADAS reemplazando el punto (0,0,0) en la ecuación general del plano en (x, y, z) tendremos:

$$ax + by + cz = d \rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \quad d = 0 \rightarrow ax + by + cz = 0$$

Es decir si el punto pertenece al plano entonces sus coordenadas deben verificar la ecuación.

PLANO PARALELO AL EJE Z Si $\pi //$ al eje z entonces

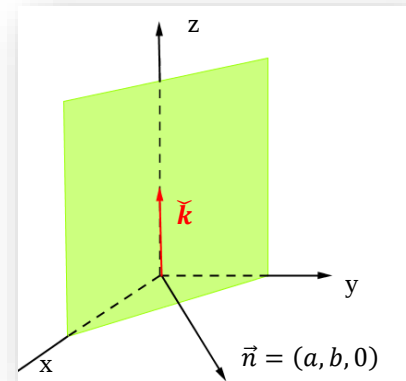
$$\pi // \vec{k} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{k}, \rightarrow \vec{n} = (a, b, 0);$$

La Ecuación General será $ax + by = d$

La Ecuación Segmentaria será

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje z, su ausencia en la ecuación se debe a que su coeficiente $c = 0$



PLANO PARALELO AL EJE Y Si $\pi //$ al eje y entonces

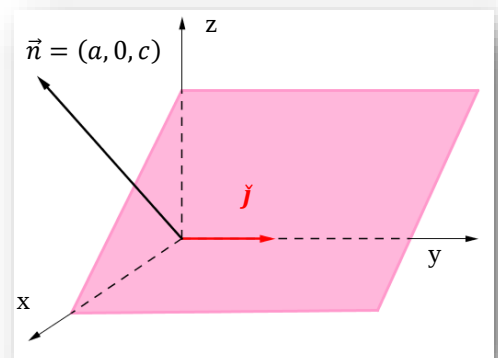
$$\pi // \vec{j} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{j} \rightarrow \vec{n} = (a, 0, c)$$

La Ecuación General será $ax + cz = d$

La Ecuación segmentaria

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje y, su ausencia en la Ecuación se debe a que su coeficiente $b = 0$



PLANO PARALELO AL EJE X Si $\pi //$ al eje x entonces

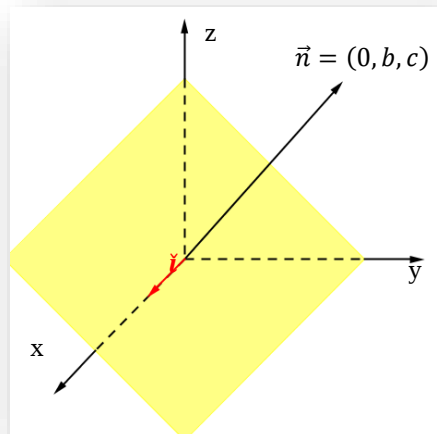
$$\pi // \vec{i} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{i} \rightarrow \vec{n} = (0, b, c)$$

La Ecuación general será $by + cz = d$

La Ecuación Segmentaria

$$\frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje x, su ausencia en la ecuación se debe a que su coeficiente $a = 0$



Observación: Podemos concluir, diciendo que si un plano es paralelo a uno de los ejes coordenados, su ecuación carece de la variable correspondiente a ese eje.

Si dos coeficientes del vector normal son nulos, entonces el plano π , será paralelo a uno de los planos coordenados

Si π es paralelo al plano $xy \rightarrow \vec{n} // \vec{k} \rightarrow \vec{n} = (0, 0, c) \rightarrow 0x + 0y + cz = d \rightarrow z = \frac{d}{c}$

Si π es paralelo al plano $xz \rightarrow \vec{n} // \vec{j} \rightarrow \vec{n} = (0, b, 0) \rightarrow 0x + by + 0z = d \rightarrow y = \frac{d}{b}$

Si π es paralelo al plano $yz \rightarrow \vec{n} // \vec{i} \rightarrow \vec{n} = (a, 0, 0) \rightarrow ax + 0y + 0z = d \rightarrow x = \frac{d}{a}$

Observación: Podemos concluir diciendo, que si un plano es paralelo a uno de los planos coordenados, su ecuación carece de las variables correspondientes a esos ejes.

ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS

Sea π un plano, $P(x_p, y_p, z_p)$ un punto del plano y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores paralelos al plano y por lo tanto por tratarse de vectores libres dichos vectores estarán contenidos en el plano.

Considerando un punto variable $X(x, y, z)$ que pertenece al plano, podemos determinar el vector $\overrightarrow{OX}$, expresándolo como una suma vectorial de dos vectores :

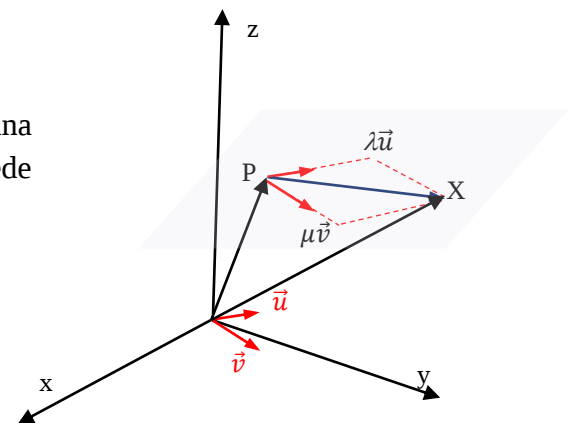
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} \quad (1)$$

Siendo $\overrightarrow{PX}$ un vector del plano, el cual a su vez es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por lo que éste puede expresarse como:

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \text{siendo } \lambda \text{ y } \mu \text{ dos escalares.}$$

Reemplazando en (1)

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$



Si consideramos las componentes de los vectores, podemos desarrollarla en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p + \lambda u_x + \mu v_x \\ y_p + \lambda u_y + \mu v_y \\ z_p + \lambda u_z + \mu v_z \end{pmatrix} \quad \text{ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS}$$

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_p + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_p + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \quad \text{ECUACIONES CARTESIANAS PARAMETRICAS}$$

Halla las ecuaciones vectorial paramétrica y general del plano determinado por los tres puntos P(1,0,2), Q(2,2,2) y R(0,1,5). Grafica

Solución: tres puntos determinan 2 vectores, por ejemplo $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1,1,3)$

Se sustituye en las ecuaciones vectoriales paramétricas, uno de los puntos dados y los vectores escalados

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda - \mu \\ 2\lambda + \mu \\ 2 + 3\mu \end{pmatrix} \text{ Ec. Vect. Paramétricas} \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\mu \end{cases} \text{ Ec. Cartesianas Paramétricas}$$

- Para hallar la ecuación general del plano habrá que realizar $(\vec{u} \times \vec{v})$ que nos dará el vector $\vec{n}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

Con el vector $\vec{n}$ y el punto P (puede ser cualquiera) $\rightarrow$

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \pi: 6x - 3y + 3z = 12$$

Validación: compruebo reemplazando los puntos Q y R en π , se debe verificar la igualdad

- ✓ $\pi: 6 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12$
- ✓ $\pi: 6 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 12$

Para graficar es conveniente la ecuación segmentaria

$$\frac{x}{\frac{12}{6}} + \frac{y}{\frac{12}{-3}} + \frac{z}{\frac{12}{3}} = \frac{12}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{4} = 1$$

¶ Ejercitación 1

1. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P (3, 2,1) y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (3, -1, 0)$; $\vec{v} = (6, -1, 1)$
2. Halla la ecuación del plano que es perpendicular en su punto medio al segmento P (2, 1,5); Q(4,1, -3)

ECUACION NORMAL DEL PLANO

Si a la ecuación general del plano la dividimos por el módulo del vector normal, los coeficientes de las variables x , y , z corresponden a los cosenos directores

$$\frac{ax}{|\vec{n}|} + \frac{by}{|\vec{n}|} + \frac{cz}{|\vec{n}|} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

$$\cos \alpha x + \cos \beta y + \cos \gamma z = \delta$$

δ : es la distancia del plano al origen

$$\delta = \frac{d}{|\vec{n}|} = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Demostración:

La distancia del plano al origen de coordenadas = $\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1}$

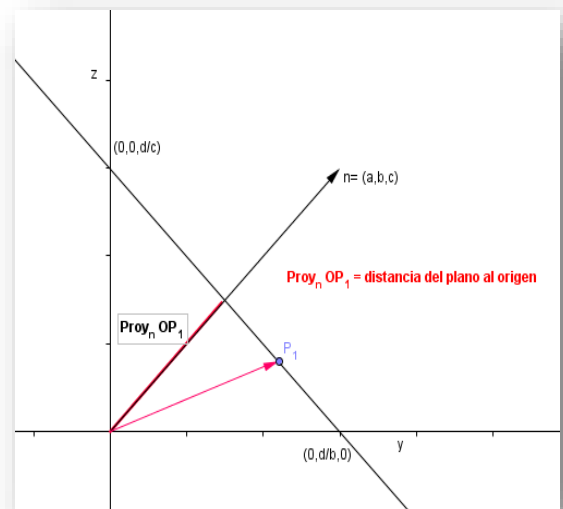
Por lo tanto:

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x_1, y_1, z_1) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se comprueba que :

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \delta$$



Dado el plano $\pi: 2x - 2y + z - 6 = 0$ llevarlo a la forma normal, comprobar que δ es la distancia del plano al origen de coordenadas

Solución: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

Para llevarlo a la forma normal dividimos el plano π por $|\vec{n}| = 3$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{z}{3} = \frac{6}{3} \rightarrow \delta = 2$$

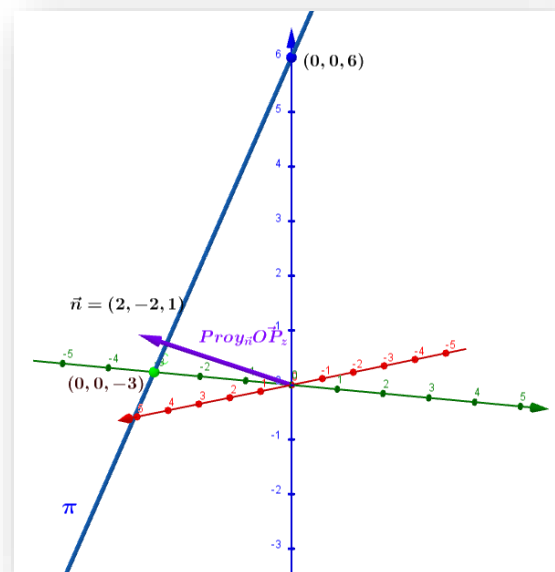
Haciendo por proyección tendríamos que

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \frac{\overrightarrow{OP_z} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(0,0,6) \cdot (2,-2,1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

Se comprueba que :

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \delta$$

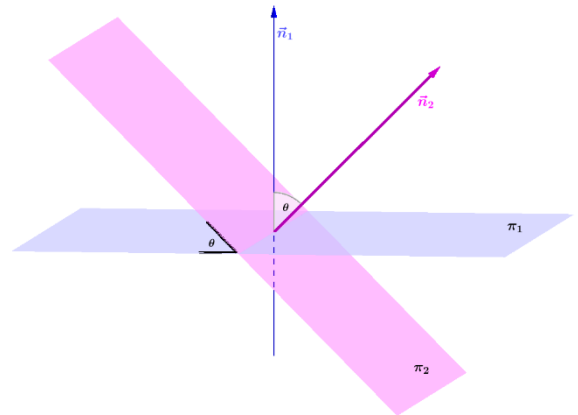


ANGULO ENTRE DOS PLANOS

En $\mathbb{R}^3$ dos planos o son paralelos o se cortan en una recta que es su intersección. Si los planos son paralelos decimos que forman un ángulo nulo.

El ángulo que forman las secciones normales resulta ser el mismo que forman sus vectores normales, según como estén orientados dichos vectores normales, podrá ser un ángulo θ o su suplementario ($180^\circ - \theta$).

Dados dos planos $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ el ángulo entre los planos estará en relación con los vectores normales de ambos. De acuerdo a lo visto en ángulos entre vectores, se tiene:



$$\cos \theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Estas condiciones surgen también de las condiciones de sus vectores normales. Dados los planos:

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad / \quad \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \quad / \quad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

Diremos que:

- Si $\pi_1 // \pi_2$ entonces $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \rightarrow (a_1, a_2, a_3) = \lambda (b_1, b_2, b_3)$

Igualando las componentes

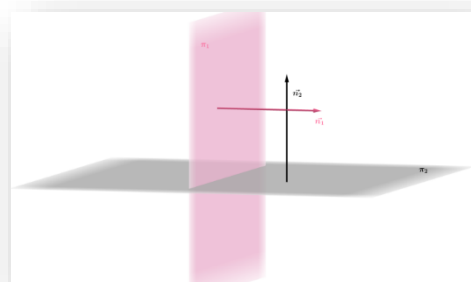
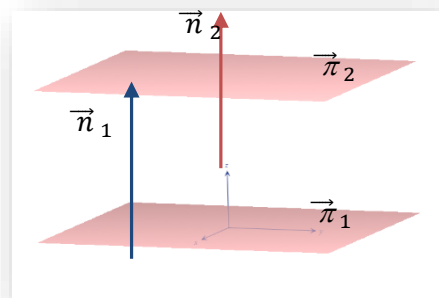
$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} \\ a_2 = \lambda b_2 \rightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_2} \\ a_3 = \lambda b_3 \rightarrow \lambda = \frac{a_3}{b_3} \end{cases}$$

Nos dice que dos planos son paralelos cuando se cumple que la razón de las componentes es la misma

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

- Si $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$



TRABAJO PRÁCTICO: EL PLANO**A. Nociones básicas**

1. En los siguientes ejercicios, indica el vector normal del plano, el conjunto solución, un punto que pertenezca al mismo, y realiza su gráfica.

1.1 $x + 6y + 2z = 2$

1.4 $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$

1.7 $-3y = \frac{x}{2} + \frac{z}{3}$

1.2 $x + 3y = -6$

1.5 $y = 5$

1.8 $2z + 3y = 6$

1.3 $z = 0$

1.6 $2x - 12z = 12$

1.9 $x = 2$

2. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto M_i y cuyo vector normal es $\vec{n}_i$

$M_1(2,1,-1)$

$M_2(0,0,0)$

$M_3(3,0,5)$

$M_4(0,-2,\sqrt{2})$

$\vec{n}_1 = (1,-2,3)$

$\vec{n}_2 = (5,0,-3)$

$\vec{n}_3 = (0,0,1)$

$\vec{n}_4 = (0,-1,-\sqrt{2})$

3. Dados los puntos $M_1(3,-1,2)$ y $M_2(4,-2,-1)$. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$

B. Ecuación segmentaria del plano.

4. En el ejercicio 1 (de nociones básicas o introducción), halla:

4.1 Los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados.

4.2 Escribe los planos en forma segmentaria.

5. Un plano pasa por el punto $M_1(6,-10,1)$ e intercepta en el eje de abscisas el segmento $p = -3$ y en el eje de cotas el segmento $r = 2$. Halla la ecuación segmentaria.
6. Un plano pasa por los puntos $M_1(1,2,-1)$ y $M_2(-3,2,1)$ e intercepta en el eje de ordenadas el segmento $q = 3$. Halla la ecuación segmentaria.
7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(2,-3,-4)$ y que intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud y diferentes de cero (se supone que cada segmento parte del origen de coordenadas).
8. Halla la ecuación del plano que es paralelo al vector $\vec{v} = (2,2,-1)$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $p = 3$ y $q = -2$.
9. Halla la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $p = -2$, $q = 2/3$

C. Ecuación del plano determinado por tres puntos.

10. Los tres puntos determinan un plano π_i :

$\pi_1: (1,1,-1); (3,3,2); (3,-1,-2)$

$\pi_2: (1,2,3); (2,3,4); (-1,7,-2)$

$\pi_3: (0,0,0); (1,1,1); (3,2,-1)$

Decir cuáles de los siguientes puntos están contenidos en dichos planos.

$\pi_1: A(2,2,1/2) \quad B(4,0,-1/2) \quad C(-3,1,-3) \quad D(3,1,3) \quad O(0,0,0)$

$\pi_2: A(2,-2,1/2) \quad B(-1,3,-4) \quad C(-1,0,1) \quad D(2,4,6) \quad E(1,1,24/7)$

$$\pi_3: A(2,2,2) B(0,4,-1/2) C(1,2/3,-1/3) D(-3,-2,1) E(0,1,1)$$

D. Ecuación vectorial paramétrica del plano

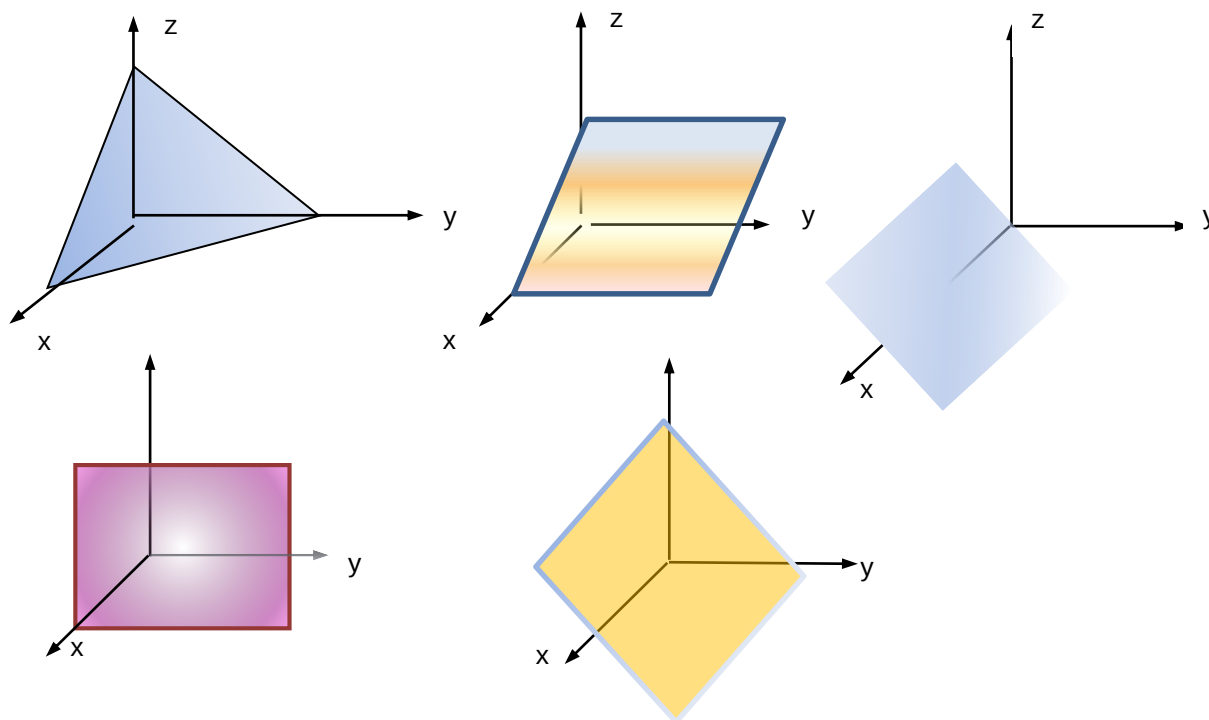
11. Halla la ecuación del plano que pasa por $M_1(3,4,-5)$ y es paralelo a los dos vectores $\vec{u} = (3,1,-1)$ y $\vec{v} = (1,-2,1)$
12. Determina si los siguientes planos son paralelos:
- 12.1 $\alpha_1: (1,-2,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(2,3,4)$ $\beta_1: (2,4,1) + \delta(3,5,5) + \varphi(1,1,3)$
- 12.2 $\alpha_2: (3,2,1) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$ $\beta_2: (1,1,1) + \delta(1,0,0) + \varphi(0,0,1)$
13. Sea $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$ donde $P(1,2,-3)$, $\vec{u} = (3,2,1)$ y $\vec{v} = (1,0,4)$. Determina cuáles de los siguientes puntos están en el plano
- $P(1,2,0)$ $Q(1,2,1)$ $R(6,4,6)$ $S(6,6,6)$ $T(6,6,-5)$
14. Determina la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $P_0(2,3,-4)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
15. Dado el punto P y el plano π , determina la ecuación del plano β , paralelo a π y que contiene a
- $P(2,4,5)$ $\pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$
16. Si π es el plano determinado por $P(1,-1,0)$; $\vec{u} = (3,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,2,0)$, determina:
- 16.1 la ecuación paramétrica de π
- 16.2 z_1 sabiendo que $P_1(10,-5,z_1) \in \pi$
17. Dado el plano α en forma paramétrica, expresarlo en forma vectorial, general, normal y segmentaria:
- 17.1 $\begin{cases} x = 2 + 7\mu \\ y = 2 + \lambda - 3\mu \\ z = -5 + 13\lambda \end{cases}$ 17.2 $\begin{cases} x = 5 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 6 - \lambda + 2\mu \\ z = 7 + 5\lambda - \mu \end{cases}$ 17.3 $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 6 - \lambda + 2\mu \\ z = 7\mu \end{cases}$

E. Ecuación normal del plano

18. Determina cuáles de las ecuaciones de los planos dados a continuación están escritas en la forma normal:
- 18.1 $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z =$ 18.2 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 3$ 18.3 $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0$
19. Reduce a la forma normal cada una de las ecuaciones de los planos siguientes:
- 19.1 $2x - 2y + z = 18$ 19.2 $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$ 19.3 $3x - 4y - 1 = 0$

F. Ejercicios surtidos

20. Halla la ecuación general, segmentaria, paramétrica y normal de los siguientes planos:



21. Determina la ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

- Contiene a $(3,6,12)$ y es paralelo al plano xy .
- Contiene a $(0,6,4)$ y es paralelo al plano xz
- Contiene a $(-7,-5,18)$ y es paralelo al plano zy
- Pasa por el punto $P(2,3,-5)$ y es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$
- Contiene a $(1,0,-5)$ y es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$
- Contiene al punto $P(1,3,4)$ y es paralelo al plano $2y + 4z = 10$
- Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $(-1,3,2)$ y $(2,-4,5)$
- Pasa por $P_1(3,-2,2)$ y $P_2(4,2,3)$ y es paralelo al eje "x"
- Pasa por el eje Ox y por el punto $M_1(4,-1,2)$
- Pasa por el eje Oy y por el punto $M_2(1,4,-3)$
- Pasa por el eje Oz y por el punto $M_3(3,-4,7)$
- Contiene a $(0,3,0)$; $(0,0,5)$ y es además perpendicular al plano $7x - 3y + 6z - 4 = 0$
- Pasa por $(2,0,-1)$ y $(4,2,2)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 4z = 0$
- Pasa por $Q(3,-2,2)$ y $R(4,2,3)$ y es paralelo al eje de ordenadas
- Es perpendicular al vector $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ pasa por el punto $(1,2,5)$
- Perpendicular al eje y en el punto $(0,4,0)$

22. Sea α el plano cuya ecuación general es $ax + by + cz + d = 0$. Establece en cada caso, la relación que deben satisfacer los coeficientes a, b, c, d de modo que:

22.1 Sea paralelo al plano $2x - y + z = 7$

22.2 Sea perpendicular al vector $(-1, 3, 5)$

22.3 Intercepte a los ejes coordenados en $x = 2, y = -1, z = 1$

22.4 Pase por el origen

22.5 Sea perpendicular al plano YZ

23. Un plano tiene como ecuación cartesiana $x + 2y - 2z + 7 = 0$ Halla :

23.1 Un vector normal de longitud uno

23.2 Los segmentos interceptados por el plano con los ejes.

23.3 La distancia del plano al origen.

G. Planos paralelos y perpendiculares

24. Determina para qué valores de k y m los pares de ecuaciones dadas a continuación determinan planos paralelos:

$$24.1 \quad 2x + ky + 3z - 5 = 0 \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0$$

$$24.2 \quad 3x - y + kz - 9 = 0 \quad 2x + my + 2z - 3 = 0$$

$$24.3 \quad mx + 3y - 2z - 1 = 0 \quad 2x - 5y - z = 0$$

25. Determina para que valores de k los pares de ecuaciones dadas a continuación determinan planos perpendiculares

$$25.1 \quad 3x - 5y + kz - 3 = 0 \quad x + 3y + 2z + 5 = 0$$

$$25.2 \quad 5x + y - 3z - 2 = 0 \quad 2x + ky - 3z + 1 = 0$$

$$25.3 \quad 7x - 2y - z = 0 \quad kx + y - 3z - 1 = 0$$

26. Dados los planos

$$26.1 \quad \pi_1 : 3x - y + kz = 1; \pi_2 : 9x - 3y + 2z = 8.$$

$$26.2 \quad \pi_2 : 2x + 5y - z = 3; \pi_2 : kx + y - 1/5 z = 0$$

Calcula k de modo que a) $\pi_1 // \pi_2$ b) $\pi_1 \perp \pi_2$

27. Halla la ecuación general del plano que pasa por $P(3,0,2)$ y es perpendicular a los planos $\pi_1: 3y - 2z + 2 = 0$ y $\pi_2: x = 0$.

28. Determina la ecuación del plano que contiene a $P(2, -1, 3)$ y es perpendicular al plano

$$\gamma: 2x + 3y - 4z = 0$$

29. Encuentra la ecuación del plano perpendicular al plano $5x + y + 4z = 0$ y que pasa por los puntos $A(3,1,2)$ y $B(3,4,4)$

30. Halla la ecuación del plano que pasa por dos puntos $M_1(1, -1, 2)$ y $M_2(3,1,1)$ y es perpendicular al plano $x - 2y + 3z - 5 = 0$

31. Halla la ecuación vectorial y general del plano que satisface las siguientes condiciones.

a. Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $(-1,3,2)$ y $(2, -4,5)$

b. Pasa por $R(-4,1,2)$ y es paralelo al plano $x = 5$

c. Contiene al eje "z" y a $P_1(4,2,0)$

d. Pasa por $P_1(3, -2, 2)$ y $P_2(4,2,3)$ y es paralelo al eje "x"

32. Halla un vector de longitud 1 perpendicular a $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y al plano $x - y + 5z = 1$

H. Ángulo entre dos planos

33. Halla la ecuación general del plano que pasa por $P(2,1,3)$; si un vector normal $\vec{n}$ forma los ángulos con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente: $1/3 \pi, 1/4 \pi, 1/3 \pi$
34. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, sabiendo que el plano $\alpha x + 4y + 3z - 12 = 0$ determina con los ejes coordenados un tetraedro contenido en el 1^{er} octante, cuyo volumen es 24

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

¿Puedes...

- escribir la ecuación de un plano que pasa por dos puntos dados y es perpendicular a un plano dado?
- reducir la ecuación de un plano de la forma general a la forma segmentaria?
- reducir la ecuación de un plano de la forma vectorial paramétrica a la forma general?
- hallar los cosenos directores de las normales a un plano cuya ecuación es conocida?
- reducir la ecuación de un plano de la forma general a la normal?
- escribir la ecuación de un plano conocidos 3 puntos no alineados?
- determinar un punto que pertenezca al plano y escribir el conjunto solución

LA ECUACIÓN DE LA RECTA EN $\mathbb{R}^3$ sacar grafico más sencillo

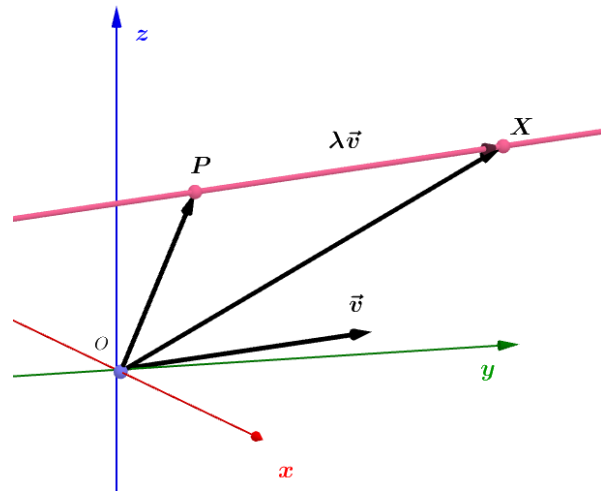
Todos estamos familiarizados con la ecuación de la recta en el plano cartesiano, con punto – pendiente, o entre dos puntos, ahora se quiere considerar desde un punto de vista vectorial

Una recta perteneciente al espacio $\mathbb{R}^3$ o al plano $\mathbb{R}^2$, queda perfectamente determinada cuando se conocen un punto P que le pertenece y su dirección, que puede ser aportada por un vector $\vec{v}$ no nulo que se llama vector director.

Dado un punto P y un vector no nulo $\vec{v}$, el conjunto de puntos del espacio:

$L = \{X / \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, es una recta que pasa por P y es paralela al vector $\vec{v}$. Fig. 1

Recordemos que el vector que define la dirección de L no es único, puede ser reemplazado por cualquier múltiplo escalar ($\lambda \vec{v}$), y el punto P puede reemplazarse por cualquier otro punto de la recta.



El vector $\vec{v}$ es llamado vector director de L . las componentes de $\vec{v}$ (no todas nulas) son los números directores de L .

Obviamente toda recta admite múltiples ternas de números directores (*¿por qué?*).

Los cosenos directores de $\vec{v}$ (también los de $-\vec{v}$) son llamados cosenos directores de L . En consecuencia, toda recta admite dos ternas de cosenos directores y por extensión dos ternas de ángulos directores.

La ecuación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, (1) **ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA**

es la ecuación vectorial de L y la variable λ recibe el nombre de parámetro. Esta ecuación vectorial de la recta en $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como vector columna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1)$$

o también puede escribirse por medio de los versores $\check{i}; \check{j}; \check{k}$:

$$x \check{i} + y \check{j} + z \check{k} = (x_p \check{i} + y_p \check{j} + z_p \check{k}) + \lambda (a \check{i} + b \check{j} + c \check{k})$$

Siendo (x, y, z) las coordenadas del Punto X y (a, b, c) las componentes conocidas del vector director dado $\vec{v}$. De cualquiera de ellas, y como se trata de igualdad entre vectores, se obtiene:

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p + \lambda c \end{cases} \quad (2) \quad \text{ECUACIONES CARTESIANAS PAREMETRICAS}$$

Estas ecuaciones permiten obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta en términos del parámetro λ ; a cada valor le corresponde una terna (x, y, z) y consecuentemente un punto, solo uno perteneciente a la recta dada.

Despejando λ en cada una de las ecuaciones del sistema (2) obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \lambda \\ \frac{y-y_p}{b} = \lambda \\ \frac{z-z_p}{c} = \lambda \end{cases} \text{ que a su vez es equivalente al sistema de ecuaciones } \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases}$$

El cual es equivalente a cualquiera de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad (3)$$

Que por brevedad se suele escribir así

$$\frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \quad (4)$$

es la forma simétrica de la ecuación de la recta en el espacio. No debe olvidarse que (4) no es una ecuación sino uno cualquiera de los tres sistemas de (3)

ECUACIONES SIMETRICAS (4)

Tiene las siguientes particularidades para recordar:

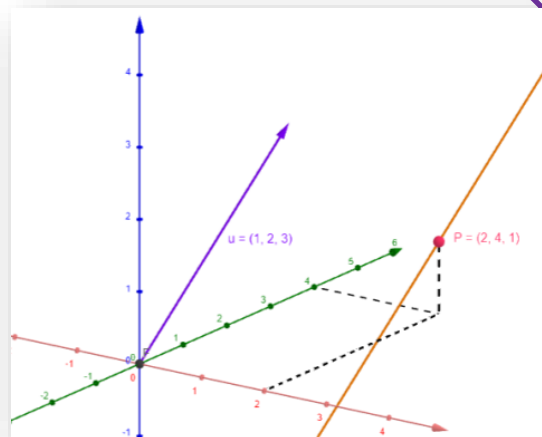
- Los denominadores son las componentes de un vector director, y recibe el nombre de números directores de la recta.
- Los sustraendos de cada numerador, son las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta

Dada la recta $x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{3}$ identifica el vector director y un punto que pertenece a la misma.

La simple lectura de la ecuación $x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{3}$

nos permite deducir que un vector director de la recta correspondiente es:

$\vec{u} = (1, 2, 3)$ y que $P(2, 4, 1)$ es un punto perteneciente a la recta (propón otro vector director y otro punto perteneciente a la recta).



Utilizando el mismo ejemplo vamos a tratar de comprender que significado tienen los sistemas de ecuaciones (3), trabajando con uno de ellos tendremos:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{y-4}{2} \\ x-2 = \frac{z-1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(x-2) = y-4 \\ 3(x-2) = z-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-4 = y-4 \\ 3x-6 = z-1 \end{cases}$$

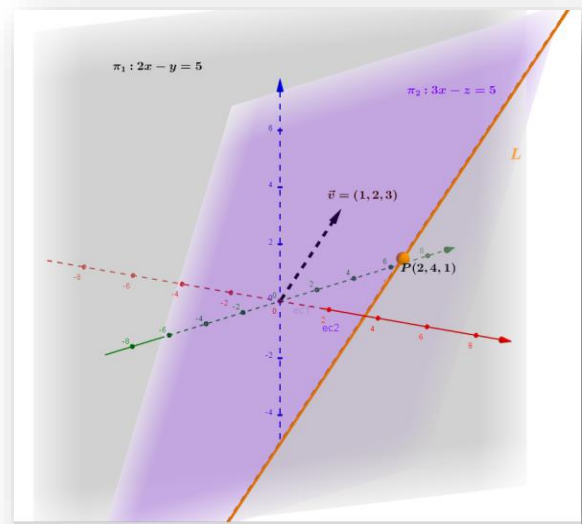
$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \rightarrow ec. de un plano \\ 3x - z = 5 \rightarrow ec. de un plano \end{cases}$$

La intersección de estos dos planos nos dará como resultado la recta, es decir que la recta puede pensarse como el conjunto solución de la intersección de los dos planos

$$L = \left\{ P(x, y, z) / \frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} \wedge \frac{x - x_p}{a} = \frac{z - z_p}{c} \right\}$$

Que en nuestro ejemplo sería

$$L = \{ P(x, y, z) / 2x - y = 0 \wedge 3x - z = 5 \}$$



COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA

Llamemos cosenos directores de una recta a los cosenos directores de un vector director correspondiente a dicha recta.

Si $\vec{v} = (a, b, c)$ es un vector de la recta L se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{v}|}; \cos \beta = \frac{b}{|\vec{v}|}; \cos \gamma = \frac{c}{|\vec{v}|} \quad (5) \text{ son cosenos directores de la recta L.}$$

También serán cosenos de la recta, los cosenos directores de $-\vec{v} = (-a, -b, -c)$ y se cumple la relación: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas, simétricas y cosenos directores de la recta que pasa por el punto $P(2, 0, -3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (2, -3, 5)$

Solución: Aplicando (1): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda \\ -3\lambda \\ -3 + 5\lambda \end{pmatrix}$

De donde se obtienen las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{despejando } \lambda \text{ se obtienen}$

las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z + 3}{5}$$

El módulo del vector $\vec{v}$ será $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$. Luego aplicando (5)

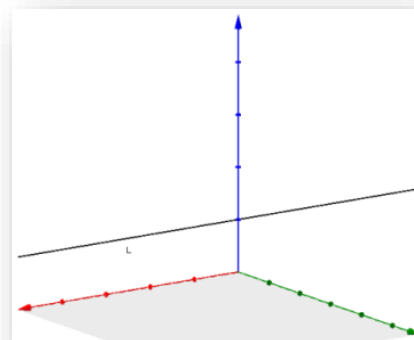
$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{38}}; \cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{38}}; \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{38}} \text{ serán los cosenos directores}$$

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA EN R³ -RECTAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS

Si la recta es paralela a los ejes coordenados los vectores directores serán:

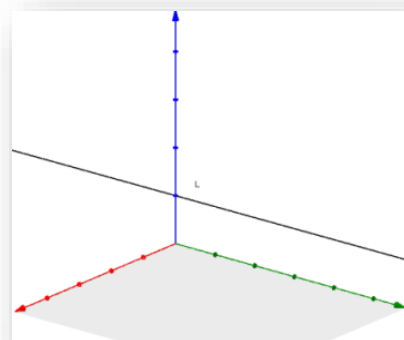
- $L // \text{eje } x \Rightarrow \vec{v} // \vec{i} \Rightarrow \vec{v} = (a, 0, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, 0, 0)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p \\ z = z_p \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$\frac{x - x_p}{a}; y = y_p; z = z_p$



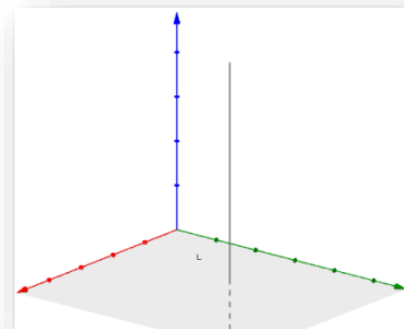
- $L // \text{eje } y \Rightarrow \vec{v} // \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (0, b, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, b, 0)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$\frac{y - y_p}{b}; x = x_p; z = z_p$



- $L // \text{eje } z \Rightarrow \vec{v} // \vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (0, 0, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, 0, c)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$x = x_p; y = y_p; \frac{z - z_p}{c}$



Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela al eje y .

Solución: se puede utilizar el versor $\vec{j}$ como vector director de la recta $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(0, 1, 0) \text{ Ecuación Vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$y - 2; x = 1; z = -1 \text{ ecuaciones simétricas}$$

Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $P(1, -2, 2)$ y $Q(3, -2, 2)$

Solución: la dirección viene dada por el vector entre los dos puntos P y Q

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, 0)$$

$$\text{Aplicando (1): } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

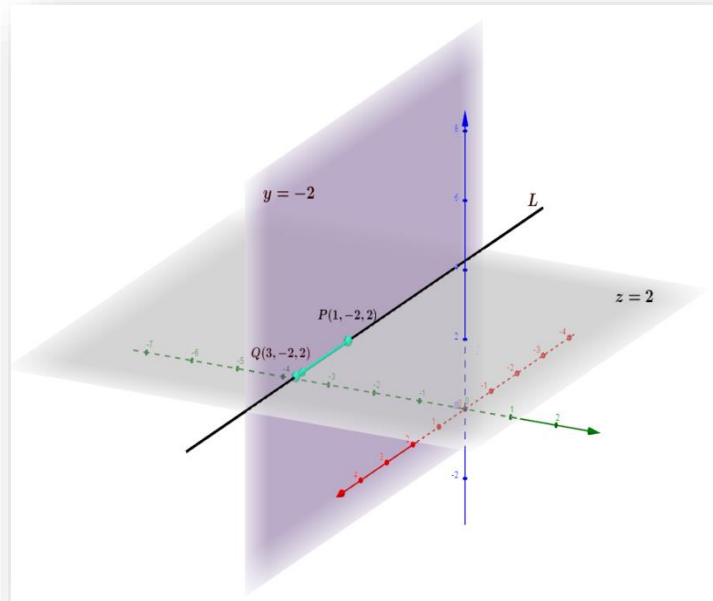
De donde se obtiene las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Ecuaciones Simétricas:

$$\frac{x-1}{2}; y = -2; z = 2$$

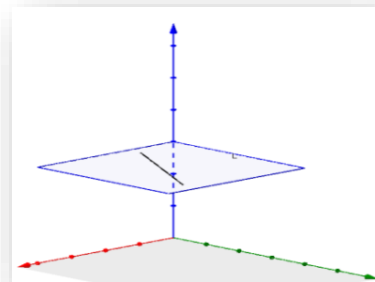
es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto P. También se podría decir que es una recta que pasa por el punto P y resulta de la intersección de los planos $y = -2$ y $z = 2$



RECTAS PARALELAS A LOS PLANOS COORDENADOS

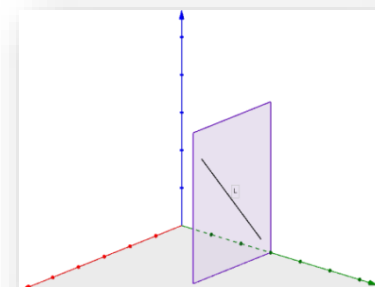
- $L \parallel \text{plano } xy \Rightarrow \vec{v} \parallel \text{plano } xy \Rightarrow \vec{v} = (a, b, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, b, 0)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b}; z = z_p$



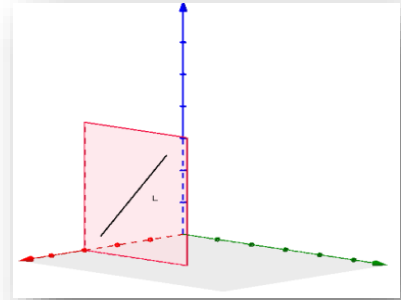
- $L \parallel \text{plano } xz \Rightarrow \vec{v} \parallel \text{plano } xz \Rightarrow \vec{v} = (a, 0, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, 0, c)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{x - x_p}{a} = \frac{z - z_p}{c}; y = y_p$



- $L // \text{plano } yz \Rightarrow \vec{v} // \text{plano } yz \Rightarrow \vec{v} = (0, b, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, b, c)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{y - y_p}{b} = \frac{z - z_p}{c}; x = x_p$



- Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $P(1, -2, 1)$ y es paralela al plano xy

Solución: $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ puede ser un vector director de la recta

$$(x, y, z) = (1, -2, 1) + \lambda(1, 1, 0) \text{ Ecuación Vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1}; z = 1 \text{ ecuaciones simétricas}$$

También es válido escribir $x - 1 = y + 2; z = 1$

- Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa los puntos $P(3, 1, -1)$ y $Q(3, 2, 2)$

Solución: la dirección viene dada por el vector entre los dos puntos P y Q

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3)$$

Ecuación vectorial

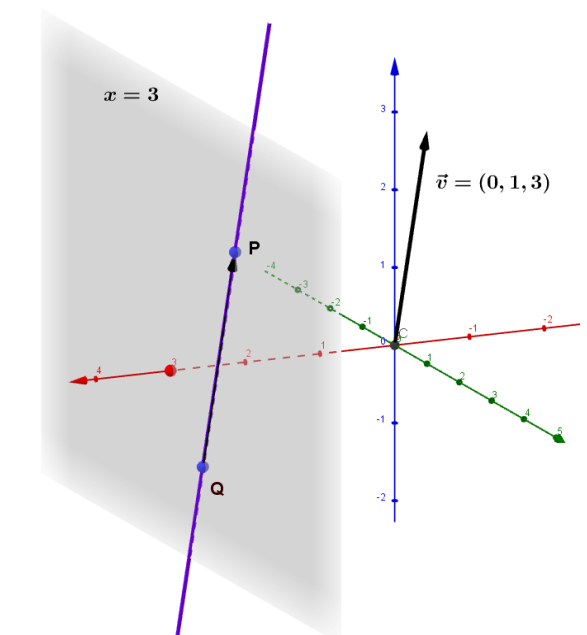
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \lambda \\ 2 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Despejando } \lambda, \text{ se obtienen las}$$

$$\text{Ecuaciones Simétricas } \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}; x = 3$$

La recta es paralela al plano yz , también se puede decir que se encuentra en el plano $x = 3$



ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS

El ángulo entre dos rectas en $\mathbb{R}^3$ va a estar dado por el menor ángulo entre sus respectivos vectores directores. Para obtener el menor ángulo consideramos el valor absoluto del producto escalar

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \rightarrow \theta = \arccos \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

Halla el ángulo agudo que forman las rectas:

$$L_1: \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+1}{1} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solución: $\vec{v}_1 = (2,1,1)$ y $\vec{v}_2 = (0,2,1)$

$$\cos \theta = \frac{(2,1,1) \cdot (0,2,1)}{|\sqrt{6}| \cdot |\sqrt{5}|} = \frac{3}{\sqrt{30}} \rightarrow \theta \approx 57^\circ$$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dirigen a L_1 y L_2 respectivamente, puede asegurarse que:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Observación: Debe tenerse en cuenta que ser perpendiculares no significa que se corten.

- Demuestra si $L_1 \perp L_2$ siendo $L_1: x = 1; \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y $L_2: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}$

Solución: $\vec{v}_1 = (0,2,-1)$, $\vec{v}_2 = (3,2,7)$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow (0,2,-1) \cdot (3,2,7) = 4 - 7 = -3 \neq 0 \text{ las rectas no son perpendiculares}$$

- Halla la recta que pase por el origen y que sea perpendicular a $L_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$
¿Cuántas hay?

Solución: $\vec{v}_1 = (-1,2,-5)$; $\vec{v}_2 = (x,y,z)$ vector director de la recta desconocida L_2

La condición que se debe cumplir es que $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

$$(-1,2,-5) \cdot (x,y,z) = 0$$

$$-x + 2y - 5z = 0 \Rightarrow x = 2y - 5z \Rightarrow \vec{v}_2 = (2y - 5z, y, z)$$

Habrán infinitas rectas, contenidas en el plano $-x + 2y - 5z = 0$

Sabiendo que pasa por $P(0,0,0)$ y con $\vec{v}_2 = (2y - 5z, y, z)$. La ecuación vectorial será

$$L_2: (x,y,z) = \lambda(2y - 5z, y, z)$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE RECTAS

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dirigen a L_1 y L_2 respectivamente y $P_1 \in L_1 \wedge P_2 \in L_2$, entonces se deben cumplir dos condiciones

$$L_1 // L_2 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \\ P_1 \in L_1 \wedge P_1 \notin L_2 \end{cases}$$

Observación: Debe tenerse en cuenta que ser paralelas significa que NO se corten.

- Decide si $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{-4}$ y $L_2: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 10t \\ z = 1 - 8t \end{cases}$ siendo $t \in \mathbb{R}$ son paralelas.

Solución: comprobando la primera condición

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \Rightarrow (2, 5, -4) = \lambda(4, 10, -8) \text{ Igualando componente a componente}$$

$$\begin{cases} 2 = 4\lambda \\ 5 = 10\lambda \\ -4 = -8\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{-4}{-8}$$

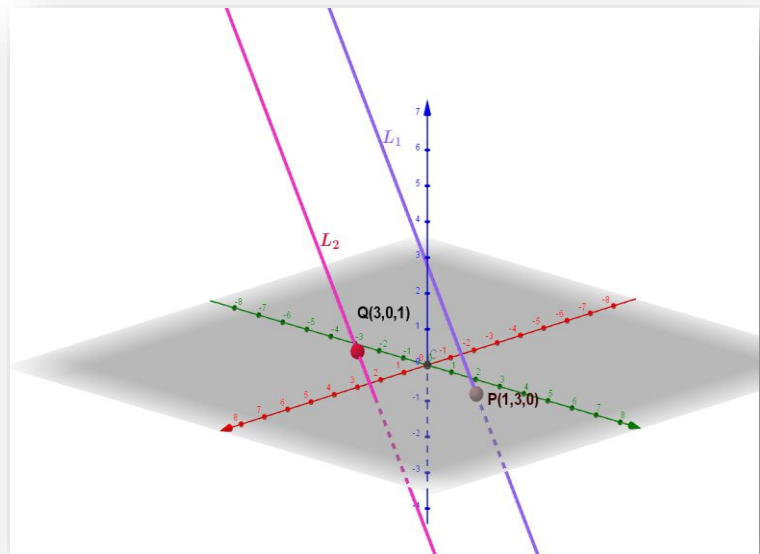
la razón es la misma, por lo tanto se cumple que $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$

Para comprobar la segunda condición, podemos reemplazar $P_1(1, 3, 0)$ en alguna de las ecuaciones de la recta de L_2

$$L_2: \frac{x_1 - 3}{4} = \frac{y_1}{10} = \frac{z_1 - 1}{-8}$$

$$\frac{1 - 3}{4} \neq \frac{3}{10} \neq \frac{0 - 1}{-8}$$

las razones no son iguales, quiere decir que $P_1 \notin L_2$, por lo tanto se cumplen las dos condiciones y las rectas son paralelas



Ejercitación Halla las ecuaciones de los ejes coordenados.

- ¿Cuáles son las condiciones que deben darse para que una recta sea paralela a uno de los ejes coordenados?
- Si una recta está contenida en uno de los planos coordenados, sin ser paralela a ningún eje. ¿qué números directores tiene? Halla una ecuación vectorial de la misma

ECUACIÓN DE LA RECTA EN R^2

Las ecuaciones vistas en el espacio vamos a generalizar para el plano cartesiano. La ecuación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$ también es válida para la recta L en el plano cartesiano.

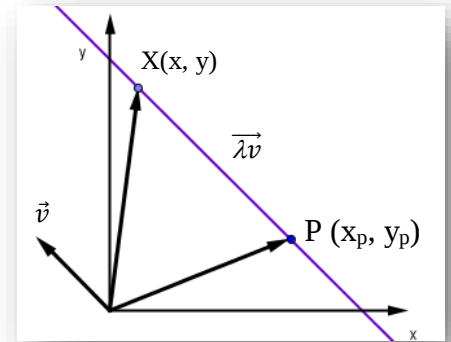
Sea $X(x, y)$ un punto genérico de la recta, $P(x_p, y_p) \in L$ y $\vec{v} = (a, b)$ el vector director, entonces $\overrightarrow{OP} = (x_p, y_p)$ y $\overrightarrow{OX} = (x, y)$, son vectores en posición estándar

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v} \rightarrow (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = \lambda \vec{v}$$

por lo tanto despejando $\overrightarrow{OX}$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \quad (1)$$

reemplazando los vectores por sus coordenadas se tiene otra forma de escribir la ecuación vectorial de L



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1) \text{ ECUACION VECTORIAL PARAMETRICA}$$

Operando con el segundo miembro se reduce por igualdad de vectores:

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \end{cases} \quad (2) \text{ ECUACIONES CARTESIANAS PARAMÉTRICAS}$$

Para cada valor que se le asigna al parámetro λ se obtiene un par ordenado (x, y) que define un punto X que está en la recta L. Eliminando el parámetro λ en (2) se igualando obtenemos las

$$\frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} \quad (3) \text{ ECUACIONES SIMÉTRICAS}$$

Dada la recta de la ecuación explícita $y = -2x + 6$ dar las componentes de un vector director y de un vector normal. Escribir la ecuación vectorial, paramétricas y simétricas de la recta

Solución: para determinar un vector director, basta conocer dos puntos de la recta:

$$\text{Si } x = 0 \text{ y } y = 6 \rightarrow P(0, 6) \quad \overrightarrow{QP} = \vec{v} = (-3, 6)$$

$$\text{Si } y = 0; x = 3 \rightarrow Q(3, 0)$$

Aplicando las ecuaciones (1), (2) y (3)

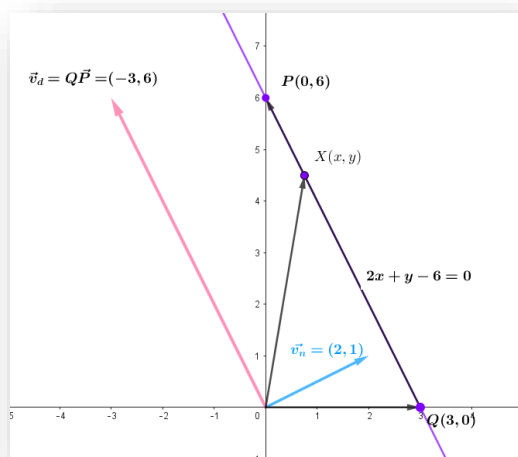
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ ec. vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 6 + 6\lambda \end{cases} \text{ ec. paramétricas}$$

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{6} \text{ ec. simétricas}$$

λ	x	y
1	-3	12
2	-6	18
-1	3	0

Haciendo una tabla de valores se pueden obtener distintos puntos de la recta al variar λ



Escribiendo la ec. de la recta en forma general, es muy fácil identificar el vector normal, ya que son los coeficientes que multiplican a las variables x e y .

Para encontrar el vector director de la recta hay que realizar el producto escalar e igualarlo a cero ya que ambos vectores son perpendiculares.

Nota: ¿Cuál es la diferencia de estas ecuaciones con las de la recta en R^3 ?

De la ecuación $\frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b}$ eliminando los denominadores tendremos

$b(x - x_p) = a(y - y_p)$ aplicando prop. distributiva, igualando a cero y agrupando

$bx - ay + (ay_p - bx_p) = 0$ donde si hacemos $A = b$; $B = -a$ y $C = ay_p - bx_p$ obtenemos la ecuación de primer grado en dos variables que es la **ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA** $Ax + By + C = 0$ (4)

Observación: Los coeficientes de las variables (A y B) no deben ser simultáneamente 0. Dichos coeficientes corresponden a un vector normal.

Ecuación de los ejes cartesianos

Si una recta coincide con el eje x (es el eje x) entonces A y C deben ser cero ¿Por qué?

La ecuación se reduce a $By = 0 \Rightarrow y = 0$. Entonces la ecuación del eje x es $y = 0$.

Análogamente se deduce que la ecuación de correspondiente al eje y es $x = 0$

TEST DIAGNÓSTICO

¿Puedes.....

- ☐ hallar la ecuación de la recta con dos puntos?
- ☐ identificar en las distintas ecuaciones el vector director de la recta y un punto de paso?
- ☐ hallar las ecuaciones de una recta, conocidos sus números directores y un punto por el cual pasa?
- ☐ diferenciar entre la ecuación de una recta y la ecuación de un plano?
- ☐ obtener una recta perpendicular a un plano coordenado? ¿Qué números directores tendrá?
- ☐ obtener una recta paralela a uno de los planos coordenados? ¿Qué números directores tendrá?
- ☐ decir cuando dos rectas son perpendiculares o paralelas?
- ☐ escribir al menos en dos formas distintas?

TRABAJO PRÁCTICO: LA RECTA

- Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de la recta L de $\mathbb{R}^3$ determinada por:
 - pasa por el $P(2,3,4)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (2,1,1)$
 - pasa por $P(3,4,-1)$ y $Q(2,4,3)$ Qué posición tiene respecto de los planos coordenados?
 - Paralela a cada uno de los ejes coordenados, que pasa por $(1,2,3)$
 - Contiene al punto $(2,1,-3)$ y es perpendicular al plano $4x - 3y + z = 5$
 - Pasa por $(1,1,2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(1,3,5)$ y $(2,1,0)$
 - Pasa por $(1,0,1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $L : (1,2,3) + \lambda(-1,1,2)$.
 - Si una recta está contenida en uno de los planos coordenados, sin ser paralela a ningún eje. ¿Qué números directores tiene?
 - Pasa por el punto $(1,3,5)$ con ángulos $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 60^\circ$
- Encuentra la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela al vector $v = (1,3,1)$ y que pasa por el punto $A(3,4,2)$. Encuentre otros dos puntos de la recta
- Encuentra las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(2,-1,4)$
 - Muestre que $(-1,8,1)$ y $(4,-7,6)$ son puntos de la recta.
- Encuentra las ecuaciones en forma paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $P(6,1,2)$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$
- Dadas las rectas escribe (cuando sea posible) otras dos e identifica su posición:

a. $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{2}$	d. $(x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda(-1,0,2)$
b. $\begin{cases} x = 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$	e. $(x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda(0,2,1)$
c. $S = \{x,y,2x+y\}$	f. $\frac{x+5}{2}; y = 1; z = 2$
	g. $(x,y,z) = \lambda(-1,0,2) + \alpha(0,0,1)$
	h. $S = \{x,x,2x\}$
- Una recta contiene al Punto $(-3,1,1)$ y es paralela al vector $u = (1,-2,3)$. Determina cuáles de los siguientes puntos están en dicha recta:
 - $(0,0,0)$
 - $(1,2,3)$
 - $(-2,-1,4)$
 - $(5,2,-1)$
 - $(-4,3,-2)$

b) Halla el ángulo formado por la recta que pasa por los puntos $(-2,5,-2)$ y $(0,1,3)$ y la recta que pasa por los puntos $(1,-1,-3)$ y $(1,-2,-1)$
- Determina si las siguientes rectas son paralelas

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{10} \quad ; \quad \begin{cases} x = t \\ y = -5 - 2t \\ z = -5t \end{cases}$$

8. Determina si las rectas dadas son perpendiculares.

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2} \quad ; \quad \frac{x-3}{2} = \frac{2y-10}{-8} = \frac{-3+z}{7}$$

9. Sea L la recta de ecuación :

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{2}$$

Determina la ecuación del plano π que contiene a L y al punto $P(-3,2,3)$

10. Dada la recta L que pasa por $(1,2,3)$ y es paralela al vector $(1,1,1)$ y dado un punto $P(2,3,5)$ que no está en L. Halla la ecuación del plano que pasa por P y que contiene todos los puntos de L.

11. Halla el ángulo que forman las rectas $L_1 : x = 1; \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ y L_2 que pasa por $(-2,5, -2)$ y $(0,1,3)$.

12. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3,-3,4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas dadas:

$$\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad ; \quad \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3}$$

13. Sean $P_1(0,0,0)$; $P_2(15,13,0)$; $P_3(17,15,0)$ y $P_4(16,14,18)$

a) Determina la ecuación del plano π que pasa por P_1, P_2 y P_3

b) Determina la recta L tal que $L \perp \pi$ y $P_4 \in L$

ECUACION DE LA RECTA EN $\mathbb{R}^2$

1. Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa:

a) por el punto $A(1, -2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos R y S, siendo $R(-2, 0)$ y $S(0, -1)$.

b) Pasa por los puntos $P(7,4)$ y $Q(-1, -2)$

2. Dada la ecuación general de la recta $4x + 3y - 12 = 0$ escríbela en forma vectorial, paramétrica y simétrica. Determina un vector director y un vector normal.

3. Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y es paralela al vector $(1,1)$

4. Indica un punto que pertenezca a la recta, un vector director y escribe al menos de dos formas distintas, grafica

a. $x - 3 = y + 2$

b. $\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1}$

c. $S = \{(x, 2x+3)\}$

d. $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

e. $x = 4; \frac{y}{-1}$

f. $\frac{x}{2}; y = 2$

g. $2x + 2y = 4$

POSICIÓN Y MAGNITUD

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Sea la recta $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y $\pi: ax + by + cz + d = 0$ siendo

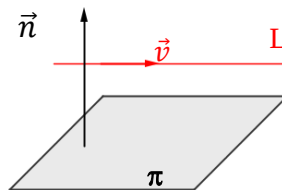
$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el vector director y punto de la recta respectivamente y

$\vec{n} = (a, b, c)$ el vector normal del plano, se deberá cumplir lo siguiente para que la recta sea:

Paralela a un plano

Se verifica que si

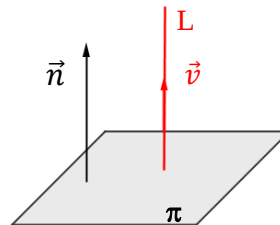
1. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
2. $P_0 \in L \wedge P_0 \notin \pi$



Perpendicular a un plano

Se verifica que si

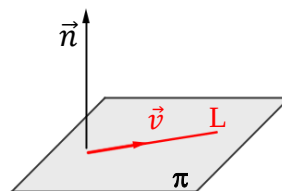
1. $L \perp \pi \Rightarrow \vec{v} // \vec{n}$
2. $\frac{v_x}{a} = \frac{v_y}{b} = \frac{v_z}{c}$



Contenida en el plano

Se verifica que si

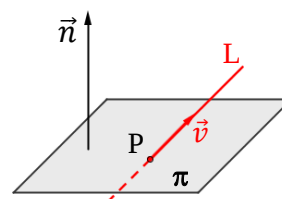
1. $L \subset \pi \Rightarrow L \cap \pi = L$
2. $L \subset \pi \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
3. $P_0 \in L \wedge P_0 \in \pi$



Incidente a un plano

Se verifica que

1. $L \cap \pi \Rightarrow P \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$
2. $P_0 \in L \wedge P_0 \notin \pi$



Y1 Determina la posición relativa entre la recta y el plano.

a. $\pi_1: x + 2y + z + 6 = 0$ $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$

b. $\pi_2: 2x - 3y + z + 4 = 0$ $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{7}$

c. $\pi_3: x - 2y + z + 1 = 0$ $L_3: x = y - 1 = \frac{z-1}{1}$

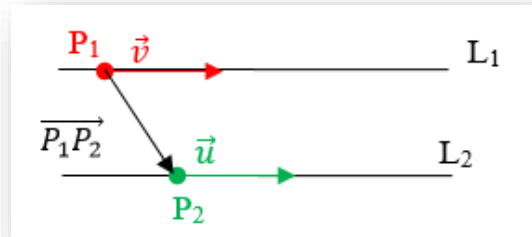
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS sean las rectas

$L_1: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y $L_2: (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + \lambda(u_x, u_y, u_z)$ podrán ser :

Rectas Paralelas

$$L_1 // L_2 \text{ entonces } \vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \neq \lambda \vec{u} \end{cases}$$

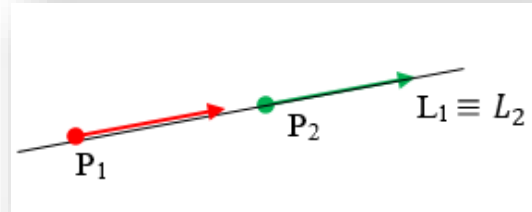
Son coplanares



Rectas Coincidentes

$$L_1 // L_2 \text{ entonces } \vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} = \lambda \vec{u} \end{cases}$$

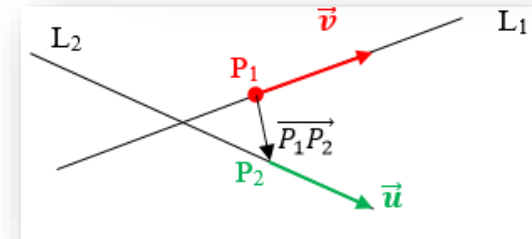
Son coplanares



Rectas Incidentes

$$L_1 \cap L_2 = P \text{ entonces } \begin{cases} \vec{v} \neq \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0 \end{cases}$$

Son coplanares



Rectas Alabeadas L_1 y L_2 son alabeadas si se cumple $\begin{cases} \vec{v} \neq \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \neq 0 \end{cases}$

No son coplanares

CONCLUSIÓN: las rectas pueden ser coplanares o no coplanares

Rectas coplanares si $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ entonces pueden ser $\begin{cases} \text{paralelas} \\ \text{coincidentes} \\ \text{incidentes} \end{cases}$

Rectas no coplanares si $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \neq 0$ son Alabeadas – ninguna de las anteriores

Y2. Determina si los siguientes pares de rectas se intersectan, son paralelas, coincidentes, o alabeadas:

$$\text{a. } L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4} \quad L_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{b. } L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3}; z = 4 \quad L_2: \frac{x+2}{2}; y = 1; z = 4$$

INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO

Para determinar la intersección entre una recta $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y un plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x & (1) \\ y = y_0 + \lambda v_y & (2) \\ z = z_0 + \lambda v_z & (3) \\ ax + by + cz + d = 0 & (4) \end{cases}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en (4) se reduce a una ecuación lineal con una variable λ :

$$a(x_0 + \lambda v_x) + b(y_0 + \lambda v_y) + c(z_0 + \lambda v_z) + d = 0$$

Se pueden presentar tres situaciones.

- a) **Caso I:** Solución única, desde el punto de vista geométrico la recta corta al plano en un punto

$$L \cap \pi \Rightarrow P \quad S = \{(x, y, z)\}$$

- b) **Caso II:** Infinitas soluciones, desde el punto de vista geométrico la recta está incluida en el plano

$$L \subset \pi \Rightarrow L \cap \pi = L \\ S = \{(x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z)\}$$

- c) **Caso III:** Ninguna solución, la recta es externa y paralela al plano $\pi \Rightarrow S = \{\emptyset\}$

Estudia las diferentes situaciones:

Caso I : Sea $L: (x, y, z) = (-2, 0, 4) + \lambda(3, -1, 2)$ y el plano $\pi: 2x + 3y - z + 11 = 0$

Solución: pasando la ecuación de la recta a la forma paramétrica, nos queda junto a la ecuación del plano el siguiente sistema

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda & (1) \\ y = -\lambda & (2) \\ z = 4 + 2\lambda & (3) \\ 2x + 3y - z + 11 = 0 & (4) \end{cases}$$

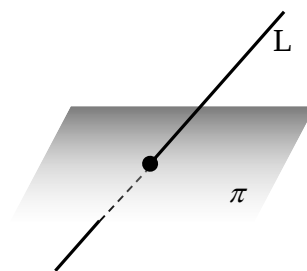
Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en (4)

$$2(-2 + 3\lambda) + 3(-\lambda) - (4 + 2\lambda) + 11 = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y despejando $\lambda = -3$ y sustituyendo en (1), (2), (3)

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

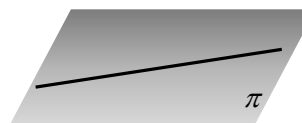
Por lo tanto, $L \cap \pi = P(-11, 3, -2)$ Solución Única



Caso II: Sea $L: (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, -1, -3)$ y $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$

Solución: ídem caso I

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda & (1) \\ y = 1 - \lambda & (2) \\ z = 2 - 3\lambda & (3) \\ x - 2y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$



Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en 4

$$1 + \lambda - 2(1 - \lambda) + 2 - 3\lambda - 1 = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y despejando $0\lambda = 0$

Geoméricamente significa que todo punto de la recta pertenece al plano (o sea la recta está incluida en el plano), para cualquier valor de λ se mantiene la identidad, haz la prueba para diferentes valores de λ ...

El conjunto Solución será la misma recta $S = \{(1 + \lambda, 1 - \lambda, 2 - 3\lambda)\}$

Caso III: Sea $L: (x, y, z) = (-2, 3, 4) + \lambda(5, 2, 3)$ y el plano $\pi: x - y - z + 2 = 0$

Solución: se efectúa el pasaje de la ecuación vectorial de la recta a las formas paramétricas y junto con la ecuación del plano se arma el sistema:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\lambda & (1) \\ y = 3 + 2\lambda & (2) \\ z = 4 + 3\lambda & (3) \\ x - y - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$



Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en 4

$$-2 + 5\lambda - (3 + 2\lambda) - (4 + 3\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 0\lambda = 7 \text{ Absurdo!!!!}$$

Esto quiere decir que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla la igualdad, y geoméricamente significa que no existe intersección entre la recta y el plano, la recta es externa y paralela al plano y el conjunto solución será $S = \{\emptyset\}$

Y3. Halla el conjunto solución entre el plano y la recta hallados en el Y1.

a. $\pi_1: x + 2y + z + 6 = 0$

$$L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$$

b. $\pi_2: 2x - 3y - z + 4 = 0$

$$L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{7}$$

c. $\pi_3: x - 2y + z - 1 = 0$

$$L_3: x = y - 1 = \frac{z-1}{-1}$$

Y4. Dado el plano $\pi: 5x - 3y - z - 6 = 0$,

Demuestra que dicho plano contiene a la recta $L: (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(2, 3, 1)$ y escribe el conjunto solución.

INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Dos rectas en el espacio *si no son paralelas ni coincidentes* se cortan en un punto o son alabeadas. Para saber cuál es el caso podemos realizar el producto doble mixto, si es igual a cero las rectas son coplanares y si no son paralelas ni coincidentes entonces se cortan en un punto.

Para obtener el punto de intersección se igualan las componentes de ambas rectas

$$L_1: (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_x, v_y, v_z) = (x_2, y_2, z_2) + t(u_x, u_y, u_z)$$

$$L_2: \begin{cases} x_1 + \lambda v_x = x_2 + t u_x \\ y_1 + \lambda v_y = y_2 + t u_y \\ z_1 + \lambda v_z = z_2 + t u_z \end{cases}$$

Las incógnitas son los parámetros λ y t de L_1 y L_2 , que dan el punto común de ambas rectas

Observación: en este caso, el sistema formado es compatible. Si no existen valores de λ y t que hagan posible la igualdad, el sistema es incompatible y las rectas no tienen puntos comunes: son alabeadas

- Dadas L_1 y L_2 decidir si las rectas se cortan en un punto o son alabeadas

$$L_1: x - 2 = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Solución:

Paso 1: Pasando L_1 a la forma paramétrica $L_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Paso 2: Igualando ambas ecuaciones $\begin{cases} 2 + \lambda = t & (1) \\ 1 + 4\lambda = 3 + 2t & (2) \\ 3\lambda = 1 - t \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2) nos queda

$$\begin{cases} 2 + \lambda = t \\ 1 + 4\lambda = 3 + 2(2 + \lambda) \rightarrow \lambda = 3 \\ 3\lambda = 1 - t \end{cases}$$

Sustituyendo $\lambda = 3$ en la 3ra ecuación encontramos el valor de $t = -8$

Con los valores de λ y de t vamos al Paso 2, sustituimos los valores hallados, como la igualdad no se cumple las rectas son alabeadas

RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

Dos planos no paralelos, determinan una única recta. ¿Cómo hallar una ecuación vectorial de la misma?

Dados los planos π_1 y π_2 con vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ respectivamente, no paralelos.

La recta L , por ellos determinada, estará dirigida por un vector $\vec{u}$, ortogonal a $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, debido a que $L \in \pi_1$ y $L \in \pi_2$ simultáneamente.

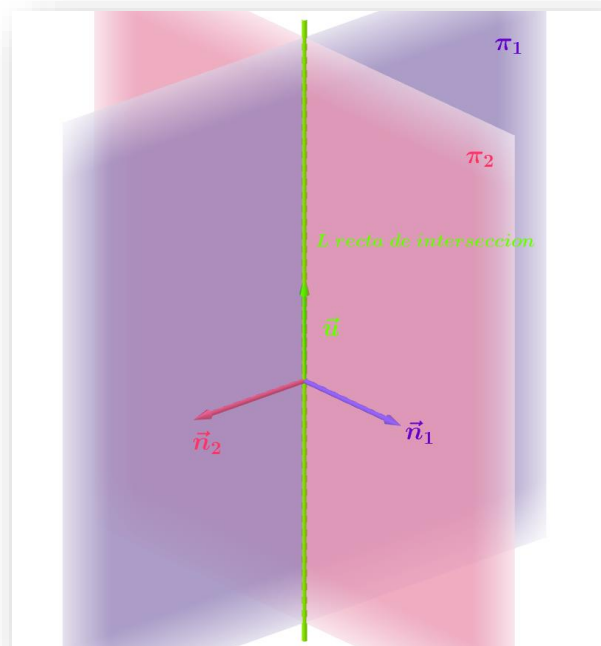
Por consiguiente, debe cumplirse: $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_1 \wedge \vec{u} \perp \vec{n}_2$

Como $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ cumple con este requisito, bastará tomar entonces $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ o cualquier múltiplo escalar. Como punto fijo P_0 puede tomarse cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan simultáneamente las ecuaciones de los dos planos.

Si $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Por lo tanto el sistema formado por ambas ecuaciones determina una recta:

$$L: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



- Encontrar las ecuaciones simétricas de la recta que es intersección de los planos $\pi_1: x - y + z = 1$ y $\pi_2: x + 2y - 3z - 2 = 0$

Solución: necesitamos un punto perteneciente a la recta y un vector director. Para obtener un punto damos a una variable un valor cualquiera, por ejemplo hacemos $z = 0$. Entonces con la ecuación de los planos obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}; y = -\frac{1}{3}$$

Es decir, el punto $P\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ pertenece a la recta pues sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones de π_1 y π_2 .

Para obtener un vector director, podemos tener en cuenta que conocemos dos vectores normales a los planos π_1 y π_2 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, -3)$ respectivamente, como $\vec{n}_1 \perp \pi_1$ y $\vec{n}_2 \perp \pi_2$, entonces el producto vectorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ por ser igual a un vector simultáneamente perpendicular a $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ deberá ser paralelo a la recta intersección buscada y por lo tanto funciona como vector director.

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

A partir de aquí la ecuación se obtiene como en casos anteriores. Si lo hacemos, llegaremos a este resultado:

$$L: \begin{cases} x = \lambda + \frac{4}{3} \\ y = 4\lambda + \frac{1}{3} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

DISTANCIA DE UN PLANO AL ORIGEN DE COORDENADAS

Dada la ecuación del plano $\pi: ax + by + cz = d$ la distancia del plano al origen de coordenadas, será la proyección de un punto del plano sobre el vector normal

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot (a, b, c)$$

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot \frac{d}{b} + c \cdot 0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

Justificación: por eso en la ecuación normal del plano el término independiente determinaba la distancia del plano al origen de coordenadas

$$\frac{ax}{|\vec{n}|} + \frac{by}{|\vec{n}|} + \frac{cz}{|\vec{n}|} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

- Halla la distancia del plano $\pi: 2x + 3y + 6z = 8$ al origen de coordenadas

Solución:

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{\left(0, \frac{8}{3}, 0\right)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \cdot (2, 3, 6) = \frac{0 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{8}{3} + 0 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{8}{7}$$

O aplicando directamente

$$\text{dist}(\pi, O) = \frac{d}{|\vec{n}|} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{8}{7}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

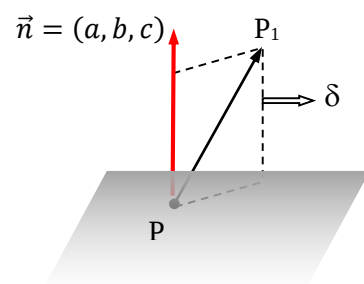
Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \notin \pi$; $P(x, y, z) \in \pi: ax + by + cz = d$

La distancia del punto P_1 al plano π será la longitud δ del segmento determinado por P_1 y el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

Evidentemente si $P_1 \in \pi \Rightarrow \delta = 0$

Se puede calcular de varias maneras, una de ellas es la siguiente:

- determinar un punto P del plano
- amar un vector entre estos dos puntos $\overrightarrow{PP_1}$
- proyectar $\overrightarrow{PP_1}$ sobre el vector normal, que será la distancia (δ) buscada



$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \left| \frac{\overrightarrow{PP_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax + by + cz)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \quad (2)$$

- Calcula la distancia del punto $P_1(1,2,3)$ al plano $\pi : 4x + 4y + 2z = 6$

Solución:

1. En la ecuación del plano se determina un punto, haciendo $x = y = 0$; $z = 3 \rightarrow P(0,0,3)$ con este punto y el punto P_1 se arma un vector
2. $\overrightarrow{PP_1} = (1,2,3) - (0,0,3) = (1,2,0)$
- 3.

$$Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1} = \frac{(1,2,0) \cdot (4,4,2)}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}$$

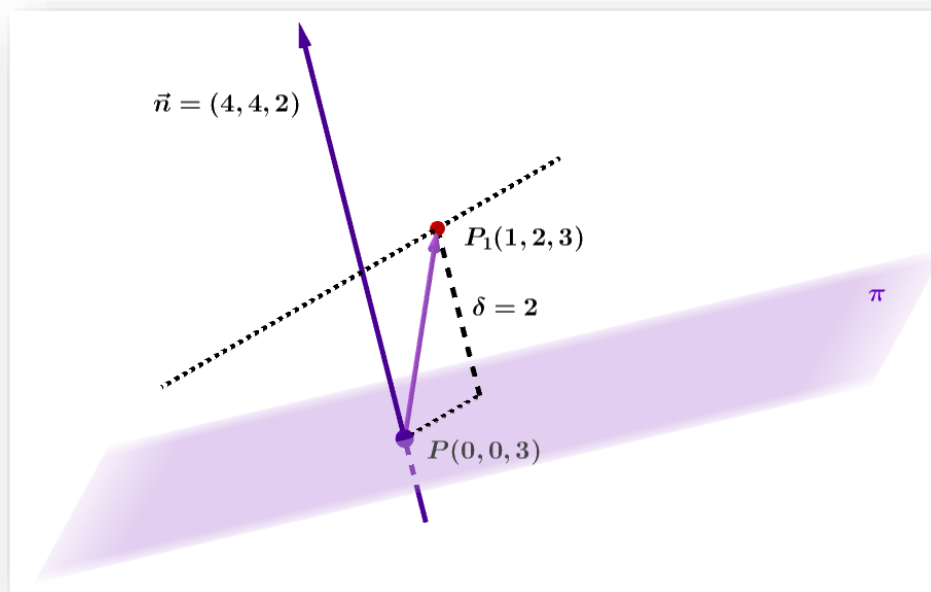
$$Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

- Otra opción:

Utilizando la ecuación (2) si $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 2 \\ d = 6 \end{cases}$ y reemplazando las coordenadas del punto P_1

tendremos

$$d = |Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$



- Otra posibilidad es:

1. Trazar una recta $L \perp \pi$ (... para trazar una recta se necesita un punto de paso de la recta y un vector director), el punto de paso es dato (P_1) y el vector director es equivalente al vector normal del plano ($\vec{v} \equiv \vec{n}$)
2. Luego hacer $L \cap \pi \Rightarrow P$
3. El módulo $|PP_1|$ será la distancia

Solución:

1. Se determina la recta con P_1 y $\vec{n} \equiv \vec{v} = (4, 4, 2)$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \quad (*) \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

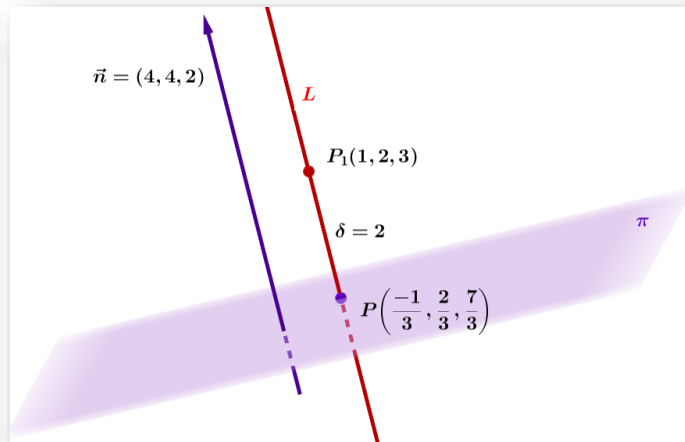
2. Se realiza la intersección entre la recta y el plano, para ello se sustituye (*) en la ecuación del plano $4x + 4y + 2z = 6$

$4(1+4\lambda) + 4(2+4\lambda) + 2(3+2\lambda) = 6$
se aplica propiedad distributiva y se despeja λ

$\lambda = -1/3$ se reemplaza (*) se obtiene

$$P = L \cap \pi \rightarrow P(-1/3; 2/3; 7/3)$$

$$3. |PP_1| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2} = 2$$



DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Con el resultado del punto anterior queda resuelto el problema de hallar la distancia entre dos planos paralelos. Bastará calcular la distancia de un punto perteneciente a uno de ellos, al otro plano

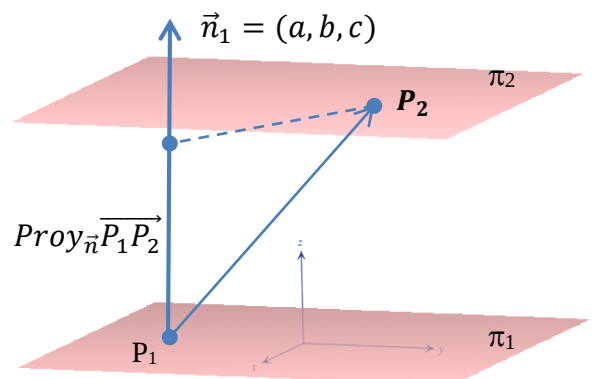
Dos planos son paralelos cuando tienen una normal común o una de ellas es múltiplo de la otra.

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Para calcular la distancia se puede proceder a:

1. Determinar un punto de cada plano
2. Armar un vector entre estos dos puntos $\overrightarrow{P_1P_2}$
3. Proyectar $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre un vector normal

$$d = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$



• Otra forma es calcular la distancia de los planos al origen de coordenadas. Sabiendo que en la ecuación normal del plano el término independiente es la distancia del plano al origen, la distancia entre ambos planos será:

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \left| \frac{d_1 - d_2}{|\vec{n}|} \right| \quad (3)$$

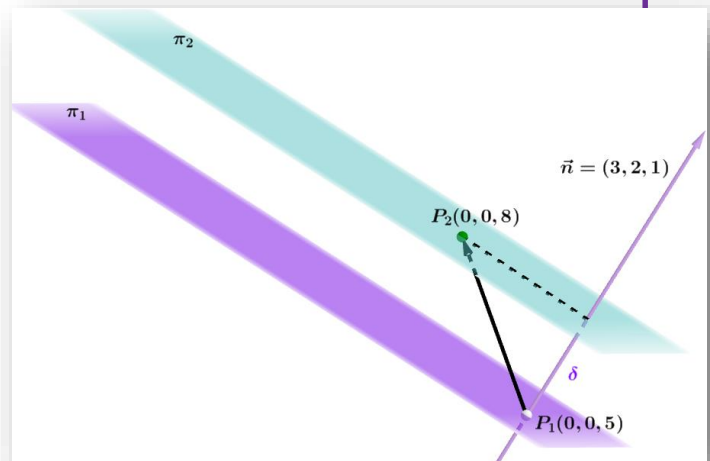
- Calcula la distancia entre $\pi_1 : 3x + 2y + z = 5$ y $\pi_2 : 3x + 2y + z = 8$

Solución:

a) $P_1(0,0,5) ; P_2(0,0,8)$

b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,3)$

$$d = \text{Proy}_{\vec{n}_1} \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{(0,0,3) \cdot (3,2,1)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



- Otra forma de determinar la distancia entre planos paralelos es :

1. Trazar una recta perpendicular a ambos planos utilizando uno cualquiera de los puntos del plano
 $L: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (a, b, c)$
2. Hacer $L \cap \pi_2 \Rightarrow P$
3. $d(\pi_1, \pi_2) = |P_1P| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$

- Con los mismos datos del ejercicio anterior:

Solución: si $\pi_1 : 3x + 2y + z = 5$ $\pi_2 : 3x + 2y + z = 8$

1. $L \perp \pi_1 \rightarrow \vec{v} // \vec{n}_1 \rightarrow \vec{v} = \lambda \vec{n}_1$ construyes la recta

$$L : (0,0,5) + \lambda (3,2,1) \text{ pasando L a la forma paramétrica } L: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} (*)$$

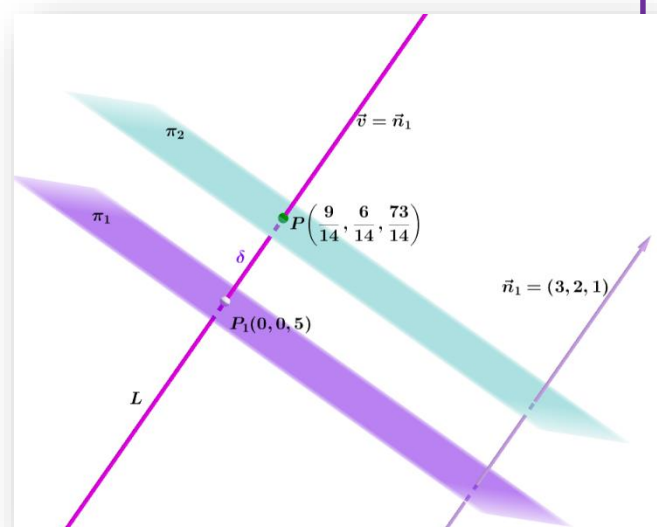
2. $L \cap \pi_2 \rightarrow$ es sustituir las coordenadas de L en la ecuación del plano π_2
 $3x + 2y + z = 8 \rightarrow 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + (5 + \lambda) = 8 \rightarrow \lambda = 3/14$

Sustituyendo λ en *

$$P(9/14, 6/14, 73/14)$$

$$3. |P_1P| = \sqrt{\left(\frac{9}{14}\right)^2 + \left(\frac{6}{14}\right)^2 + \left(\frac{73}{14} - 5\right)^2}$$

$$\delta = |P_1P| = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, $P_0 \in L$; $P_1 \notin L$

Para calcular la distancia de P_1 a L se procede a:

1. Determinar $|\overrightarrow{P_0P_1}| = c$
2. Proyectar $\overrightarrow{P_0P_1}$ sobre vector director de la recta

$$a = |\text{Proy}_{\vec{v}} \overrightarrow{P_0P_1}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right|$$

$$3. \text{dist}(P_1L) = \overline{P_1P} = b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- Otra forma sería sabiendo que:

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_0P_1}}$$

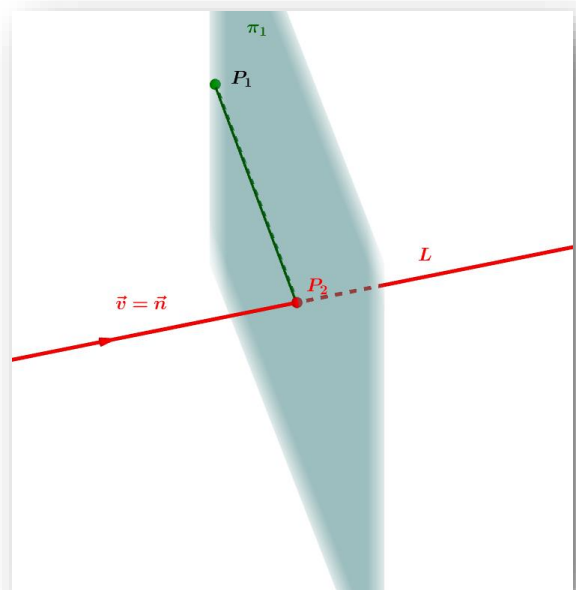
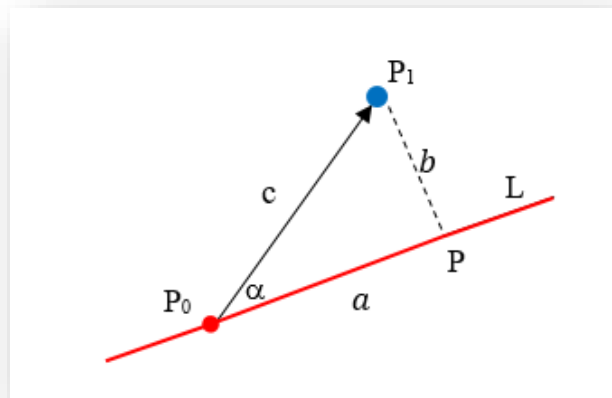
El triángulo P_1PP_0 es recto en el vértice P , luego se verifica que $d(P_1, L) = \overline{P_1P} = |\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot \text{sen} \alpha$ multiplicando y dividiendo por $|\vec{v}|$ tenemos:

$$d(P_1, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen} \alpha}{|\vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- O bien se podría

1. Trazar un plano $\pi_1 \perp L$ y que contenga a P_1
2. Hacer $\pi_1 \cap L \Rightarrow P_2$
3. Calcular

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son múltiplos, o el coseno del ángulo que forman vale 1 ó -1, o el producto vectorial de sus vectores directores es nulo y ningún punto de una recta pertenece a la otra

Para calcular la distancia se procede a:

1. Determinar un plano perpendicular a las rectas por ejemplo: $\pi_1: \overrightarrow{P_1X} \cdot \vec{n} = 0$
2. $L_2 \cap \pi_1 = P_2$
3. Calcular $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

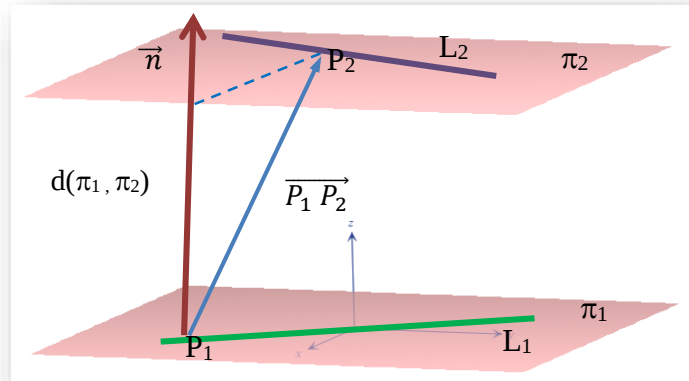
DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

Dadas las rectas L_1 y L_2 cuyos vectores directores son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (no paralelos) es posible hallar un único par de planos paralelos π_1 y π_2 que contengan a ambas rectas, para ello se procede a:

1. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. $P_1 \in L_1 ; P_2 \in L_2 \wedge \vec{n} \perp \pi_1, \pi_2$
3. $d(L_1, L_2) = d(\pi_1, \pi_2)$

• Otra opción es

1. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. $d(L_1, L_2) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$



- Realiza un análisis detallado de la posición entre ambas rectas y luego calcula la distancia

$$L_1: x - 2 = \frac{y-7}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: x - 1 = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

Solución:

$$\vec{u} = (1, 4, -1); P_1(2, 7, 2) \text{ y } \vec{v} = (1, -3, 5); P_2(1, 0, 4)$$

Análisis de paralelismo: $\vec{u} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{4}{-3} \neq \frac{-1}{5} \Rightarrow$ no son paralelas

Análisis de coplanaridad $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ $\overrightarrow{P_1 P_2} = (-1, -7, 2)$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1(20 - 3) + 7(5 + 1) + 2(-3 - 4) \neq 0$$

No son coplanares

Conclusión si las rectas no son paralelas y no son coplanares entonces son alabeadas

Cálculo de distancia

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 17\hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k} = (17, -6, -7)$$

$$d(L_1, L_2) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{(-1, -7, 2) \cdot (17, -6, -7)}{\sqrt{17^2 + 6^2 + 7^2}} =$$

TRABAJO PRÁCTICO - POSICIÓN Y MAGNITUD

- Dadas las rectas: $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = z-1$ $L_2: x = \frac{y}{6} = z-3$. Determina:
 - la posición de una respecto de la otra (paralelas, coincidentes, concurrentes, alabeadas)
 - el conjunto solución
 - calcula la distancia entre ellas de ser posible.
- Dadas las rectas L_1 que pasa por el punto $Q(-1, -3, 0)$ y es paralela al vector $(2, 2/3, -1)$ y la recta L_2 perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 0, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 3, 1)$. Determina:
 - la posición de una respecto de la otra (paralelas, alabeadas, coincidentes)
 - calcula el punto de intersección
 - si fueran paralelas o alabeadas la distancia entre ellas
- Sea la recta $L: \begin{cases} y - z = -3 \\ x = -2 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 3y - 5 = 0$
 - determina la posición relativa entre la recta y el plano y encuentra el conjunto solución
 - halla un plano perpendicular a π que contenga a L
 - calcula la distancia del punto $A(1, 2, 3)$ sobre el plano hallado.
- Calcula la posición relativa entre las rectas y el conjunto solución. Determina la distancia
 - $r_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}; \quad r_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$
 - $r_1: \frac{x-1}{-1} = y-1 = \frac{z-3}{-2}; \quad r_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$
 - $r_1: \frac{x-1}{-1} = y-1 = \frac{z-3}{1}; \quad r_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$
- Sea $L_1: \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y $L_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, b, c)$ se pide:
 - los números reales b y c para que las rectas sean paralelas.
 - para los valores hallados, encuentra la ecuación general del plano que las contiene a ambas
 - para $b = -1$ y $c = 0$, encuentre la distancia entre L_1 y L_2 .
- Sea L la recta de intersección de los planos $\pi_1: 2x + y - z + 30 = 0$ y $\pi_2: x - y + 2z = -1$. Encuentra el ángulo que forma L con el plano $\pi_3: x + y + z = 0$
- Demuestra que:
 - $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{7}$ no está contenida en el plano $2x - 4y + 2z = 8$
 - calcula la distancia entre la recta y el plano.

8. Sea L_1 la recta que pasa por $A(-3,2,1)$ y $B(4,0,0)$ y sea L_2 la recta que pasa por $C(1, -1,2)$ y tiene dirección $\vec{v} = (3,4, -2)$. Determina:

- la posición relativa entre las rectas
- la distancia entre ellas si las rectas fueran paralelas o alabeadas

9. Sea L una recta que pasa por $(1, 1,1)$ y es paralela $\vec{a} = (2, -1,3)$ y π el plano que pasa por $P(1,1, -2)$ y es generado por los vectores $(2,1,3)$ y $(0,1,1)$. Determina la posición relativa entre la recta y el plano.

10. Determina una ecuación del plano que es paralelo a la recta $L_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t, \\ z = t \end{cases}$

y contiene a $L_2: 2(x + 2) = y = 2(z - 1)$

11. El punto $(1,2,3)$ pertenece a la recta L , la que además es paralela a la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 4$; $2x + 3y + 4z = 5$. Halla la ecuación de L

12. Sean $\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x + tz + h = 0 \end{cases}$ y $\pi: x + y + z + 1 = 0$. Determina los valores de t y h para los cuales la recta está incluida en el plano. ¿ Podrías resolver haciendo un sistema con las tres ecuaciones? ¿Cómo debería ser el determinante de la matriz de coeficientes en este caso?

13. Dada la recta $L: (x, y, z) = (1 + t, kt, 2 - t)$ y los puntos $A(-3,1,2)$ y $B(1,2,1)$.

- Halla k si existe tal que B pertenezca a la recta L
- Para $k = 2$ halla la ecuación paramétrica del plano que pasa por A y contiene a la recta L

14. Sea $L: \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$ halla

- el punto de la recta para $z = 1$
- los puntos de intersección de la recta con los planos coordenados
- los cosenos directores de la recta

15. Encontrar la ecuación del plano π que cumple simultáneamente con:

- $(0,0,0) \in \pi$
- $\pi \perp \pi_1$ donde $\pi_1: x + y - z = 1$
- π es paralelo a L donde L es l $x + y + z = 0 \wedge x + 2y - z = 1$

16. Dadas las rectas:

$$L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{n} ; \quad L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = z$$

Calcula el valor de "n" para que L_1 y L_2 sean concurrentes $(2, -3,1)$

EJERCICIOS DE DISTANCIA

- Halla la distancia del punto al plano indicado.
 - $P(-2, 2, 3)$; $\alpha: 2x + y - 12 = 0$
 - $Q(7, 3, 4)$; $\beta: 6x + 3y + 2z - 12 = 0$
 - $R(1, -2, 3)$; $\gamma: 2x - 3y + 2z - 14 = 0$
- Un plano tiene como ecuación general $4x + 4y + 2z - 18 = 0$. Halla
 - la distancia del plano al origen
 - la distancia del punto $M(0, 5, 3)$ al plano
 - el punto Q del plano más próximo al origen
- Calcula la distancia del punto $(1, 0, 2)$ a la recta: $L: \begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$
- Si un plano pasa por $P(2, 3, -5)$ y es paralelo al plano $\gamma: x - 2y + 3z = 6$. ¿Cuál es la distancia entre ambos planos?
- Si un plano pasa por $P(1, 2, -3)$ y es paralelo al plano $\beta: 3x - y + 2z = 4$. ¿Cuál es la distancia entre ambos?
- Dada $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z + 3$. Obtén:
 - el punto donde L corta al plano XZ
 - la distancia entre dicho punto y el plano $\pi: x - 3y + z = 0$
 - la distancia desde el origen a la recta L
- Sean las rectas $L_1: (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(0, -1, 1)$ y $L_2: \begin{cases} y = 1 \\ z = k \end{cases}$ determina los valores de $k \in \mathcal{R}$ tal que la distancia sea igual a 2.
- Halla si es posible, las ecuaciones de los planos con normal $\vec{n} = (4, -2, 4)$ que están a una distancia 5 del punto $P(0, 1, -1)$
- Dados el plano $\pi: 3x + 2y + cz = 12$ y el punto $P(1, -1, 0)$ halla todos los valores de c para los cuales la distancia de P al plano es igual a 3.
- Si $\pi_1: 6x - 3y - 2z = 35$ es paralelo a $\pi_2: 6x - 3y - 2z = -63$, calcula la distancia entre ambos planos.
- Dados el plano $\pi: (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(1, 0, c) + u(0, 1, 0)$ y la recta $L: \begin{cases} x + y - z = -3 \\ x + y + 3z = 9 \end{cases}$
Halla el valor de $c \in \mathcal{R}^+$ tal que el ángulo entre L y π sea igual a 30°
- Dada la recta
 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$
y el punto $M(1, 1, 1)$ que no pertenece a ella, halla el punto simétrico de M respecto de dicha recta.
- Dadas la recta
 $L: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{-h} = z-1$

con $h \neq 0$ y el plano $\pi: x + hy - 15z + k = 0$. Se pide:

- los números reales con $h < 0$ y $k > 25$ tales que $L \parallel \pi$ y la distancia entre ambos sea $\frac{\sqrt{235}}{47}$
- los números reales h y k tales que $L \cap \pi = (1/4, 3/2, 1/4)$