

**FIGURA 6-2** a) Dibujo de un rotor de jaula de ardilla. b) Rotor de jaula de ardilla típico. (Cortesía de General Electric Company.)

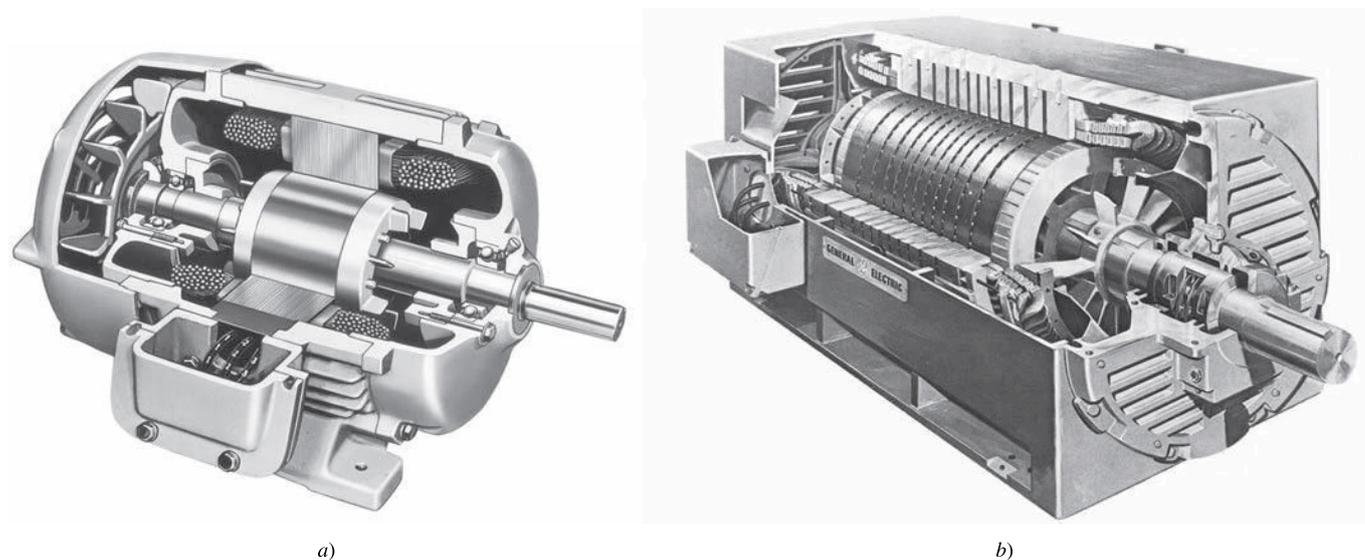
en cortocircuito en alguno de sus extremos mediante grandes *anillos de cortocircuito*. A este diseño se le llama rotor de jaula de ardilla porque los conductores, si se examinan por sí solos, parecen una de las ruedas de ejercicio donde corren las ardillas o hámsters.

El otro tipo de rotor es un rotor devanado. Un *rotor devanado* tiene un conjunto completo de devanados trifásicos que son imágenes especulares de los devanados del estator. Por lo general, las tres fases de los devanados del rotor están conectadas en Y, y los extremos de los tres alambres del rotor están unidos a los anillos rozantes en el eje del rotor. Los devanados del rotor están en cortocircuito por medio de escobillas montadas en los anillos rozantes. Por lo tanto, los rotores devanados de los motores de inducción tienen corrientes en el rotor accesibles en las escobillas del estator, donde se pueden examinar y donde es posible insertar una resistencia extra en el circuito del rotor. Se puede sacar ventaja de este hecho para modificar la característica par-velocidad del motor. En la figura 6-4 se observan dos rotores devanados y en la figura 6-5 se muestra un motor de inducción de rotor devanado.

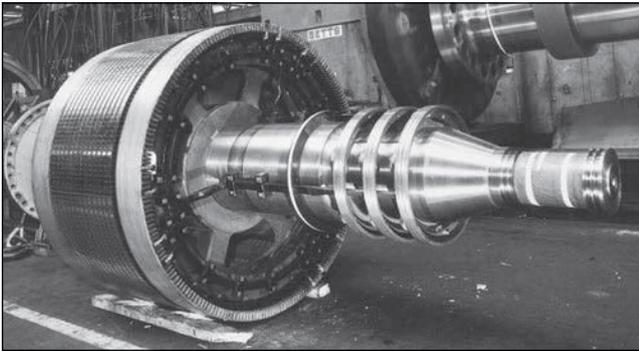
Los rotores devanados de los motores de inducción son más grandes que los motores de inducción de jaula y requieren mucho más mantenimiento debido al desgaste asociado con las escobillas y con los anillos rozantes. Como resultado, rara vez se utilizan en los motores de inducción.

## 6.2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

La operación de los motores de inducción es básicamente igual a la de los motores síncronos con devanados de amortiguamiento. A continuación se hará un repaso de esta opera-



**FIGURA 6-3** a) Diagrama de corte del rotor de jaula de ardilla de un pequeño motor de inducción típico. (Cortesía de MagneTek, Inc.) b) Diagrama de corte del rotor de jaula de ardilla de un gran motor de inducción típico. (Cortesía de General Electric Company.)



a)



b)

**FIGURA 6-4** Rotores devanados típicos de motores de inducción. Nótese los anillos rozantes y las barras que los conectan con los devanados del motor. (Cortesía de General Electric Company.)

ción básica y se definirán ciertos términos importantes de los motores de inducción.

### Desarrollo del par inducido en un motor de inducción

La figura 6-6 muestra un motor de inducción con un rotor de jaula de ardilla. Se aplicó un conjunto trifásico de voltajes al estator y fluye de él un conjunto trifásico de corrientes. Estas corrientes producen un campo magnético  $\mathbf{B}_s$  que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La velocidad de rotación del campo magnético está dada por

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120 f_e}{P} \quad (6-1)$$

donde  $f_e$  es la frecuencia del sistema en hertz y  $P$  es el número de polos en la máquina. Este campo magnético giratorio  $\mathbf{B}_s$  pasa sobre las barras del rotor e induce un voltaje en ellas.

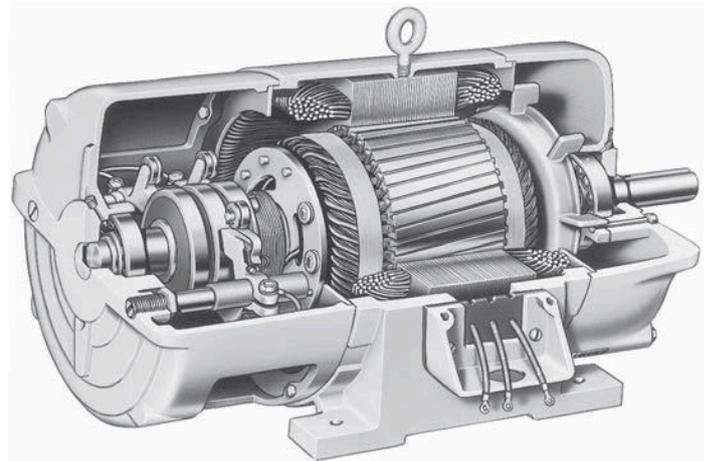
El voltaje inducido en cierta barra de rotor está dado por la ecuación

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \quad (1-45)$$

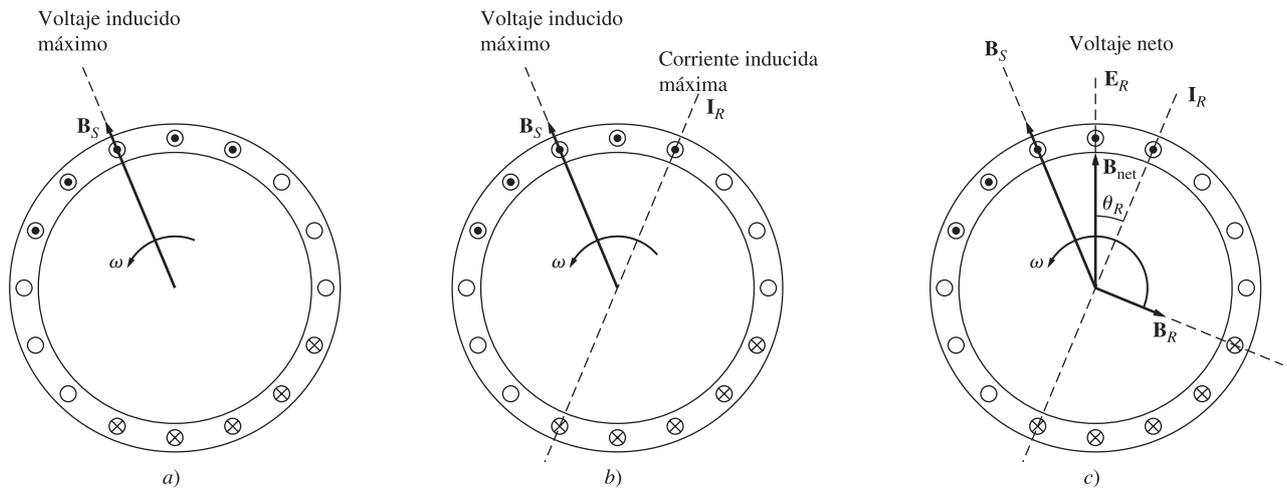
donde

- $\mathbf{v}$  = velocidad de la barra *en relación con el campo magnético*
- $\mathbf{B}$  = vector de densidad de flujo magnético
- $\mathbf{l}$  = longitud del conductor en el campo magnético

Lo que produce el voltaje *inducido* en la barra del rotor es el movimiento *relativo* del rotor en comparación con el campo magnético del estator. La velocidad de las barras superiores del rotor en relación con el campo magnético es hacia la derecha, por lo que el voltaje inducido en las barras superiores va hacia afuera de la página, mientras que el voltaje inducido en las barras inferiores va hacia adentro de la página. Esto tiene como resultado la generación de un flujo de corriente hacia



**FIGURA 6-5** Diagrama de corte de un motor de inducción con rotor devanado. Nótese las escobillas y los anillos rozantes. También nótese que los devanados del rotor están sesgados para eliminar los armónicos de ranura. (Cortesía de MagneTek, Inc.)



**FIGURA 6-6** Desarrollo de un par inducido en un motor de inducción. a) El campo magnético giratorio del estator  $B_S$  induce un voltaje en las barras del rotor; b) el voltaje del rotor produce un flujo de corriente en el rotor, que está en retraso con el voltaje debido a la inductancia del rotor; c) la corriente en el rotor produce un campo magnético en el rotor  $B_R$   $90^\circ$  en retraso con respecto a sí mismo y  $B_R$  interactúa con  $B_S$  para producir un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la máquina.

afuera de las barras superiores y hacia adentro de las barras inferiores. Sin embargo, puesto que el ensamblado del rotor es inductivo, la corriente pico del rotor está detrás del voltaje pico del rotor (véase la figura 6-6b). El flujo de corriente en el rotor produce un campo magnético en el rotor  $B_R$ .

Por último, puesto que el par inducido en la máquina está dado por

$$\tau_{ind} = k B_R \times B_S \tag{3-58}$$

el par resultante va en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Debido a que el par inducido en el rotor va en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el rotor acelera en esa dirección.

Sin embargo, hay un límite superior finito para la velocidad del motor. Si el rotor del motor de inducción gira a *velocidad síncrona*, entonces las barras del rotor estarán estacionarias *en relación con el campo magnético* y no habrá ningún voltaje inducido. Si  $e_{ind}$  fuera igual a cero, entonces no habría corriente en el rotor y no habría campo magnético en él. Sin campo magnético en el rotor, el par inducido sería cero y el rotor reduciría su velocidad como resultado de las pérdidas por fricción. Por lo tanto, un motor de inducción puede acelerar hasta llegar cerca de la velocidad síncrona, pero nunca puede llegar exactamente a ella.

Nótese que durante la operación normal los *campos magnéticos en el rotor y en el estator*  $B_R$  y  $B_S$  *giran juntos a velocidad síncrona*  $n_{sinc}$ , *mientras que el rotor gira a una velocidad menor*.

### Concepto de deslizamiento del rotor

El voltaje inducido en la barra del rotor de un motor de inducción depende de la velocidad del rotor *en relación con los campos magnéticos*. Puesto que la conducta de un motor de inducción depende del voltaje y corriente del rotor, es más lógico hablar de la velocidad relativa. Hay dos términos que se usan regularmente para definir el movimiento relativo del rotor y los campos magnéticos. Uno es la *velocidad de deslizamiento*, que se define como la diferencia entre la velocidad síncrona y la velocidad del rotor:

$$n_{des} = n_{sinc} - n_m \tag{6-2}$$

donde

- $n_{des}$  = velocidad de deslizamiento de la máquina
- $n_{sinc}$  = velocidad de los campos magnéticos
- $n_m$  = velocidad mecánica del eje del motor

El otro término que se utiliza para describir el movimiento relativo es el de *deslizamiento*, que es igual a la velocidad relativa expresada como una fracción de la unidad o un porcentaje. Esto quiere decir que el deslizamiento se define como

$$s = \frac{n_{\text{des}}}{n_{\text{sinc}}} (\times 100\%) \quad (6-3)$$

$$s = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} (\times 100\%) \quad (6-4)$$

Esta ecuación también se puede escribir en términos de velocidad angular  $\omega$  (radianes por segundo) de la siguiente manera

$$s = \frac{\omega_{\text{sinc}} - \omega_m}{\omega_{\text{sinc}}} (\times 100\%) \quad (6-5)$$

Nótese que si el rotor gira a velocidad síncrona,  $s = 0$ , mientras que si el rotor está estacionario o en reposo,  $s = 1$ . Todas las velocidades normales del motor caen dentro de estos dos límites.

Se puede expresar la velocidad mecánica del eje del rotor en términos de la velocidad síncrona y del deslizamiento. Si se despeja la velocidad mecánica de las ecuaciones (6-4) y (6-5) se tiene

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} \quad (6-6)$$

o

$$\omega_m = (1 - s)\omega_{\text{sinc}} \quad (6-7)$$

Estas ecuaciones son muy útiles para deducir el par del motor de inducción y las relaciones de potencia.

## Frecuencia eléctrica en el rotor

Un motor de inducción funciona por medio de la inducción de voltajes y corrientes en el rotor de la máquina y por esta razón a veces se le llama *transformador rotatorio*. Al igual que un transformador, el primario (estator) induce un voltaje en el secundario (rotor), pero a *diferencia* de un transformador, la frecuencia secundaria no es necesariamente igual a la frecuencia primaria.

Si el rotor de un motor se bloquea y no se puede mover, entonces tendrá la misma frecuencia que el estator. Por otro lado, si el rotor gira a velocidad síncrona, la frecuencia en el rotor será cero. ¿Cuál será la frecuencia del rotor dada una tasa arbitraria de rotación del rotor?

En el caso de  $n_m = 0$  r/min, la frecuencia en el rotor es  $f_r = f_e$ , y el deslizamiento es  $s = 1$ . En el de  $n_m = n_{\text{sinc}}$ , la frecuencia en el rotor es  $f_r = 0$  Hz y el deslizamiento es  $s = 0$ . Para cualquier velocidad entre ellas, la frecuencia del rotor es directamente proporcional a la *diferencia* entre la velocidad del campo magnético  $n_{\text{sinc}}$  y la velocidad del rotor  $n_m$ . Puesto que el deslizamiento del rotor se define como

$$s = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} \quad (6-4)$$

la frecuencia en el rotor se puede expresar como

$$f_r = sf_e \quad (6-8)$$

Hay varias maneras útiles de escribir esta expresión. Una de las más comunes se obtiene sustituyendo la ecuación (6-4) del deslizamiento en la ecuación (6-8) y luego sustituyendo por  $n_{\text{sinc}}$  en el denominador de la expresión:

$$f_r = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} f_e$$

Pero  $n_{\text{sinc}} = 120 f_e / P$  [ecuación (6-1)], por lo que

$$f_r = (n_{\text{sinc}} - n_m) \frac{P}{120 f_e} f_e$$

Por lo tanto,

$$f_r = \frac{P}{120} (n_{\text{sinc}} - n_m) \quad (6-9)$$

### EJEMPLO 6-1

Un motor de inducción de 208 V, 10 hp, cuatro polos, 60 Hz, conectado en Y, tiene un deslizamiento a plena carga de 5%.

- ¿Cuál es la velocidad síncrona del motor?
- ¿Cuál es la velocidad del rotor con carga nominal?
- ¿Cuál es la frecuencia del rotor con carga nominal?
- ¿Cuál es el par en el eje del motor con carga nominal?

### Solución

- a) La velocidad síncrona del motor es

$$\begin{aligned} n_{\text{sinc}} &= \frac{120 f_e}{P} \\ &= \frac{120(60 \text{ Hz})}{4 \text{ polos}} = 1\,800 \text{ r/min} \end{aligned}$$

- b) La velocidad del rotor está dada por

$$\begin{aligned} n_m &= (1 - s)n_{\text{sinc}} \\ &= (1 - 0.05)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,710 \text{ r/min} \end{aligned} \quad (6-6)$$

- c) La frecuencia del rotor está dada por

$$f_r = s f_e = (0.05)(60 \text{ Hz}) = 3 \text{ Hz} \quad (6-8)$$

De manera alterna, la frecuencia se puede encontrar con la ecuación (6-9):

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{P}{120} (n_{\text{sinc}} - n_m) \\ &= \frac{4}{120} (1\,800 \text{ r/min} - 1\,710 \text{ r/min}) = 3 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (6-9)$$

- d) El par de carga aplicado al eje está dado por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{carga}} &= \frac{P_{\text{sal}}}{\omega_m} \\ &= \frac{(10 \text{ hp})(746 \text{ W/hp})}{(1\,710 \text{ r/min})(2\pi \text{ rad/r})(1 \text{ min}/60 \text{ s})} = 41.7 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

El par de carga aplicado al eje en sistema inglés está dado por la ecuación (1-17):

$$\tau_{\text{carga}} = \frac{5\,252 P}{n}$$

donde  $\tau$  está en libras-pie,  $P$  en caballos de fuerza y  $n_m$  en revoluciones por minuto. Por lo tanto,

$$\tau_{\text{carga}} = \frac{5\,252(10 \text{ hp})}{1\,710 \text{ r/min}} = 30.7 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

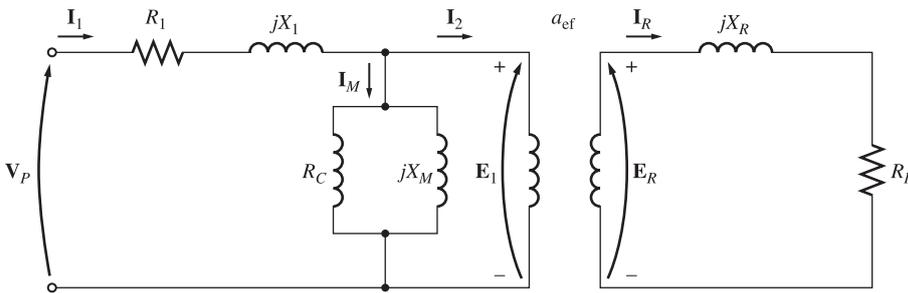
### 6.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN

Para su operación, los motores de inducción dependen de la inducción de voltajes y corrientes en el circuito del rotor desde el circuito del estator (acción transformadora). Puesto que la inducción de voltajes y corrientes en el circuito del rotor de un motor de inducción es esencialmente una operación transformadora, el circuito equivalente de un motor de inducción será muy similar al circuito equivalente de un transformador. A los motores de inducción se les llama máquinas de *excitación única* (a diferencia de las máquinas síncronas de *doble excitación*) porque sólo se suministra potencia al circuito del estator. Puesto que un motor de inducción no tiene un circuito de campo independiente, su modelo no contiene una fuente de voltaje interna como el voltaje interno generado  $E_A$  en las máquinas síncronas.

Se puede deducir el circuito equivalente de un motor de inducción a partir del conocimiento de los transformadores y de lo que se establece en los capítulos anteriores sobre la variación de la frecuencia del rotor con la velocidad en los motores de inducción. El modelo de un motor de inducción se desarrollará a partir del modelo de transformador del capítulo 2 y luego decidiendo cómo tomar en cuenta los efectos de la frecuencia variable del rotor y otros efectos similares en los motores de inducción.

#### Modelo de transformador de un motor de inducción

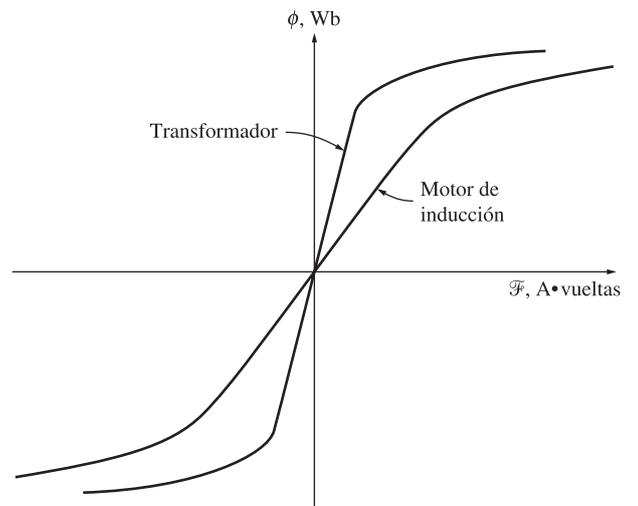
En la figura 6-7 se muestra un circuito equivalente transformador por fase que representa la operación de un motor de inducción. Como cualquier otro transformador, hay cierta resistencia y autoinductancia en los devanados primarios (estator) que se deben representar en el circuito equivalente de la máquina. La resistencia del estator se llama  $R_1$  y la reactancia de dispersión del estator  $X_1$ . Estos dos componentes se pueden ver justo en la entrada del modelo de la máquina.



**FIGURA 6-7** Modelo de transformador de un motor de inducción, con el rotor y el estator conectados por un transformador ideal con una relación de vueltas de  $a_{ef}$ .

Además, como cualquier otro transformador con núcleo de hierro, el flujo en la máquina se relaciona con la integral del voltaje aplicado  $E_1$ . En la figura 6-8 se compara la curva de la fuerza magnetomotriz y el flujo (curva de magnetización) de esta máquina con la curva de un transformador de potencia. Nótese que la pendiente de la curva de la fuerza magnetomotriz y el flujo del motor de inducción es mucho menos pronunciada que la curva de un buen transformador. Esto es porque debe haber un entrehierro en los motores de inducción, que incremente fuertemente la reluctancia del camino del flujo y, por lo tanto, reduzca el acoplamiento entre los devanados primario y secundario. Mientras más alta sea la reluctancia que provoca el entrehierro, mayor será la corriente de magnetización que se requiera para obtener cierto nivel de flujo. Por lo tanto, la reactancia de magnetización  $X_M$  en el circuito equivalente tendrá que ser mucho menor (o la susceptancia  $B_M$  tendrá que ser mucho mayor) de lo que sería en un transformador ordinario.

El voltaje primario interno del estator  $E_1$  se acopla al secundario  $E_R$  por medio de un transformador ideal con una re-



**FIGURA 6-8** Curva de magnetización de un motor de inducción en comparación con la de un transformador.

lación efectiva de vueltas  $a_{ef}$ . La relación efectiva de vueltas  $a_{ef}$  es bastante fácil de determinar en un motor con rotor devanado: básicamente es la relación entre los conductores por fase del estator y los conductores por fase del rotor, modificada por las diferencias entre los factores de paso y de distribución. Es bastante difícil ver claramente  $a_{ef}$  en el caso de un motor con rotor de jaula de ardilla porque no hay diferencias entre los devanados en este tipo de rotor. En cualquier caso, *hay* una relación efectiva de vueltas en el motor.

El voltaje  $E_R$  producido en el rotor en turno produce un flujo de corriente en el circuito del rotor (o del secundario) en cortocircuito de la máquina.

Las impedancias del primario y la corriente de magnetización del motor de inducción son similares a los componentes correspondientes en el circuito equivalente de un transformador. El circuito equivalente de un motor de inducción difiere del circuito equivalente de un transformador, principalmente, en los efectos de variación de la frecuencia en el rotor sobre el voltaje del rotor  $E_R$  y las impedancias del rotor  $R_R$  y  $jX_R$ .

### Modelo de circuito del rotor

Cuando se aplica voltaje a los devanados del estator de un motor de inducción, se induce un voltaje en los devanados del rotor de la máquina. En general, *mientras mayor sea el movimiento relativo entre los campos magnéticos del rotor y del estator, mayor será el voltaje resultante del rotor y la frecuencia del rotor*. El movimiento relativo es más grande cuando el rotor está estacionario y se llama condición de *rotor bloqueado* o de *rotor detenido*, de manera que se inducen el mayor voltaje y frecuencia en el rotor. El menor voltaje (0 V) y frecuencia (0 Hz) se presentan cuando el rotor se mueve a la misma velocidad que el campo magnético del estator, que tiene como resultado que no haya movimiento relativo. La magnitud y frecuencia del voltaje inducido en el rotor en cualquier velocidad entre estos dos extremos es *directamente proporcional al deslizamiento del rotor*. Por lo tanto, si se llama  $E_{R0}$  a la magnitud del voltaje inducido del rotor en condición de rotor bloqueado, la magnitud del voltaje inducido con cualquier deslizamiento está dada por la siguiente ecuación

$$E_R = sE_{R0} \tag{6-10}$$

y la frecuencia del voltaje inducido con cualquier deslizamiento está dada por la siguiente ecuación

$$f_r = sf_e \tag{6-8}$$

Este voltaje se induce en un rotor que consta tanto de resistencia como de reactancia. La resistencia del rotor  $R_R$  es constante (excepto por el efecto superficial o pelicular), independientemente del deslizamiento, mientras que la reactancia del rotor se ve afectada de manera más compleja por el deslizamiento.

La reactancia del rotor de un motor de inducción depende de la inductancia del rotor y de la frecuencia del voltaje y corriente en el rotor. Con una inductancia del rotor de  $L_R$ , la reactancia del rotor está dada por

$$X_R = \omega_r L_R = 2\pi f_r L_R$$

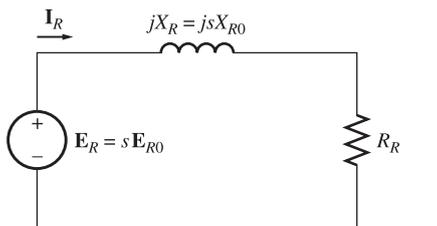


FIGURA 6-9 Modelo de circuito de rotor de un motor de inducción.

De la ecuación (6-8),  $f_r = sf_e$ , tal que

$$\begin{aligned} X_R &= 2\pi sf_e L_R \\ &= s(2\pi f_e L_R) \\ &= sX_{R0} \end{aligned} \tag{6-11}$$

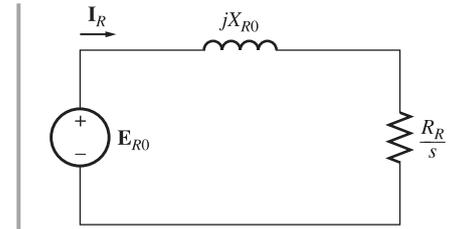
donde  $X_{R0}$  es la reactancia del rotor en estado bloqueado o detenido.

En la figura 6-9 se muestra el circuito equivalente resultante del rotor. El flujo de corriente del rotor es

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_R}{R_R + jX_R}$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_R}{R_R + jsX_{R0}} \tag{6-12}$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_{R0}}{R_R/s + jX_{R0}} \tag{6-13}$$

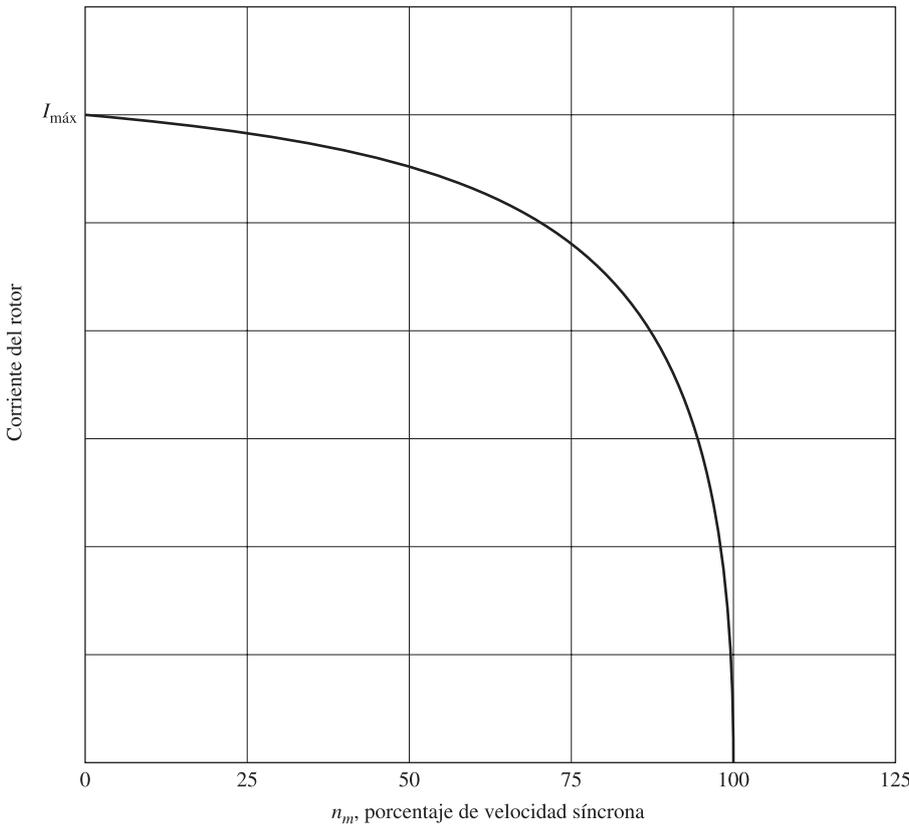


**FIGURA 6-10** Modelo del circuito de rotor con todos los efectos de frecuencia (deslizamientos) concentrados en el resistor  $R_R$ .

Nótese de la ecuación (6-13) que es posible tratar todos los efectos del rotor, debidos a la variación de velocidad de éste, como ocasionados por una *impedancia variable* suministrada con la potencia de una fuente de voltaje constante  $\mathbf{E}_{R0}$ . La impedancia del rotor equivalente desde este punto de vista es

$$Z_{R,eq} = R_R/s + jX_{R0} \tag{6-14}$$

y el circuito equivalente del rotor que utiliza esta convención se puede observar en la figura 6-10. En el circuito equivalente de la figura 6-10, el voltaje del rotor es una constante  $\mathbf{E}_{R0}$  V y su impedancia  $Z_{R,eq}$  contiene todos los efectos de variación del deslizamiento del rotor. En la figura 6-11 se muestra una gráfica del flujo de corriente en el rotor, como se dedujo en las ecuaciones (6-12) y (6-13).



**FIGURA 6-11** Corriente del rotor en función de la velocidad del rotor.

Nótese que con deslizamientos muy bajos, el término resistivo  $R_R/s \gg X_{R0}$ , por lo que predomina la resistencia del rotor mientras que su corriente varía *linealmente* con el deslizamiento. Con deslizamientos altos,  $X_{R0}$  es mucho mayor que  $R_R/s$  y la corriente del rotor *se aproxima al valor en estado estacionario o de rotor bloqueado* conforme el deslizamiento crece.

### Circuito equivalente final

Para producir el circuito equivalente por fase final de un motor de inducción, es necesario referir la parte del rotor del modelo al lado del estator. En la figura 6-10 se muestra el modelo de circuito del rotor al que se referirá el lado del estator, el cual tiene todos los efectos de variación de velocidad concentrados en el término de impedancia.

En un transformador ordinario se pueden referir los voltajes, corrientes e impedancias del lado secundario del aparato al lado primario por medio de la relación de vueltas del transformador:

$$V_p = V'_s = aV_s \tag{6-15}$$

$$I_p = I'_s = \frac{I_s}{a} \tag{6-16}$$

y 
$$Z'_s = a^2Z_s \tag{6-17}$$

donde el superíndice prima se refiere a los valores referidos de voltaje, corriente e impedancia.

Se puede realizar exactamente el mismo tipo de transformación en el caso del circuito del rotor del motor de inducción. Si la relación efectiva de vueltas de un motor de inducción es  $a_{ef}$ , entonces el voltaje transformado del rotor es

$$E_1 = E'_R = a_{ef} E_{R0} \tag{6-18}$$

la corriente del rotor es

$$I_2 = \frac{I_R}{a_{ef}} \tag{6-19}$$

y la impedancia del rotor es

$$Z_2 = a_{ef}^2 \left( \frac{R_R}{s} + jX_{R0} \right) \tag{6-20}$$

Si ahora se define

$$R_2 = a_{ef}^2 R_R \tag{6-21}$$

$$X_2 = a_{ef}^2 X_{R0} \tag{6-22}$$

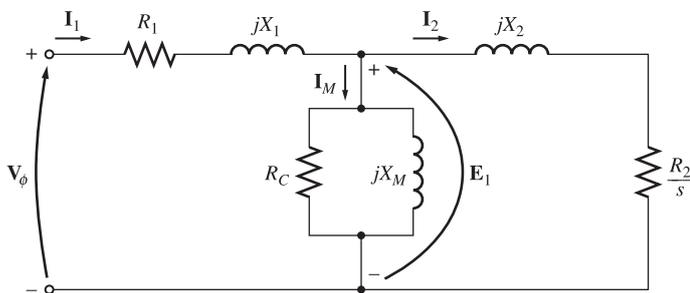


FIGURA 6-12 Circuito equivalente por fase de un motor de inducción.

entonces el circuito equivalente por fase final del motor de inducción es el que se muestra en la figura 6-12.

La resistencia del rotor  $R_R$  y la reactancia del rotor en estado bloqueado  $X_{R0}$  son muy difíciles o incluso imposibles de determinar directamente en los rotores de jaula de ardilla y la relación efectiva de vueltas  $a_{ef}$  también es muy engorrosa de obtener en los rotores de jaula de ardilla. Por suerte, es posible llevar a cabo mediciones que conducirán directamente a la *resistencia y reactancia referidas*  $R_2$  y  $X_2$ , aun cuando  $R_R$ ,  $X_{R0}$  y  $a_{ef}$  no se conozcan por separado. La sección 6.7 se dedicará a la medición de los parámetros de los motores de inducción.

## 6.4 POTENCIA Y PAR EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

Puesto que los motores de inducción son máquinas de una sola excitación, sus relaciones de potencia y par difieren considerablemente de las relaciones en las máquinas síncronas ya estudiadas. Esta sección se dedica a las relaciones de potencia y par en los motores de inducción.

### Pérdidas y diagrama de flujo de potencia

Se puede describir a un motor de inducción básicamente como un transformador rotatorio. Su entrada es un sistema trifásico de voltajes y corrientes. En un transformador ordinario, la salida es la potencia eléctrica de los devanados secundarios. Los devanados secundarios de un motor de inducción (el rotor) están en cortocircuito, por lo que no hay salida de electricidad de los motores normales de inducción. En cambio, la salida es mecánica. La relación entre la potencia eléctrica de entrada y la potencia mecánica de salida del motor se muestra en el diagrama de flujo de potencia de la figura 6-13.

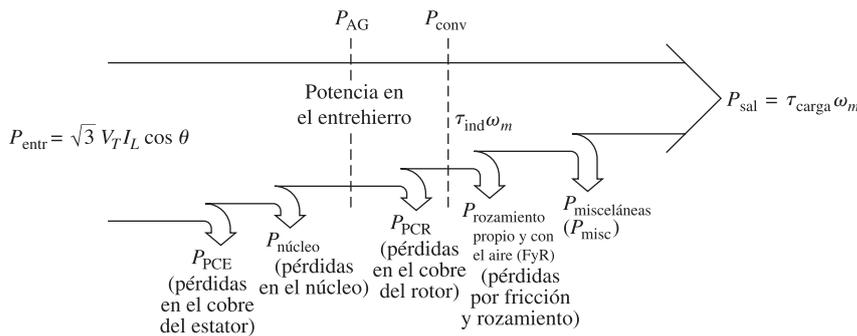


FIGURA 6-13 Diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción.

La potencia de entrada de un motor de inducción  $P_{\text{entr}}$  se presenta en forma de voltajes y corrientes eléctricas trifásicas. Las primeras pérdidas que se encuentran en la máquina son las pérdidas  $I^2R$  en los devanados del estator (las *pérdidas en el cobre del estator*  $P_{\text{PCE}}$ ). Luego se pierde cierta cantidad de potencia por la histéresis y las corrientes parásitas del estator ( $P_{\text{núcleo}}$ ). La potencia restante en este punto se transfiere al rotor de la máquina a través del entrehierro entre el estator y el rotor. Esta potencia se llama *potencia en el entrehierro*  $P_{\text{EH}}$  de la máquina. Una vez que se transfiere la potencia al rotor, una parte de ella se elimina en pérdidas  $I^2R$  (las *pérdidas en el cobre del rotor*  $P_{\text{PCR}}$ ) y el resto se convierte de su forma eléctrica a mecánica ( $P_{\text{conv}}$ ). Por último, se restan las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire  $P_{\text{FyR}}$  y las pérdidas misceláneas  $P_{\text{misc}}$ . La potencia restante es la salida del motor  $P_{\text{sal}}$ .

Las *pérdidas en el núcleo* no siempre aparecen en el diagrama de flujo de potencia en el punto en que se muestra en la figura 6-13. Debido a la naturaleza de las pérdidas en el núcleo, es un tanto arbitrario dónde se toman en cuenta en la máquina. Las pérdidas en el núcleo de un motor de inducción vienen parcialmente del circuito del estator y del circuito del rotor. Puesto que un motor de inducción de manera usual opera a una velocidad muy cercana a la velocidad síncrona, el movimiento relativo de los campos magnéticos sobre la superficie del rotor es muy lento y las pérdidas en el núcleo del rotor son muy pequeñas en comparación con las pérdidas en el núcleo del estator. Puesto que la mayor parte de estas pérdidas en el núcleo se presentan en el circuito del estator, todas las pérdidas en el núcleo se agrupan en ese punto en el diagrama. Estas pérdidas se representan en el circuito equivalente del motor de inducción por medio del resistor  $R_C$  (o de la conductancia  $G_C$ ). Si las pérdidas en el núcleo se describen simplemente con un  $X$  número de watts, en lugar de un elemento de circuito, a menudo se agrupan con las pérdidas mecánicas y se restan en el punto del diagrama donde se ubican las pérdidas mecánicas.

Mientras *mayor* sea la velocidad del motor de inducción, *mayores* serán las pérdidas por fricción, por rozamiento con el aire y misceláneas. Por otro lado, mientras *más alta* sea la velocidad del motor (hasta  $n_{\text{sinc}}$ ), *menores* serán las pérdidas en el núcleo. Por lo tanto, a veces estas tres categorías de pérdidas se agrupan y se denominan *pérdidas rotacionales*. Con frecuencia, las pérdidas rotacionales totales de un motor se consideran constantes frente a la velocidad variable puesto que las pérdidas que la componen cambian en direcciones opuestas frente a un cambio de velocidad.

**EJEMPLO 6-2**

A un motor de inducción trifásico de 480 V, 60 Hz y 50 hp se le suministran 60 A con un factor de potencia de 0.85 en retraso. Las pérdidas de cobre del estator son de 2 kW y las pérdidas en el cobre del rotor son de 700 W. Las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire son de 600 W, las pérdidas en el núcleo son de 1 800 W y las misceláneas son despreciables. Encuentre las siguientes cantidades:

- Potencia en el entrehierro  $P_{EH}$
- Potencia convertida  $P_{conv}$
- Potencia de salida  $P_{sal}$
- Eficiencia del motor

**Solución**

Para responder estas preguntas, remítase al diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción (figura 6-13).

- La potencia en el entrehierro es la potencia de entrada menos las pérdidas  $I^2R$  en el estator y en el núcleo. La potencia de entrada está dada por

$$\begin{aligned} P_{entr} &= \sqrt{3}V_T I_L \cos \theta \\ &= \sqrt{3}(480 \text{ V})(60 \text{ A})(0.85) = 42.4 \text{ kW} \end{aligned}$$

Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia en el entrehierro está dada por

$$\begin{aligned} P_{EH} &= P_{entr} - P_{PCE} - P_{núcl} \\ &= 42.4 \text{ kW} - 2 \text{ kW} - 1.8 \text{ kW} = 38.6 \text{ kW} \end{aligned}$$

- Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia convertida de forma eléctrica a mecánica es

$$\begin{aligned} P_{conv} &= P_{EH} - P_{PCE} \\ &= 38.6 \text{ kW} - 700 \text{ W} = 37.9 \text{ kW} \end{aligned}$$

- Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia de salida está dada por

$$\begin{aligned} P_{sal} &= P_{conv} - P_{FyR} - P_{misc} \\ &= 37.9 \text{ kW} - 600 \text{ W} - 0 \text{ W} = 37.3 \text{ kW} \end{aligned}$$

o, en caballos de fuerza

$$P_{sal} = (37.3 \text{ kW}) \frac{1 \text{ hp}}{0.746 \text{ kW}} = 50 \text{ hp}$$

- Por lo tanto, la eficiencia del motor de inducción es

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{sal}}{P_{entr}} \times 100\% \\ &= \frac{37.3 \text{ kW}}{42.4 \text{ kW}} \times 100\% = 88\% \end{aligned}$$

**Potencia y par de un motor de inducción**

La figura 6-12 muestra el circuito equivalente por fase de un motor de inducción. Si se examina de cerca el circuito equivalente, se puede utilizar para deducir las ecuaciones de la potencia y del par que gobiernan la operación del motor.

La corriente de entrada a una fase del motor se puede encontrar dividiendo el voltaje de entrada entre la impedancia equivalente total:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_\phi}{Z_{\text{eq}}} \quad (6-23)$$

donde

$$Z_{\text{eq}} = R_1 + jX_1 + \frac{1}{G_C - jB_M + \frac{1}{V_2/s + jX_2}} \quad (6-24)$$

Por lo tanto, se pueden encontrar las pérdidas en el cobre del estator, las pérdidas en el núcleo y las pérdidas en el cobre del rotor. Las pérdidas en el cobre del estator en las tres fases están dadas por

$$P_{\text{PCE}} = 3I_1^2 R_1 \quad (6-25)$$

Las pérdidas en el núcleo están dadas por

$$P_{\text{núcl}} = 3E_1^2 G_C \quad (6-26)$$

por lo que la potencia en el entrehierro es de

$$P_{\text{EH}} = P_{\text{entr}} - P_{\text{PCE}} - P_{\text{núcl}} \quad (6-27)$$

Si se mira de cerca el circuito equivalente del rotor, el *único* elemento del circuito equivalente donde se puede consumir potencia en el entrehierro es en el resistor  $R_2/s$ . Por lo tanto, la *potencia en el entrehierro* también se puede obtener así

$$P_{\text{EH}} = 3I_2^2 \frac{R_2}{s} \quad (6-28)$$

Las pérdidas resistivas reales en el circuito del rotor están dadas por la ecuación

$$P_{\text{PCR}} = 3I_R^2 R_R \quad (6-29)$$

Puesto que la potencia no cambia cuando se refiere a través de un transformador ideal, las pérdidas en el cobre del rotor se pueden expresar como

$$P_{\text{PCR}} = 3I_2^2 R_2 \quad (6-30)$$

Una vez que se restan de la potencia de entrada al motor las pérdidas en el cobre del estator, las pérdidas en el núcleo y las pérdidas en el cobre del rotor, la potencia restante se convierte de su forma eléctrica a mecánica. Esta potencia convertida, que a veces se llama *potencia mecánica desarrollada*, está dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{conv}} &= P_{\text{EH}} - P_{\text{PCR}} \\ &= 3I_2^2 \frac{R_2}{s} - 3I_2^2 R_2 \\ &= 3I_2^2 R_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \\ P_{\text{conv}} &= 3I_2^2 R_2 \left( \frac{1-s}{s} \right) \end{aligned} \quad (6-31)$$

Nótese de las ecuaciones (6-28) y (6-30) que las pérdidas en el cobre del rotor son iguales a la potencia en el entrehierro multiplicada por el deslizamiento:

$$P_{\text{PCR}} = sP_{\text{EH}} \quad (6-32)$$

Por lo tanto, mientras menor sea el deslizamiento del motor, menores serán las pérdidas del rotor. Nótese también que si el rotor no gira, el deslizamiento es  $s = 1$  y el rotor consume toda la potencia en el entrehierro. Esto es lógico puesto que si el rotor no gira, la potencia de salida  $P_{\text{sal}} (= \tau_{\text{carga}} \omega_m)$  debe ser cero. Puesto que  $P_{\text{conv}} = P_{\text{EH}} - P_{\text{PCR}}$ , esto también representa otra relación entre la potencia en el entrehierro y la potencia convertida de forma eléctrica a mecánica:

$$\begin{aligned} P_{\text{conv}} &= P_{\text{EH}} - P_{\text{PCR}} \\ &= P_{\text{EH}} - sP_{\text{EH}} \\ P_{\text{conv}} &= (1 - s)P_{\text{EH}} \end{aligned} \quad (6-33)$$

Por último, si se conocen las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire y las pérdidas misceláneas, la potencia de salida se puede encontrar de la siguiente manera

$$P_{\text{sal}} = P_{\text{conv}} - P_{\text{FyR}} - P_{\text{misc}} \quad (6-34)$$

El par inducido  $\tau_{\text{ind}}$  en una máquina se definió como el par generado por la conversión de potencia interna de eléctrica a mecánica. Este par difiere del par realmente disponible en los terminales del motor por una cantidad igual a los pares de fricción y de rozamiento con el aire en la máquina. El par inducido está dado por la ecuación

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m} \quad (6-35)$$

A este par también se le llama *par desarrollado* de la máquina.

El par inducido de un motor de inducción se puede expresar también de otra forma. La ecuación (6-7) expresa la velocidad real en términos de velocidad síncrona y deslizamiento, mientras que la ecuación (6-33) expresa  $P_{\text{conv}}$  en términos de  $P_{\text{EH}}$  y deslizamiento. Sustituyendo ambas ecuaciones en la ecuación (6-35) nos da como resultado

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ind}} &= \frac{(1 - s)P_{\text{EH}}}{(1 - s)\omega_{\text{sinc}}} \\ \tau_{\text{ind}} &= \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \end{aligned} \quad (6-36)$$

Esta última ecuación es en particular útil porque expresa el par inducido de manera directa en términos de potencia en el entrehierro y *velocidad síncrona*, la cual no varía. El conocimiento de  $P_{\text{EH}}$  brinda automáticamente el valor de  $\tau_{\text{ind}}$ .

## Separación de las pérdidas en el cobre del rotor y la potencia convertida en el circuito equivalente de un motor de inducción

Parte de la potencia que pasa a través del entrehierro de un motor de inducción se consume en las pérdidas en el cobre del rotor y parte se convierte en potencia mecánica para hacer girar el eje del motor. Es posible separar los dos usos de la potencia del entrehierro y representarlos por separado en el circuito equivalente del motor.

La ecuación (6-28) nos indica la expresión de la potencia en el entrehierro total de motor de inducción, mientras que la ecuación (6-30) muestra las pérdidas reales en el rotor en el motor. La

potencia en el entrehierro es la potencia que se consumiría en un resistor con valor de  $R_2/s$ , mientras que las pérdidas en el cobre del rotor es la potencia que se consumiría en un resistor con valor de  $R_2$ . La diferencia entre ellos es  $P_{conv}$ , que, por lo tanto, debe ser la potencia consumida en un resistor con valor de

$$R_{conv} = \frac{R_2}{s} - R_2 = R_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right)$$

$$R_{conv} = R_2 \left( \frac{1-s}{s} \right) \tag{6-37}$$

En la figura 6-14 se muestra el circuito equivalente por fase con las pérdidas en el cobre del rotor y la potencia convertida en forma mecánica separadas en dos elementos distintos.

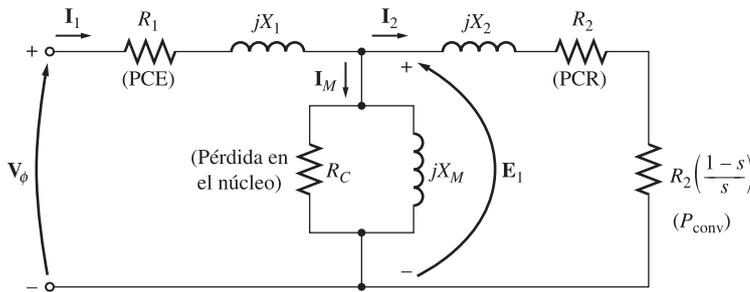


FIGURA 6-14 Circuito equivalente por fase con pérdidas en el rotor y  $P_{núcl}$  separadas.

**EJEMPLO 6-3**

Un motor de inducción con cuatro polos, de 460 V, 25 hp, 60 Hz, conectado en Y, tiene las siguientes impedancias en ohms por fase referidas al circuito del estator:

$$R_1 = 0.641 \Omega \quad R_2 = 0.332 \Omega$$

$$X_1 = 1.106 \Omega \quad X_2 = 0.464 \Omega \quad X_M = 26.3 \Omega$$

Las pérdidas por rotación totales son de 1 100 W y se supone que son constantes. Las pérdidas en el núcleo se agrupan con las pérdidas por rotación. Para un deslizamiento del rotor de 2.2% a voltaje y frecuencia nominales, encuentre las siguientes cantidades del motor:

- a) Velocidad
- b) Corriente del estator
- c) Factor de potencia
- d)  $P_{conv}$  y  $P_{sal}$
- e)  $\tau_{ind}$  y  $\tau_{carga}$
- f) Eficiencia

**Solución**

En la figura 6-12 se muestra el circuito equivalente por fase de este motor y en la 6-13 se puede observar el diagrama de flujo de potencia. Puesto que las pérdidas en el núcleo están agrupadas con las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire y con las pérdidas misceláneas, se tratarán como las pérdidas mecánicas y luego se restarán de  $P_{conv}$  en el diagrama de flujo de potencia.

a) La velocidad síncrona es

$$n_{sinc} = \frac{120 f_e}{P} = \frac{120(60 \text{ Hz})}{4 \text{ polos}} = 1 800 \text{ r/min}$$

o 
$$\omega_{sinc} = (1 800 \text{ r/min}) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ r}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 188.5 \text{ rad/s}$$

La velocidad mecánica del eje del rotor es

$$\begin{aligned} n_m &= (1 - s)n_{\text{sinc}} \\ &= (1 - 0.022)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,760 \text{ r/min} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \omega_m &= (1 - s)\omega_{\text{sinc}} \\ &= (1 - 0.022)(188.5 \text{ rad/s}) = 184.4 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

b) Para encontrar la corriente del estator, obtenga la impedancia equivalente del circuito. El primer paso es combinar la impedancia referida del rotor en paralelo con la rama de magnetización y luego añadir la impedancia del estator a esa combinación en serie. La impedancia referida del rotor es

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{R_2}{s} + jX_2 \\ &= \frac{0.332}{0.022} + j0.464 \\ &= 15.09 + j0.464 \, \Omega = 15.10 \angle 1.76^\circ \, \Omega \end{aligned}$$

La impedancia combinada de magnetización más la del rotor está dada por

$$\begin{aligned} Z_f &= \frac{1}{1/jX_M + 1/Z_2} \\ &= \frac{1}{-j0.038 + 0.0662 \angle -1.76^\circ} \\ &= \frac{1}{0.0773 \angle -31.1^\circ} = 12.94 \angle 31.1^\circ \, \Omega \end{aligned}$$

Por lo tanto, la impedancia total es

$$\begin{aligned} Z_{\text{tot}} &= Z_{\text{estator}} + Z_f \\ &= 0.641 + j1.106 + 12.94 \angle 31.1^\circ \, \Omega \\ &= 11.72 + j7.79 = 14.07 \angle 33.6^\circ \, \Omega \end{aligned}$$

La corriente resultante del estator es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{V}_\phi}{Z_{\text{tot}}} \\ &= \frac{266 \angle 0^\circ \text{ V}}{14.07 \angle 33.6^\circ \, \Omega} = 18.88 \angle -33.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

c) El factor de potencia de la potencia del motor es

$$\text{FP} = \cos 33.6^\circ = 0.833 \quad \text{en retraso}$$

d) La potencia de entrada del motor es

$$\begin{aligned} P_{\text{entr}} &= \sqrt{3}V_T I_L \cos \theta \\ &= \sqrt{3}(460 \text{ V})(18.88 \text{ A})(0.833) = 12\,530 \text{ W} \end{aligned}$$

Las pérdidas en el cobre del estator de esta máquina son

$$\begin{aligned} P_{\text{PCE}} &= 3I_1^2 R_1 && \text{(6-25)} \\ &= 3(18.88 \text{ A})^2(0.641 \, \Omega) = 685 \text{ W} \end{aligned}$$

La potencia en el entrehierro está dada por

$$P_{\text{EH}} = P_{\text{entr}} - P_{\text{PCE}} = 12\,530 \text{ W} - 685 \text{ W} = 11\,845 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia convertida es

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}} = (1 - 0.022)(11\,845 \text{ W}) = 11\,585 \text{ W}$$

La potencia  $P_{\text{sal}}$  está dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{sal}} &= P_{\text{conv}} - P_{\text{rot}} = 11\,585\text{ W} - 1\,100\text{ W} = 10\,485\text{ W} \\ &= 10\,485\text{ W} \left( \frac{1\text{ hp}}{746\text{ W}} \right) = 14.1\text{ hp} \end{aligned}$$

e) El par inducido está dado por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ind}} &= \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \\ &= \frac{11\,845\text{ W}}{188.5\text{ rad/s}} = 62.8\text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

y el par de salida está dado por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{carga}} &= \frac{P_{\text{sal}}}{\omega_m} \\ &= \frac{10\,485\text{ W}}{184.4\text{ rad/s}} = 56.9\text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

(En el sistema inglés, estos pares son de 46.3 y 41.9 lb-pie, respectivamente.)

f) La eficiencia del motor en estas condiciones de operación es

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% \\ &= \frac{10\,485\text{ W}}{12\,530\text{ W}} \times 100\% = 83.7\% \end{aligned}$$

## 6.5 CARACTERÍSTICA PAR-VELOCIDAD DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

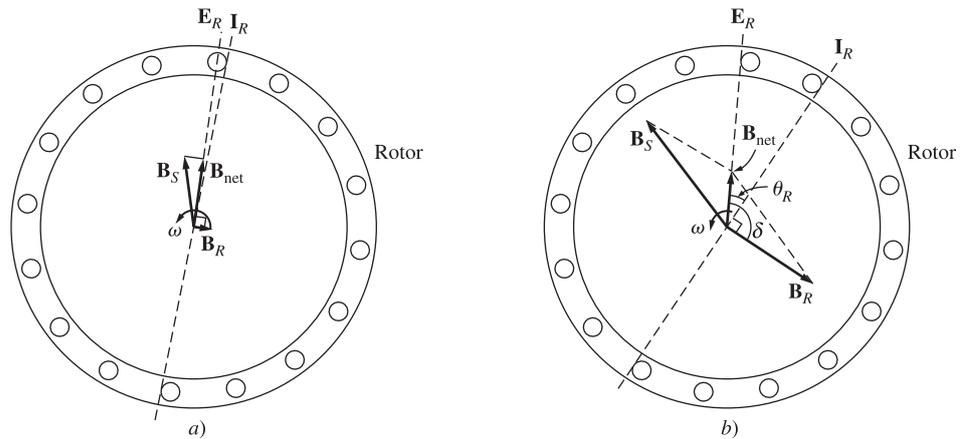
¿Cómo cambia el par de un motor de inducción conforme cambia la carga? ¿Cuánto par puede suministrar un motor de inducción en condiciones de arranque? ¿Cuánto se reduce la velocidad de un motor de inducción a medida que se incrementa la carga en su eje? Para encontrar las respuestas a estas preguntas y a otras similares, se deben entender claramente las relaciones entre el par, la velocidad y la potencia del motor.

A continuación se examinará primero la relación par-velocidad desde el punto de vista físico del comportamiento del campo magnético del motor. Luego se deducirá la ecuación general del par en función del deslizamiento a partir del circuito equivalente del motor de inducción (figura 6-12).

### Par inducido desde el punto de vista físico

La figura 6-15a) muestra el rotor de jaula de un motor de inducción que opera inicialmente en vacío y, por lo tanto, muy cerca de su velocidad síncrona. El campo magnético neto  $\mathbf{B}_{\text{net}}$  en esta máquina lo produce la corriente de magnetización  $\mathbf{I}_M$  que fluye en el circuito equivalente del motor (véase la figura 6-12). La magnitud de la corriente de magnetización y, por consiguiente, de  $\mathbf{B}_{\text{net}}$ , es directamente proporcional al voltaje  $\mathbf{E}_1$ . Si  $\mathbf{E}_1$  es constante, entonces el campo magnético neto en el motor es constante. En una máquina real,  $\mathbf{E}_1$  varía conforme cambia la carga porque las impedancias del estator  $R_1$  y  $X_1$  causan caídas en el voltaje variable ante una carga variable. Sin embargo, estas caídas en los devanados del estator son relativamente pequeñas, por lo que  $\mathbf{E}_1$  (y por lo tanto  $\mathbf{I}_M$  y  $\mathbf{B}_{\text{net}}$ ) es aproximadamente constante ante cambios en la carga.

La figura 6-15a) muestra el motor de inducción en vacío, en cuyo caso, el deslizamiento del rotor es muy reducido y por esto el movimiento relativo entre el rotor y los campos magnéticos es mínimo y también la frecuencia del rotor es muy pequeña. Puesto que el movimiento relativo es mínimo, el voltaje  $\mathbf{E}_R$  inducido en las barras del rotor es muy reducido y el flujo de corriente resultante  $\mathbf{I}_R$  es pequeño. Además, debido a que la frecuencia del rotor es tan pequeña, la reactancia del rotor



**FIGURA 6-15** a) Campos magnéticos en un motor de inducción con cargas ligeras. b) Campos magnéticos en un motor de inducción con cargas pesadas.

es casi igual a cero y la corriente máxima del rotor  $I_R$  está casi en fase con el voltaje del rotor  $E_R$ . Entonces, la corriente del rotor produce un pequeño campo magnético  $B_R$  con un ángulo un poco mayor a  $90^\circ$  por detrás del campo magnético neto  $B_{net}$ . Nótese que la corriente del estator debe ser bastante grande incluso en vacío, puesto que debe alimentar la mayor parte de  $B_{net}$ . (Ésta es la razón por la que los motores de inducción tienen grandes corrientes en vacío en comparación con otros tipos de máquinas.)

El par inducido, que mantiene girando al rotor, está dado por la ecuación

$$\tau_{ind} = k B_R \times B_{net} \tag{3-60}$$

Y su magnitud está dada por

$$\tau_{ind} = k B_R \times B_{net} \text{ sen } \delta \tag{3-61}$$

Puesto que el campo magnético del rotor es muy reducido, el par inducido también es bastante pequeño, pero lo suficientemente grande como para contrarrestar las pérdidas por rotación del motor.

Ahora supóngase que se carga el motor de inducción (figura 6-15b). Conforme se incrementa la carga del motor, aumenta su deslizamiento y se reduce la velocidad del rotor. Puesto que la velocidad del rotor es menor, *el movimiento relativo es mayor* entre el rotor y los campos magnéticos del estator de la máquina. Un mayor movimiento relativo produce un voltaje del rotor  $E_R$  más fuerte que a su vez genera una mayor corriente del rotor  $I_R$ . Con una mayor corriente del rotor, también se incrementa el campo magnético del rotor  $B_R$ . Sin embargo, el ángulo de la corriente del rotor y  $B_R$  también cambian. Puesto que el deslizamiento del rotor es mayor, la frecuencia del rotor aumenta ( $f_r = sf_e$ ) y se incrementa la reactancia del rotor ( $\omega_r L_R$ ). Por lo tanto, la corriente del rotor ahora está más retrasada en comparación con el voltaje del rotor, cuyo campo magnético se desplaza con la corriente. La figura 6-15b) muestra el motor de inducción en operación con una carga bastante grande. Nótese que se elevó la corriente del rotor y que se incrementó el ángulo  $\delta$ . El aumento en  $B_R$  tiende a incrementar el par, mientras que el incremento del ángulo  $\delta$  tiende a disminuir el par ( $\tau_{ind}$  es proporcional a  $\text{sen } \delta$ , y  $\delta > 90^\circ$ ). Puesto que el primer efecto es mayor que el segundo, el par inducido total se eleva para alimentar el incremento de carga del motor.

¿Cuándo alcanza un motor de inducción el par máximo? Esto sucede cuando se llega al punto en que, con un aumento de la carga en el eje, el término  $\text{sen } \delta$  disminuye más de lo que  $B_R$  se incrementa. En este punto, con otro incremento en la carga disminuirá  $\tau_{ind}$  y el motor se detendrá.

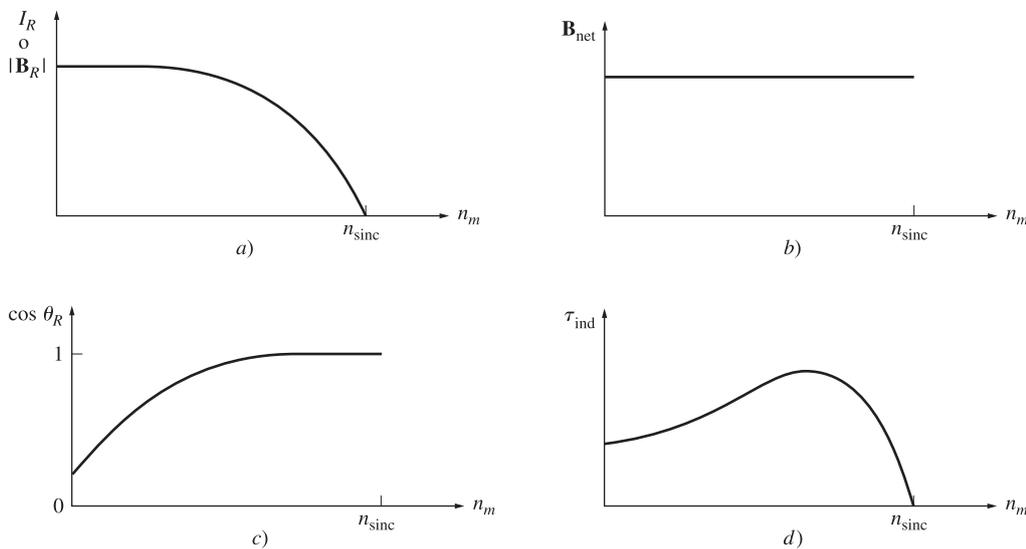
Se puede utilizar el conocimiento de los campos magnéticos de la máquina para deducir aproximadamente la característica de par de salida contra velocidad de un motor de inducción. Recuerdese que la magnitud del par inducido en la máquina está dada por

$$\tau_{ind} = k B_R B_{net} \text{ sen } \delta \tag{3-61}$$

Cada término de esta expresión puede ser considerado por separado para deducir el comportamiento general de la máquina. Los términos individuales son:

1.  $B_R$ . El campo magnético del rotor es directamente proporcional a la corriente que fluye en él siempre y cuando el rotor no esté saturado. El flujo de corriente en el rotor se eleva cuando se incrementa el deslizamiento (disminución de la velocidad) de acuerdo con la ecuación (6-13). En la figura 6-11 y también en la figura 6-16a) se muestra la gráfica del flujo de corriente.
2.  $B_{\text{net}}$ . El campo magnético neto en el motor es proporcional a  $E_1$  y, por lo tanto, es aproximadamente constante ( $E_1$  disminuye en realidad con un incremento del flujo de corriente, pero este efecto es bastante pequeño en comparación con los otros dos y se despreciará en este desarrollo gráfico). En la figura 6-16b) se muestra la curva de  $B_{\text{net}}$  y la velocidad.
3.  $\text{sen } \delta$ . El ángulo  $\delta$  entre los campos magnéticos del rotor y el neto se puede expresar de una manera muy útil. Obsérvese la figura 6-15b). En ella se ve claramente que *el ángulo  $\delta$  es igual al ángulo del factor de potencia del rotor más  $90^\circ$* :

$$\delta = \theta_R + 90^\circ \quad (6-38)$$



**FIGURA 6-16** Desarrollo gráfico de la característica par-velocidad de un motor de inducción. a) Gráfica de la corriente del rotor (y por lo tanto de  $|B_R|$ ) y la velocidad de un motor de inducción; b) gráfica del campo magnético neto y la velocidad del motor; c) gráfica del factor de potencia del rotor y la velocidad del motor; d) característica par-velocidad resultante.

Por lo tanto,  $\text{sen } \delta = \text{sen } (\theta_R + 90^\circ) = \cos \theta_R$ . Este término es el factor de potencia del rotor. El ángulo del factor de potencia del rotor se puede calcular con la ecuación

$$\theta_R = \tan^{-1} \frac{X_R}{R_R} = \tan^{-1} \frac{sX_{R0}}{R_R} \quad (6-39)$$

El factor de potencia del rotor resultante está dado por

$$\text{PF}_R = \cos \theta_R$$

$$\text{PF}_R = \cos \left( \tan^{-1} \frac{sX_{R0}}{R_R} \right) \quad (6-40)$$

En la figura 6-16c) se muestra una gráfica del factor de potencia del rotor y la velocidad.

Puesto que el par inducido es proporcional al producto de estos tres términos, la característica par-velocidad de un motor de inducción se puede construir a partir de la multiplicación gráfica de las tres gráficas anteriores (figura 6-16a) a c). En la figura 6-16d) se muestra la característica par-velocidad de un motor de inducción calculada de esta manera.

La curva de esta característica se puede dividir aproximadamente en tres regiones. La primera es la *región de bajo deslizamiento*. En esta región, el deslizamiento del motor se incrementa de manera aproximadamente lineal conforme aumenta la carga y la velocidad mecánica del rotor disminuye de manera aproximadamente lineal con la carga. En esta región de operación la reactancia del rotor es despreciable, por lo que el factor de potencia del rotor es aproximadamente unitario, mientras que la corriente del rotor se incrementa en forma lineal con el desplazamiento. *Todo el intervalo de operación normal en estado estacionario de un motor de inducción se incluye en esta región de bajo deslizamiento*. Por lo tanto, en la operación normal, un motor de inducción tiene una caída de velocidad lineal.

La segunda región en la curva del motor de inducción se llama *región de deslizamiento moderado*. En esta región la frecuencia del rotor es más alta que antes y la reactancia del rotor tiene el mismo orden de magnitud que la resistencia del rotor. Además, la corriente del rotor ya no se incrementa tan rápidamente como antes y el factor de potencia comienza a disminuir. El par pico (el *par máximo*) del motor se presenta en el punto en que, ante un incremento gradual en la carga, el aumento en la corriente del rotor está perfectamente equilibrado con la disminución del factor de potencia del rotor.

La tercera región en la curva del motor de inducción se llama *región de alto deslizamiento*. En esta región, el par inducido en realidad disminuye ante un incremento de la carga, puesto que el aumento en la corriente del rotor no se percibe debido a la disminución del factor de potencia del rotor.

En un motor de inducción típico, el par máximo en la curva será de 200 a 250% del par nominal a plena carga de la máquina y el *par de arranque* (el par a velocidad cero) será de más o menos 150% del par a plena carga. A diferencia de un motor síncrono, el motor de inducción puede arrancar con plena carga adherida a su eje.

### Deducción de la ecuación del par inducido en el motor de inducción

Se puede utilizar el circuito equivalente de un motor de inducción y el diagrama de flujo de potencia del motor para deducir una expresión general del par inducido en función de la velocidad. El par inducido en un motor de inducción está dado por la ecuación (6-35) o (6-36):

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m} \tag{6-35}$$

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \tag{6-36}$$

La última ecuación es especialmente útil, puesto que la velocidad síncrona es constante para una frecuencia y número de polos dados. Puesto que  $\omega_{\text{sinc}}$  es constante, el conocimiento de la potencia en el entrehierro permite hallar el par inducido en el motor.

La potencia en el entrehierro es la potencia que cruza el espacio entre el circuito del estator y el circuito del rotor. Es igual a la potencia que absorbe la resistencia  $R_2/s$ . ¿Cómo se puede encontrar el valor de esta potencia?

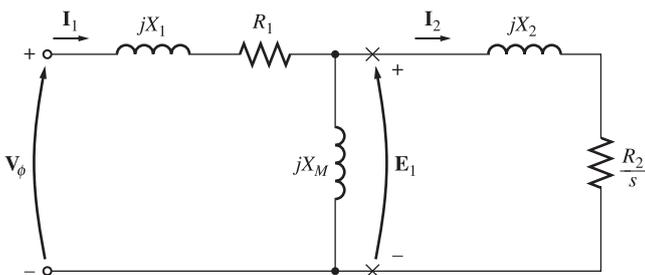


FIGURA 6-17 Circuito equivalente por fase de un motor de inducción.

Remítase al circuito equivalente de la figura 6-17. En ella se puede ver que la potencia en el entrehierro que se suministra a una fase del motor es

$$P_{\text{EH},1\phi} = I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

Por lo tanto, la potencia total en el entrehierro es

$$P_{\text{EH}} = 3I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

Si se puede determinar  $I_2$ , entonces se conocen la potencia en el entrehierro y el par inducido.

Aun cuando hay muchas maneras de resolver el circuito de la figura 6-17 para calcular la corriente  $I_2$ , posiblemente la más fácil es determinar el equivalente de Thevenin de la porción del circuito a la derecha de las  $X$  en la figura. El teorema de Thevenin dice que cualquier circuito lineal que se pueda separar del resto del sistema en dos terminales, se puede reemplazar por una sola fuente de voltaje conectada en serie con una impedancia equivalente. Si se aplicara este teorema al circuito equivalente del motor de inducción, el circuito resultante sería una simple combinación en serie de elementos, como se muestra en la figura 6-18c).

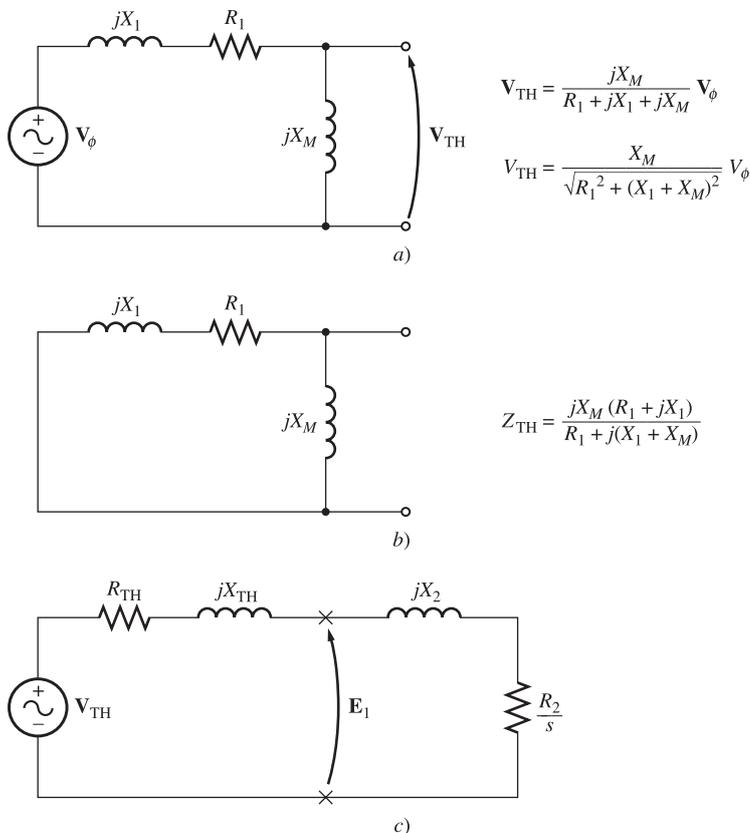
Para calcular el equivalente de Thevenin del lado de entrada del circuito equivalente del motor de inducción, primero se abren los terminales de las  $X$  y se encuentra el voltaje de circuito abierto resultante presente en ese lugar. Luego, para encontrar la impedancia de Thevenin, se hace cortocircuito el voltaje de fase y se encuentra la  $Z_{eq}$  “mirando” hacia adentro de los terminales.

La figura 6-18a) muestra los terminales abiertos que se utilizaron para encontrar el voltaje de Thevenin. De la regla del divisor de voltaje se tiene:

$$\begin{aligned} V_{TH} &= V_{\phi} \frac{Z_M}{Z_M + Z_1} \\ &= V_{\phi} \frac{jX_M}{R_1 + jX_1 + jX_M} \end{aligned}$$

La magnitud del voltaje de Thevenin  $V_{TH}$  es

$$V_{TH} = V_{\phi} \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} \quad (6-41a)$$



**FIGURA 6-18** a) Voltaje equivalente de Thevenin del circuito de entrada de un motor de inducción. b) Impedancia equivalente de Thevenin del circuito de entrada. c) Circuito equivalente resultante simplificado de un motor de inducción.

Puesto que la reactancia de magnetización  $X_M \gg X_1$  y  $X_M \gg R_1$ , la magnitud del voltaje de Thevenin es aproximadamente

$$V_{TH} \approx V_\phi \frac{X_M}{X_1 + X_M} \quad (6-41b)$$

con un alto grado de exactitud.

La figura 6-18b) muestra el circuito de entrada con el voltaje de entrada en cortocircuito. Las dos impedancias están en paralelo y la impedancia de Thevenin está dada por

$$Z_{TH} = \frac{Z_1 Z_M}{Z_1 + Z_M} \quad (6-42)$$

Esta impedancia se reduce a

$$Z_{TH} = R_{TH} + jX_{TH} = \frac{jX_M(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_M)} \quad (6-43)$$

Puesto que  $X_M \gg X_1$  y  $X_M + X_1 \gg R_1$ , la resistencia y reactancia de Thevenin están dadas aproximadamente por

$$R_{TH} \approx R_1 \left( \frac{X_M}{X_1 + X_M} \right)^2 \quad (6-44)$$

$$X_{TH} \approx X_1 \quad (6-45)$$

El circuito equivalente resultante se muestra en la figura 6-18c). En este circuito, la corriente  $I_2$  está dada por

$$I_2 = \frac{V_{TH}}{Z_{TH} + Z_2} \quad (6-46)$$

$$= \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_2/s + jX_{TH} + jX_2} \quad (6-47)$$

La magnitud de esta corriente es

$$I_2 = \frac{V_{TH}}{\sqrt{(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} \quad (6-48)$$

Por lo tanto, la potencia en el entrehierro está dada por

$$\begin{aligned} P_{EH} &= 3I_2^2 \frac{R_2}{s} \\ &= \frac{3V_{TH}^2 R_2/s}{(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2} \end{aligned} \quad (6-49)$$

y el par inducido del rotor está dado por

$$\tau_{ind} = \frac{P_{EH}}{\omega_{sinc}}$$

$$\tau_{ind} = \frac{3V_{TH}^2 R_2/s}{\omega_{sinc} [(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2]} \quad (6-50)$$

En la figura 6-19 se observa la gráfica del par de un motor de inducción en función de la velocidad (y deslizamiento), y en la figura 6-20 se muestra una gráfica de las velocidades por arriba y por debajo del intervalo normal del motor.

### Comentarios sobre la curva par-velocidad del motor de inducción

La curva característica par-velocidad del motor de inducción que se muestra en las figuras 6-19 y 6-20 brinda varios elementos importantes de información sobre la operación de los motores de inducción. Esta información se resume a continuación:

1. El par inducido del motor es cero a velocidad síncrona. Este hecho ya se analizó.
2. La curva par-velocidad es casi lineal entre vacío y plena carga. En este intervalo, la resistencia del rotor es mucho más grande que la reactancia, por lo que la corriente del rotor, su campo magnético y el par inducido aumentan linealmente conforme aumenta el deslizamiento.
3. Hay un par máximo posible que no se puede exceder. Este par, llamado *par máximo* o *par de desviación*, es dos o tres veces el par nominal a plena carga del motor. La siguiente sección de este capítulo contiene un método para calcular el par máximo.
4. El par de arranque del motor es un poco mayor que el par a plena carga, por lo que este motor puede arrancar con cualquier carga que pueda alimentar a plena potencia.
5. Nótese que el par del motor, dado cierto deslizamiento, varía con el cuadrado del voltaje aplicado. Este hecho es útil para una forma de control de velocidad de los motores de inducción que se describirá más adelante.
6. Si la velocidad del rotor del motor de inducción es mayor que la velocidad síncrona, se invierte la dirección del par inducido en la máquina y ésta se convierte en *generador*, que transforma potencia mecánica en potencia eléctrica. Más adelante se describirá el uso de motores de inducción como generadores.
7. Si el motor gira en sentido contrario en relación con la dirección de los campos magnéticos, el par inducido en la máquina la detendrá rápidamente y tratará de hacerla girar en la otra dirección. Puesto que invertir la dirección de rotación de un campo magnético es sólo cuestión de conmutar dos fases del estator, este hecho se puede utilizar para detener con rapidez un motor de inducción. La acción de conmutar dos fases para detener con prontitud el motor se llama *frenado por contracorriente*.

La potencia convertida a su forma mecánica en un rotor de inducción es igual a

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}} \omega_M$$

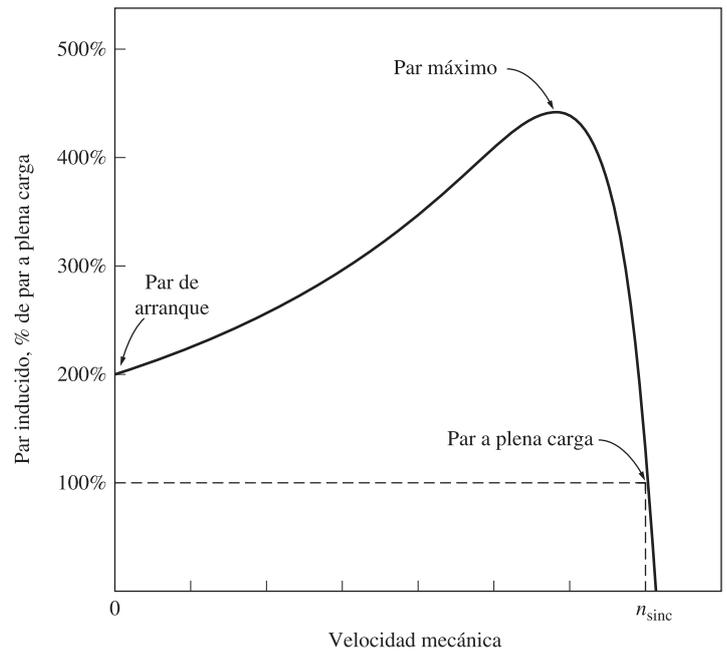


FIGURA 6-19 Curva característica par-velocidad de un motor de inducción típico.

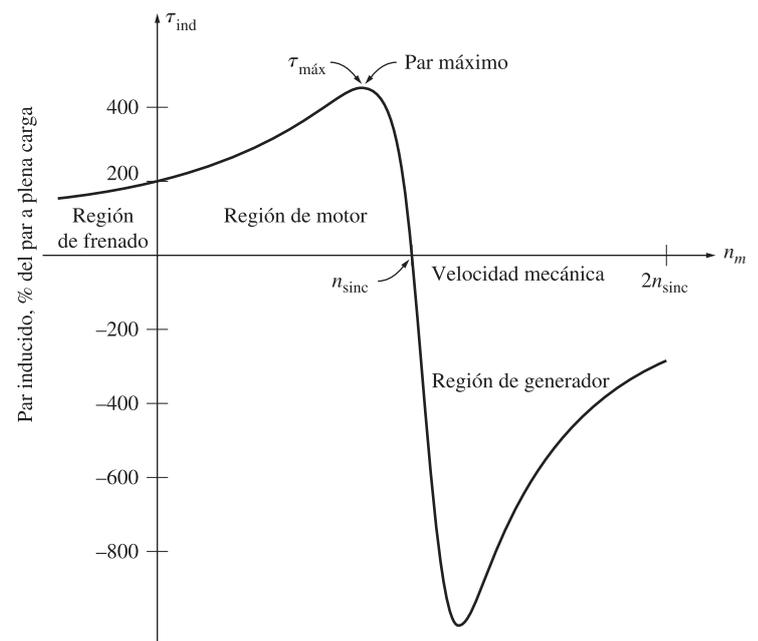
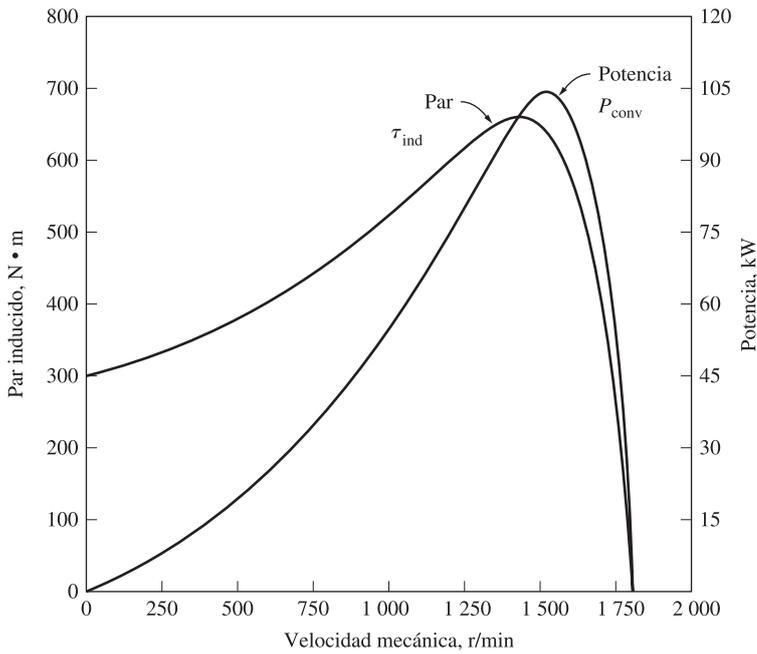


FIGURA 6-20 Curva característica par-velocidad de un motor de inducción que muestra los intervalos extendidos de operación (región de frenado y región de generador).



**FIGURA 6-21** Par inducido y potencia convertida contra la velocidad del motor en revoluciones por minuto como ejemplo de un motor de inducción con cuatro polos.

y su gráfica se muestra en la figura 6-21. Nótese que la potencia pico que suministra el motor de inducción se presenta en una velocidad diferente a la del par máximo; y, por supuesto, cuando el rotor tiene una velocidad igual a cero no se convierte potencia a su forma mecánica.

### Par máximo (par de desviación) en un motor de inducción

Puesto que el par inducido es igual a  $P_{EH}/\omega_{sinc}$ , el par máximo posible se presenta cuando la potencia en el entrehierro es máxima. Puesto que la potencia en el entrehierro es igual a la potencia consumida por el resistor  $R_2/s$ , el *par máximo inducido se presentará cuando la potencia consumida por este resistor sea máxima*.

¿Cuándo es máxima la potencia suministrada a  $R_2/s$ ? Remítase al circuito equivalente simplificado de la figura 6-18c). En una situación donde el ángulo de la impedancia de la carga es fijo, el teorema de máxima transferencia de potencia dice que la potencia máxima que se transfiere al resistor de la carga  $R_2/s$  se presentará cuando la *magnitud*

de esta impedancia sea igual a la *magnitud* de la impedancia de la fuente. La impedancia equivalente de la fuente en el circuito es

$$Z_{fuente} = R_{TH} + jX_{TH} + jX_2 \tag{6-51}$$

por lo que la potencia máxima de transferencia se presenta cuando

$$\frac{R_2}{s} = \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2} \tag{6-52}$$

Si se resuelve la ecuación (6-52) para el deslizamiento, se puede ver que *el deslizamiento para el par máximo está dado por*

$$s_{m\acute{a}x} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} \tag{6-53}$$

Nótese que la resistencia del rotor  $R_2$  sólo aparece en el numerador, por lo que el deslizamiento del rotor para el par máximo es directamente proporcional a la resistencia del rotor.

El valor del par máximo se puede encontrar insertando la expresión del deslizamiento del par máximo en la ecuación del par [ecuación (6-50)]. La ecuación resultante del par máximo es

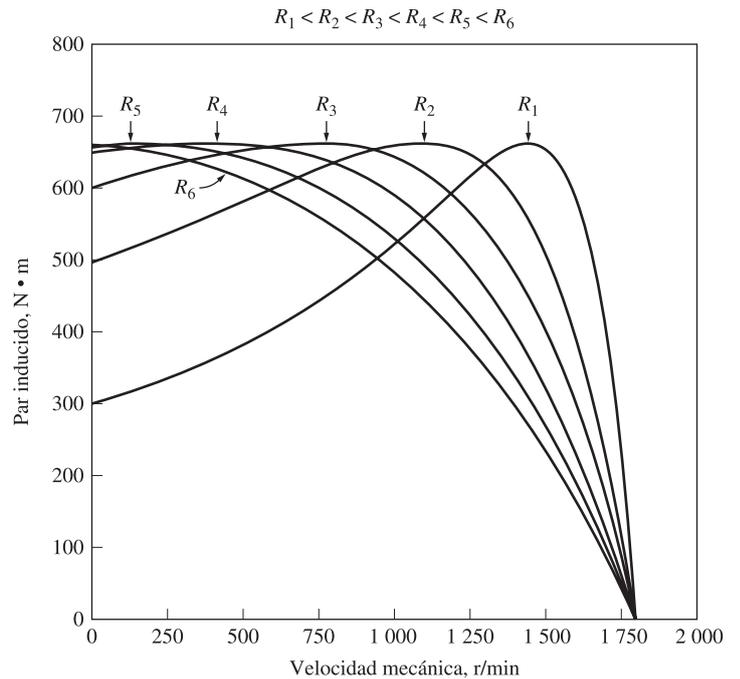
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3V_{TH}^2}{2\omega_{sinc} [R_{TH} + \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2}]} \tag{6-54}$$

Este par es proporcional al cuadrado del voltaje suministrado y también está inversamente relacionado con el tamaño de las impedancias del estator y de la reactancia del rotor. Mientras más pequeñas sean las reactancias de la máquina, mayor será el par máximo que es capaz de alcan-

zar. Nótese que el *deslizamiento* que presenta el par máximo es directamente proporcional a la resistencia del rotor [ecuación (6-53)], pero el *valor* del par máximo es independiente del valor de la resistencia del rotor [ecuación (6-54)].

En la figura 6-22 se muestra la característica par-velocidad de un motor de inducción con rotor devanado. Recuérdese que es posible insertar resistencia en el circuito de un rotor devanado porque el circuito del rotor sale al estator a través de los anillos rozantes. En la figura se puede ver que a medida que se incrementa la resistencia del rotor, la velocidad del par máximo del motor disminuye, pero el par máximo permanece constante.

Es posible sacar ventaja de esta característica del motor de inducción con rotor devanado para arrancar cargas muy pesadas. Si se inserta una resistencia en el circuito del rotor, se puede ajustar el par máximo para que se presente en el arranque. Por lo tanto, el par máximo posible estaría disponible para arrancar cargas pesadas. Por otro lado, una vez que la carga gira, la resistencia extra se puede eliminar del circuito y el par máximo se acelerará hasta llegar casi a la velocidad síncrona de la operación normal.



**FIGURA 6-22** Efecto del cambio de la resistencia del rotor en la característica par-velocidad de un motor de inducción con rotor devanado.

#### EJEMPLO 6-4

Un motor de inducción con dos polos y 50 Hz suministra 15 kW a una carga a una velocidad de 2 950 r/min.

- ¿Cuál es el deslizamiento del motor?
- ¿Cuál es el par inducido en el motor en  $N \cdot m$  en estas condiciones?
- ¿Cuál es la velocidad de operación del motor si se duplica el par?
- ¿Cuánta potencia suministra el motor cuando se duplica el par?

#### Solución

- La velocidad síncrona del motor es

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120f_e}{P} = \frac{120(50 \text{ Hz})}{2 \text{ polos}} = 3\,000 \text{ r/min}$$

Por lo tanto, el deslizamiento del motor es

$$\begin{aligned} s &= \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} (\times 100\%) && (6-4) \\ &= \frac{3\,000 \text{ r/min} - 2\,950 \text{ r/min}}{3\,000 \text{ r/min}} (\times 100\%) \\ &= 0.0167 \text{ o } 1.67\% \end{aligned}$$

- Se debe suponer que el par inducido en el motor es igual al par de carga y también que  $P_{\text{conv}}$  es igual a  $P_{\text{carga}}$ , puesto que no se asignó valor alguno a las pérdidas mecánicas. Entonces, el par es

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ind}} &= \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m} \\ &= \frac{15 \text{ kW}}{(2\,950 \text{ r/min})(2\pi \text{ rad/r})(1 \text{ min}/60 \text{ s})} \\ &= 48.6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

- c) En la región de bajo deslizamiento, la curva par-velocidad es lineal y el par inducido es directamente proporcional al deslizamiento. Por lo tanto, si se duplica el par, entonces el nuevo deslizamiento será de 3.33%. Entonces, la velocidad de operación del motor es

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.0333)(3\,000 \text{ r/min}) = 2\,900 \text{ r/min}$$

- d) La potencia que suministra el motor está dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{conv}} &= \tau_{\text{ind}}\omega_m \\ &= (97.2 \text{ N} \cdot \text{m})(2\,900 \text{ r/min})(2\pi \text{ rad/r})(1 \text{ min}/60 \text{ s}) \\ &= 29.5 \text{ kW} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 6-5

Un motor de inducción con rotor devanado de 460 V, 25 hp, 60 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene las siguientes impedancias en ohms por fase referidas al circuito del estator:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.641 \, \Omega & R_2 &= 0.332 \, \Omega \\ X_1 &= 1.106 \, \Omega & X_2 &= 0.464 \, \Omega & X_M &= 26.3 \, \Omega \end{aligned}$$

- ¿Cuál es el par máximo de este motor? ¿A qué velocidad y deslizamiento se presenta?
- ¿Cuál es el par de arranque del motor?
- ¿Cuándo se duplica la resistencia del rotor? ¿Cuál es la velocidad en que se presenta ahora el par máximo? ¿Cuál es el nuevo par de arranque del motor?
- Calcule y haga la gráfica de la característica par-velocidad del motor tanto con la resistencia del rotor original como con la resistencia del rotor al doble.

### Solución

El voltaje Thevenin del motor es

$$\begin{aligned} V_{\text{TH}} &= V_\phi \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} & (6-41a) \\ &= \frac{(266 \text{ V})(26.3 \, \Omega)}{\sqrt{(0.641 \, \Omega)^2 + (1.106 \, \Omega + 26.3 \, \Omega)^2}} = 255.2 \text{ V} \end{aligned}$$

La resistencia Thevenin es

$$\begin{aligned} R_{\text{TH}} &\approx R_1 \left( \frac{X_M}{X_1 + X_M} \right)^2 & (6-44) \\ &\approx (0.641 \, \Omega) \left( \frac{26.3 \, \Omega}{1.106 \, \Omega + 26.3 \, \Omega} \right)^2 = 0.590 \, \Omega \end{aligned}$$

La reactancia Thevenin es

$$X_{\text{TH}} \approx X_1 = 1.106 \, \Omega$$

- a) El deslizamiento al cual ocurre el par máximo está dada por la ecuación (6-53):

$$\begin{aligned} s_{\text{máx}} &= \frac{R_2}{\sqrt{R_{\text{TH}}^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2}} & (6-53) \\ &= \frac{0.332 \, \Omega}{\sqrt{(0.590 \, \Omega)^2 + (1.106 \, \Omega + 0.464 \, \Omega)^2}} = 0.198 \end{aligned}$$

Esto corresponde a una velocidad mecánica de

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.198)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,444 \text{ r/min}$$

El par a esta velocidad es

$$\begin{aligned}\tau_{\text{máx}} &= \frac{3V_{\text{TH}}^2}{2\omega_{\text{sinc}} [R_{\text{TH}} + \sqrt{R_{\text{TH}}^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2}]} & (6-54) \\ &= \frac{3(255.2 \text{ V})^2}{2(188.5 \text{ rad/s})[0.590 \Omega + \sqrt{(0.590 \Omega)^2 + (1.106 \Omega + 0.464 \Omega)^2}]} \\ &= 229 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

b) El par de arranque del motor se encuentra estableciendo  $s = 1$  en la ecuación (6-50):

$$\begin{aligned}\tau_{\text{arranque}} &= \frac{3V_{\text{TH}}^2 R_2}{\omega_{\text{sinc}} [(R_{\text{TH}} + R_2)^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2]} \\ &= \frac{3(255.2 \text{ V})^2(0.332 \Omega)}{(188.5 \text{ rad/s})[(0.590 \Omega + 0.332 \Omega)^2 + (1.106 \Omega + 0.464 \Omega)^2]} \\ &= 104 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

c) Si se duplica la resistencia del rotor, entonces se duplica también el desplazamiento al cual se presenta el par máximo. Por lo tanto,

$$s_{\text{máx}} = 0.396$$

y la velocidad con el par máximo es

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.396)(1800 \text{ r/min}) = 1087 \text{ r/min}$$

El par máximo sigue siendo

$$\tau_{\text{máx}} = 229 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El par de arranque ahora es

$$\begin{aligned}\tau_{\text{arranque}} &= \frac{3(255.2 \text{ V})^2(0.664 \Omega)}{(188.5 \text{ rad/s})[(0.590 \Omega + 0.664 \Omega)^2 + (1.106 \Omega + 0.464 \Omega)^2]} \\ &= 170 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

d) Se creará un archivo M de MATLAB para calcular y hacer una gráfica de la característica par-velocidad del motor tanto con la resistencia del rotor original como con la resistencia del rotor al doble. El archivo M calculará la impedancia de Thevenin con las ecuaciones exactas de  $V_{\text{TH}}$  y  $Z_{\text{TH}}$  [ecuaciones (6-41a) y (6-43)] en lugar de las ecuaciones aproximadas, puesto que la computadora puede realizar fácilmente las operaciones exactas. Luego calculará el par inducido con la ecuación (6-50) y hará una gráfica con los resultados. El archivo M resultante se muestra a continuación:

```
% Archivo M: torque_speed_curve.m
% Archivo M para crear una gráfica de la curva par-velocidad del
% motor de inducción del ejemplo 6-5.

% Primero, inicializar los valores requeridos en el programa.
r1 = 0.641;           % Resistencia del estator
x1 = 1.106;          % Reactancia del estator
r2 = 0.332;          % Resistencia del rotor
x2 = 0.464;          % Reactancia del rotor
xm = 26.3;           % Reactancia de la rama de magnetización
v_phase = 460 / sqrt(3); % Voltaje de fase
n_sync = 1800;        % Velocidad síncrona (r/min)
w_sync = 188.5;      % Velocidad síncrona (rad/s)

% Calcular el voltaje e impedancia de las
% ecuaciones 6-41a y 6-43.
v_th = v_phase * ( xm / sqrt(r1^2 + (x1 + xm)^2) );
```

```

z_th = ((j*xm) * (r1 + j*x1)) / (r1 + j* (x1 + xm));
r_th = real (z_th);
x_th = imag(z_th);

% Ahora calcular la característica par-velocidad para muchos
% deslizamientos entre 0 y 1. Nótese que el primer valor de
% deslizamiento será 0.001 en lugar de 0 exactamente para evitar
% problemas con
% la división entre 0.
s = (0:1:50) / 50;           % Deslizamiento
s(1) = 0.001;
nm = (1 - s) * n_sync;      % Velocidad mecánica

% Calcular el par para la resistencia del rotor original
for ii = 1:51
    t_ind1(ii) = (3 * v_th^2 * r2 / s(ii)) / ...
        (w_sync * (r_th + r2/s(ii))^2 + (x_th + x2)^2 );
end

% Calcular el par para la resistencia del rotor al doble
for ii = 1:51
    t_ind2(ii) = (3 * v_th^2 * (2*r2) / s(ii)) / ...
        (w_sync * ((r_th + (2*r2)/s(ii))^2 + (x_th + x2)^2 ) );
end

% Hacer la gráfica de la curva par-velocidad
plot(nm,t_ind1, 'Color', 'k', 'LineWidth',2.0);
hold on;
plot(nm,t_ind2,'Color','k','LineWidth',2.0,'LineStyle','-'); xlabel('\bf\itn_
{m});
ylabel('\bf\tau_{ind});
title ('\bf Característica par-velocidad de un motor de inducción');
legend ('R_{2} original', 'R_{2} duplicada');
grid on;
hold off;

```

En la figura 6-23 se muestra la característica par-velocidad resultante. Nótese que los valores del par pico y del par de arranque en las curvas son iguales a los que se obtuvieron del inciso a) al c). Además, nótese que el par de arranque del motor se eleva conforme se incrementa  $R_2$ .

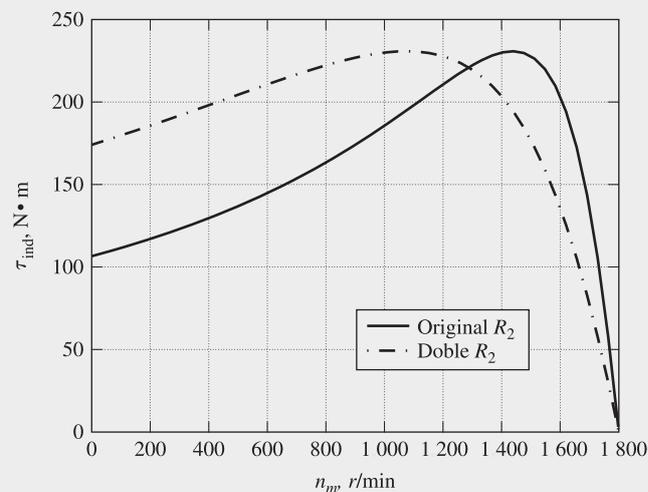


FIGURA 6-23 Características par-velocidad del motor del ejemplo 6-5.