

 MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES FACULTAD DE INGENIERIA	<b>MECÁNICA RACIONAL</b>	<b>AÑO</b>
<b>FACULTAD DE INGENIERIA</b>	<b>Trabajo Práctico N° 1</b>	<b>2025</b>
	<b>Álgebra tensorial</b>	

### Ejercicios propuestos:

**Ejercicio 1.** Dados los vectores  $A = [1, 2, 4]$ ,  $B = [2, 1, 5]$  y  $M = [-1, 3, 4]$ , cuyas coordenadas están referidos al sistema referencial  $(x, y, z)$ .

El sistema referencial  $(x', y', z')$  está relacionado con el  $(x, y, z)$  por la rotación representada por la matriz  $[R]$ .

$$[R] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones:

- Aplicar el tensor  $(A \otimes B)$  al vector  $M$ .
- Aplicar el tensor  $(A' \otimes B')$  al vector  $M'$
- Verificar el invariante escalar y el vectorial de  $(A \otimes B)$  y  $(A' \otimes B')$

**Ejercicio 2.** Dado el tensor  $[T]$  con sus componentes en el sistema referencial  $(x, y, z)$ . Se pide:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determinar su representación en el sistema  $(x', y', z')$ , tal que  $x' = -y$ ,  $y' = x$ ,  $z' = z$
- descomponer al tensor  $[T]$  en una suma de tensores, uno simétrico y otro anti-simétrico.

**Ejercicio 3.** Dada la matriz  $[M] = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

- indicar cuáles de los siguientes vectores, son vectores propios de  $[M]$   
 $V_1 = [1, -2, -2]$ ;  $V_2 = [1, 2, -2]$ ;  $V_3 = [-4, -2, -4]$ ;  $V_4 = [3, 7, 5]$ ;  $V_5 = [-8, 8, 4]$ ;  $V_6 = [2, -1, 3]$ ;  $V_7 = [-1, -2, 2]$
- Determinar el factor de proporcionalidad  $\lambda$
- En caso de existir dos o más vectores propios y no ser coloniales, verificar su ortogonalidad

**Ejercicio 4.** Se tiene el siguiente tensor de inercia  $[I]$ . El mismo corresponde a un sólido de forma cilíndrica y densidad de masa constante.

La representación del tensor  $[I]$  en el sistema  $xyz$  es la siguiente:

$$[I] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- Determinar la ecuación secular o característica
- Determinar los autovalores y los autovectores del tensor de inercia.
- Expresar el tensor  $[I]$  en el sistema  $x'y'z'$ , cuya base son los autovectores normalizados de  $[I]$
- Realice una representación gráfica de los sistemas "x y z" y "x' y' z'", luego, ubique el cilindro en el dibujo.
- Considere los siguientes vectores expresados en "x y z":  $\omega_1 = [3; 2\sqrt{3}; 2]$ ;  $\omega_2 = [3; (7\sqrt{3})/2; 7/2]$ ;  $\omega_3 = [-2; \sqrt{3}; 1]$ ;  $\omega_4 = [-2; -\sqrt{3}; -1]$ . Aplicar a los mismos el operador  $[I]$ . Luego, expresar los vectores momento angular  $L$  resultantes en el sistema "x'y'z'" y representar gráficamente junto con los vectores  $\omega$ . Destacar los aspectos notables que se encuentran.

**Ejercicio 5.** Dado la forma cuadrática  $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$ , determinar el tensor al cual está asociada, reducir a la forma diagonalizada y obtener la transformación ortogonal correspondiente.

**Ejercicio 6.** Sea el sólido con forma de tetraedro recto, mostrado en la figura 1. El tensor de inercia referido a los ejes (x,y,z) tiene por expresión [I]. Hallar los ejes principales, y mostrarlos en el dibujo en forma conjunta con el tetraedro.

$$[I] = \frac{Ma^2}{40} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

M es la masa total del tetraedro

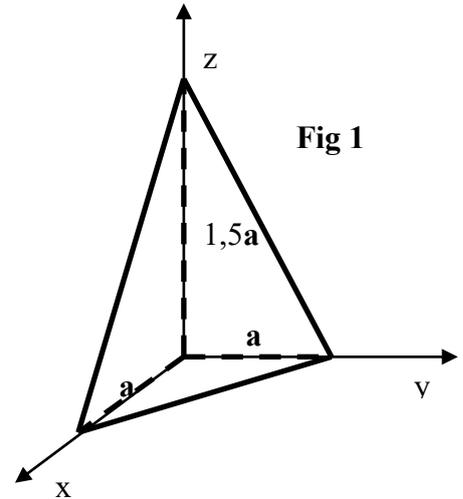


Fig 1

**Ejercicio 7.** Sea la distribución de masas mostrada en la figura 2. Despreciando las masas de las barras, y considerando las esferas como masas puntuales, determine el tensor de inercia referido a los ejes (x,y,z). Luego, obtenga los ejes principales. Dibuje los ejes principales, y demuestre que el tensor de inercia referido a los ejes principales es diagonal.

Nota: Para masas puntuales (m):

$J_{xx} = (D_x)^2 m$  [ $D_x$  es la distancia desde la masa hasta el eje x]

$J_{xy} = -mxy$  [ $x$  = coordenada "x" de la masa,  $y$  = coordenada "y" de la masa]

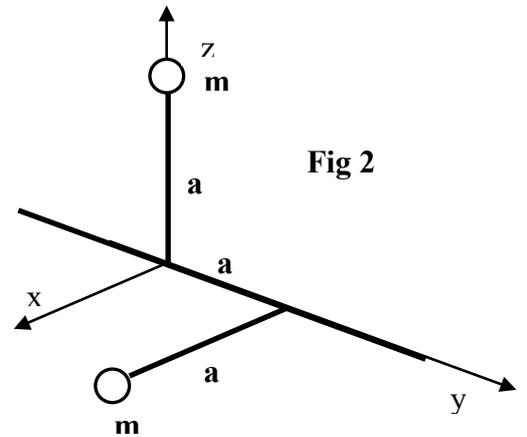


Fig 2