Facultad de Ingeniería
OBERA

ESTADÍSTICA APLICADA A LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Unidad 3:
Estadística Inferencial

ESTADÍSTICA INFERENCIAL

La **estadística inferencial** es la rama de la estadística que se encarga de **analizar datos muestrales para hacer generalizaciones, estimaciones o tomar decisiones sobre una población**.

Las **ramas principales de la inferencia estadística** son dos:

1. Estimación de parámetros

Métodos para **aproximar valores desconocidos** de la población usando datos muestrales.

2. Pruebas de hipótesis

Procedimientos para **tomar decisiones** sobre afirmaciones o supuestos de la población, basados en la evidencia muestral.

DISTRIBUCIÓN NORMAL (1)

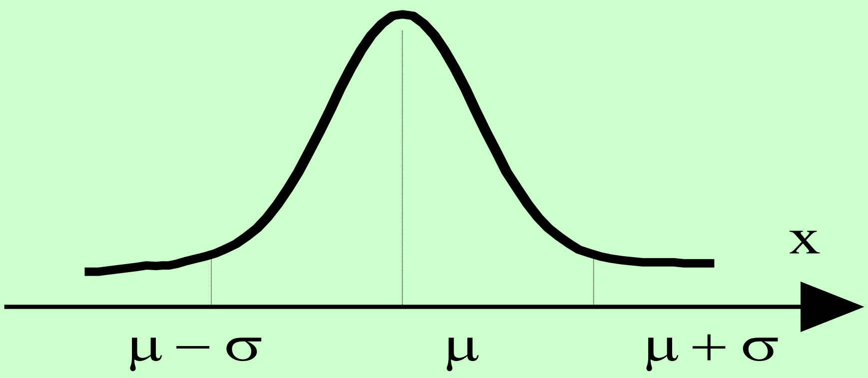
Definición: La función de densidad de la **variable aleatoria normal X**, con media μ y varianza σ^2 es:

$$f(x) = n(x,\mu,\sigma) = N(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \begin{cases} -\infty \le x \le \infty \\ -\infty \le \mu \le \infty \\ \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

donde $\pi = 3{,}14159$ y $e = 2{,}71828$

$$X \sim n(x,\mu,\sigma)$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$



$$\mu = Me = Mo$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL (2)

Condiciones para una distribución normal

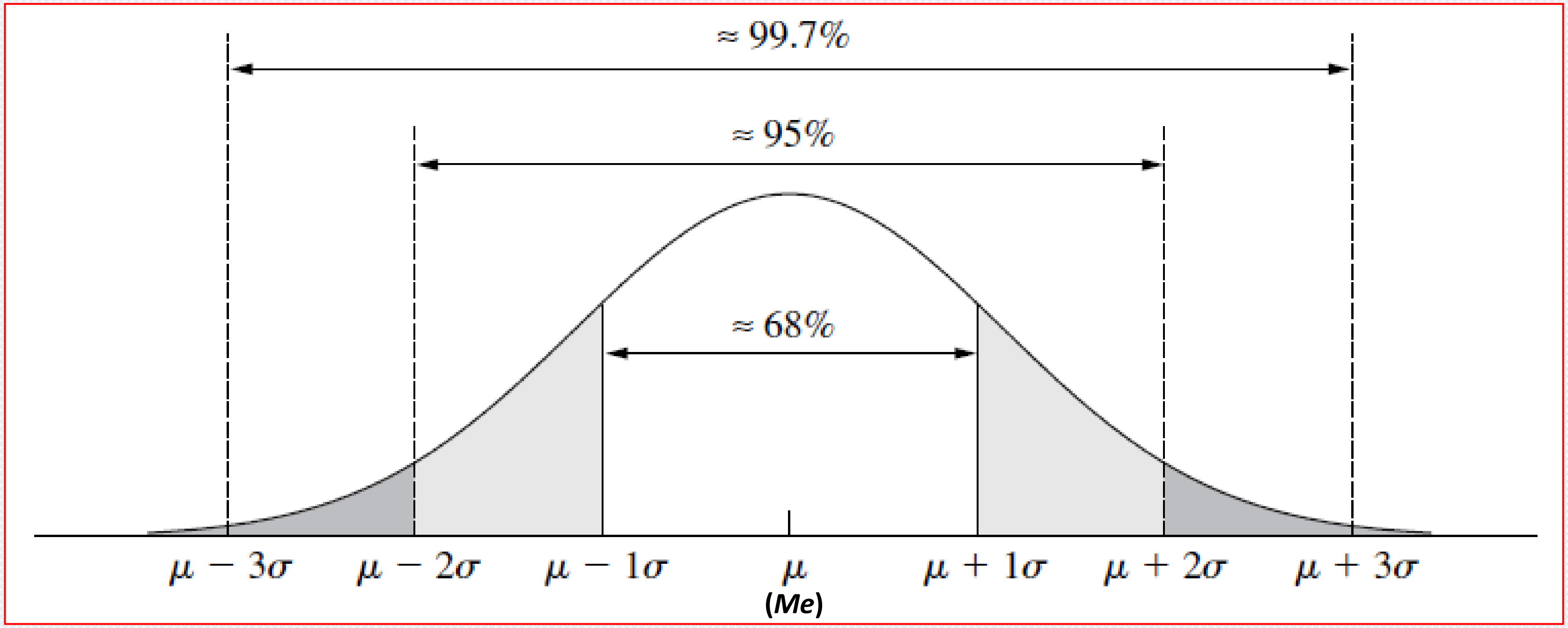
Un conjunto de datos que satisface los cuatro criterios siguientes es probable que tenga una distribución cercana a la normal.

1. La mayoría de los valores están agrupados cerca de la media, dando a la distribución un solo pico bien definido.
2. Los datos están dispersos de manera equitativa alrededor de la media, haciendo que la distribución sea simétrica.
3. Las desviaciones grandes de la media se hacen cada vez más raras, lo que produce delgadas colas de la distribución.
4. Los valores individuales resultan de una combinación de muchos factores diferentes, como factores genéticos y del ambiente.

DISTRIBUCIÓN NORMAL (3)

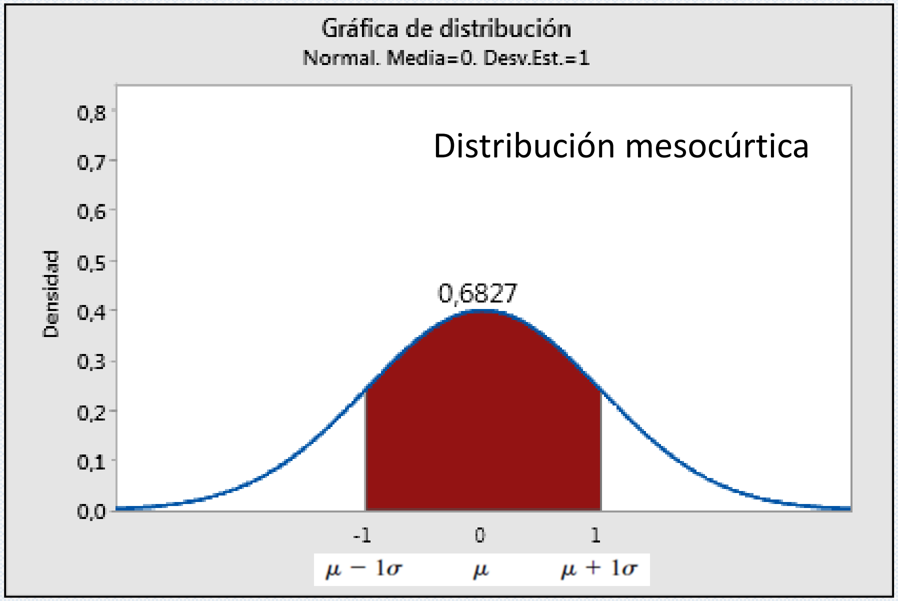
Una gráfica de la función de densidad de probabilidad normal con media $\boldsymbol{\mu}$ y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}$, es simétrica alrededor de $\boldsymbol{\mu}$. De tal forma que $\boldsymbol{\mu}$ es coincidente con la mediana, y toda población normal se caracteriza por:

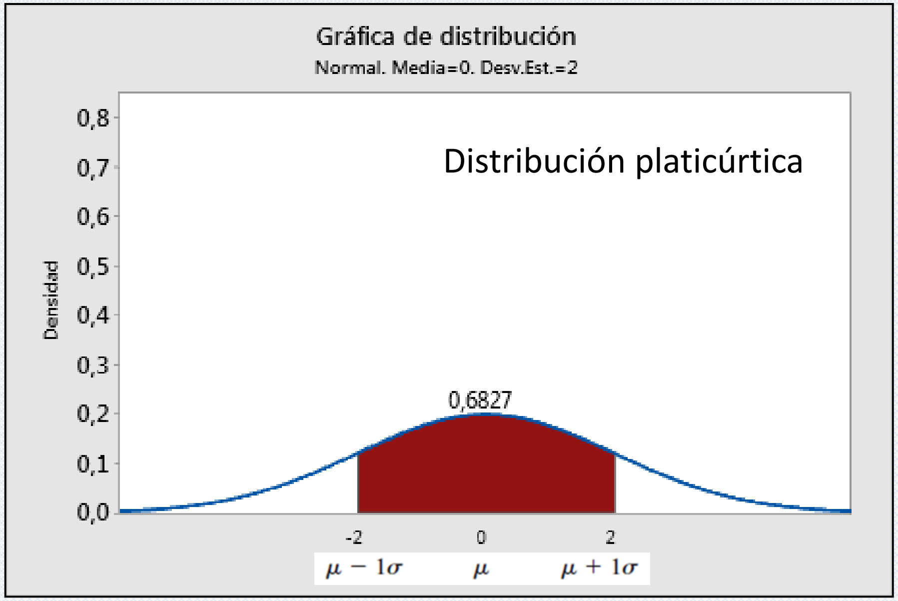
- Aproximadamente 68% de la población se encuentra en el intervalo $\boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\sigma}$.
- Aproximadamente 95% de la población se encuentra en el intervalo $\boldsymbol{\mu} \pm 2\boldsymbol{\sigma}$.
- Aproximadamente 99.7% de la población se encuentra en el intervalo $\boldsymbol{\mu} \pm 3\boldsymbol{\sigma}$.

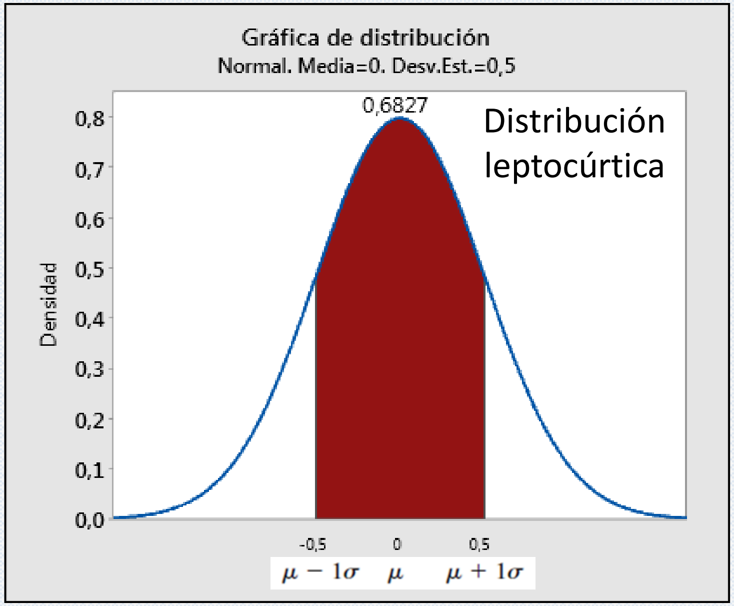


DISTRIBUCIÓN NORMAL (4)

La proporción de una población normal que se encuentra a cierto número de desviaciones estándar de la media, es la misma en cualquier población que tiene una distribución normal.







DISTRIBUCIÓN NORMAL (5)

Distribución normal estándar - Puntuación z (1)

Una distribución normal está **estandarizada** al expresar su valor como el número de desviaciones estándar (***σ***) que se encuentran a la izquierda o derecha de su media ***μ***.

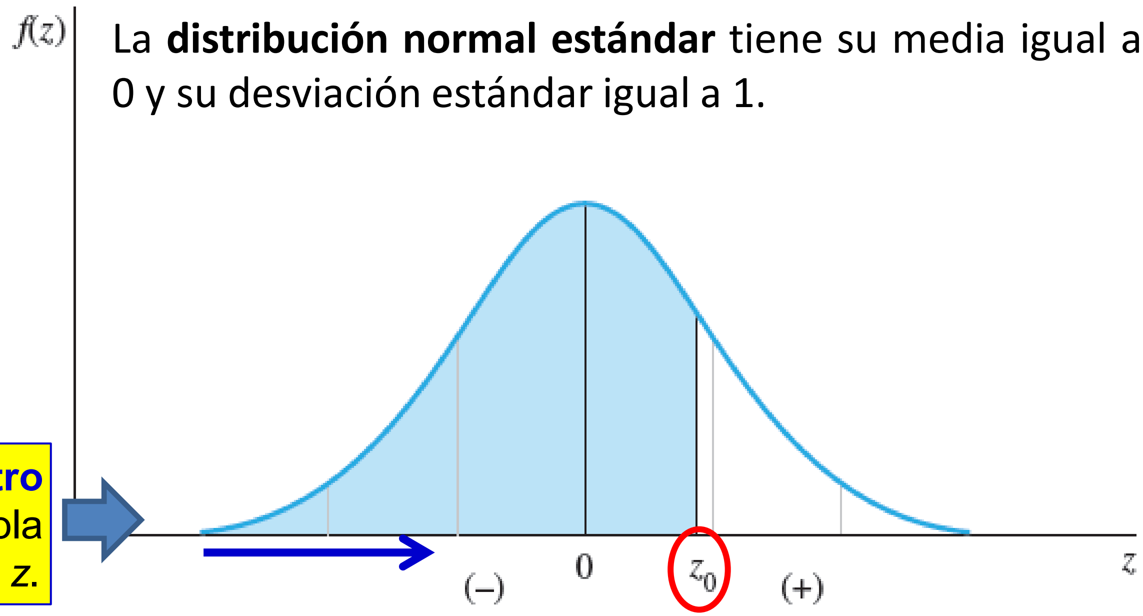
La variable aleatoria normal estándar, *z*, se define como:

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

El área bajo la curva normal estándar a la izquierda de un valor especificado de *z*, por ejemplo z_0, es la probabilidad $P(z \leq z_0)$. Las áreas debajo de una curva normal con diferentes media y varianza, se convierten a unidades estándar y se utiliza la tabla z.

La **distribución normal estándar** tiene su media igual a 0 y su desviación estándar igual a 1.

La tabla z, **disponible en nuestro curso**, proporciona las áreas en la cola izquierda de la curva para valores de *z*.

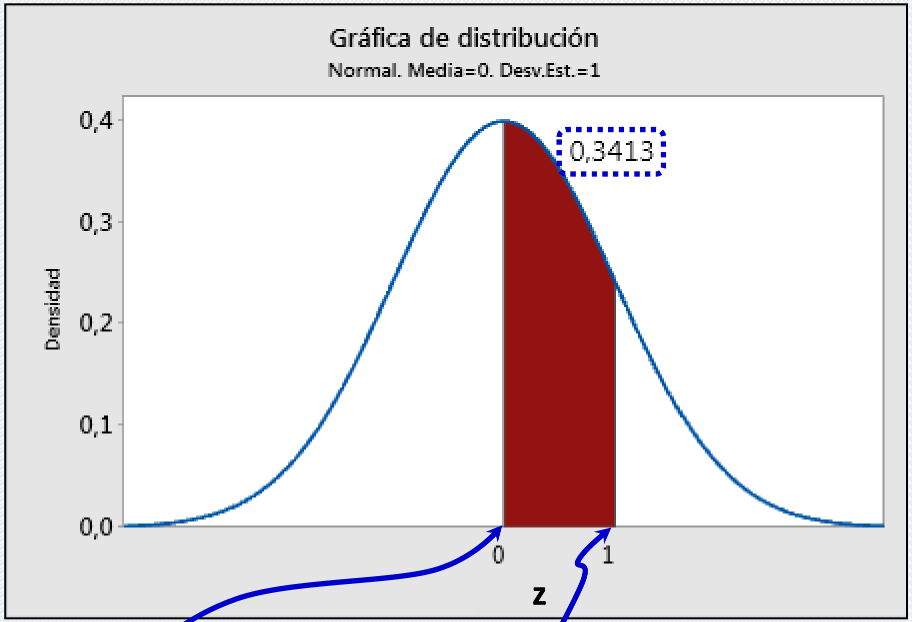


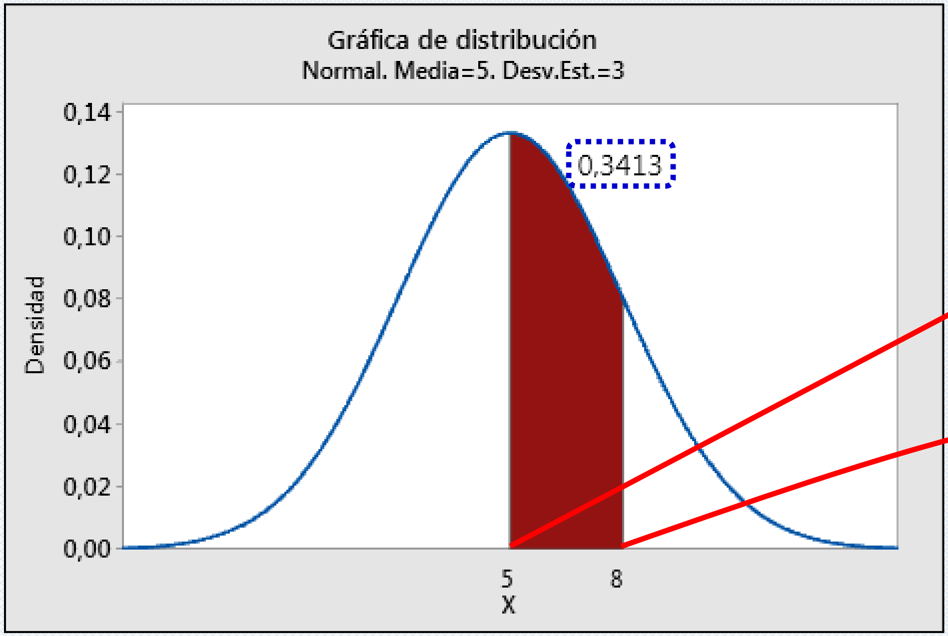
DISTRIBUCIÓN NORMAL (6)

Distribución normal estándar - Puntuación z (2)

De la fórmula para ***z***, podemos sacar estas conclusiones:

- Cuando *x* es menor que la media ***μ***, el valor de ***z*** es negativo.
- Cuando *x* es mayor que la media ***μ***, el valor de ***z*** es positivo.
- Cuando ***x*** = ***μ*** , el valor de ***z*** = 0.





$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 5}{3} = 0$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 5}{3} = 1$$

Se convierten aquellas unidades en las que se midió originalmente la población, en unidades estándar.

DISTRIBUCIÓN NORMAL (7)

Distribución normal estándar - Puntuación z (3)

La **puntuación z** actúa como una ***función de transformación*** que convierte valores de cualquier distribución normal $N(\mu,\sigma)$ en valores de una **distribución normal estándar** $N(0,1)$.

El proceso se conoce como **estandarización**

Esto es clave porque permite:

- **Comparar valores** que provienen de distintas distribuciones o escalas.
- **Usar tablas z** y probabilidades asociadas a la normal estándar.
- Facilitar procedimientos como los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis.

ESTADÍSTICOS Y SUS DISTRIBUCIONES (1)

Considérese seleccionar dos muestras diferentes de tamaño n de la misma distribución de población.

Por ejemplo: en un análisis sobre eficiencia de combustible, una primera muestra de $n_1 = 3$ automóviles podría producir las eficiencias, a saber $x_1 = 30{,}7$; $x_2 = 29{,}4$; $x_3 = 31{,}1$; mientras que una segunda muestra n_2 puede dar $x_1 = 28{,}7$; $x_2 = 30{,}1$; $x_3 = 31{,}2$.

Antes de obtener los datos, existe *incertidumbre* sobre el valor de cada x_i.

Debido a esta *incertidumbre*, *antes* de que los datos estén disponibles, cada observación se considera como una variable aleatoria y la muestra se denota por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (letras mayúsculas para variables aleatorias).

ESTADÍSTICOS Y SUS DISTRIBUCIONES (2)

Esta variación en los valores observados implica a su vez que el valor de cualquier función de las observaciones muestrales (media muestral, desviación estándar muestral, o proporción muestral), también varía de una muestra a otra. Es decir, antes de obtener x_1 , x_2 … x_n , existe incertidumbre en cuanto al valor de $\bar{x}$, el valor de s, el valor de $\hat{p}$, y así sucesivamente.

DEFINICIÓN

Un **estadístico** es cualquier cantidad cuyo valor puede ser calculado a partir de datos muestrales.

Un **estadístico** es una ***variable aleatoria*** y será denotada por una **letra mayúscula**; se utiliza una **letra minúscula** para representar el valor calculado u observado del estadístico.

ESTADÍSTICOS Y SUS DISTRIBUCIONES (3)

La media muestral, considerada como estadístico (antes de seleccionar una muestra), está denotada por $\bar{\mathbf{X}}$; el valor calculado de este estadístico es $\bar{\mathbf{x}}$. Del mismo modo, **S** representa la desviación estándar muestral (estadístico) y su valor calculado es **s**.

Muestras aleatorias

La distribución de probabilidad de cualquier estadístico particular depende no sólo de la distribución de la población (normal, uniforme, etc.) y el tamaño de muestra *n,* sino además del método de muestreo.

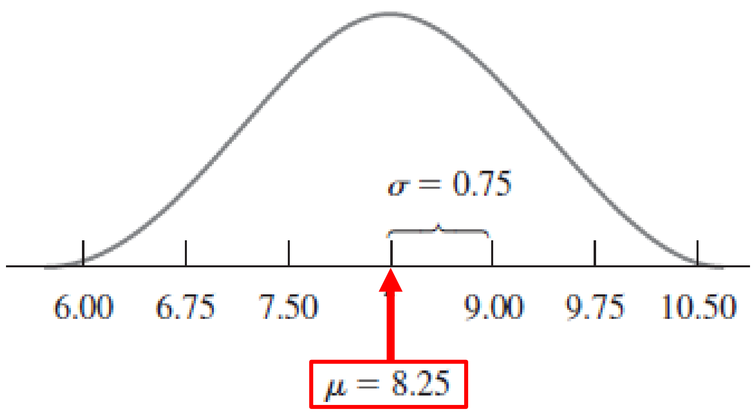
DEFINICIÓN

Se dice que las variables aleatorias X_1, X_2, . . . , X_n forman una **muestra aleatoria simple** de tamaño *n* si:

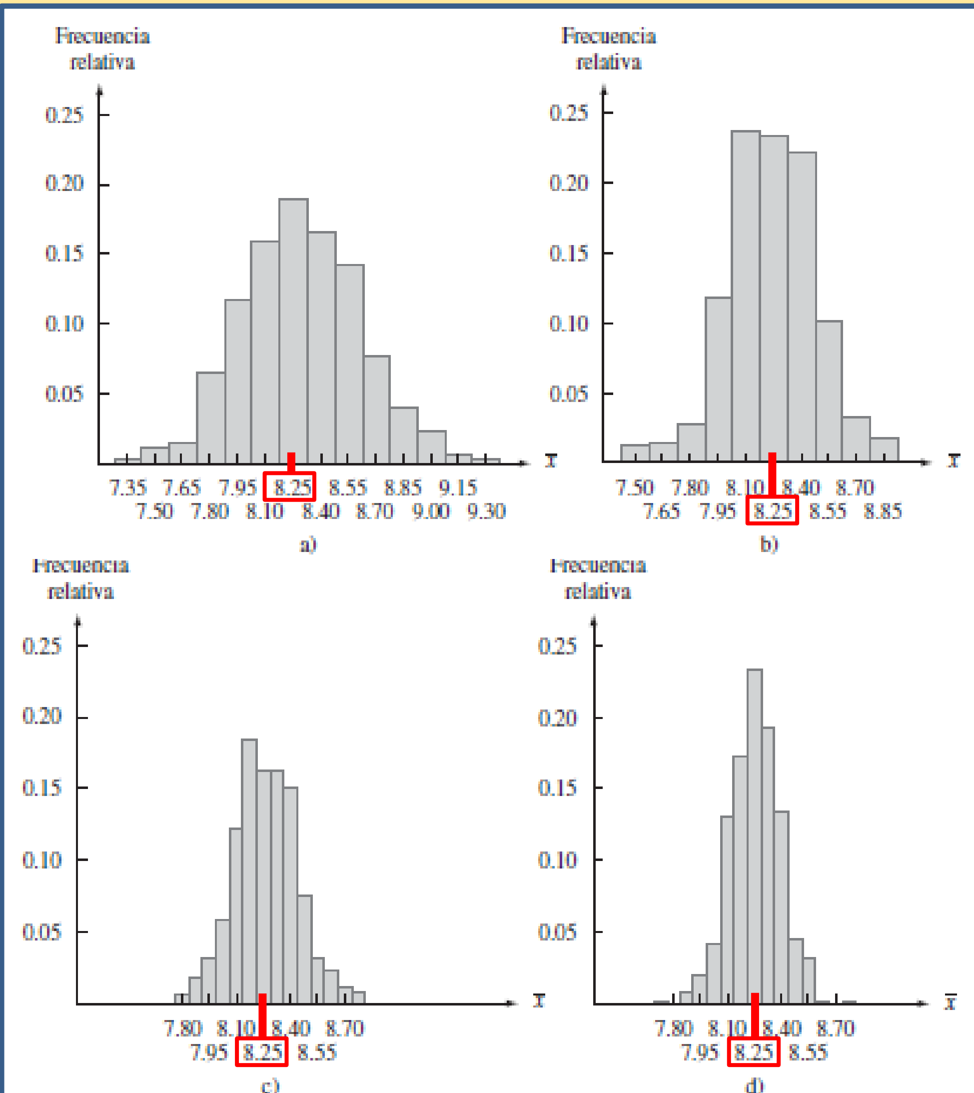
1. Las X_i son variables aleatorias independientes.

2. Cada X_i tiene la misma distribución de probabilidad.

ESTADÍSTICOS Y SUS DISTRIBUCIONES (4)



Distribución normal, con $\mu = 8.25$ y $\sigma = 0.75$.



Histogramas muestrales de $\bar{X}$ basados en 500 muestras, cada uno compuesto de n observaciones: a) $n = 5$; b) $n = 10$; c) $n = 20$; d) $n = 30$.

Fuente: DeVore (2008)

DISTRIBUCIÓN DE MUESTRAS

CONSIDERACIONES INICIALES

El valor del ***parámetro*** es fijo, mientras que el valor de un **estadístico** está en función de la muestra seleccionada y por lo tanto podrá variar de una muestra a otra.

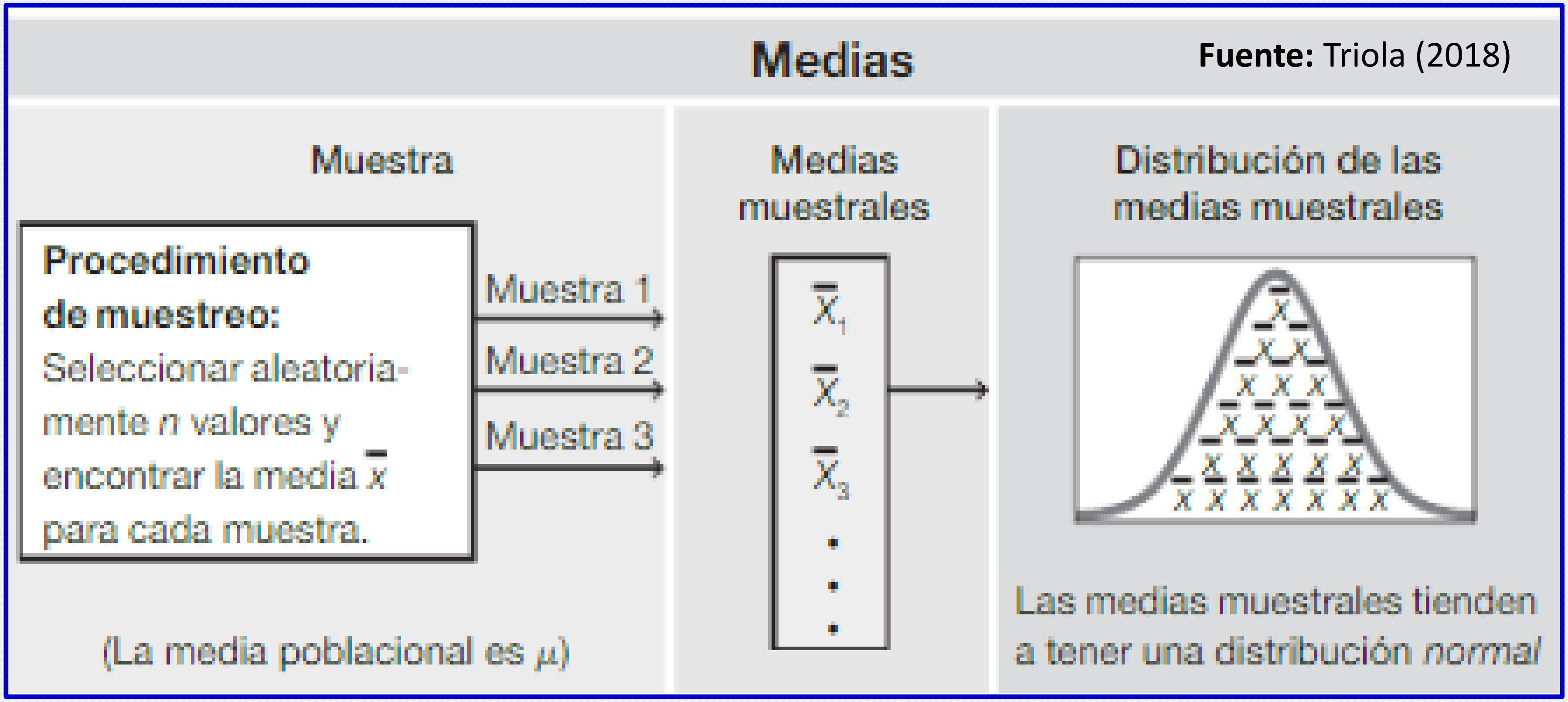
Si de alguna manera, pudiéramos medir la precisión de este proceso, es decir, si pudiéramos evaluar *si el valor del estadístico va a estar cerca del valor del parámetro correspondiente*, para cualquier muestra extraída de la población, entonces estaríamos en condiciones de hacer “buenas inferencias”.

Sólo cuando se utiliza el azar para escoger los elementos que conforman una muestra, podemos describir cómo varía el estadístico.

Distribución muestral de medias (1)

DEFINICIÓN

La **distribución muestral de la media** es la distribución de la variable $\bar{X}$, donde todas las muestras tienen el mismo tamaño n tomado de la misma población.



Distribución muestral de medias (2)

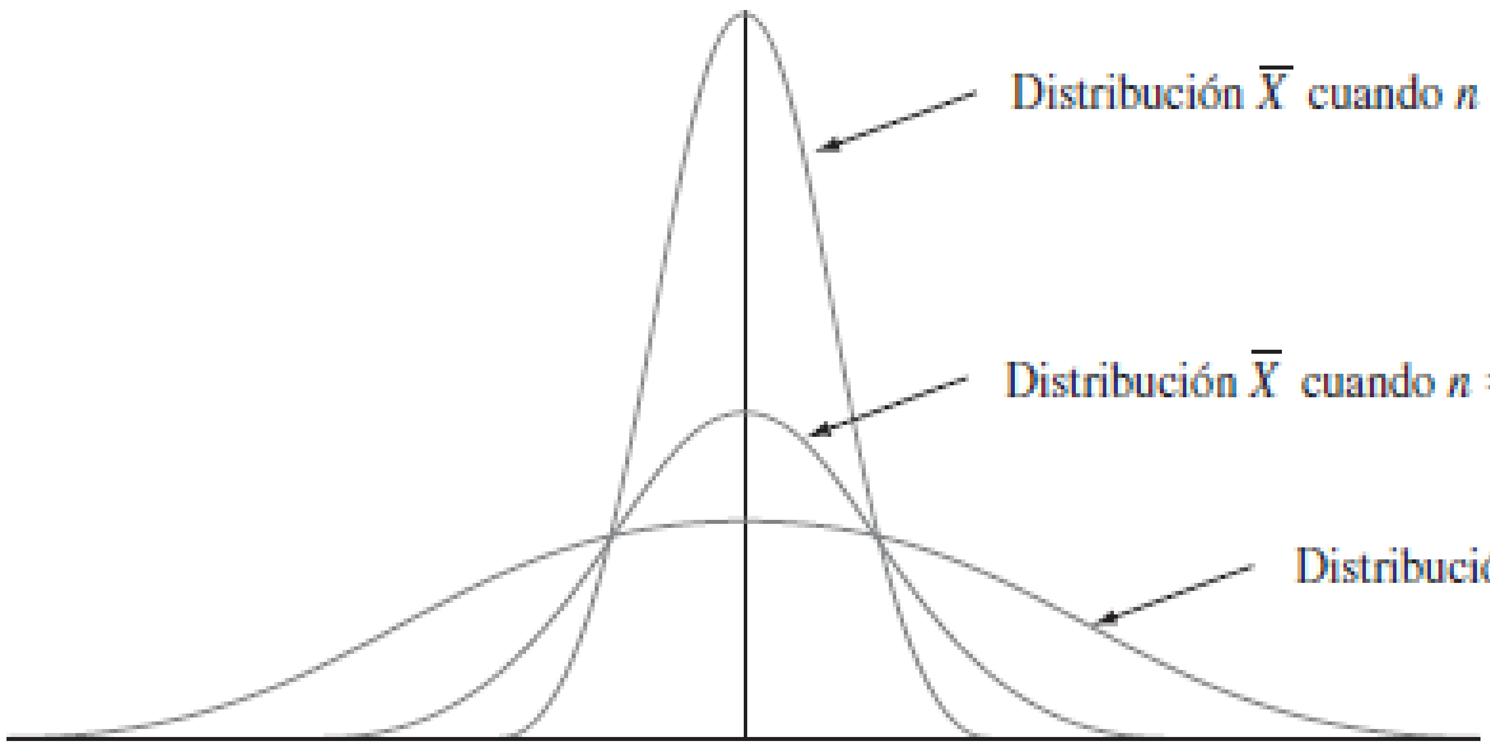
Comportamiento de las medias muestrales

1. La distribución de las medias muestrales tiende a ser una distribución normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

2. Las medias muestrales se acercan al valor de la media de la población (la *media* de las medias muestrales es la media de la población).

3. El valor esperado de la media muestral es igual a la media de la población.

Distribución muestral de medias (3)



Distribución de la población normal y distribuciones muestrales $\overline{X}$.

Distribución muestral de medias (4)

Notación para la distribución muestral de $\overline{x}$

Si se seleccionan todas las muestras aleatorias de tamaño n de una población con media μ y desviación estándar σ, la media de las medias de muestra se denota con $\mu_{\overline{x}}$, de modo que

$$\mu_{\overline{x}} = \mu$$

También la desviación estándar de las medias de muestra se denota con $\sigma_{\overline{x}}$, de manera que

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma_{\overline{x}}$ suele denominarse el **error estándar de la media.**

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (TCL) (1)

DEFINICIÓN (A)

Si $\overline{X}$ es la media de un muestra aleatoria de tamaño **n** tomada de una población con media μ y varianza finita σ^2 entonces la forma limite de la distribución de:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

cuando **n** $\rightarrow \infty$, es la distribución estandarizada N(0, 1) ó n(z, 0, 1).

DEFINICIÓN (B)

Para todas las muestras del mismo tamaño *n*, con ***n* > 30**, la distribución muestral de $\bar{x}$ puede aproximarse mediante una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$

Recordando qué es z

El **estadístico z** mide cuántas desviaciones estándar se encuentra un valor respecto a la media:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- X = valor observado (o media muestral $\bar{x}$)
- μ = media poblacional
- σ = desviación estándar poblacional

Cómo aparece el TCL

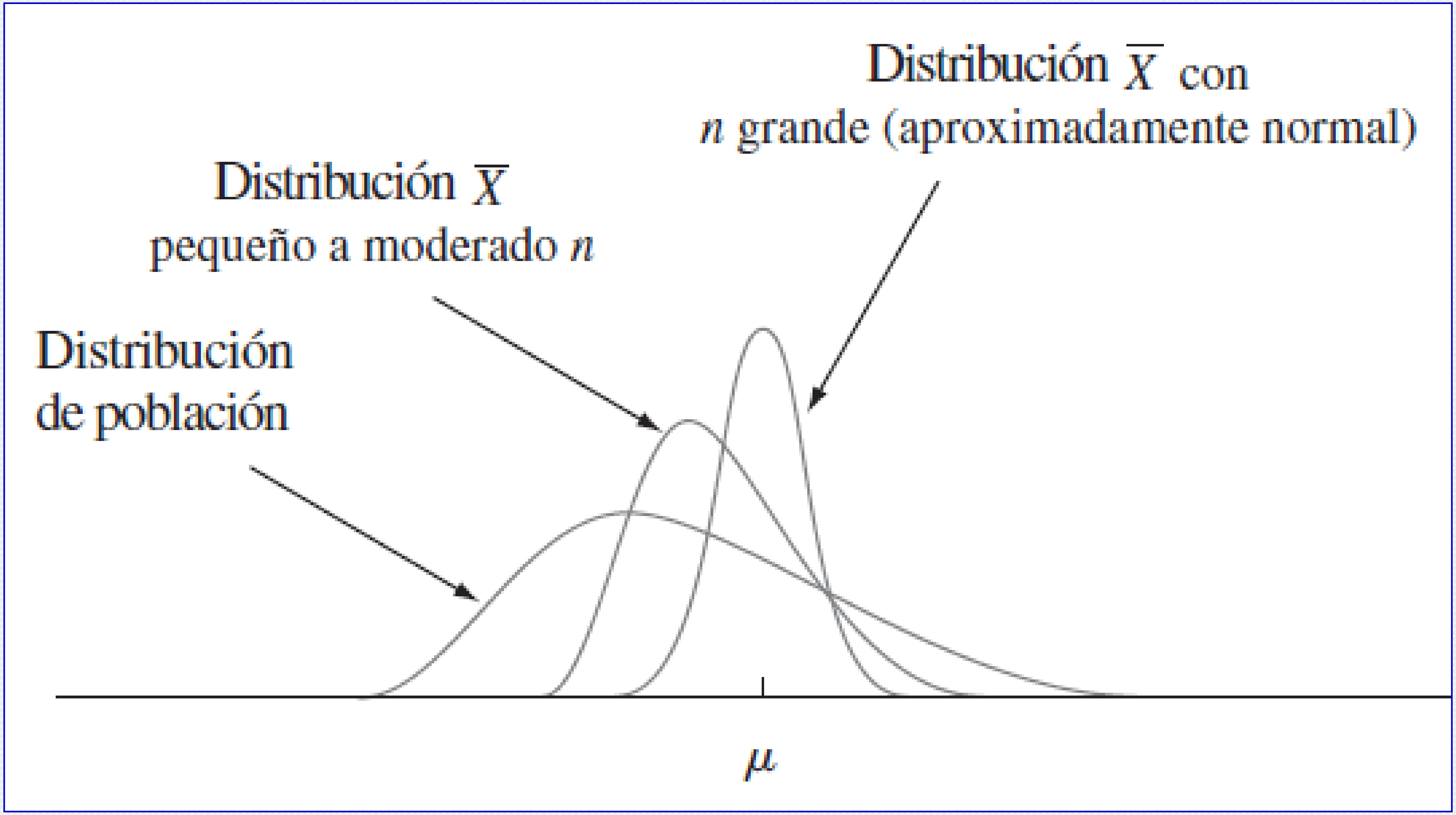
El TCL dice que **la distribución de la media muestral** $\bar{x}$ tiende a **una normal**, con media μ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ si n es suficientemente grande.

Entonces, el **estadístico z para la media muestral** se puede escribir como:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

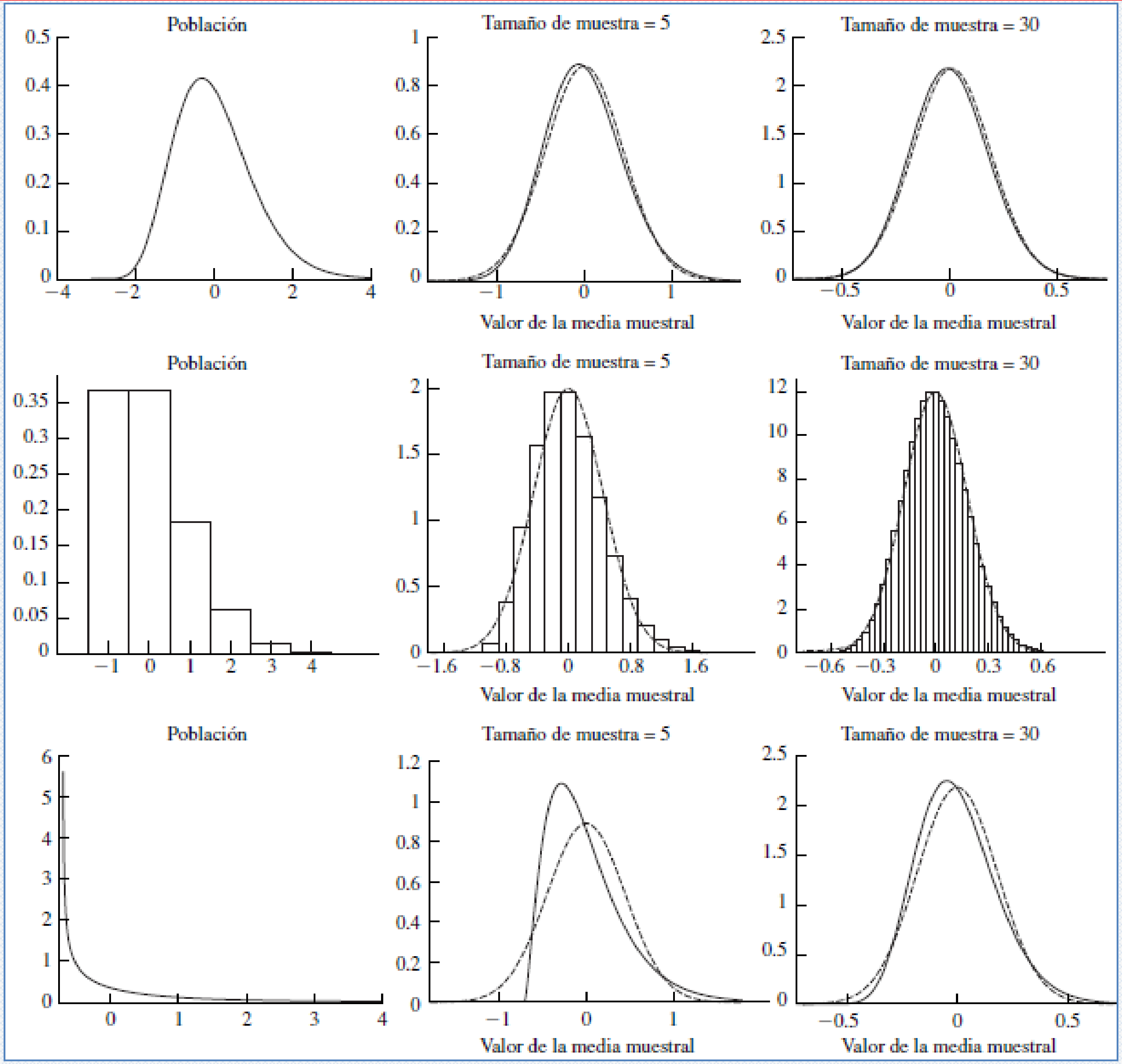
- Esto transforma cualquier media muestral en una puntuación estándar.
- Nos permite usar la **tabla z de la normal estándar** para calcular probabilidades o construir intervalos de confianza.

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (3)



Teorema del límite central ilustrado - **Fuente:** DeVore (2008)

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (4)



Teorema del límite central ilustrado - (Navidi, 2006)

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (5)

RESUMEN

- La aproximación normal para $\overline{X}$ generalmente será buena si $n \geq 30$ sin importar la forma de la población.
- Si $n < 30$, la aproximación es buena sólo si la población no difiere mucho de una distribución normal.
- Si se sabe que la población es normal, la distribución muestral de $\overline{X}$ seguirá exactamente una distribución normal, sin importar que pequeño sea el tamaño de las muestras.

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (6)

Conexión con la estimación por intervalos

Gracias al TCL:

- Podemos asumir que $\bar{x}$ ~ Normal incluso si la población no lo es.
- Entonces, podemos definir un **intervalo de confianza** para μ:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $z_{\alpha/2}$ proviene de la **distribución normal estándar**, y su uso está justificado por el TCL.

💡 **Resumen conceptual:**

El **TCL** asegura que la media muestral sigue una distribución normal → esto permite aplicar **z** para medir probabilidades y construir intervalos de confianza. Sin el TCL, no podríamos usar z cuando la población no es normal.

DISTRIBUCIÓN " t " DE STUDENT (1)

Muestras pequeñas

¿Qué se puede hacer si $\bar{X}$ es la media de una muestra *pequeña*? Si éste es pequeño, s podría no estar cercano a σ, y $\bar{X}$ puede no ser aproximadamente normal. *Si no se sabe nada acerca de la población* de la que la muestra pequeña fue extraída, entonces no hay ningún método fácil para calcular probabilidades. Sin embargo, si la población es aproximadamente normal, $\bar{X}$ lo será incluso cuando el tamaño muestral sea pequeño.

Para muestras pequeñas en la cantidad $(\bar{X} - \mu)/(s/\sqrt{n})$, s no estará necesariamente cercana a σ, y por lo tanto dicha cantidad no tendrá una distribución normal. En su lugar, tiene la **distribución *t* de Student** con $n - 1$ grados de libertad, que se denota por t_{n-1}. El número de grados de libertad para la distribución ***t*** es uno menos que el tamaño muestral.

DISTRIBUCIÓN " t " DE STUDENT (2)

Resumen

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra *pequeña* (por ejemplo $n < 30$) de una población *normal* con media μ. Entonces la cantidad

$$\frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tiene una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad, denotada por t_{n-1}.

Cuando n es grande, la distribución de la cantidad $(\overline{X} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ es muy cercana a la curva normal, de esta forma la curva normal puede usarse en lugar de la t de Student.

La curva ***t*** con un grado de libertad tiene mucho más área en las colas. Para tamaños muestrales más grandes, el valor de *s* es menos probable que esté lejos de σ y la curva ***t*** es más cercana a la curva normal. Con diez grados de libertad (corresponde n = 11), la diferencia entre la curva ***t*** y la curva normal no es grande.

Una curva ***t*** con 30 grados de la libertad es casi indistinguible de la curva normal.

ACTIVIDAD AULICA 8

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

Intervalo de confianza para la media (1)

Población normal con σ^2 conocida (1)

Supuestos

1. La muestra es aleatoria simple. (Todas las muestras del mismo tamaño tienen una posibilidad igual de seleccionarse).
2. Se conoce el valor de la desviación estándar poblacional σ.
3. Cualquiera o ambas de tales condiciones se satisface: la población está normalmente distribuida o $n > 30$.

La media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimado puntual de la media de la población.

Intervalo de confianza para la media (2)

Población normal con σ^2 conocida (2)

Ejemplo 1:

Un ingeniero que supervisa el control de calidad quiere calcular la media del peso de cajas que se han llenado con cereal mediante una máquina específica, durante cierto día. Para ello, toma una muestra aleatoria de 100 cajas que se han llenado con esa máquina, en ese día. Calcula que la media muestral del peso de llenado es $\bar{x}$ = 12,05 kg y la desviación estándar *s* = 0,1 kg.

Debido a que la media poblacional no será exactamente igual a la media muestral de 12,05; es mejor construir un **intervalo de confianza** alrededor de 12,05 que quizá contenga a aquélla.

Luego es posible cuantificar el nivel de confianza de que la media poblacional esté realmente contenida por el intervalo.

Intervalo de confianza para la media (3)

Población normal con σ^2 conocida (3)

Ejemplo 1 – cont.:

Con el propósito de ver cómo construir un intervalo de confianza en este ejemplo, sea μ la media poblacional desconocida y σ^2 la varianza respectiva.

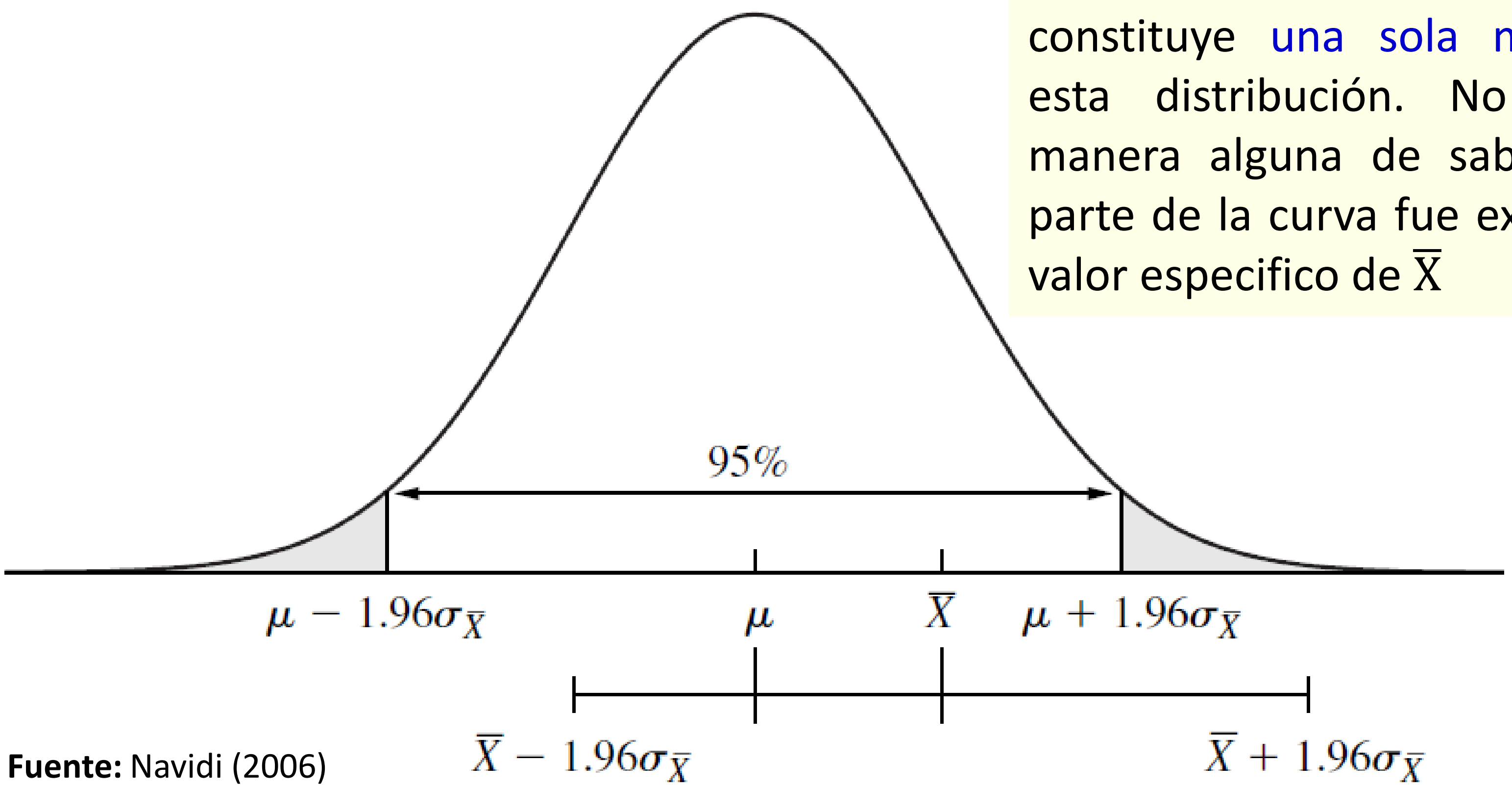
Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ los 100 pesos del llenado de las cajas muestreadas. El *valor observado de la media muestral* es $\bar{x} = 12{,}05$. Ya que $\bar{X}$ es la media de una *muestra grande*, el **teorema del límite central** garantiza que proviene de una distribución normal cuya media es μ y cuya desviación estándar es $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Intervalo de confianza para la media (4)
Población normal con σ^2 conocida (4)

Ejemplo 1 – cont.:

La ***figura 1*** muestra una curva normal, que representa la **distribución de $\bar{X}$**. Aquí se indica que 95% intermedio de la curva se extiende una distancia 1.96 $\sigma_{\bar{X}}$ a cada lado de la media poblacional.

El valor observado $\bar{X}$ = 12,5 constituye una sola muestra de esta distribución. No se tiene manera alguna de saber de qué parte de la curva fue extraído este valor especifico de $\bar{X}$



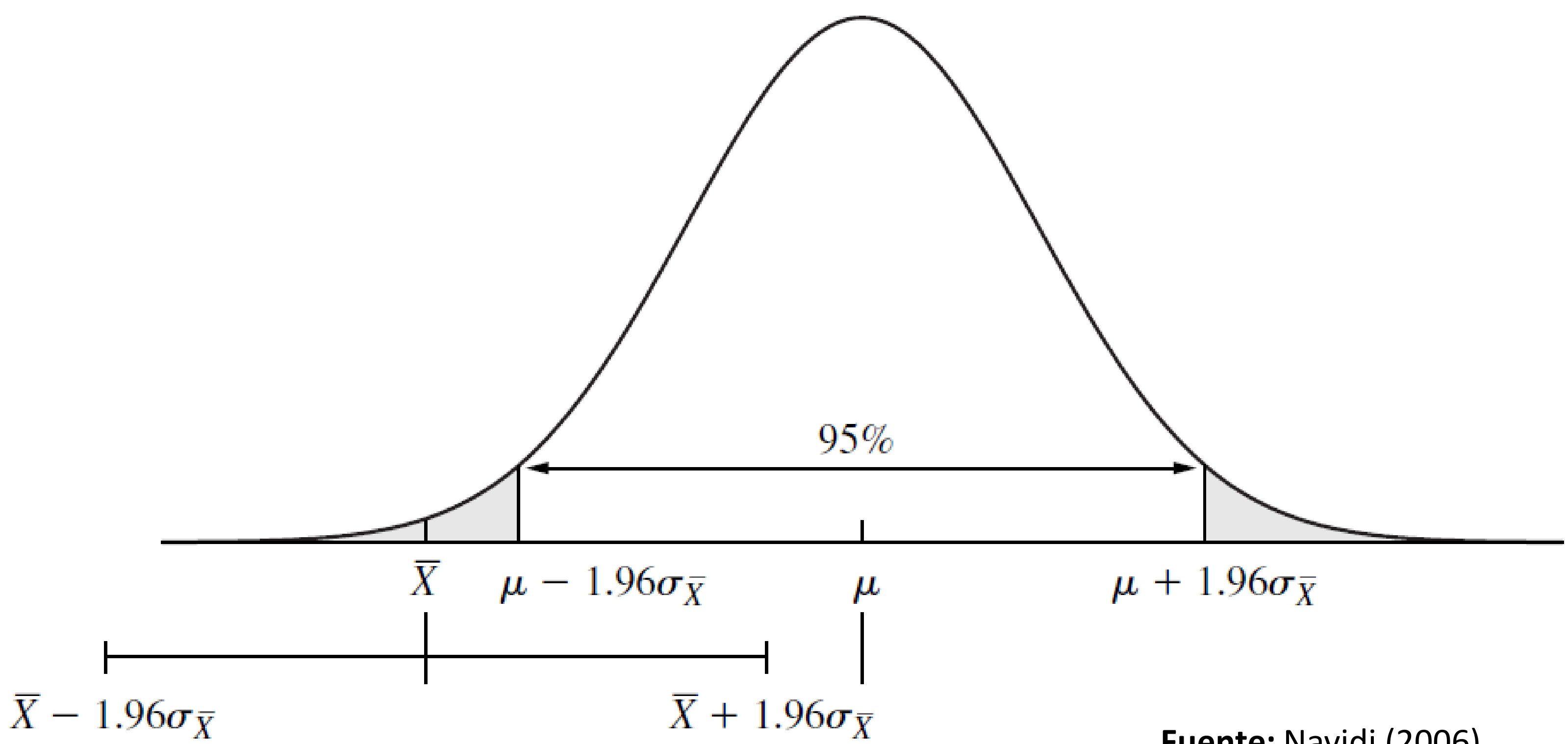
Fuente: Navidi (2006)

Intervalo de confianza para la media (5)

Población normal con σ^2 conocida (5)

Ejemplo 1 – cont.:

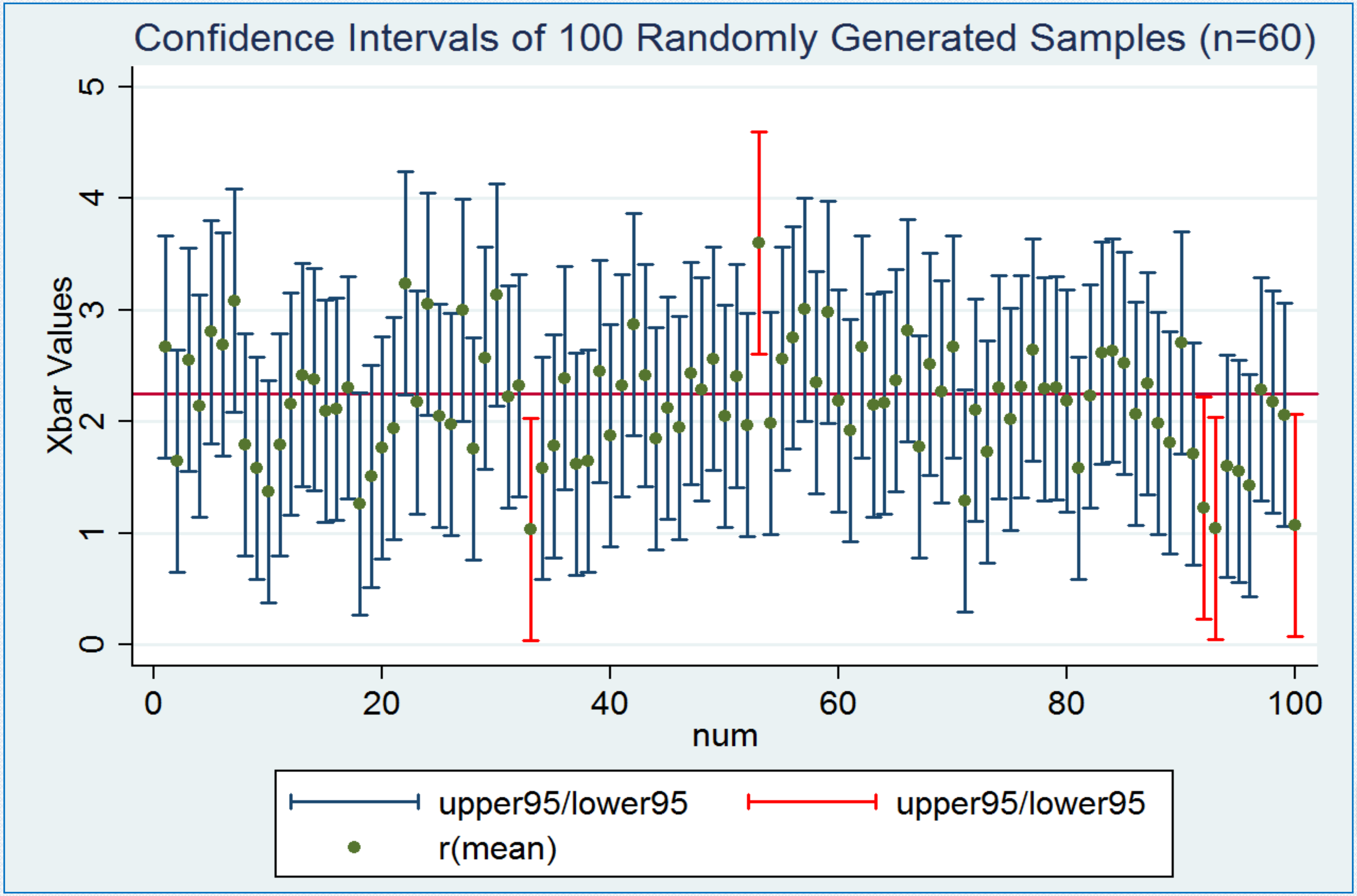
La ***figura 2*** representa una muestra cuya media $\overline{X}$ está fuera de 95% intermedio de la curva. Sólo 5% de todas las muestras se encuentra en dicha categoría. Para estas muestras *más inusuales* el intervalo de confianza de 95% $\overline{X} \pm 1.96\,\sigma_{\overline{X}}$ no contiene la media poblacional μ.



Fuente: Navidi (2006)

Intervalo de confianza para la media (6)

Población normal con σ^2 conocida (6)

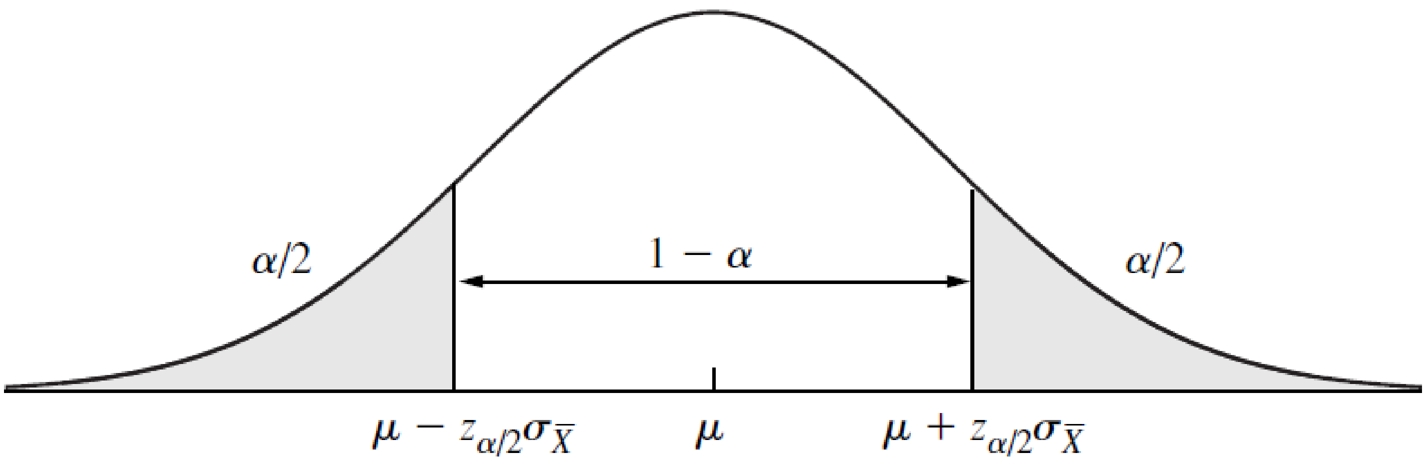


Intervalo de confianza para la media (7)

Población normal con σ^2 conocida (7)

Un **intervalo de confianza de nivel 100(1 – α)%** para μ es:

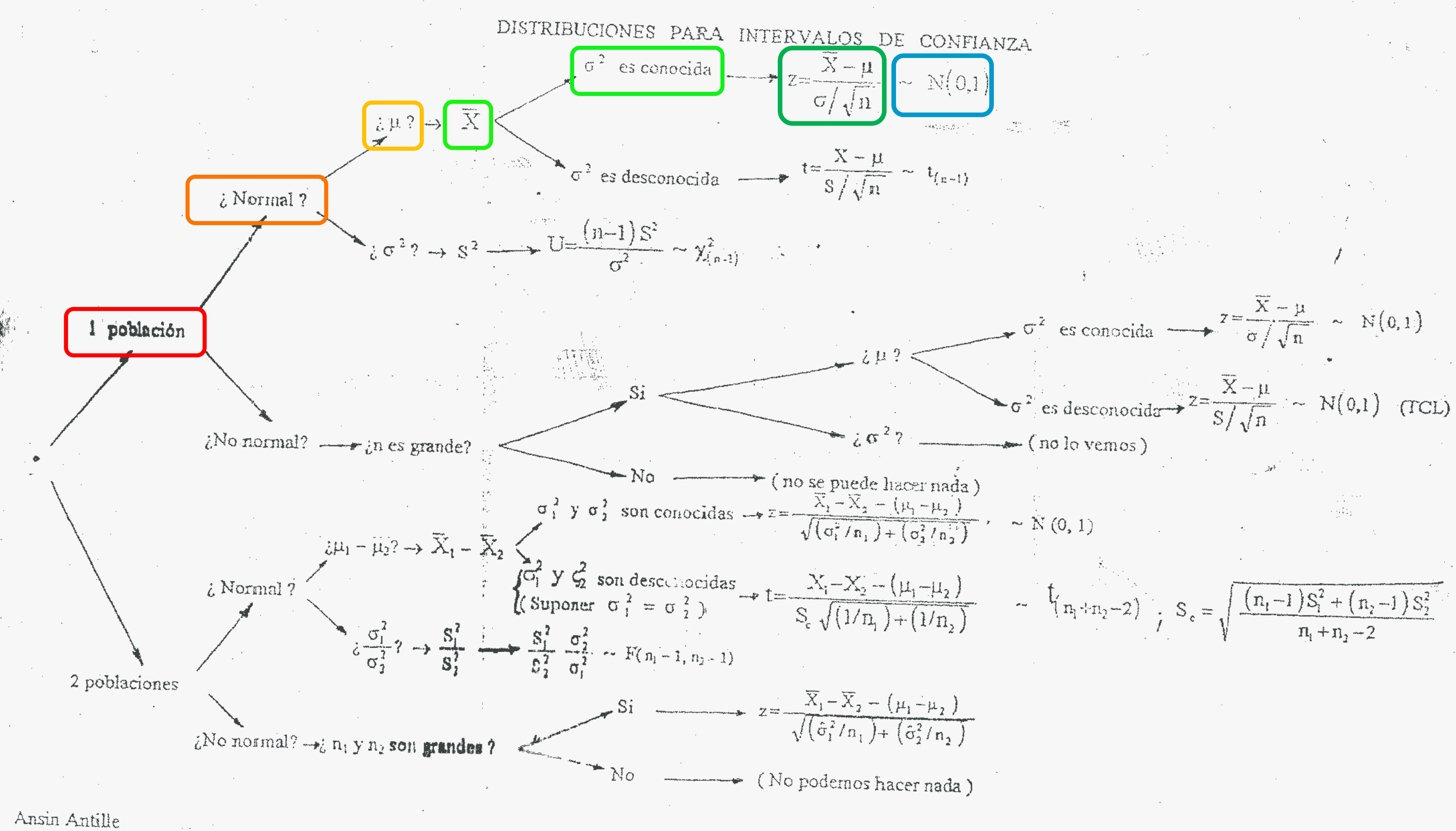
$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\, \sigma_{\overline{X}}\,, \quad \text{o} \quad \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$$



La media muestral $\overline{X}$ se extrae de una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. La cantidad $z_{\alpha/2}$ constituye el puntaje z que corta un área de $\alpha/2$ en la cola del lado derecho. Asimismo, $-z_{\alpha/2}$ representa el que corta un área de $\alpha/2$ la cola del lado izquierdo. El intervalo $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ contendrá la media poblacional μ para una proporción $1-\alpha$ de todas las muestras que se pudiera extraer. Por tanto, $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ significa un intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$ para μ.

Intervalo de confianza para la media (8)

Población normal con σ^2 conocida (8)



Intervalo de confianza para la media (9)
Población normal con σ^2 desconocida (1)

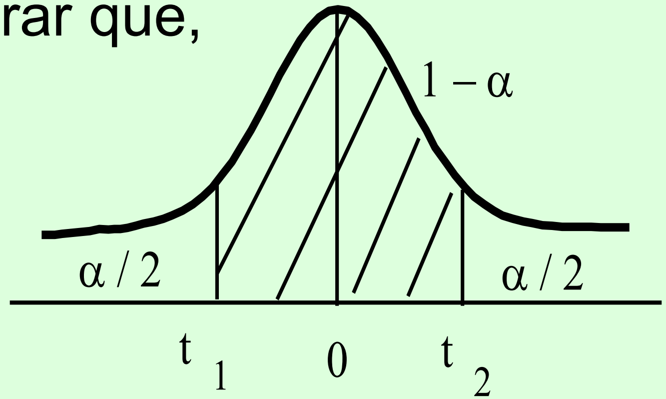
Con frecuencia, se intenta estimar la media de una población cuando se desconoce la varianza poblacional. Si se tiene una muestra aleatoria n de una distribución normal, entonces la variable fundamental es

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad \sim \qquad t_{(n-1)}$$

En estas condiciones con σ desconocida, T puede utilizarse para determinar el intervalo de confianza de μ. El procedimiento es el mismo que cuando se conocía σ excepto que este último se sustituye por S y la distribución normal estándar por la distribución t.

Intervalo de confianza para la media (10)
Población normal con σ^2 desconocida (2)

Con referencia a la figura, se puede asegurar que,



$$P (t_1 < t < t_2) = 1 - \alpha$$

El objetivo es que $L = t_2 - t_1$ sea mínimo lo que se logra con:

$$t_1 = -t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad t_2 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Estandarizando

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza para la media (11)

Población normal con σ^2 desconocida (3)

Se despeja en función de μ, con lo cual se tiene que para el caso particular de la muestra aleatoria de tamaño n , se calcula la media $\bar{x}$ y la desviación estándar s y, puede obtenerse una probabilidad de (1 – α) 100% para μ.

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media (12)

Población normal con σ^2 desconocida (4)

INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ ; con **σ** desconocido.

Si $\bar{x}$ y s son la media y la desviación estándar, respectivamente, de una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con varianza desconocida $\boldsymbol{\sigma^2}$, el intervalo de confianza de (1 – α)100% para μ es

$$\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

o

$$\mu = \bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de confianza para la media (13)

Población normal con σ^2 desconocida (5)

EJEMPLO 5: Hallar un intervalo del 95 % para μ si los datos son $\overline{X} = 66{,}3$ y $S = 8{,}4$ con $n = 12$

$\alpha = 0{,}05$ $\quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ $\quad t_{0,975(11)} = 2{,}20$

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Aclaración: Cuando reemplazamos las variables del intervalo por valores numéricos tomados de una muestra particular, el intervalo numérico **NO** debe tener asociada ninguna probabilidad.

$$66{,}3 - 2{,}20 \times \frac{8{,}4}{\sqrt{12}} \le \mu \le 66{,}3 + 2{,}20 \times \frac{8{,}4}{\sqrt{12}}$$

$$61 \le \mu \le 71{,}6$$

INTERPRETACIÓN DEL INTERVALO DE CONFIANZA (IC)

Es común interpretar erróneamente un intervalo de confianza (IC) como “hay un 95% de probabilidad de que el parámetro verdadero esté dentro de este intervalo”. Esta frase suena intuitiva pero **no es correcta.**

En realidad, el parámetro poblacional (por ejemplo, la media verdadera μ) **es fijo y no varía**: o está dentro del intervalo o no lo está, pero no podemos asignarle una probabilidad a un hecho ya ocurrido. Lo que sí es aleatorio es el **intervalo que construimos a partir de una muestra**, porque cada muestra nos daría un IC diferente.

Decir “IC del 95%” implica que **si repitiéramos el proceso de muestreo un gran número de veces** y construyéramos un intervalo para cada muestra, **aproximadamente el 95% de esos intervalos contendrían el valor verdadero del parámetro**.

La **“confianza”** no está en un intervalo en particular, sino en el ***método de estimación*** que usamos para construirlos. El 95% refleja la proporción de intervalos correctos en el largo plazo, no la probabilidad de acierto en un único intervalo específico.

La **redacción correcta** sobre la **conclusión de un intervalo de confianza** debe ser, por ej.:

Con un nivel de confianza del 95 %, se estima que la media poblacional de *X* se encuentra entre **a** y **b** unidades.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS (1)

HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

Es una proposición o supuesto sobre los parámetros de una o más poblaciones

- Media
- Varianza
- Proporción

Es un proceso mediante el cual se trata de comprobar si una **afirmación sobre alguna condición poblacional** puede ser sostenida con la información que ***proporciona la muestra***

Contraste de hipótesis (2)

Identificación de hipótesis

HIPÓTESIS NULA (H_0)

- Es la afirmación de una creencia previa
- Los datos muestrales pueden refutarla
- No debe rechazarse sin una evidencia contundente

¿ De donde surge ?

HIPÓTESIS ALTERNATIVA (H_1)

- Niega H_0
- Es contradictoria de H_0
- No debería refutar a H_0 sin una prueba evidente a favor

¿Qué representa ?

Contraste de hipótesis (3)

Hipótesis Nula: es la afirmación respecto de algún ***parámetro*** de una ***distribución ya conocida***, dada por experiencias previas o condiciones prefijadas. Implica una situación que ocurre normalmente. <u>En esta hipótesis aparece siempre el signo igual</u>.

$$\boxed{H_0: \theta = \theta_0}$$

Hipótesis Alternativa: es la hipótesis del investigador. Representa una afirmación sobre algún ***parámetro*** de una distribución, cuyo valor surge a partir de una <u>***nueva situación***</u> que se sospecha puede ocurrir. Contradice la hipótesis nula.

$$\boxed{H_1: \theta = \theta_1} \quad \text{con} \quad \theta_1 \neq \theta_0 \,;\ \theta_1 < \theta_0 \quad \text{ó} \quad \theta_1 > \theta_0$$

Regiones de rechazo y de no rechazo (1)

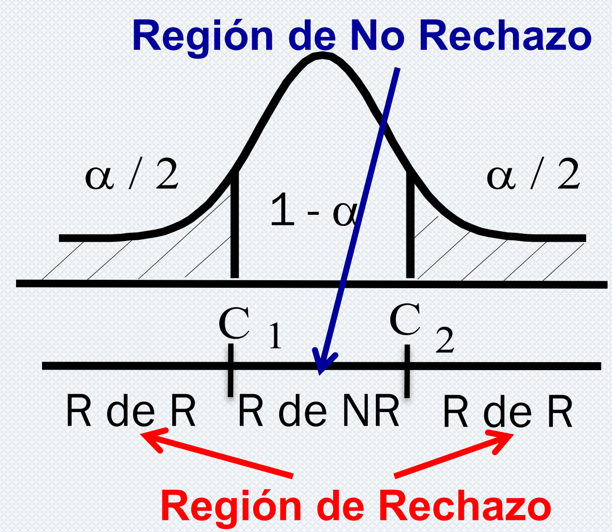
Supongamos una muestra aleatoria, $x_1, x_2, . . . , x_n$ de tamaño n

•La ***región de Rechazo*** **(R)** es el conjunto de todos los valores posibles del estadístico que ***posibilitan*** que la hipótesis nula sea refutada o rechazada.

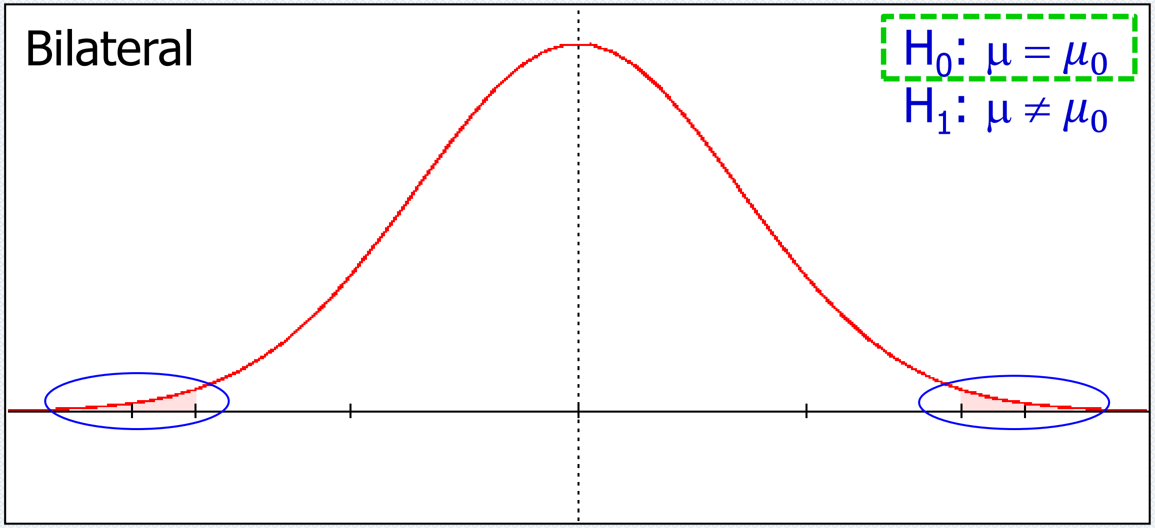
•La ***región de No Rechazo*** ***(NR)*** es el conjunto de todos los valores posibles del estadístico que ***no posibilitan*** que la hipótesis nula sea refutada o rechazada.

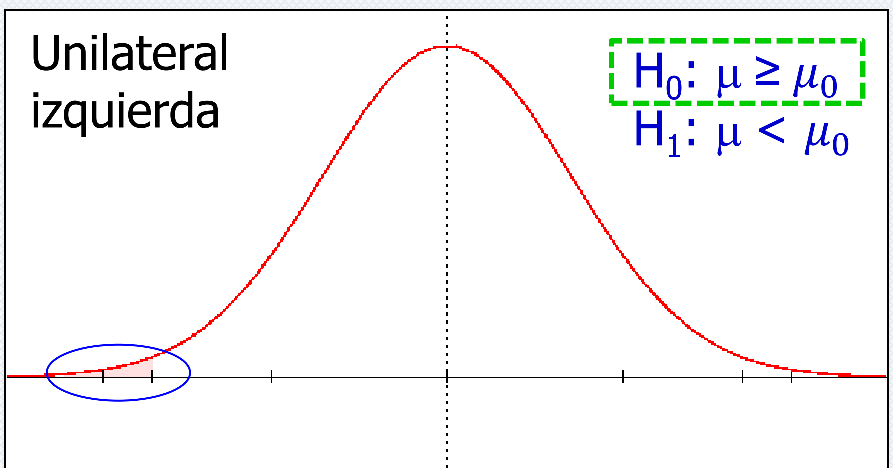
La regla estadística que determina la región de rechazo "R de R" es:

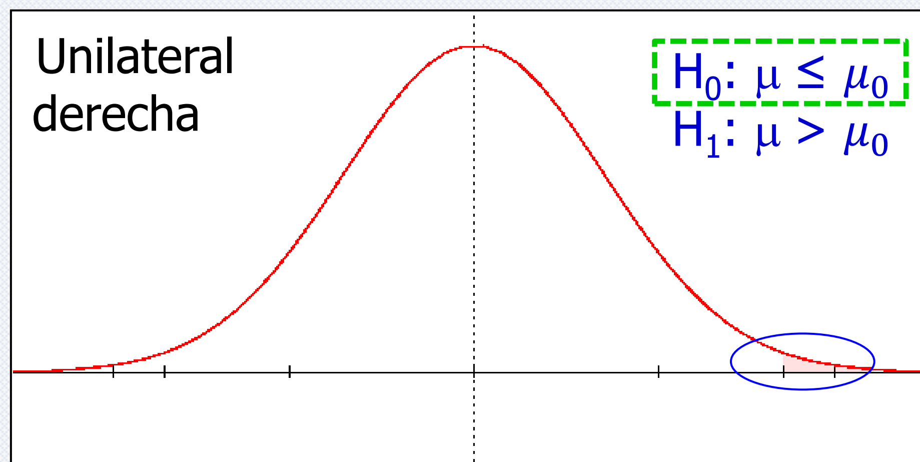
- No Rechazar H_0 si $(x_1, x_2, . . . , x_n) \notin$ R de R
- Rechazar H_0 si $(x_1, x_2, . . . , x_n) \in$ R de R



Regiones de rechazo y de no rechazo (2)







Regiones de rechazo y de no rechazo (3)

Ejemplo 2: Se analiza la rapidez de combustión de un agente propulsor sólido utilizado en los sistemas de salida de emergencia para la tripulación de aeronaves. De manera específica, la atención recae en decidir si la rapidez de combustión promedio es o no 50 cm/s. Esto se expresa de manera formal como:

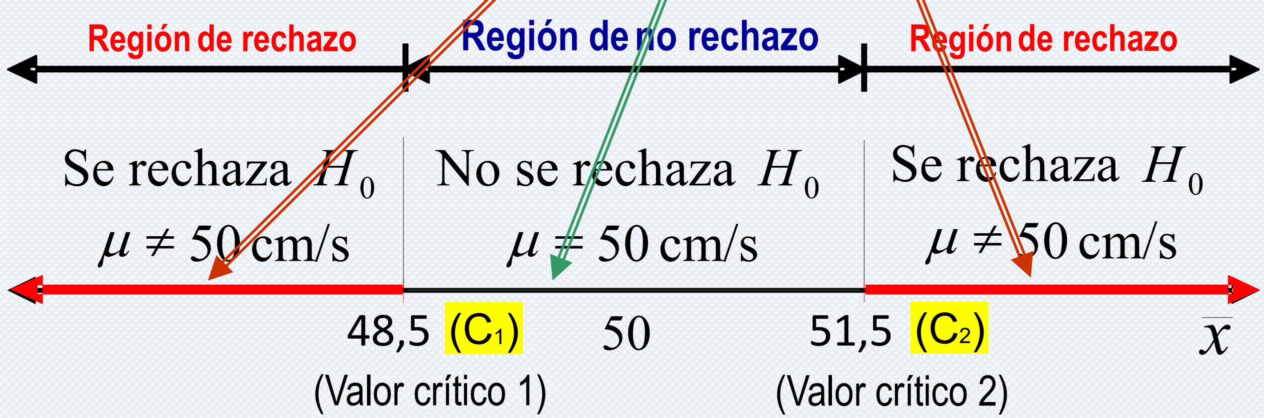
$$H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s}$$
$$H_1 : \mu \neq 50 \text{ cm/s}$$

Evidencia: 10 muestras → $\bar{x}$ **Estadístico**

Se define:

Región NR: Si $48{,}5 \leq \bar{x} \leq 51{,}5$; entonces **no se rechaza** H_0: $\mu = 50$ cm/s

Región R: Si $\bar{x} < 48{,}5$ ó $\bar{x} > 51{,}5$; entonces **se rechaza** H_0: $\mu = 50$ cm/s



Errores en el contraste de hipótesis (1)

El ***error tipo I*** consiste en **rechazar** la hipótesis nula cuando es **verdadera**.

El ***error tipo II*** implica **no rechazar** la hipótesis nula cuando ésta es **falsa**.

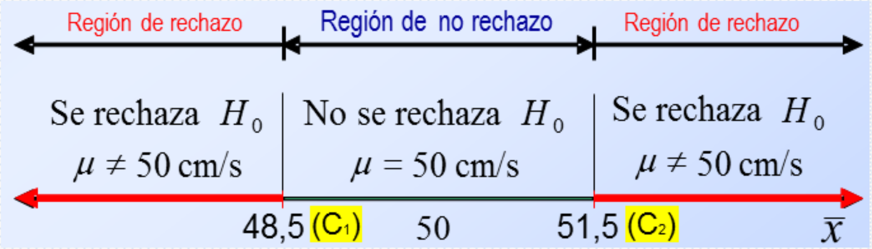
P(cometer error tipo I) = P(rechazar H_0 / H_0 es cierta) = α (***nivel de significación***)

P(cometer error tipo II) = P(no rechazar H_0 / H_0 es falsa) = β

Seguimos con el ejemplo 2

Datos: μ = 50 cm/s $\sigma = 2{,}5$ cm/s $n = 10$

Estadístico de prueba → $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



1) error tipo I : $\bar{x} < 48{,}5$ ó $\bar{x} > 51{,}5$

$$\alpha = P(\bar{X} < 48{,}5 \mid \mu = 50) + P(\bar{X} > 51{,}5 \mid \mu = 50)$$

$$\boxed{\alpha = 0{,}0576}$$

2) error tipo II: $48{,}5 \leq \bar{x} \leq 51{,}5$; cuando la media verdadera es $\mu = 52$

$$\beta = P(48{,}5 \leq \bar{X} \leq 51{,}5 \mid \mu = 52)$$

$$\boxed{\beta = 0{,}2643}$$

Errores en el contraste de hipótesis (2)
Cálculo del error tipo I

$$\alpha = P(\overline{X} < 48{,}5 \mid \mu = 50) + P(\overline{X} > 51{,}5 \mid \mu = 50)$$

Los valores de z que corresponden a los valores críticos 48,5 y 51,5 son

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{48{,}5 - 50}{0{,}79} = -1{,}90 \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{51{,}5 - 50}{0{,}79} = 1{,}90$$

Por lo tanto,

$$\alpha = P(Z < -1{,}90) + P(Z > 1{,}90)$$

$$\alpha = 0{,}0288 + 0{,}0288$$

$$\boxed{\alpha = 0{,}0576}$$

Esto implica que el 5,76% de todas las muestras aleatorias conducirán al rechazo de la hipótesis $H_0 : \mu = 50$ cm/s cuando la verdadera rapidez promedio de combustión es en realidad 50 cm/s.

Errores en el contraste de hipótesis (3)
Cálculo del error tipo II

$$\beta = P(48{,}5 \le \overline{X} \le 51{,}5 \mid \mu = 52)$$

Los valores de z que corresponden a 48,4 y 51,5 cuando $\mu = 52$ son

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{48{,}5 - 52}{0{,}79} = -4{,}43 \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{51{,}5 - 52}{0{,}79} = -0{,}63$$

Por tanto,

$$\beta = P(-4{,}43 \le Z \le -0{,}63)$$

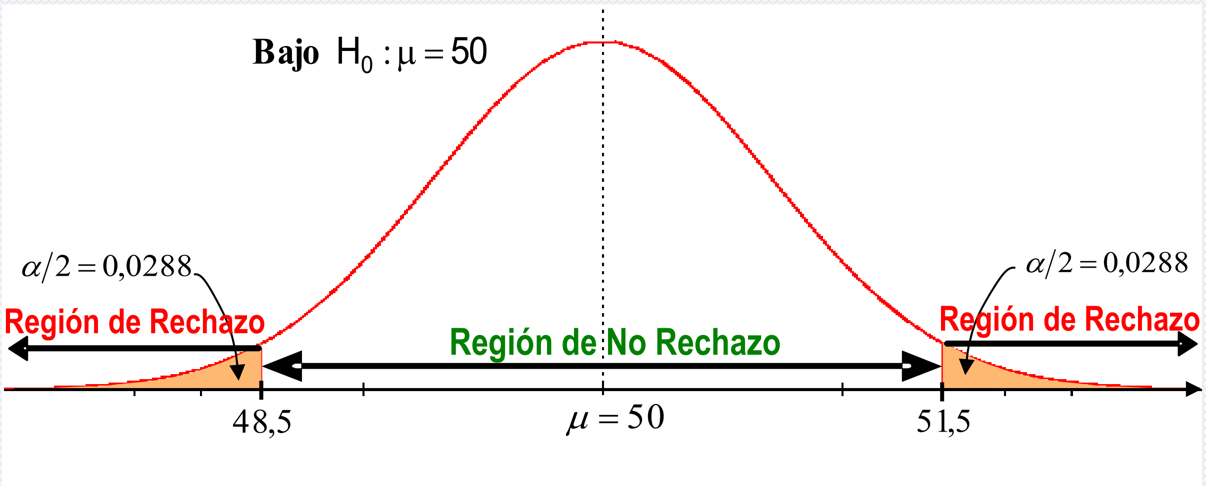
$$\beta = P(Z \le -0{,}63) - P(Z \le -4{,}43)$$

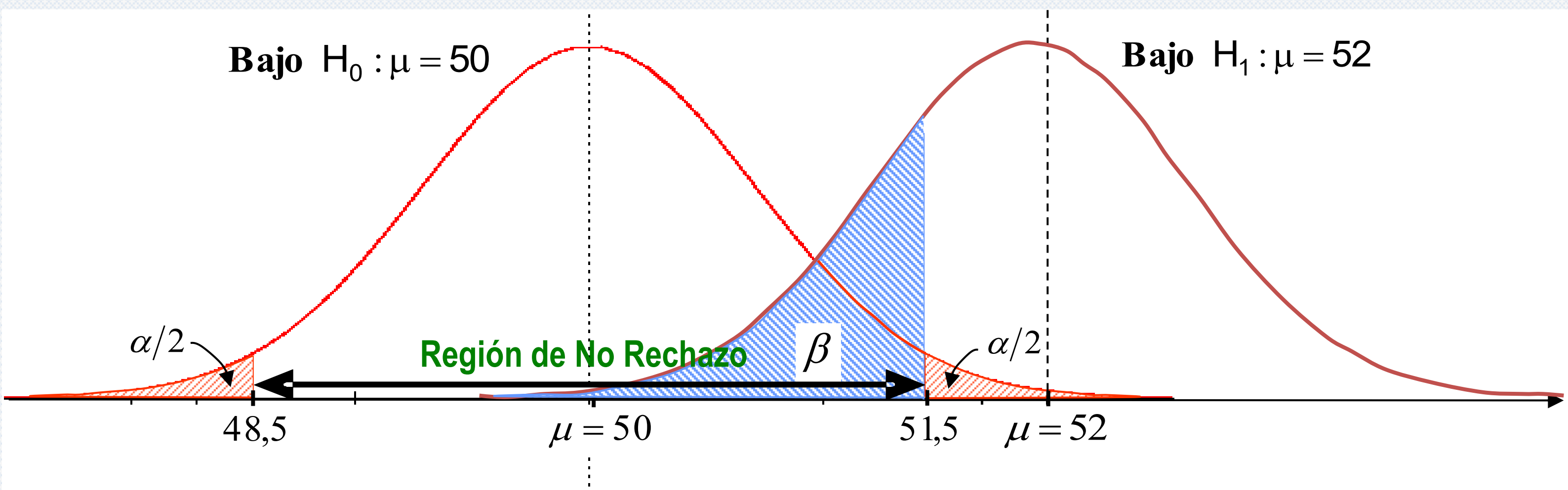
$$\beta = 0{,}2643 - 0{,}000$$

$$\boxed{\beta = 0{,}2643}$$

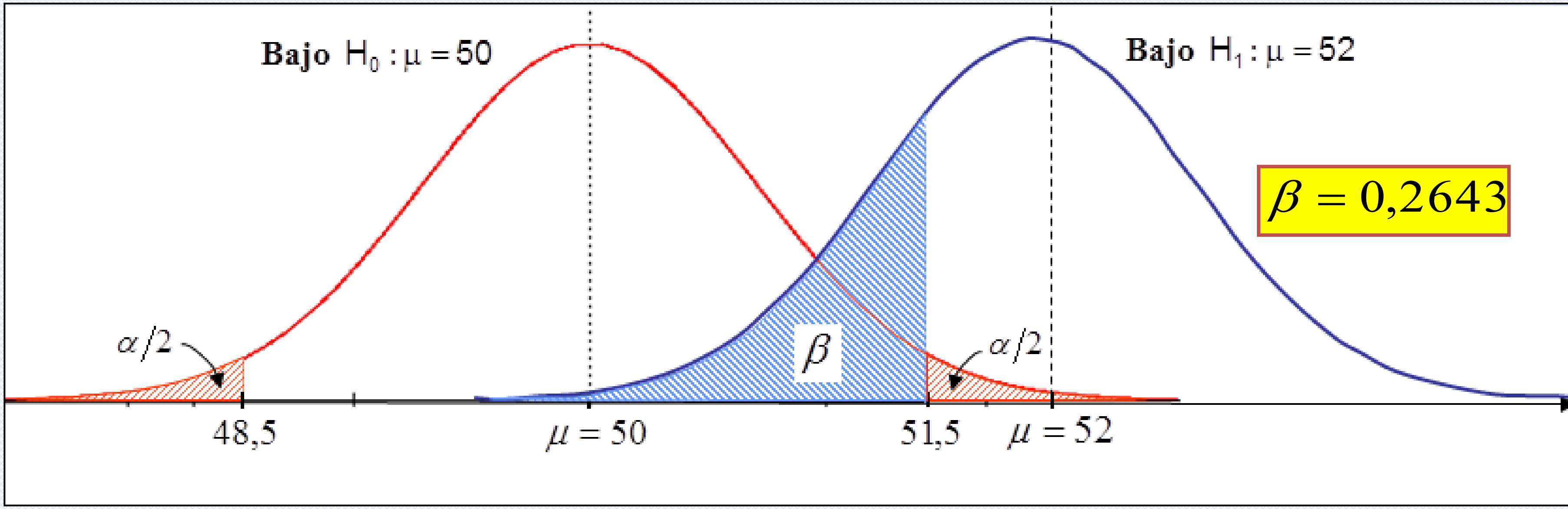
Esto implica que el 26,43% de todas las muestras aleatorias conducirán al *No rechazo* de H_0: $\mu = 50$ cm/s cuando la verdadera rapidez promedio de la combustión es en realidad de 52 cm/s.

Errores en el contraste de hipótesis (4)
Interpretación gráfica de errores tipo I y tipo II (1)





Errores en el contraste de hipótesis (5)
Interpretación gráfica de errores tipo I y tipo II (2)



La ***Potencia*** (***P***) de una prueba estadística es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula (H_0) cuando es falsa.

$$P = 1 - \beta$$

Para el ejemplo 2

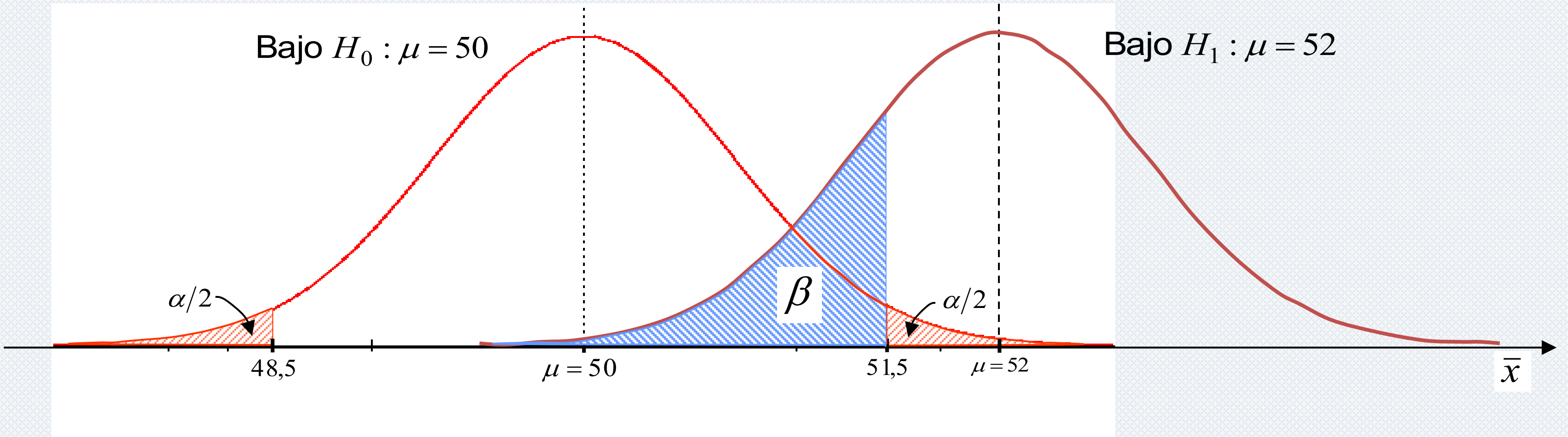
$$P = 1 - 0,2643 = 0,7357$$

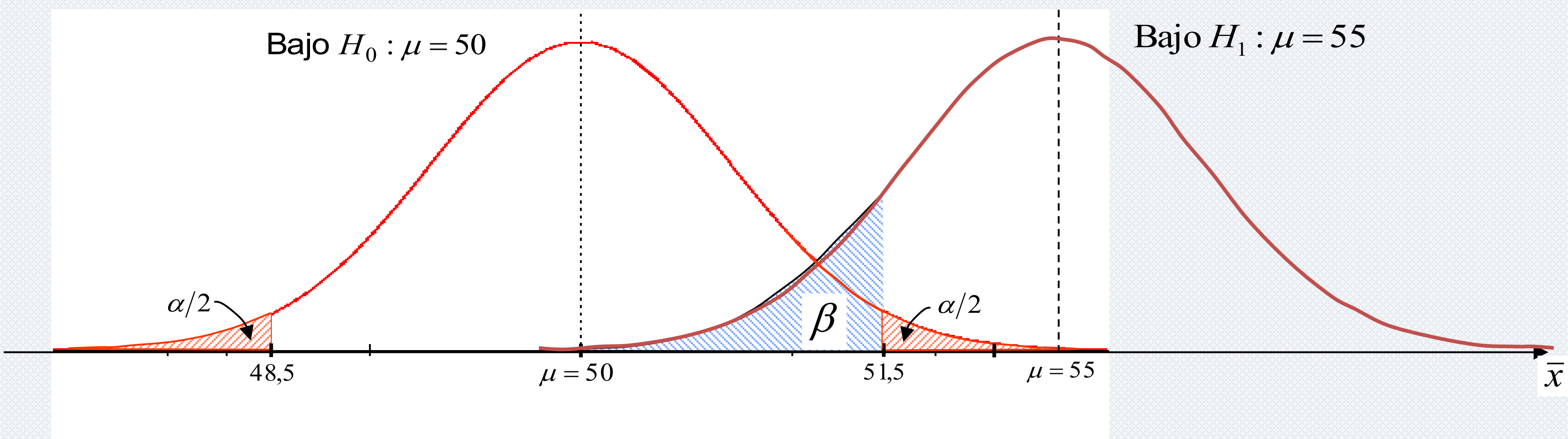
Errores en el contraste de hipótesis (6)
Cuadro resumen de errores tipo I y tipo II

		Estado de la Naturaleza	
		H_0 verdadera	H_0 falsa
Decisión	No rechazo H_0	**Acierto** **1 - α** **(Nivel de confianza)**	**Error Tipo II** **β**
	Rechazo H_0	**Error Tipo I** **α** **(Nivel de significación)**	**Acierto** **1 - β** **(Potencia de prueba)**

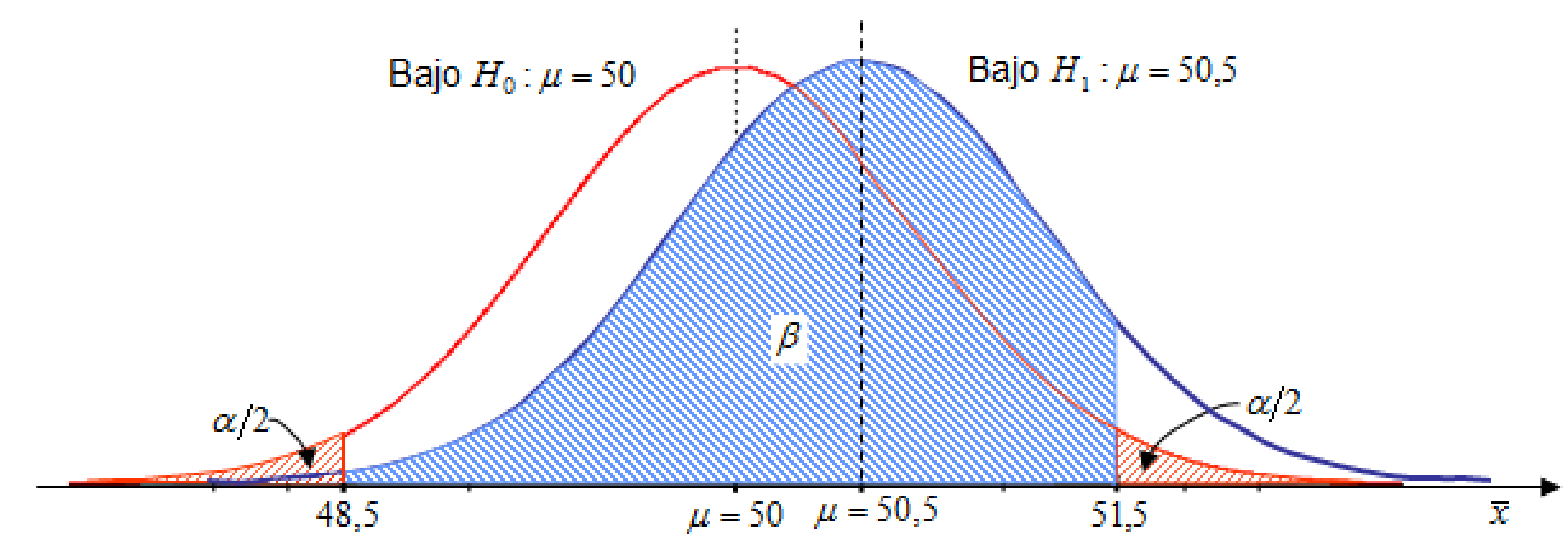
Podemos hacer la probabilidad del **Error Tipo I** tan *pequeña* como queramos, pero esto hace que *aumente* la probabilidad del **Error Tipo II**.

Errores en el contraste de hipótesis (7)
Modificaciones en el error tipo II (1)





Errores en el contraste de hipótesis (8)
Modificaciones en el error tipo II (2)



$P = 1 - \beta$ → $P = 1 - 0,8905 = 0,1095$

Valor robusto de $P \geq 0,80$

Procedimiento para contraste de hipótesis

PASOS GENERALES PARA EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. Del contexto del problema, identificar la variable de interés y definir el parámetro a analizar.
2. Establecer la hipótesis nula (H_0).
3. Especificar una apropiada hipótesis alternativa (H_1).
4. Seleccionar un nivel de significancia α.
5. Establecer un estadístico de prueba apropiado.
6. Establecer la región de rechazo bajo la hipótesis nula (H_0) .
7. Calcular la o las cantidades muestrales necesarias, sustituirlas en la ecuación para el estadístico de prueba, y calcular el valor correspondiente.
8. Decidir si debe rechazar o no la hipótesis nula (H_0) y notificar esto en el contexto del problema.

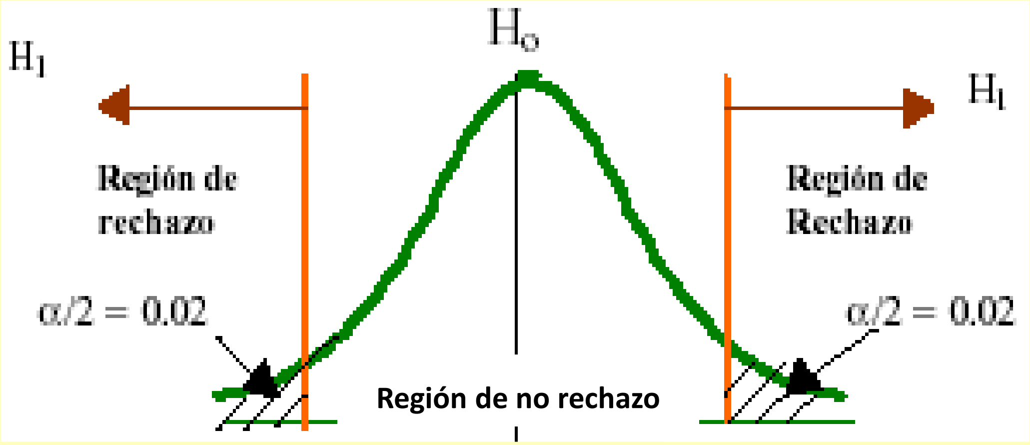
Hipótesis referente a la media de una población
Población normal con σ^2 conocida (1)

Ejercicio 1: Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una vida útil que se distribuye de forma normal con una media de 800 horas y una desviación estándar de 40 horas. Si una muestra aleatoria de 30 focos tiene una duración promedio de 788 horas, ¿muestran los datos suficiente evidencia para establecer que la vida útil media ha cambiado? Utilice un nivel de significación del 0,04.

Datos:

μ = 800 horas
σ = 40 horas
$\bar{x}$ = 788 horas
n = 30

1. Variable de interés: vida útil de focos y el parámetro es μ.
2. $H_0 : \mu = 800$ horas
3. $H_1 : \mu \neq 800$ horas
4. $\alpha = 0{,}04$



Población normal con σ^2 conocida (2)

5. La estadística de prueba es

$$\boxed{z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

6. Región de rechazo:

Vamos a rechazar H_0 cuando $\overline{X} < C_1$ ó $\overline{X} > C_2$, donde C_1 y C_2 son los denominados valores críticos.

Se establece la región de rechazo:

$$\boxed{\alpha = P(\overline{X} < C_1 \mid \mu = 800) + P(\overline{X} > C_2 \mid \mu = 800)}$$

7. Como $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ en nuestro caso $\overline{X} \sim N(800, 1600/30)$, entonces

$$(1)\quad P(\overline{X} < C_1 \mid \mu = 800) = \alpha/2$$

$$(2)\quad P(\overline{X} > C_2 \mid \mu = 800) = \alpha/2$$

Estandarizando tendremos

$$(1)\ P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{C_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{H_0} = 0{,}02 \rightarrow P\left(z < \frac{C_1 - 800}{40/\sqrt{30}}\right)_{H_0} = 0{,}02 \rightarrow \frac{C_1 - 800}{40/\sqrt{30}} = -2{,}052$$

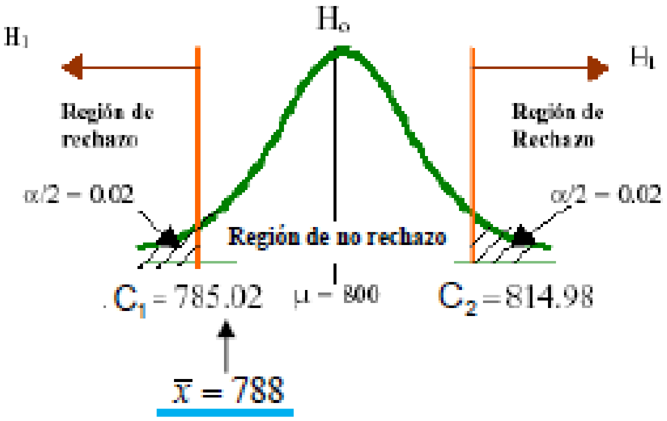
$$\rightarrow C_1 = -2{,}052\frac{40}{\sqrt{30}} + 800 \rightarrow \boxed{C_1 = 785{,}02}$$

Población normal con σ^2 conocida (3)

$$(2)\ P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{H_0} = 0{,}02 \rightarrow P\left(z > \frac{C_2-800}{40/\sqrt{30}}\right)_{H_0} = 0{,}02 \rightarrow \frac{C_2-800}{40/\sqrt{30}} = 2{,}052$$

$$\rightarrow C_2 = 2{,}052\frac{40}{\sqrt{30}} + 800 \rightarrow \boxed{C_2 = 814{,}98}$$

$\boxed{\bar{x} = 788 \text{ horas}}$



8. Justificación y decisión:

Dado que la región de rechazo está dada para: $\overline{X} < 785{,}02$ y $\overline{X} > 814{,}98$, y como $\boxed{\bar{x} = 788 \text{ horas},}$ no se rechaza H_0 y se concluye con un nivel de significancia del 0,04 que, no hay evidencia suficiente que indique que la duración media de los focos ha cambiado.

Cuadro comparativo entre IC y CH

CARACTERÍSTICA	INTERVALOS DE CONFIANZA	CONTRASTE DE HIPÓTESIS
Propósito principal	Estimar un parámetro poblacional (media, proporción, diferencia, etc.) con un rango de valores plausibles.	Tomar una decisión sobre una afirmación (hipótesis) acerca de un parámetro poblacional.
Enfoque	Estimación.	Decisión / verificación.
Resultado	Un rango (límite inferior y superior) con un nivel de confianza asociado (ej. 95%).	Una decisión: rechazar o no rechazar la hipótesis nula, generalmente acompañada de un valor *p*.
Interpretación	El intervalo indica los valores del parámetro que son consistentes con los datos observados, bajo un nivel de confianza dado.	Indica si la evidencia de los datos es suficiente para concluir que la hipótesis nula es falsa.
Nivel de significación / confianza	Se establece un **nivel de confianza** (por ejemplo, 95%).	Se establece un **nivel de significación** (α, por ejemplo, 0,05).
Dependencia del tamaño de muestra	Intervalos más estrechos con mayor tamaño muestral.	Mayor tamaño muestral aumenta la potencia de la prueba y puede afectar la significancia.
Relación entre ambos	Un valor hipotético de parámetro se rechaza si no está dentro del intervalo de confianza correspondiente.	El rechazo de H_0 al 5% es equivalente a que el valor de H_0 no esté en el IC al 95%.
Ejemplo	"Con 95% de confianza, la media poblacional está entre 12,3 y 15,8".	"Al nivel de significación del 5%, se rechaza la hipótesis de que la media sea igual a 14 (p = 0,03)".