Unidad 2: Cinemática de la Partícula.

Conceptos generales:

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos con prescindencia de las causas que lo producen. Describe la posición, la velocidad, la aceleración y la trayectoria que puede tener un cuerpo, sin considerar las fuerzas que lo ocasionan.

En esta unidad, se describirá el movimiento de partículas puntuales, sin dimensiones ni estructura interna. Partícula o punto es una abstracción que permite simplificar el estudio del movimiento y desarrollar sus conceptos fundamentales. En determinadas circunstancias y condiciones algunos sistemas mecánicos se pueden abordar razonable y suficientemente, considerándolos como "puntuales".

Para estudiar el movimiento, resulta indispensable adoptar sistemas de referencia convenientes. Así, se tienen los Sistemas de Referencia "Fijos" o "Absolutos" y sistemas de Referencia móviles o "Relativos".

Vector de Posición, Velocidad y Aceleración

El *Vector de posición* de la partícula P, respecto del sistema fijo "O" es **r**(t), función vectorial que depende del tiempo. El Vector de posición tendrá siempre su origen coincidente con el origen del sistema fijo, en tanto que el otro extremo coincidirá o seguirá la posición de la partícula.

La trayectoria de un móvil es la curva alabeada **c** descripta paramétricamente por la función **r**(t).

Existen muchos tipos de movimientos diferentes, incluso sobre una misma trayectoria.

Estos se distinguen por el ritmo con que cambia el vector de posición al transcurrir el tiempo.

Se ve en la figura 2.1 la partícula en dos instantes diferentes, "t" y poco tiempo después, "t + Δt". Durante ese intervalo de tiempo, la posición pasa de ser descripta por el vector **r**[t], al vector **r**[t+Δt]

En el dibujo se han omitido los ejes del sistema referencial.

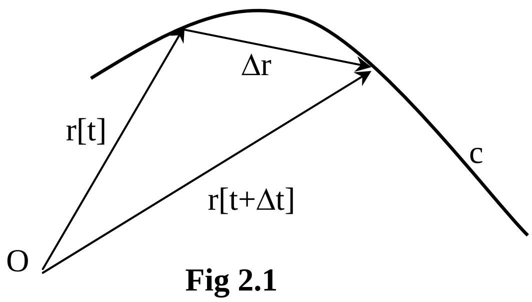


Fig 2.1

El cambio de posición que ha experimentado la partícula, está dado por el vector desplazamiento Δ**r**:

Δ**r** = **r**[t+Δt] – **r**[t]

Generalmente, este vector no con coincide con la trayectoria, salvo el caso particular del movimiento rectilíneo.

La velocidad, o ritmo con que cambia o se modifica el vector posición, es la derivada del vector posición respecto del tiempo, límite del cociente incremental Δ**r**/Δt cuando el incremento "Δt" tiende a cero:

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{Lím} \frac{r[t+\Delta t] - r[t]}{\Delta t} = \frac{dr[t]}{dt}$$

En el límite, cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez cada vez más pequeño, el vector Δr se aproxima a la trayectoria y el vector velocidad queda tangente a la misma.

Este *vector velocidad* dependiente del tiempo se indicará de la siguiente manera:

$$v(t) = \frac{dr_{(t)}}{dt} = \dot{r}_{(t)} = \lim \frac{r_{(t+\Delta t)} - r_{(t)}}{\Delta t}$$

Siendo **r**(t) el vector de posición referido a un sistema fijo, la velocidad **v**(t) definida es la **velocidad absoluta**, y es independiente del origen "O" considerado.

La *aceleración* se define como:

$$a(t) = \frac{dv_{(t)}}{dt} = \frac{d^2 r_{(t)}}{dt^2} = \ddot{r}_{(t)} = \lim \frac{v_{(t+\Delta t)} - v_{(t)}}{\Delta t}$$

Podemos entender a la aceleración como la causa de los cambios en la velocidad. Más adelante se verá que el cambio en el módulo del vector velocidad se deben a una componente de la aceleración denominada aceleración tangencial, en tanto que los cambios en la dirección se deben a la aceleración normal.

Interesa analizar **r**(t), **v**(t) y **a**(t) para los sistemas de coordenadas más usuales o prácticos: cartesianas, cilíndricas, esféricas, intrínsecas. Para cada uno de estos sistemas de coordenadas, se define una base en la cual se expresan los vectores. Para más detalles acerca de los sistemas referenciales y los versores que conforman sus bases, consultar el Anexo 1, y la bibliografía recomendada.

En coordenadas cartesianas:

Se toma un sistema de coordenadas xyz, de base ortonormal {**i,j,k**}, con origen en el punto
fijo "O". El vector de posición **r**(t) tomará la forma:

r(t) = x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k**

La velocidad es:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathrm{r}}(t) = \frac{d\mathrm{x}}{d\mathrm{t}}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{d\mathrm{t}}\,\mathbf{j} + \frac{d\mathrm{z}}{d\mathrm{t}}\,\mathbf{k} = \dot{\mathrm{x}}(t)\,\mathbf{i} + \dot{\mathrm{y}}(t)\,\mathbf{j} + \dot{\mathrm{z}}(t)\,\mathbf{k}$$

La aceleración resulta:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathrm{v}}(t) = \ddot{\mathrm{r}}(t) = \frac{d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{t}^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2\mathrm{y}}{d\mathrm{t}^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2\mathrm{z}}{d\mathrm{t}^2}\,\mathbf{k} = \ddot{\mathrm{x}}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{\mathrm{y}}(t)\,\mathbf{j} + \ddot{\mathrm{z}}(t)\,\mathbf{k}$$

Nota: Se considera el referencial de coordenadas cartesianas como fijo, es decir, que los versores **i**,**j**,**k** no varían en el tiempo y tienen derivada nula.

En coordenadas cilíndricas fig 2.2:

Se utilizan las coordenadas (ρ, ϕ, z) y la base móvil ortonormal {$\mathbf{e}_\rho$,$\mathbf{e}_\phi$,$\mathbf{k}$}.
El vector de posición es:

$$\mathbf{r}(t)= \rho(t)\, \mathbf{e}_\rho+z(t)\mathbf{k}$$

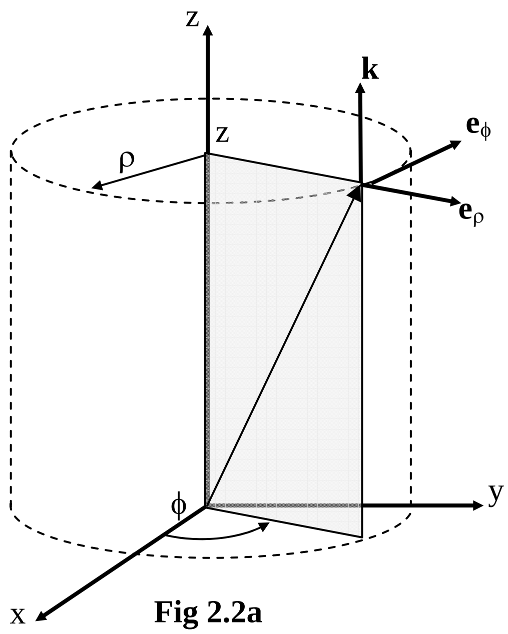


Fig 2.2a

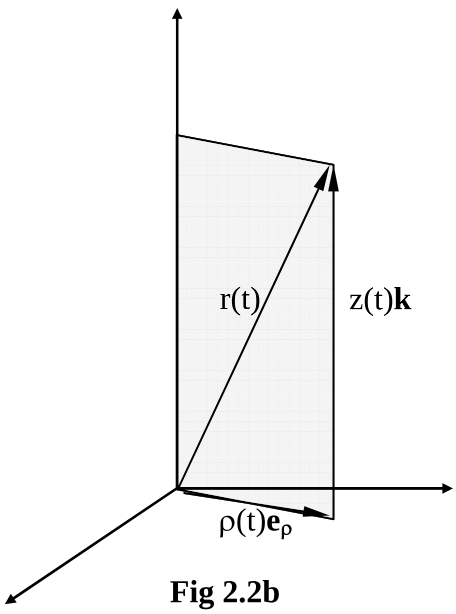


Fig 2.2b

La velocidad se obtiene derivando **r**(t) respecto del tiempo. Al realizar esta derivada, se tiene en cuenta que el vector de posición esta referido a una base móvil, es decir, que los versores que la forman cambian su dirección en el tiempo.

$$\mathbf{v}(t)= \frac{d\mathrm{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}\, \mathbf{e}_\rho + \rho\, \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z}\, \mathbf{k}$$

En la ecuación anterior, $\dot{\mathbf{e}}_\rho$ representa la derivada del versor $\mathbf{e}_\rho$ respecto del tiempo.

Siendo:

$\mathbf{e}_\rho$ = Cos (ϕ) **i** + Sen(ϕ) **j**, y $\mathbf{e}_\phi$ = -Sen (ϕ) **i** + Cos(ϕ) **j**

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\phi}\,(\text{-Sen}(\phi)\, \mathbf{i} + \text{Cos}(\phi)\, \mathbf{j}) = \dot{\phi}\, \mathbf{e}_\phi$$

Es decir, que la derivada del versor $\mathbf{e}_\rho$ respecto del tiempo tiene la dirección de $\mathbf{e}_\phi$.

Utilizando esta relación se reformula **v**(t):

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\rho}\, \mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\, \mathbf{e}_\phi + \dot{z}\, \mathbf{k}$$

En la descripción de la velocidad en coordenadas cilíndricas, aparecen tres componentes:

$\dot{\rho}$, componente de la velocidad en la dirección de $\mathbf{e}_\rho$, será distinto de cero cuando el movimiento sea tal que ρ varíe en el tiempo.

$\rho\dot{\phi}$ es la componente de la velocidad en la dirección de $\mathbf{e}_\phi$, y

$\dot{z}$ la componente de la velocidad en la dirección de **k**.

Se remarca que, en un caso general de movimiento en el espacio, el vector velocidad **v**(t) siempre tiene la dirección de la tangente a la trayectoria. $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}\}$ forman un triedro ortogonal, cuya orientación cambia "acompañando" al móvil.

Un caso particular es el movimiento circular, si el sistema de coordenadas se elige de manera tal que su origen coincide con el centro de la circunferencia descrita por el móvil, y el eje z tal que resulte perpendicular al plano en que se realice el movimiento, resultarán

z = 0 y ρ = constante = radio de la circunferencia; $\dot{\rho} = \dot{z} = 0$; $\dot{\phi} = \omega$ (velocidad angular);

$\rho\,\omega$ = velocidad tangencial (v_T). La expresión de la velocidad será:

$\mathbf{v}(t) = \rho\,\omega\,\mathbf{e}_\phi = v_T\,\mathbf{e}_\phi$

v_T es la conocida velocidad tangencial del movimiento circular.

La aceleración es: $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \rho\,\ddot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \rho\,\dot{\phi}\,\dot{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z}\,\mathbf{k}$

Siendo $\mathbf{e}_\phi = -\mathrm{Sen}(\phi)\,\mathbf{i} + \mathrm{Cos}(\phi)\,\mathbf{j}$, será $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\,(\mathrm{Cos}(\phi)\,\mathbf{i} + \mathrm{Sen}(\phi)\,\mathbf{j}) = -\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho$

Agrupando términos:

$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\phi})\,\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\,\mathbf{k}$

Se analizarán a continuación los distintos componentes de la expresión de la aceleración en coordenadas cilíndricas:

Componentes en $\mathbf{e}_\rho$:

$\ddot{\rho}$: Puede interpretarse como una aceleración radial.

$\rho\,\dot{\phi}^2$: Es la causante del cambio de dirección de la componente de velocidad en $\mathbf{e}_\phi$. En el caso de un movimiento circular, es la aceleración centrípeta.

Componentes en $\mathbf{e}_\phi$:

$\rho\,\ddot{\phi}$: Es originada por la variación de la velocidad angular con que rota el radio ρ. Si el movimiento es circular, es la aceleración tangencial.

$2\dot{\rho}\,\dot{\phi}$: Es la aceleración complementaria (a_c), aparece únicamente cuando tanto el radio ρ como el ángulo ϕ varían en el tiempo. Proviene de dos contribuciones simultáneas de igual valor $\dot{\rho}\,\dot{\phi}$ pero de diferente origen:

1- Debido al cambio de dirección de $\dot{\rho}$. Suponiendo que el movimiento posee $\dot{\rho} \neq 0$, y de módulo constante. Si $\dot{\phi} \neq 0$, la dirección del vector $\dot{\rho}$ cambia continuamente, como se muestra en la figura:

En la figura 2.3, se aprecia que:

$\Delta \dot{\rho} = \Delta\phi \ \dot{\rho}_1 = \Delta\phi \ \dot{\rho}_2 = \Delta\phi \ \dot{\rho}$

Formando el cociente $\dfrac{\Delta \dot{\rho}}{\Delta \mathbf{t}} = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta \mathbf{t}} \dot{\rho}$

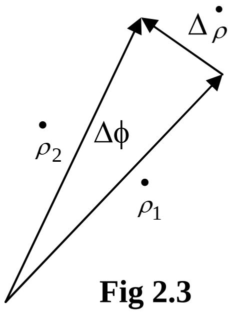


Fig 2.3

y en el límite cuando $\Delta t \to 0$:

$(½)a_c = \dot{\rho}\,\dot{\phi}$ $\quad a_c$ = Aceleración complementaria

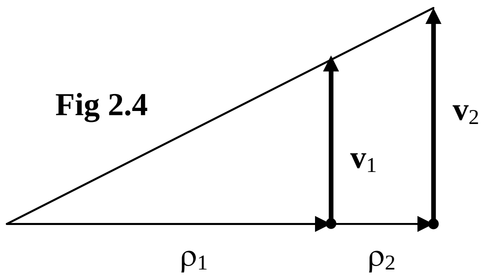
2- Debido al desplazamiento sobre el radio fig 2.4: Suponiendo $\dot{\phi}$ =constante, si $\dot{\rho} \neq 0$, el valor de ρ se modifica, lo que producirá un cambio en la componente de la velocidad en la dirección de $\mathbf{e}_\phi$

$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \dot{\phi}\,(\rho_2 - \rho_1)$

Formando el cociente $\dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{t}} = \dot{\phi}\ \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta \mathbf{t}}$

En el límite cuando $\Delta t \to 0$ $\quad$ b(1/2)$\mathbf{a}_c = \dot{\phi}\,.\,\dot{\rho}$

Fig 2.4



En coordenadas esféricas fig 2.5:

Se utilizan las coordenadas generalizadas esféricas ρ,θ,λ y la base ortonormal $\{\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\lambda\}$

El vector de posición se expresa en la base de coordenadas esféricas como:

r = r $\mathbf{e}_r$

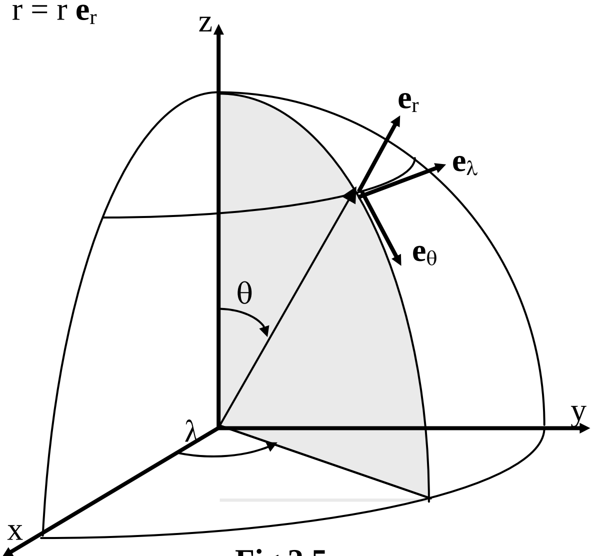


Fig 2.5a

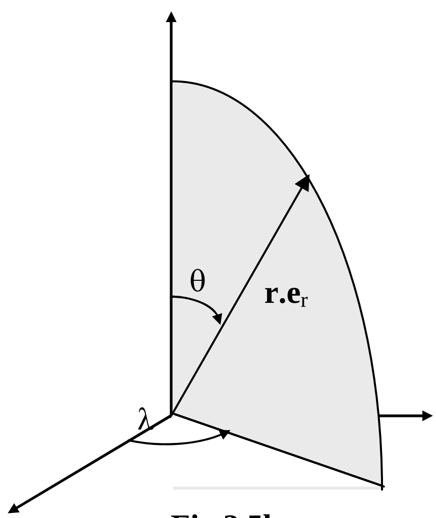


Fig 2.5b

Para las coordenadas esféricas se cumplen las siguientes relaciones entre los versores de la base:

$\mathbf{e}_r$ = Sen(θ)Cos(λ) **i** + Sen(θ)Sen(λ) **j** + Cos (θ)**k**

$$\frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial \theta} = \mathrm{Cos}(\theta)\mathrm{Cos}(\lambda)\,\mathbf{i} + \mathrm{Cos}(\theta)\mathrm{Sen}(\lambda)\,\mathbf{j} - \mathrm{Sen}(\theta)\mathbf{k} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e_r}}{\partial \lambda} = -\,\mathrm{Sen}(\theta)\mathrm{Sen}(\lambda)\,\mathbf{i} + \mathrm{Sen}(\theta)\mathrm{Cos}(\lambda)\,\mathbf{j} = \mathrm{Sen}(\theta)\mathbf{e}_\lambda$$

El vector velocidad en coordenadas esféricas resulta:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = \dot{\mathrm{r}}\;\mathbf{e}_r + \mathrm{r}\,\dot{\theta}\;\mathbf{e}_\theta + \mathrm{r}\,\dot{\lambda}\;\mathrm{Sen}(\theta)\mathbf{e}_\lambda$$

En coordenadas esféricas, las curvas a r y λ constantes se denominan meridianos; las curvas a r y θ constantes son los paralelos.

En la expresión de la velocidad, aparecen tres componentes:

$\dot{\mathrm{r}}$ **:** es la componente en la dirección del radio r. Será siempre nula en los movimientos con r constantes.

$\mathrm{r}\,\dot{\theta}$: componente en la dirección de $\mathbf{e}_\theta$, tangente a un meridiano.

$\mathrm{r}\,\dot{\lambda}$: componente en la dirección de $\mathbf{e}_\lambda$, tangente a un paralelo.

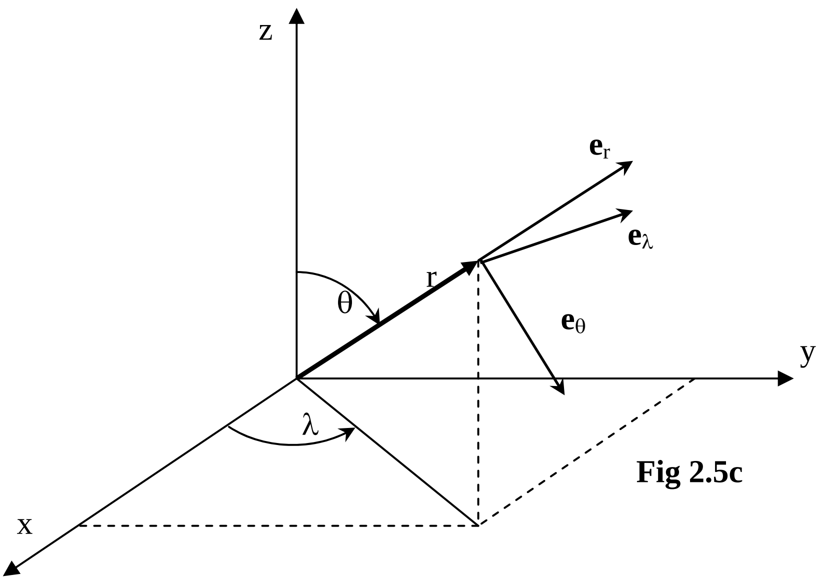


Fig 2.5c

La aceleración resulta:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r}\dot{\theta}^2 - \mathrm{r}\,\mathrm{Sen}^2(\theta)\dot{\lambda}^2)\,\mathbf{e}_r + (\mathrm{r}\ddot{\theta} + 2\,\dot{\mathrm{r}}\;\dot{\theta} - \mathrm{r}\,\mathrm{Sen}(\theta)\mathrm{Cos}(\theta)\dot{\lambda}^2)\,\mathbf{e}_\theta +$$

$$+(\mathrm{r}\,\mathrm{Sen}(\theta)\ddot{\lambda} + 2\,\dot{\mathrm{r}}\;\;\mathrm{Sen}(\theta)\dot{\lambda} + 2\,\mathrm{r}\,\mathrm{Cos}(\theta)\dot{\theta}\,\dot{\lambda})\mathbf{e}_\lambda$$

Las componentes en $\mathbf{e}_r$:

$\ddot{\mathrm{r}}$ **:** Aceleración en la dirección radial, originada en el cambio de módulo de la componente de la velocidad en $\mathbf{e}_r$.

$r\dot{\theta}^2$: Es una aceleración centrípeta debida a la rotación sobre el meridiano.

$r\,Sen^2(\theta)\dot{\lambda}^2$: Proyección sobre $\mathbf{e}_r$ de la aceleración centrípeta debido a la rotación sobre el paralelo.

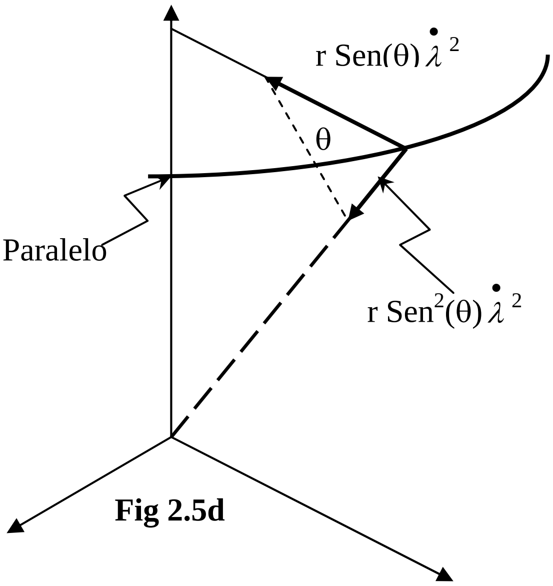


Fig 2.5d

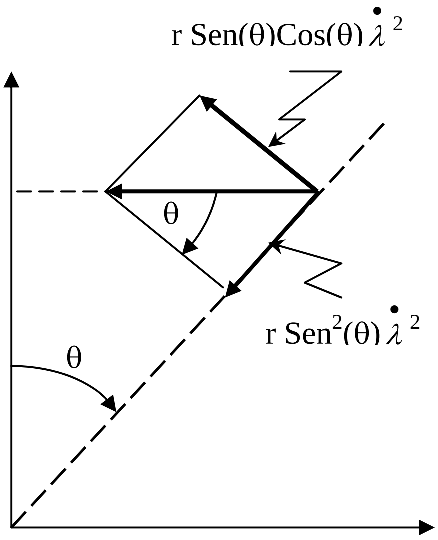


Fig 2.5e

Componentes en $\mathbf{e}_\theta$

$r\ddot{\theta}$: aceleración tangencial debida a rotación en meridiano.

$2\dot{r}\dot{\theta}$: Aceleración complementaria.

$r\,Sen(\theta)Cos(\theta)\dot{\lambda}^2$: Proyección sobre la tangente al meridiano de la aceleración centrípeta, debida a la rotación sobre el paralelo.

Componentes en $\mathbf{e}_\lambda$:

$r\,Sen(\theta)\ddot{\lambda}$: Aceleración tangencial debido a rotación sobre el paralelo.

$2\dot{r}\,Sen(\theta)\dot{\lambda}$: Aceleración complementaria, proyección sobre el plano paralelo de la velocidad radial ($\dot{r}\,Sen(\theta)$).

$2\,r\,Cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\lambda}$: Aceleración complementaria en paralelo debido a la proyección sobre el plano paralelo de la velocidad tangencial en el meridiano ($r\,Cos(\theta)\dot{\theta}$)

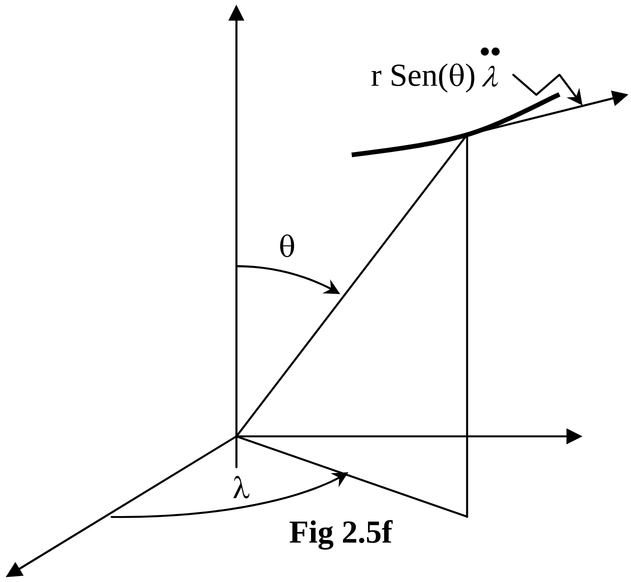


Fig 2.5f

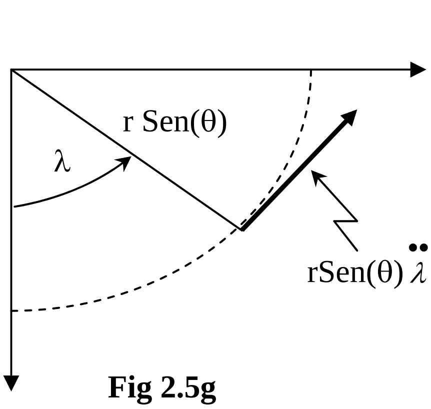


Fig 2.5g

En coordenadas intrínsecas fig 2.6

En las coordenadas intrínsecas o de trayectoria, la descripción del movimiento de la partícula se realiza en términos de componentes que son tangentes o perpendiculares a la trayectoria. Esto resulta particularmente útil cuando se conoce la curva que sigue la partícula, por ejemplo un automóvil que recorre un camino sinuoso.

El movimiento de una partícula sobre una curva en el espacio puede describirse en función de la coordenada generalizada q_1=s, la longitud de arco medida desde un punto de referencia.

El vector de posición se expresa en función de esta coordenada generalizada:

r(s) = x(s) **i** + y(s) **j** + z(s) **k**

En esta expresión, “s” es depende del tiempo (a medida que transcurre el tiempo, el móvil se desplaza sobre su trayectoria, y la longitud del arco recorrido aumenta).

Para determinar la velocidad, se aplica la regla de la cadena:

$$v_{(t)} = \frac{dr_{(s)}}{dt} = \frac{dr_{(s)}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dr_{(s)}}{ds}\dot{s} = \frac{dx_{(s)}}{ds}\dot{s}i + \frac{dy_{(s)}}{ds}\dot{s}j + \frac{dz_{(s)}}{ds}\dot{s}k$$

$$v_{(t)} = \dot{s}\left(\frac{dx_{(s)}}{ds}i + \frac{dy_{(s)}}{ds}j + \frac{dz_{(s)}}{ds}k\right)$$

Siendo $\left(\frac{dx_{(s)}}{ds}i + \frac{dy_{(s)}}{ds}j + \frac{dz_{(s)}}{ds}k\right) = T$, el versor tangente (**T** es tangente a la curva)

El vector velocidad resulta:

v(t) = $\dot{s}$**T** .

Esta última ecuación refleja el hecho de que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, por lo tanto, tiene solamente componente en el versor tangente. $\dot{s}$**T** es la rapidez o celeridad.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto del tiempo.

$$a_{(t)} = \frac{dv_{(s)}}{dt} = \ddot{s}T + \dot{s}\frac{dT}{ds}\dot{s}$$

Siendo $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}$, donde ρ es el radio de curvatura (no debe ser confundido con el radio ρ de coordenadas cilíndricas), la aceleración en coordenadas intrínsecas se puede expresar como:

$$a_{(t)} = \frac{dv_{(s)}}{dt} = \ddot{s}T + \frac{\dot{s}^2}{\rho}N$$

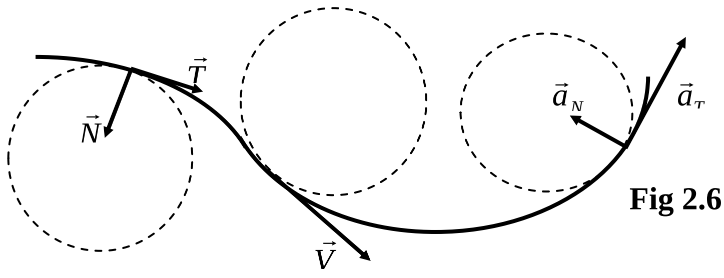


Fig 2.6

En coordenadas intrínsecas, aparecen dos componentes de la aceleración: la aceleración tangencial ($\ddot{s}$), responsable del cambio en el valor de la velocidad, y la aceleración normal ($\frac{\dot{s}^2}{\rho}$) responsable del cambio de dirección de la velocidad.

En el dibujo de la derecha, se muestra un movimiento curvilíneo que tiene lugar en un plano. Se muestran tres instantes diferentes del movimiento y en cada uno de ellos el radio de curvatura y sus correspondientes circulo osculador. También se muestran el versor normal y tangencial en el primer círculo oscilador. En el segundo círculo oscilador solo se muestra la velocidad y por último en el tercer círculo se indican las aceleraciones normal y tangencial.

Si bien la descripción de la velocidad y aceleración en función de la coordenada intrínseca "s" es sencilla, se debe tener en cuenta que los versores **T** y **N** cambian de dirección a medida que la partícula evoluciona en su movimiento, además, el radio de curvatura ρ se mide desde un centro de rotación cuya posición se modifica continuamente.

Anexo 1

Sistemas Referenciales

1. **Sistemas de coordenadas generalizadas**

El número de coordenadas necesarias para describir un sistema, es igual al número de grados de libertad que el mismo posee. Así, para determinar la posición de una partícula en el plano, son necesarias dos coordenadas. Si bien por defecto se piensa en distancias medidas sobre ejes perpendiculares (Sistema de ejes cartesianos), este par de coordenadas puede tener cualquier dimensionalidad.

Se denomina sistema de coordenadas generalizadas, a cualquier sistema de coordenadas que permita describir un sistema físico.

Un sistema que posee "n" grados de libertad, puede ser expresado por q_1, q_2, ..., q_n coordenadas generalizadas. Casos particulares son las coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
q_1	x	ρ	r
q_2	y	ϕ	λ
q_3	z	z	θ

Estas coordenadas generalizadas definen un espacio al que se denomina espacio de representación. En el caso de las coordenadas cartesianas, el espacio de representación es coincidente con el espacio físico o real.

Para los demás sistemas de coordenadas generalizadas, la relación entre los espacios se establece mediante relaciones, por ejemplo, para el espacio de tres dimensiones:

$$
\begin{aligned}
x &= x(q_1, q_2, q_3) \\
y &= y(q_1, q_2, q_3) \qquad [1] \\
z &= z(q_1, q_2, q_3)
\end{aligned}
$$

Radio vector o Vector de Posición:

La ubicación de un punto en el espacio cartesiano viene dado por el radio vector
$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
donde $\mathbf{r}$ es una combinación lineal de los versores bases.

Utilizando las relaciones [1], el radio vector en coordenadas generalizadas queda:
$$\mathbf{r} = x(q_1, q_2, q_3)\mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3)\mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3)\mathbf{k} \qquad [2]$$

Base de coordenadas generalizadas.

Partiendo del vector posición en coordenadas generalizadas, ecuación [2], derivando este vector posición respecto de las coordenadas generalizadas, se obtiene otro vector con los cuales se puede formar una base:

$$b_1 = \frac{\partial r}{\partial q_1} \quad , \quad b_2 = \frac{\partial r}{\partial q_2} \quad , \quad b_3 = \frac{\partial r}{\partial q_3} \qquad [3]$$

Estos vectores no necesariamente son ortogonales, pero siempre cumplen la condición de no coplanaridad, lo que asegura que puedan formar una base para un espacio tridimensional.

Dividiendo por el módulo de cada vector, se obtiene una base de versores:

$$e_1 = \frac{\partial r / \partial q_1}{\left| \partial r / \partial q_1 \right|} \quad ; \qquad e_2 = \frac{\partial r / \partial q_2}{\left| \partial r / \partial q_2 \right|} \quad ; \quad e_3 = \frac{\partial r / \partial q_3}{\left| \partial r / \partial q_3 \right|} \quad [4]$$

Coordenadas Cilíndricas

En este caso en el espacio de configuración se adoptan como coordenadas dos distancias y un ángulo:

$q_1 = \rho \quad ; q_2 = \phi \quad ; q_3 = z$

La interpretación de estas variables se muestra en la figura 2.7.

Las tres coordenadas independientes $\phi;\rho;z$, que definen la posición del punto son la proyección de **r** sobre el plano horizontal, el ángulo que forma esta proyección con el eje "x", y la altura "z".

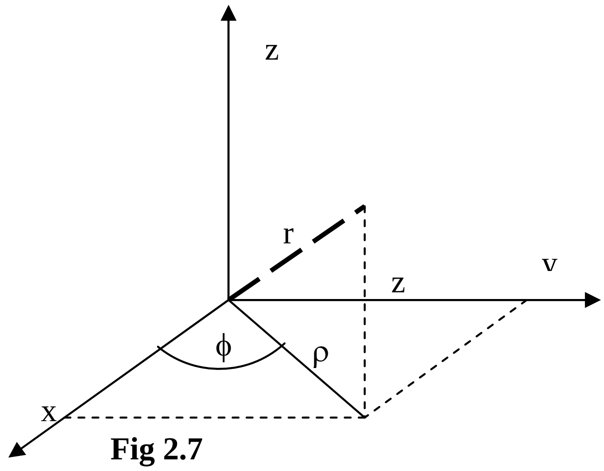


Fig 2.7

Las relaciones entre coordenadas cilíndricas y cartesianas son:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = z \end{cases} \qquad [5]$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = ArcTang\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Utilizando la base de coordenadas cartesianas, y las relaciones entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas, Los versores base del sistema referencial de coordenadas cilíndricas se definen utilizando las ecuaciones [4]. Para ello, se escribe la ecuación del vector posición utilizando las relaciones [5]

$$\mathbf{r}\,(\rho,\phi,z) = \rho\cos(\phi)\,\mathbf{i} + \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial r / \partial \rho}{\left| \partial r / \partial \rho \right|} = \cos(\phi)\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}(\phi)\mathbf{j} \qquad [6]$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial r / \partial \phi}{\left| \partial r / \partial \phi \right|} = -\mathrm{sen}(\phi)\,\mathbf{i} + \cos(\phi)\mathbf{j} \qquad [7]$$

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial r / \partial k}{\left| \partial r / \partial k \right|} = \mathbf{k} \qquad [8]$$

Se verifica que estos versores son perpendiculares entre si, y en la secuencia indicada definen una base directa.

Las componentes del vector posición en la base de coordenadas cilíndricas se obtienen realizando los productos escalares:

$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) \bullet \mathbf{e}_\rho = \rho$

$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) \bullet \mathbf{e}_\phi = 0$

$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) \bullet \mathbf{e}_k = z$

El vector posición en la base de coordenadas cilíndricas resulta:

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\, \mathbf{e}_\rho + z\, \mathbf{k} \qquad [9]$$

Partiendo de las ecuaciones [6],[7] y [8], puede escribirse la matriz de cambio de base de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas. Para ello, se escriben los versores base de coordenadas cilíndricas como filas:

$$[M]_{cart\text{-}> cil} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \mathrm{sen}(\phi) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [10]$$

Aplicando esta matriz a vectores escritos en la base cartesiana, resulta el vector escrito en la base de coordenadas cilíndricas.

Si se compara esta matriz de cambio de base, se comprueba es igual a la matriz de rotación alrededor del eje z.

Coordenadas Esféricas

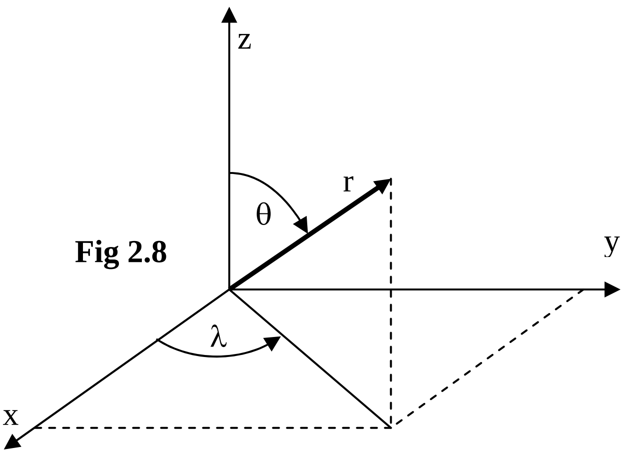
En las denominadas coordenadas esféricas, las tres coordenadas generalizadas toman la forma:

$q_1 = r$; $q_2 = \lambda$; $q_3 = \theta$

En forma similar a lo hecho con las coordenadas cilíndricas, caracterizamos las coordenadas esféricas en base a sus relaciones con un referencial cartesiano:

Se observa en la fig 2.8 que "r" es la distancia desde el punto hasta el origen de coordenadas (módulo del vector de posición), λ es el ángulo medido desde el eje "x" hasta la proyección del vector de posición sobre el plano "xy" y θ es el ángulo entre el eje "z" y el vector de posición.

Fig 2.8



Las relaciones que ligan las coordenadas esféricas con las cartesianas son:

$$\begin{cases} x = r\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\lambda) \\ y = r\ \mathrm{sen}(\theta)\ \mathrm{sen}(\lambda) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \qquad [11]$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = ArcTang\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \lambda = ArcTang\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

En base a las relaciones [11], el vector de posición tiene la forma:

$\mathbf{r}[r,\lambda,\theta] = r\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\lambda)\ \mathbf{i} + r\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\lambda)\ \mathbf{j} + r\cos(\theta)\mathbf{k}$ [12]

Utilizando en mecanismo de derivación parcial respecto de las coordenadas generalizadas, se obtiene la terna de versores base de coordenadas esféricas:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial r / \partial r}{\left|\partial r / \partial r\right|} = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\lambda)\ \mathbf{i} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}\ (\lambda)\mathbf{j} + \cos(\theta)\mathbf{k} \qquad [13]$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial r / \partial \theta}{\left|\partial r / \partial \theta\right|} = \cos(\theta)\cos\ (\lambda)\ \mathbf{i} + \cos(\theta)\ \mathrm{sen}\ (\lambda)\mathbf{j} - \mathrm{sen}(\theta)\mathbf{k} \qquad [14]$$

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial r / \partial \lambda}{\left|\partial r / \partial \lambda\right|} = -\mathrm{sen}(\lambda)\mathbf{i} + \cos(\lambda)\ \mathbf{j} \qquad [15]$$

Definidos los versores de la base de coordenadas esféricas, se determinan las componentes del vector de posición en esa base:

$\mathbf{r}\ (r,\lambda,\theta) \bullet \mathbf{e}_r = r$

$\mathbf{r}\ (r,\lambda,\theta) \bullet \mathbf{e}_\lambda = 0$

$\mathbf{r}\ (r,\lambda,\theta) \bullet \mathbf{e}_\theta = 0$

Quedando entonces, el vector de posición en coordenadas esféricas:

$\mathbf{r}\ (r,\lambda,\theta) = r\ \mathbf{e}_r$ [16]

De la misma manera que en coordenadas cilíndricas, partiendo de las ecuaciones [13],[14]y [15], se puede formar la matriz de cambio de base de cartesianas a esféricas.

Coordenadas intrínsecas

Sea un movimiento sobre una curva en el espacio. La posición de una partícula sobre esa curva se establece mediante una coordenada generalizada, la cual puede ser la longitud medida desde un punto arbitrario de la curva, que se toma como origen.

$q_1 = s$

Partiendo de la ecuación del vector de posición **r**[t] en coordenadas cartesianas:
r[t] = x[t] **i** + y[t] **j** +z[t]**k**

la longitud de arco (s) se determina mediante la integral:

s = $\int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$ = s[t]

Siendo esta función siempre creciente, en teoría es factible determinar su inversa:

t = t[s]

Reemplazando en la ecuación del vector de posición en función del tiempo, resulta:
r[s] = x[s] **i** + y[s] **j** +z[s]**k**

Se definen los versores **T** (Tangente), **N** (Normal) y **B** (Binormal):

T = $dr[s]/ds$

N = $\dfrac{dT[s]/ds}{\left| dT[s]/ds \right|}$

$\left| dT[s]/ds \right|$ = k= curvatura de flexión

B = **T** × **N**

Estos versores forman el triedro intrínseco, y pueden utilizarse como una base para expresar los vectores posición, velocidad y aceleración.

El recíproco de la curvatura de flexión es el “radio de curvatura” ρ:

ρ = $\dfrac{1}{k}$

Anexo 2

Transformación de Coordenadas

En el Anexo 1 se detallan aspectos de los sistemas referenciales. Conocidos los componentes de un vector en un sistema de coordenadas, se buscará la manera de conocer las componentes del mismo en otro sistema.

La relación entre sistemas de coordenadas se dan a través de las matrices de transformación. Se verá de que manera de definen estas matrices de transformación entre sistemas referenciales ortogonales.

Sean dos sistemas ortogonales “xyz”, “x’y’z’” a las cuales se asocian las bases ijk, i’j’k’.

Los versores de la base i’j’k’ pueden escribirse como combinación lineal de los versores dados por i j k:

$$\mathbf{i}' = a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\,\mathbf{j} + a_{13}\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}' = a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} + a_{23}\,\mathbf{k} \qquad [A2\text{-}1]$$
$$\mathbf{k}' = a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\,\mathbf{j} + a_{33}\,\mathbf{k}$$

donde a_{ij} son los cosenos directores de los versores **i**’,**j**’,**k**’ en el sistema **ijk**.

Dado el vector **A**, de componentes A_x,A_y,A_j en el sistema “xyz”, sus componentes en el sistema “x’y’z’” se determinan mediante los productos escalares:

$$A_{x'} = \mathbf{A}\bullet\mathbf{i}' = A\bullet(a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\,\mathbf{j} + a_{13}\,\mathbf{k})$$
$$A_{y'} = \mathbf{A}\bullet\mathbf{j}' = A\bullet(a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} + a_{23}\,\mathbf{k}) \qquad [A2\text{-}2]$$
$$A_{z'} = \mathbf{A}\bullet\mathbf{k}' = A\bullet(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\,\mathbf{j} + a_{33}\,\mathbf{k})$$

Utilizando notación matricial, las relaciones listadas en [A-2] resultan:

$$\mathbf{A'} = [M]\mathbf{A} \qquad [A2\text{-}3]$$

donde [M] , matriz de transformación o cambio de base:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad [A2\text{-}4]$$

En la ecuación [A2-3], los vectores **A**’ y **A** se escriben como vectores columnas.

Siendo los sistemas xyz y x’y’z’ ortogonales, las matriz [M] es una matriz ortonormal, y su matriz inversa es equivalente a la matriz transpuesta. Premultiplicando ambos miembros de la ecuación [A2-3] por la inversa de [M]:

$$[M]^{-1}\,\mathbf{A}' = [M]^{-1}[M]\,\mathbf{A} = [1]\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Reemplazando por la transpuesta, resulta la relación:

$$\mathbf{A} = [M]^{T}\mathbf{A}' \qquad [A2\text{-}5]$$

Unidad 2: Cinemática Relativa.

Este capítulo también es conocido como, **"Cinemática del Movimiento Compuesto de la Partícula"** o también **"Cinemática en Sistemas de Coordenadas Móviles".**

Tiene importancia como herramienta para facilitar el análisis de movimientos complejos, que provienen de la combinación o efecto simultaneo de distintos movimientos sencillos, o bien conocidos.

Se trabaja con sistemas de referencia simultáneos uno fijo o "absoluto" y al menos uno móvil o "relativo".

Sistemas de Referencia en Movimiento

Dado un sistema de referencias fijo Oxyz de centro O fig. 2.9, fig. 2.9. Diremos que el sistema O'x'y'z' está en movimiento respecto a aquel cuando ocurra alguno de los siguientes casos:

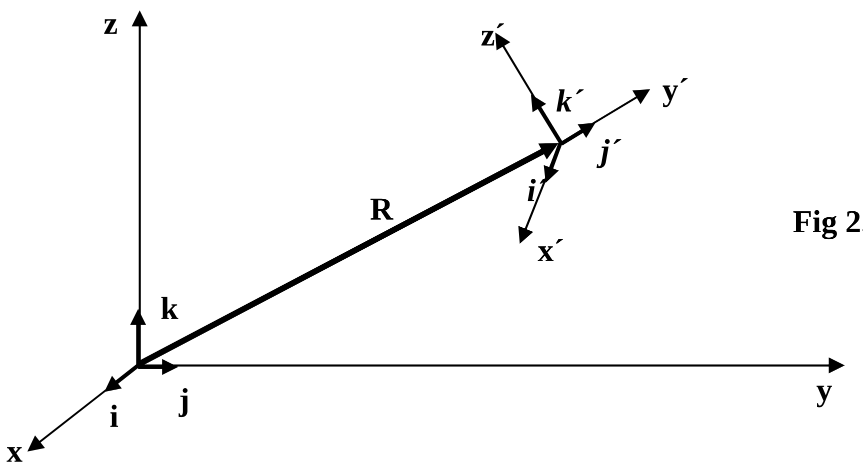


Fig 2.9

$$\frac{dR(t)}{dt} \neq 0, \quad \text{ó} \quad \frac{d\breve{\imath}}{dt} \neq 0, \quad \text{ó} \quad \frac{d\breve{\jmath}}{dt} \neq 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{d\breve{k}}{dt} \neq 0$$

Sistemas Rígidos y Deformables

Trabajaremos en nuestro estudio con sistemas de referencia ortogonales y rígidos es decir que conservan la mutua perpendicularidad de sus ejes, durante todo el movimiento (es decir, para todo t).

La condición de RIGIDEZ es $\breve{\imath}\,.\breve{\jmath} = \breve{\jmath}.\breve{k} = \breve{k}.\breve{\imath} = 0$ en tal caso

Los sistemas que no cumplen la misma se dicen DEFORMABLES

1) Movimiento con Sistemas en Traslación (únicamente) Fig. 2.10

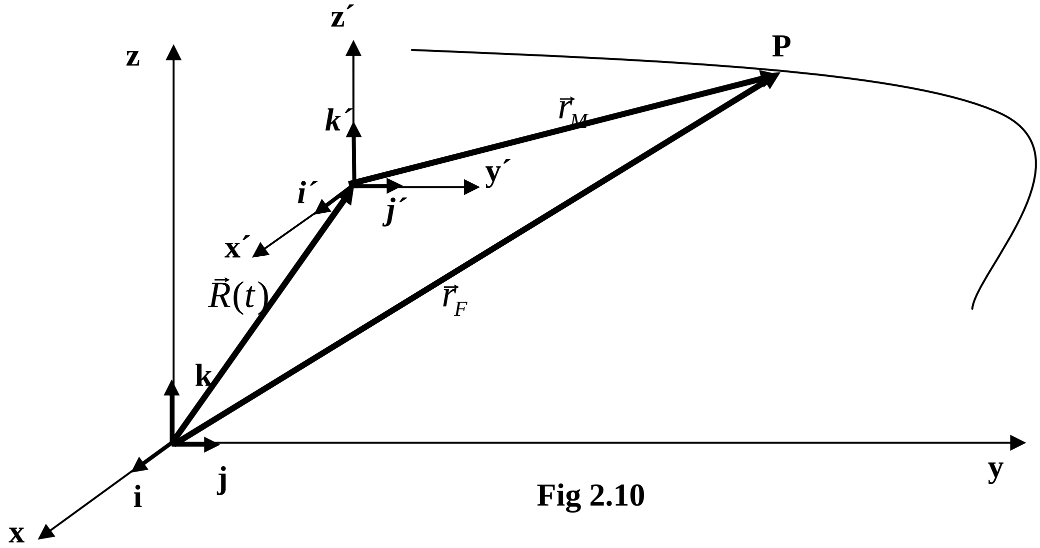


Fig 2.10

- El movimiento de P puede describirse tanto desde Oxyz, cómo desde O'x'y'z'.
- Oxyz es un SISTEMA FIJO (F)
- O'x'y'z' es un SISTEMA MOVIL (M) en TRASLACION**.**

Un sistema móvil evoluciona en Traslación, respecto de otro, fijo cuando su origen O' se mueve según una ley cualquiera $\vec{R}(t)$ pero sus ejes se mantienen paralelos a sí mismos. (Los ejes de O'x'y'z' se dibujaron paralelos a los Oxyz únicamente como criterio simplificativo. Pueden tener otras direcciones).

$$\boxed{\vec{r}_F = \vec{R} + \vec{r}_M} \quad (1)$$

Aquí $\vec{r}_F$: Vector posición referido al Sistema Fijo

$\vec{r}_M$: Vector posición referido al Sistema Móvil

$\vec{R}$: Vector posición del Origen del Sistema Móvil respecto del Sistema Fijo

Derivando (1), obtenemos la **VELOCIDAD**

$$\boxed{\vec{v}_F = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M} \quad (2)$$

En esta ecuación:

$\frac{dR}{dt}$: velocidad de arrastre debida al movimiento del centro O'

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_M = \vec{v}_M \text{ : velocidad relativa}$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \vec{v}_F \text{ : velocidad absoluta}$$

Derivando (2), obtenemos la aceleración

$$\boxed{a_F = \frac{dv_F}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_F}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2}} \quad (3)$$

donde:

$\vec{a}_F$: aceleración absoluta

$\vec{a}_F = \dfrac{d^2\vec{r}_M}{dt^2}$: aceleración relativa

$\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$: aceleración de arrastre, por movimiento del origen del Sistema Móvil o, respecto del Sistema Fijo.

2) Movimiento con Sistemas en Rotación (únicamente)

En la figura 2.11 se muestran dos sistemas, el Oxyz que consideramos como fijo, y el O´x´y´z´, animados de un movimiento de rotación con velocidad angular ω. Los orígenes O y O´ permanecen siempre coincidentes. La posición de la partícula P se describe mediante la el vector de posición R(t), el cual puede referirse a ambos sistemas:

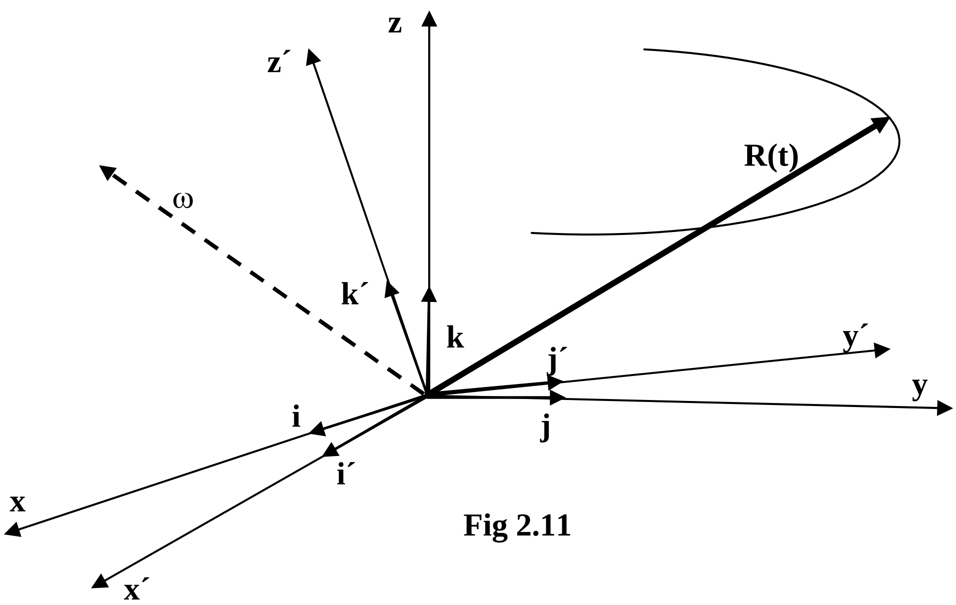


Fig 2.11

Vector de posición referido al sistema móvil

$\vec{R}(t)_M = x'\breve{i}' + y'\breve{j}' + z'\breve{k}'$ (4)

Vector de posición referido al sistema fijo

$\vec{R}(t)_F = x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k}$

Se reescribe la ecuación (4) indicando que las componentes x´y´z´ dependen del tiempo

$\vec{R}(t) = x'(t)\breve{i}(t)' + y'(t)\breve{j}'(t) + z'(t)\breve{k}'(t)$ (4')

Notese que $\vec{R}(t)\big|_F = \vec{R}(t)\big|_M$, constituyen el mismo vector, es decir, es válida la igualdad vectorial, aunque estén expresados en bases diferentes.

Evaluamos la derivada de $\vec{R}(t)$

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \underbrace{\dot{x}'(t)\breve{i}' + \dot{y}'(t)\breve{j}' + \dot{z}(t)\breve{k}'}_{(5)} + \underbrace{x'\frac{d\breve{i}(t)}{dt} + y'\frac{d\breve{j}(t)}{dt} + z'\frac{d\breve{k}(t)}{dt}}_{(6)}$$

Al evaluar las derivadas se ha tomado en cuenta que los versores de la base móvil cambian en el tiempo y tienen por lo tanto derivada no nula.

El término (5), al mantener $\breve{i}', \breve{j}', \breve{k}'$ fijos, o sin variar, constituye una velocidad $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z})$ en el sistema móvil O'x'y'z'. Lo llamaremos, por lo tanto $\left.\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\right| M$.

Un observador solidario a la base móvil vería a la partícula P animada de esta velocidad.

En cuanto a (6) vale lo siguiente: Por condición de rigidez del sistema O'x'y'z'

$$\left.\begin{array}{l} \breve{i}'.\breve{j}' = 0 \\ \breve{j}'.\breve{k}' = 0 \\ \breve{k}'.\breve{i}' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\breve{i}'.\breve{j}') = \frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{j}' + \breve{i}'.\frac{d\breve{j}'}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\breve{j}'.\breve{k}') = \frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{k}' + \breve{j}'.\frac{d\breve{k}'}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\breve{k}'.\breve{i}') = \frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{i}' + \breve{k}'.\frac{d\breve{i}'}{dt} = 0 \end{array}\right.$$

Llamaremos

$$w_z'(t) = \frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{j}' = -\breve{i}'.\frac{d\breve{j}'}{dt}$$

$$w_x'(t) = \frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{k}' = -\breve{j}'.\frac{d\breve{k}'}{dt}$$

$$w_y'(t) = \frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{i}' = -\breve{k}'.\frac{d\breve{i}'}{dt}$$

Con $w_x'(t), w_y'(t), w_z'(t)$ funciones escales de t.

Y por otra parte, recordando que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal al vector:

$$\frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{j}' = 0$$

$$\frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{k}' = 0$$

Ahora expresamos $\frac{d\breve{i}'}{dt}, \frac{d\breve{j}'}{dt}$ y $\frac{d\breve{k}'}{dt}$ en la base $\breve{i}', \breve{j}', \breve{k}'$ quedando

$$\frac{d\breve{j}'}{dt} = \left(\frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{i}'\right).\breve{i}' + \left(\frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{j}'\right).\breve{j}' + \left(\frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{k}'\right).\breve{k}'$$

$$\frac{d\breve{i}'}{dt} = \left(\frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{i}'\right).\breve{i}' + \left(\frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{j}'\right).\breve{j}' + \left(\frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{k}'\right).\breve{k}'$$

$$\frac{d\breve{k}'}{dt} = \left(\frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{i}'\right).\breve{i}' + \left(\frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{j}'\right).\breve{j}' + \left(\frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{k}'\right).\breve{k}'$$

Sabiendo que los siguientes productos escalares son iguales a cero

$$\left(\frac{d\breve{i}'}{dt}.\breve{i}'\right).\breve{i}' = 0 \qquad \left(\frac{d\breve{j}'}{dt}.\breve{j}'\right).\breve{j}' = 0 \qquad \left(\frac{d\breve{k}'}{dt}.\breve{k}'\right).\breve{k}' = 0$$

Volviendo a la ecuación (6) y definiendo el vector $\varpi = (\omega_x; \omega_y; \omega_z)$ se tendrá

$$x'\frac{d\breve{i}(t)}{dt} + y'\frac{d\breve{j}(t)}{dt} + z'\frac{d\breve{k}(t)}{dt} =$$

$$x'\left[\omega z'(t).\breve{j}' - \omega y'(t).\breve{k}'\right] + y'\left[-\omega z'(t).\breve{i}' + \omega x'(t)\breve{k}'\right] + z'\left[\omega y'(t)\breve{i}' - \omega x'(t)\breve{j}'\right] =$$

$$\left[\omega y'(t).z' - \omega z'(t).y'\right]\breve{i}' + \left[\omega z'(t).x' - \omega x'(t).z'\right]\breve{j}' + \left[\omega x'(t).y' - \omega y'(t).x'\right]\breve{k}' =$$

$$\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \omega x' & \omega y' & \omega z' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \varpi \times R_M$$

Finalmente queda

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_M + \varpi \times \vec{R}_M \quad (7)$$

Admitiendo la existencia de un vector $\varpi = (\omega x'; \omega y'; \omega z')$ que denominaremos VECTOR ROTACIÓN, es posible definir un operador δ aplicable a cualquier vector expresado en sendos sistemas de referencia fijo y móvil.

$$\delta \rightarrow \left(\frac{d(\ )}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\ )}{dt}\right)_M + \left(\varpi \times (\ )\right)_M$$

Analizando la VELOCIDAD y ACELERACION en un sistema que rota respecto de otro fijo se tendrá fig. 2.12:

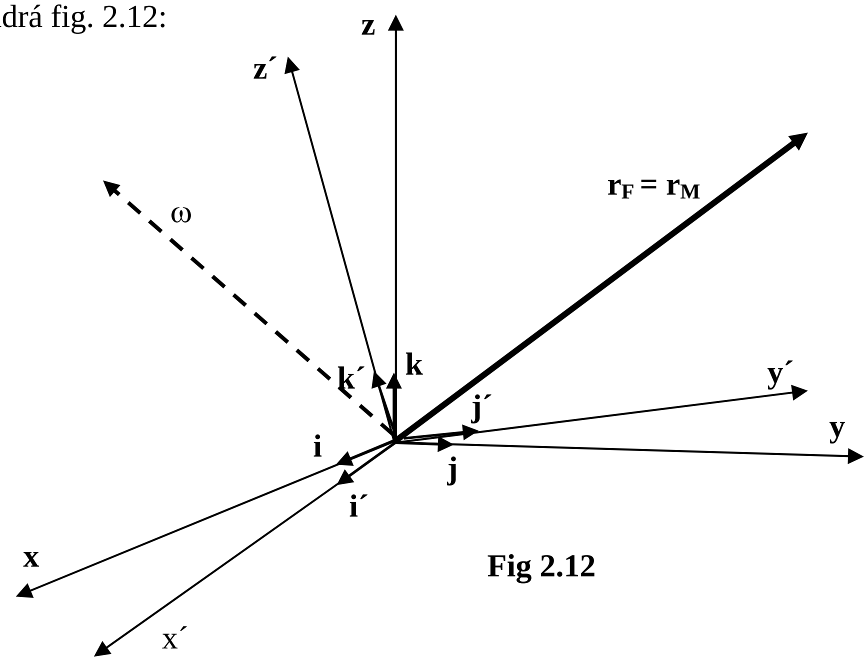


Fig 2.12

En el sistema móvil O x´y´z´es

$$\vec{r}_M = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}'$$

y como vectorialmente

$$\vec{r}_M = \vec{r}_F$$

$$\vec{r}_F = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}'$$

Aplicando el oprerador δ a esta última expresión se tendrá

$$\left(\frac{d(\vec{r})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\vec{r})}{dt}\right)_M + \left(\varpi \times (\vec{r})\right)_M$$

Resultando en definitiva la expresión de la velocidad

$$(\vec{v})_F = (\vec{v})_M + \left(\varpi \times (\vec{r})\right)_M$$

Donde la velocidad referida al sistema fijo o ABSOLUTO es igual a la velocidad del sistema móvil o RELATIVO mas la velocidad de arrastre por efecto de la rotación del sistema móvil dado por $\varpi = (\omega x'; \omega y'; \omega z')$

La aceleración se obtiene aplicando el operador δ a la velocidad absoluta quedando

$$\left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d((\vec{v})_M + (\varpi \times (\vec{r}))_M)}{dt}\right)_M + (\varpi \times ((\vec{v})_M + (\varpi \times (\vec{r}))_M \ ))_M$$

$$\left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_M + \left(\frac{d(\varpi \times (\vec{r}))_M}{dt}\right)_M + \left(\varpi \times \frac{d}{dt}(\vec{r})\right)_M + \varpi \times (\varpi \times \vec{r}_M)$$

Resultando en definitiva

$$\left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_M + \dot{\varpi} \times \vec{r}_M + 2.\left(\varpi \times \frac{d}{dt}(\vec{r})\right)_M + \varpi \times (\varpi \times \vec{r}_M)$$

Donde la aceleración absoluta referida al sistema fijo es igual a la aceleración relativa al sistema móvil mas la aceleración de arrastre debida a la variación de ϖ (aceleración de rotación) mas la aceleración de arrastre complementaria mas la aceleración de arrastre centrípeta.

3) Movimiento con Sistemas en Traslación y Rotación Simultanea

De la ecuación (1) $\boxed{\vec{r}_F = \vec{R} + \vec{r}_M}$

$$(\vec{v})_F = (\vec{v})_M + (\varpi \times (\vec{r}))_M + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Los dos últimos términos del segundo término de la ecuación anterior representan a la velocidad de ARRASTRE de TRANSPORTE. Posee un término debido a la ROTACION DEL SISTEMA MOVIL $(\varpi \times (\vec{r}))_M$ y otro debido al movimiento del ORIGEN MOVIL O´ respecto del sistema fijo $\frac{d\vec{R}}{dt}$.

Para obtener la aceleración se debe derivar la anterior respecto del tiempo obteniendo

$$(a)_F = \left(\frac{d(\vec{v})}{dt}\right)_F = \left(\frac{d^2(\vec{r})}{dt^2}\right)_F = \frac{d^2(\vec{R})}{dt^2} + \dot{\varpi} \times \vec{r}_M + \varpi \times (\varpi \times \vec{r}_M) + 2.(\varpi \times \vec{v})_M$$

Donde los términos son conocidos.

Se debe hacer notar que el término $\frac{d^2(\vec{R})}{dt^2}$ se incorpora a la descripción del movimiento como ARRASTRE o TRANSPORTE originado en el movimiento del origen del sistema móvil respecto del sistema fijo. El resto de los términos son las aceleraciones de arrastre inducidas por la rotación del sistema móvil.

IMPORTANTE: En la expresiones (1) ; (10) y (11) las igualdades vectoriales imponen, a los efectos de la resolución de problemas prácticos, conocer necesariamente la transformación lineal [A] que permita relacionar las bases (i,j,k) con (i´,j´,k´)de los sistemas fijo y móvil.