7.2 Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Se estudian cuatro casos, conocidos como clásicos, cuyos datos son:

a) dos lados y el ángulo comprendido,

b) un lado y dos ángulos,

c) tres lados y,

d) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

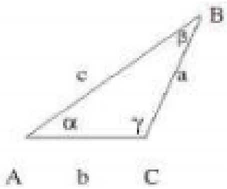
Para la resolución de triángulos oblicuángulos, tenemos que tener presente:

1. el teorema de los senos,
2. el teorema del coseno.

Teorema del seno

En todo triángulo, las medidas de los lados son proporcionales a los senos de los lados opuestos.

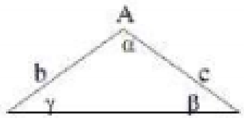
$$\frac{a}{sen A}=\frac{b}{sen B}=\frac{c}{sen C} \qquad \frac{a}{sen \alpha}=\frac{b}{sen \beta}=\frac{c}{sen \gamma}$$



Teorema del coseno

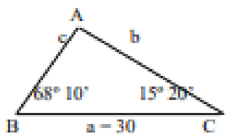
En todo triángulo, el cuadrado de la medida de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos, menos el doble producto entre las mismas y el coseno del ángulo opuesto al primero.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac \cos \beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\ ba \cos \gamma$$



Ejemplo: Resolver el triángulo oblicuángulo y calcular su área conociendo las medidas de un lado (a = 30 m.) y de los dos ángulos adyacentes al mismo ($\beta = 68^\circ 10'$ y $\gamma = 15^\circ\ 20'$)

Solución.



Cálculo de A: $A = 180^\circ - (B + C)$

$A = 180^\circ - (68^\circ 10' + 15^\circ\ 20')$

$A = 180^\circ - 83^\circ\ 30'$

$A = 96^\circ\ 30'$

Cálculo de b: $\frac{a}{sen A}=\frac{b}{sen B}$ $\rightarrow$ $b = \frac{a \cdot sen B}{sen A}$

$$b = \frac{30 \cdot \text{sen}\, 68°10'}{sen 96°30'} = \frac{30 \cdot 0{,}92827}{0{,}99357} \quad \rightarrow \quad b = 28{,}03 \text{ m.}$$

Cálculo de c: $\frac{a}{sen A} = \frac{c}{sen C} \quad \rightarrow \quad c = \frac{a \cdot sen C}{sen A}$

$$c = \frac{30 \cdot \text{sen}\, 15°20'}{sen 96°30'} = \frac{30 \cdot 0{,}26443}{0{,}99357} \quad \rightarrow \quad c = 7{,}98 \text{ m.}$$

Cálculo del área: $S = \frac{1}{2}\, a\, b\, \text{sen}\, C \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \cdot 30 \,.\, 28{,}03 \,.\, 0{,}26443$

$$S = 111{,}17 \text{ m}^2$$

ϒ Intentar lo siguiente

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos, sabiendo que:

a) $A = 132$ m.; $C = 148$ m. y $\beta = 51° 26' 12''$
b) $C = 156{,}35$ m.; $\alpha = 36° 52' 12''$ y $\beta = 69° 23' 13''$
c) $A = 176$ m.; $B = 241$ m. y $C = 123$ m.
d) $A = 300$ m.; $B = 200$ m. y $\beta = 30°$

---

8. Aplicaciones de la Resolución de Triángulos

A menudo, para resolver un problema comenzamos por determinar un triángulo que después resolvemos para encontrar una solución.

Directrices para resolver un problema de triángulos

1. Dibujar un croquis de la situación del problema.
2. Buscar triángulos y representarlos en el dibujo.
3. Señalar lados y ángulos, tanto conocidos como desconocidos.
4. Expresar el lado o el ángulo buscado en términos de razones trigonométricas conocidas. Después, resolver.

21. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos (en todos los casos, las letras minúsculas representan el lado opuesto al ángulo del mismo nombre con letra mayúscula)

$$a.\begin{cases} A = 133^\circ \\ B = 55^\circ \\ a = 1m \end{cases} \quad b.\begin{cases} a = 7m \\ b = 9m \\ C = 60^\circ \end{cases} \quad c.\begin{cases} A = 45^\circ \\ B = 30^\circ \\ c = 2{,}5m \end{cases} \quad d.\begin{cases} a = 3m \\ b = 4m \\ c = 5m \end{cases}$$

$$e.\begin{cases} A = \pi/3 \\ B = \pi/6 \\ a = 1 \end{cases} \quad f.\begin{cases} a = 7km \\ b = 5km \\ B = 133^\circ \end{cases} \quad g.\begin{cases} a = 3\,km \\ b = 4\,km \\ c = 8\,km \end{cases} \quad h.\begin{cases} b = 28cm \\ c = 19\,cm \\ C = 60^\circ \end{cases}$$

22. Y ahora algunos problemas

a) Uno de los lados de un triángulo mide 12 y su ángulo opuesto mide 20º. Si otro de los lados mide 10m, hallar el resto de los elementos del triángulo.

b) Los lados de un triángulo miden a, ½ a y 2/3 a. Hallar los ángulos

c) Uno de los lados de un triángulo mide 0,5 radianes. Si los lados que forman dicho ángulo miden8 mm y 10 mm, hallar el resto de los elementos del triángulo.

d) Si se abren completamente un par de tijeras, la distancia entre las puntos de las dos hojas es de 10 cm. Calcular el ángulo que subtienden dichas hojas si su longitud es de 8 cm.

e) Desde un punto del suelo un observador ve que la visual a la punta de una torre forma con la horizontal un ángulo de 30º. Cuando avanza 20 m hacia la torre, dicho ángulo es de 45º. Hallar la altura de la torre.

f) Dos puestos de observación A y B, separados por una distancia de 4km, forman un triángulo con el pico de la montaña. Desde el puesto A, el ángulo entre el pico de la montaña y el puesto B es de 20º, y desde el puesto B, el ángulo ente el pico y el puesto A es de 30º. Calcular las distancias ente el pico y dada uno de los puestos de observación.

g) En el triángulo ABC, el lado AB mide 13m, lado BC mide 15m y el AC mide 14m. Calcula el área del triángulo.

h) Juan va a cercar con alambre un terreno triangular, uno de cuyos lados mide 8,25 m y otro de ellos mide 10,45m. El ángulo comprendido entre ambos lados es de 110º. ¿Cuántos metros de alambre necesitará Juan?

23. Un avión sobrevuela una ciudad costera a 1200m de altura; cuando pasa por la playa, avista una isla que se encuentra a 2078 m de la playa. Calcule el ángulo que