6. Identidades Trigonométricas

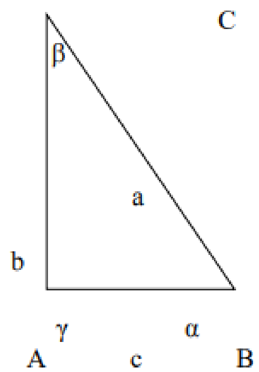
Son igualdades entre relaciones trigonométricas que se cumplen para cualquier valor de los ángulos que intervienen en la identidad. Es decir, son ecuaciones, pero que se verifican para todo ángulo para el cual la igualdad tenga sentido. Por lo tanto en estos casos, no se tratará de encontrar ángulos, sino de probar que la identidad dada es tal. Para ello, en la mayoría de los casos conviene trabajar con las funciones seno y/o coseno, es decir, aquellas identidades que contengan las otras funciones, se podrán expresar en función del seno o coseno, según convenga.

Para poder verificar la igualdad, esto es, lograr poner en evidencia que el primer miembro es idéntico al segundo, se deben utilizar convenientemente las relaciones entre las funciones trigonométricas, a veces transformando solamente el primer miembro y otras, ambos miembros a la vez.

3. Relaciones Trigonométricas de un Ángulo

Sea un triángulo rectángulo ABC (con el ángulo recto en A).

Las medidas de sus lados son a, b y c.
Sus ángulos interiores son α, β y el ángulo recto γ.
El lado b se denomina **cateto opuesto** al ángulo α.
El lado c se denomina **cateto adyacente** al ángulo α.
El lado a se denomina **hipotenusa** del triángulo.



Se pueden encontrar las razones entre los catetos y la hipotenusa respecto a un determinado ángulo, (por ejemplo α). Los valores que se obtienen son números reales que dependerán del valor del ángulo α. Estas razones se conocen como relaciones trigonométricas y son seis: $sen\ \alpha = \dfrac{b}{a}$

el seno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y la **hipotenusa**.

el coseno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y la **hipotenusa**.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{c}{a}}$$

la tangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{b}{c}}$$

la cotangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y el **cateto opuesto** *a* α.

$$\boxed{ctg\ \alpha = \frac{c}{b}}$$

la secante del ángulo α:
es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{a}{c}}$$

7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

7.1 Resolución de Triángulos Rectángulos

Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones, en parte porque son muchas las situaciones en el mundo real que los comprenden. Antes de resolver algunos problemas, debemos recordar que:

a) Los ángulos interiores y los lados de un triángulo reciben el nombre de **elementos fundamentales** del mismo, y

b) Un triángulo queda determinado en sus dimensiones si y sólo si se conocen **tres** de sus elementos fundamentales, siendo por lo menos, uno de ellos un lado.

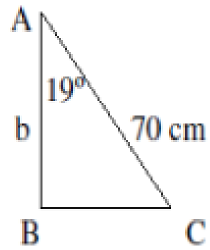
Si el triángulo es rectángulo, como ya conocemos uno de sus elementos fundamentales (el ángulo recto), bastarán **dos** elementos fundamentales más, que pueden ser:

1. la hipotenusa y un ángulo agudo,
2. un cateto y un ángulo agudo,
3. los dos catetos, y
4. la hipotenusa y un cateto.

Son éstos, los cuatro casos que se estudian en la resolución de triángulos rectángulos.

Ejemplo: Calcular la longitud “b” del siguiente triángulo

Solución. El lado conocido es la hipotenusa. El cateto que buscamos es el adyacente al ángulo conocido. Por lo tanto, utilizaremos el coseno,



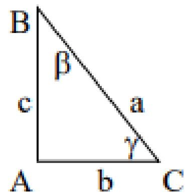
$$\cos A = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{70\,cm} \text{ y resolvemos para b:}$$

$$\cos 19^\circ = \frac{b}{70\,cm} \quad \rightarrow \quad b = 70 \,.\, 0{,}9455 \quad \rightarrow \quad b \approx 66{,}19 \text{ cm.}$$

Cuando resolvemos un triángulo, encontramos las **medidas** de sus lados y sus ángulos hasta entonces desconocidas. En ocasiones abreviamos esto diciendo que *"encontramos los ángulos"* o *"encontramos los lados"*.

♈ Intentar lo siguiente

Resolver los siguientes triángulos rectángulos. Hallar el área.



a) a = 34,63 m. y $\beta = 60^\circ\, 45'\, 20''$
b) c = 110,43 m. y $\beta = 32^\circ\, 25'\, 17''$
c) b = 30 m. y c = 40 m.
d) a = 150 m. y c = 120 m.