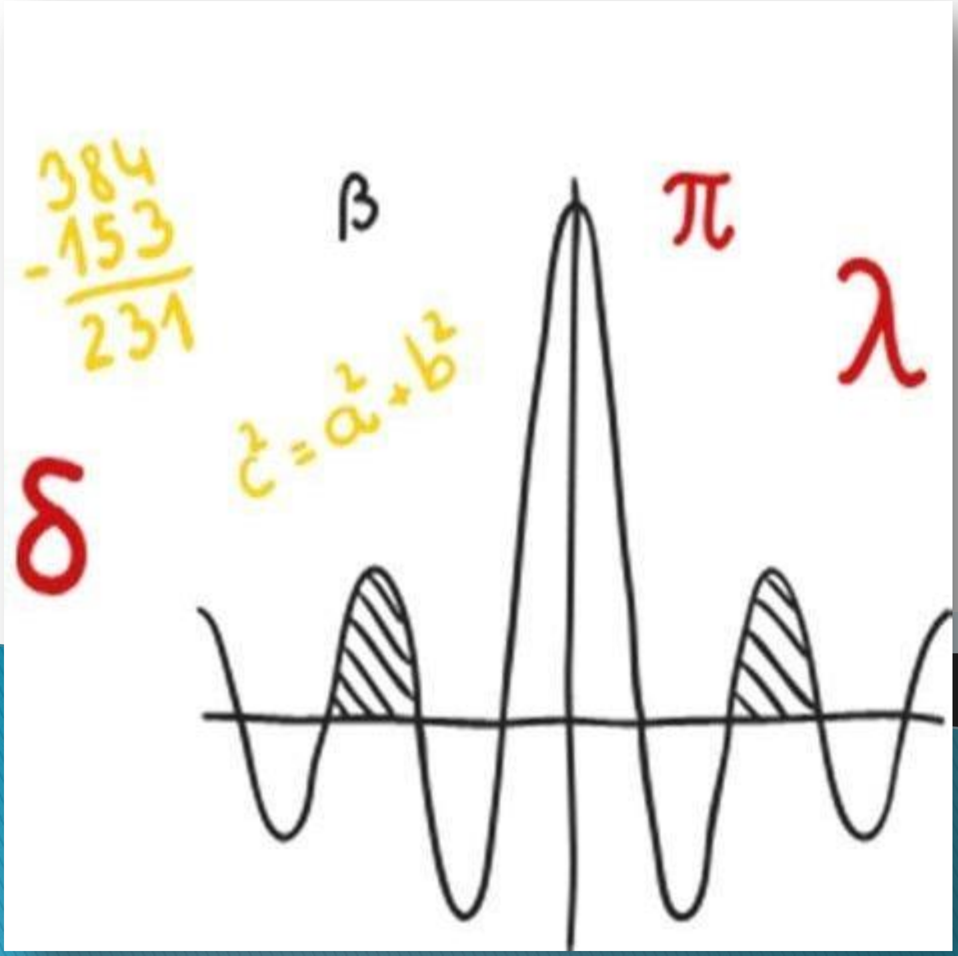
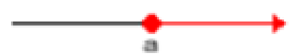
# FUNCIONES



# Intervalos

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en IR que van a ser muy útiles, los intervalos.

**Desde el punto de visto geométrico** : un intervalo es un segmento de la recta real. Si $a < b$ el intervalo a,b es un subconjunto de números reales comprendido entre a y b. Puede ocurrir que a y b sean parte de ese conjunto o no.

| NOMBRE | SÍMBOLO | SIGNIFICADO | REPRESENTACIÓN |
|---|---|---|---|
| Intervalo abierto | (a,b) | { x / a < x < b }<br>Nº comprendidos entre a y b |  |
| Intervalo cerrado | [a,b] | { x / a ≤ x ≤ b }<br>Nº comprendidos entre a y b, éstos incluidos. |  |
| Intervalo semiabierto | (a,b] | { x / a < x ≤ b }<br>Nº comprendidos entre a y b, incluido b |  |
| | [a,b) | { x / a ≤ x < b }<br>Nº comprendidos entre a y b, incluido a |  |
| Semirrecta | (-∞,a) | { x / x < a }<br>Números menores que a |  |
| | (-∞,a] | { x / x ≤ a }<br>Nº menores o iguales que a |  |
| **Intervalos Infinitos** | (a,∞) | { x / a < x }<br>Números mayores que a |  |
| | [a,∞) | { x / a ≤ x }<br>Nº mayores o iguales que a |  |

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores, se denominan extremos del intervalo.

# Actividad

- Representar en la recta numérica los siguientes intervalos:

a) $[4,12) \rightarrow$ *el conjunto de los números entre el 4 y el 12, incluyendo el 4 pero no el 12*

b) $(-3,9] \rightarrow$

c) $[-23,12] \rightarrow$

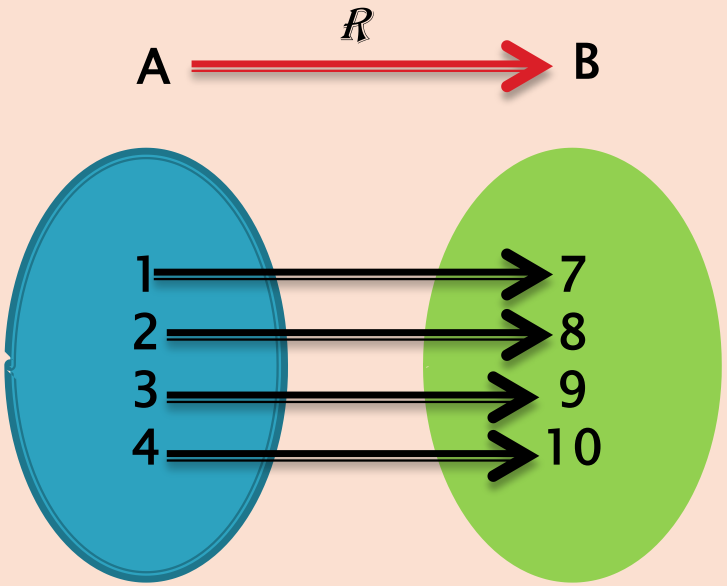
d) $(-\infty,0) \rightarrow$

- Escribir dichos intervalos como conjuntos.

# FUNCIÓN

- Dados dos conjuntos A y B se llama **función** de A en B

**f** : A $\longrightarrow$ B a una **relación** entre ambos conjuntos que le hace corresponder a cada elemento de **«A»** un único elemento en **«B»**.



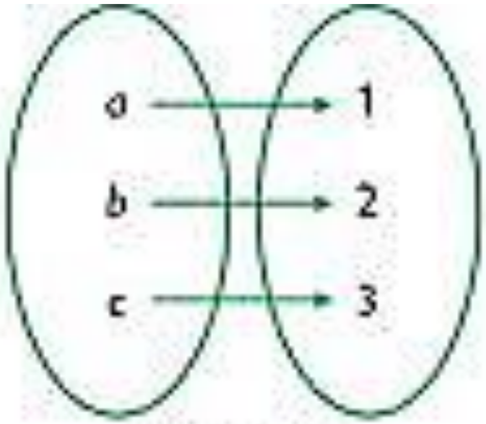
La existencia de una función indica que se cumplen **dos condiciones**:

1) Existencia: Para cada elemento de «**A**» existe una imagen en «**B**».
2) Unicidad: Para cada elemento de **«A»** existe una única imagen en **«B»**. La imagen es única.

Los conjuntos que intervienen en una función son:

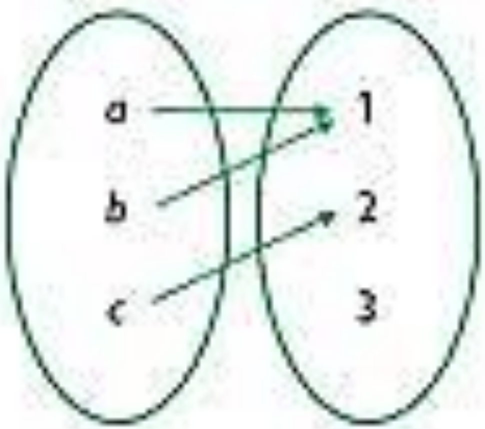
1) Conjunto de Partida: Es el conjunto «A».
2) Dominio: Es el subconjunto del conjunto de partida formado por los elementos que intervienen en la función. Se indica Dom(f).
3) Conjunto de Llegada: Es el conjunto «B».
4) Imagen: Es el subconjunto del conjunto de llegada formado por los elementos que son imágenes de los elementos del dominio. Se indica Im (f).

a)



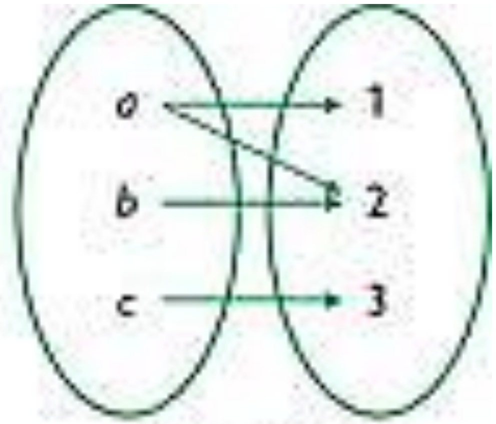

Es función.

b)



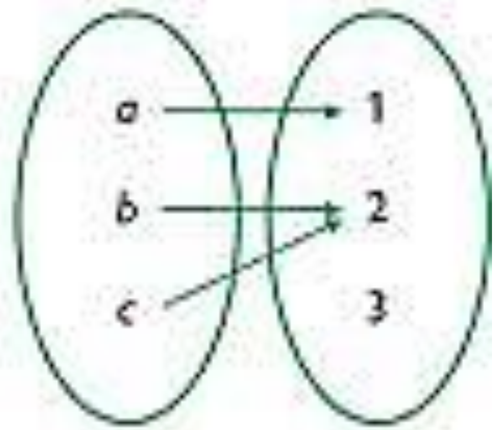

Es función.

c)




No es función.

d)

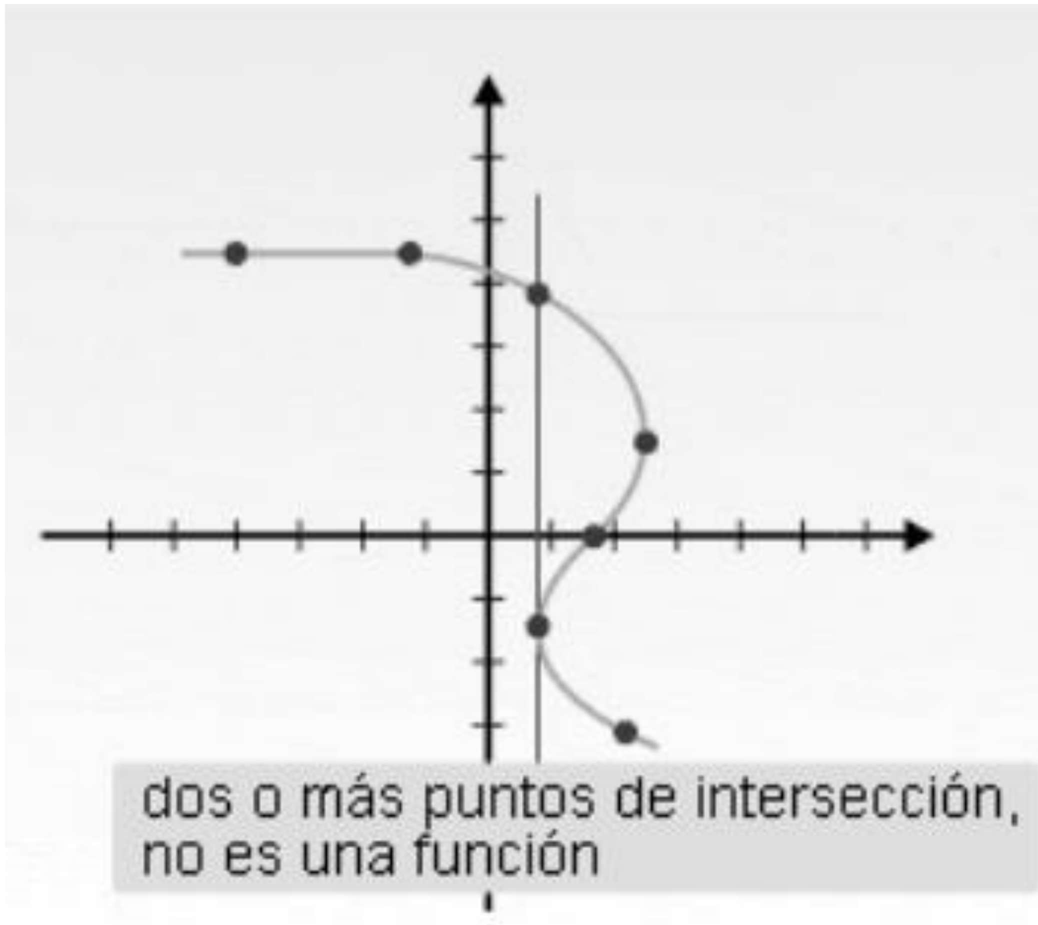


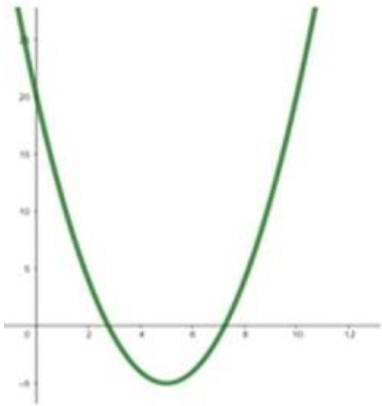

Es función.

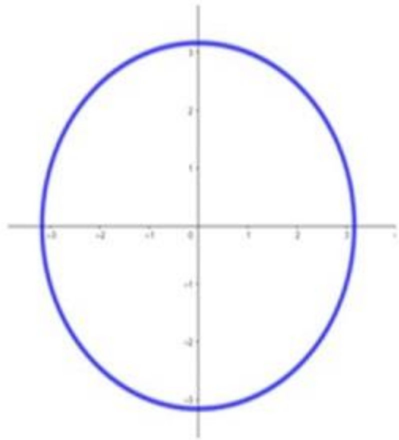
# Formas de representación de una función

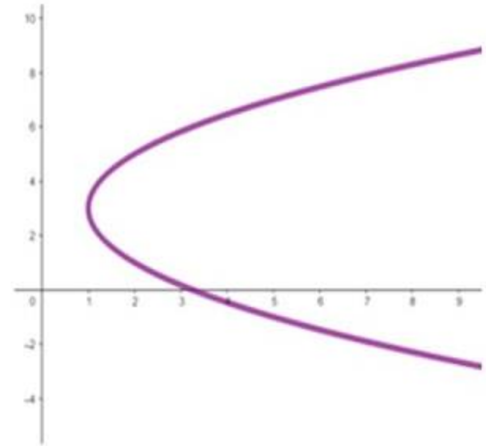
a) **Verbal**: Consiste en una descripción mediante palabras.
b) **Algebraica**: A través de una fórmula.
c) **Numérica**: Tabla de valores.
d) **Visual**: Con la gráfica en ejes cartesianos.

En la **representación gráfica** se puede analizar si la gráfica corresponde o no a una función, trazando verticales imaginarias por los puntos del conjunto de partida (Dominio). Si una vertical corta mas de una vez a la gráfica o no la corta entonces **no** se trata de una función en ese punto o en ese intervalo.


dos o más puntos de intersección,
no es una función







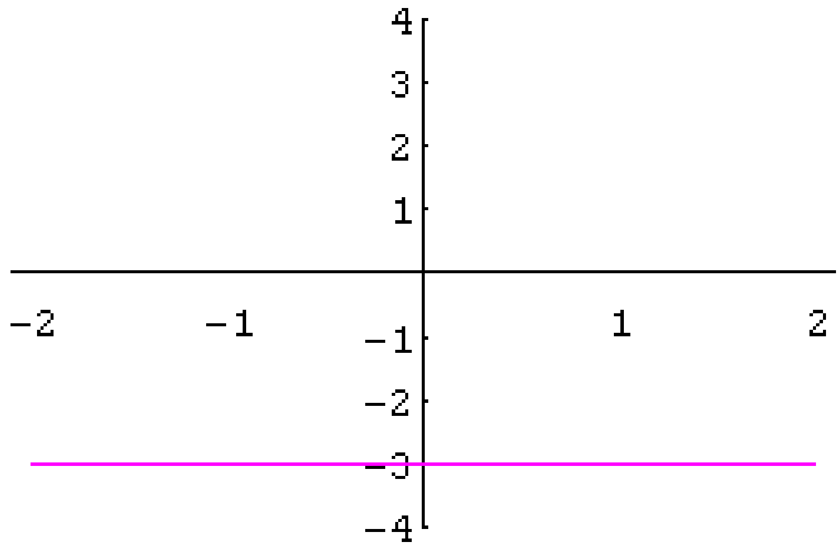
¿En que caso podríamos establecer que la gráfica se trata de una función?

# TIPOS DE FUNCIONES

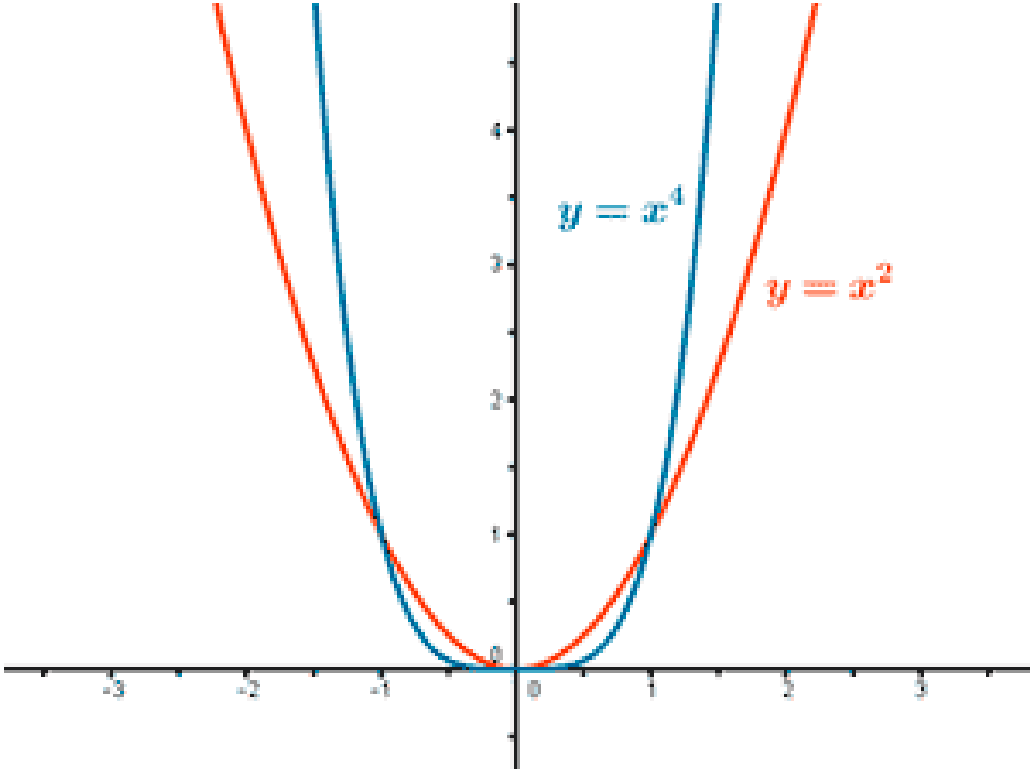
1) ALGEBRAICAS: Dentro de estas podemos encontrar a las siguientes funciones:

Función Constante

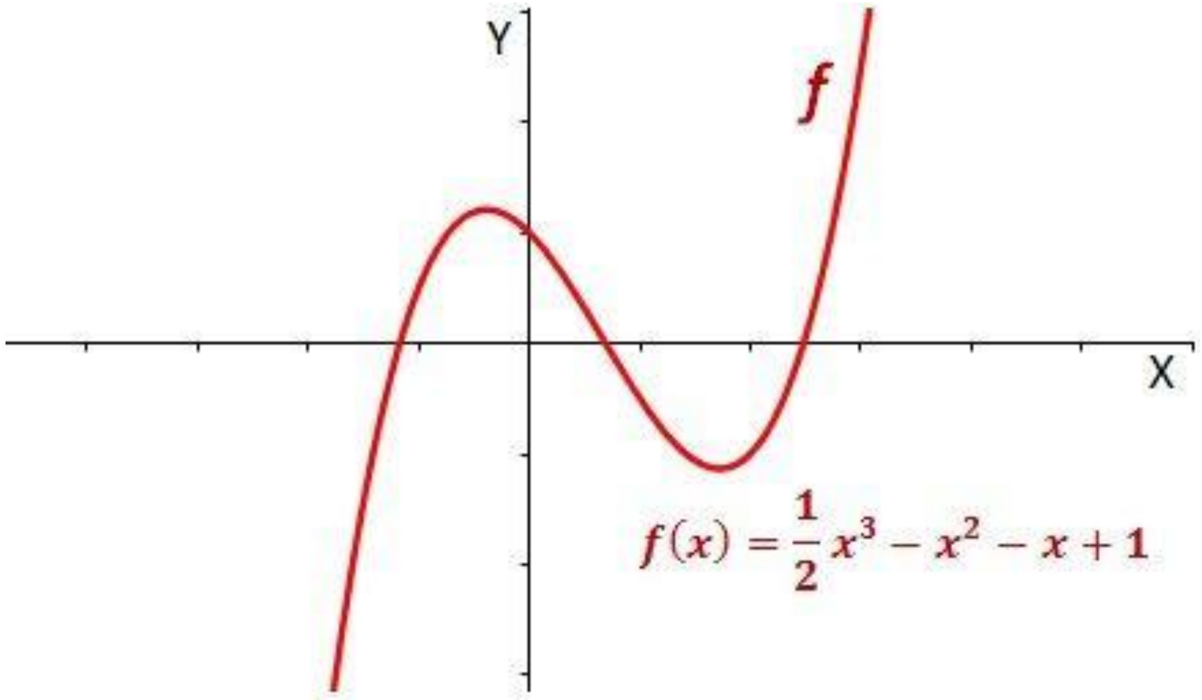
$f(x) = -3$



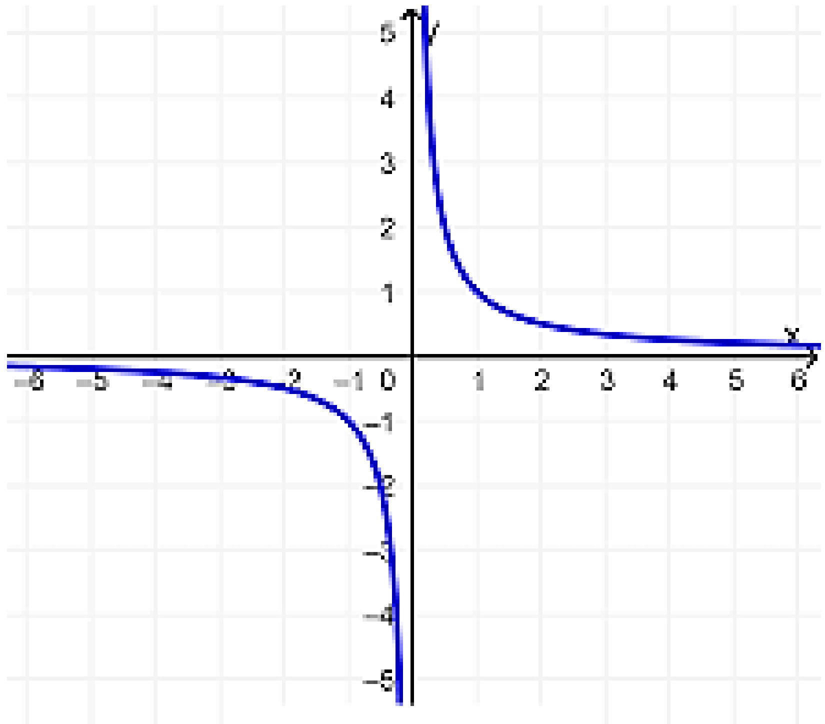
- <u>Funciones Potencias:</u>



# Funciones Polinómicas:

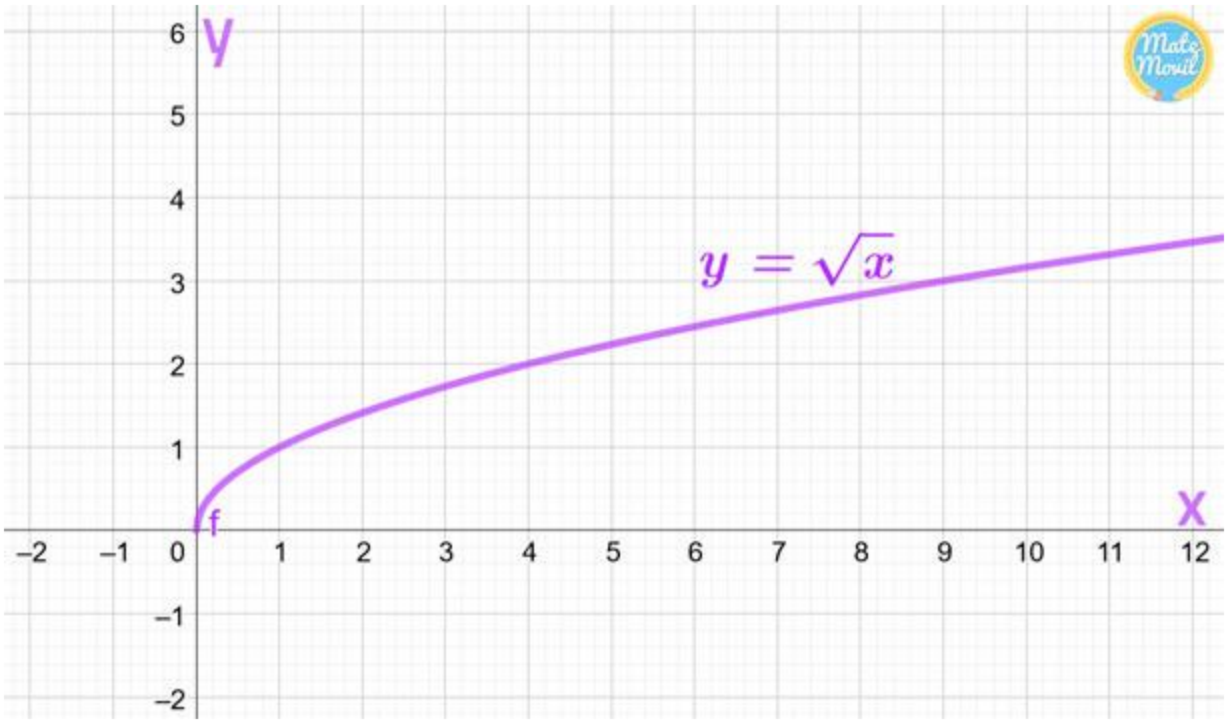


# Funciones Racionales:

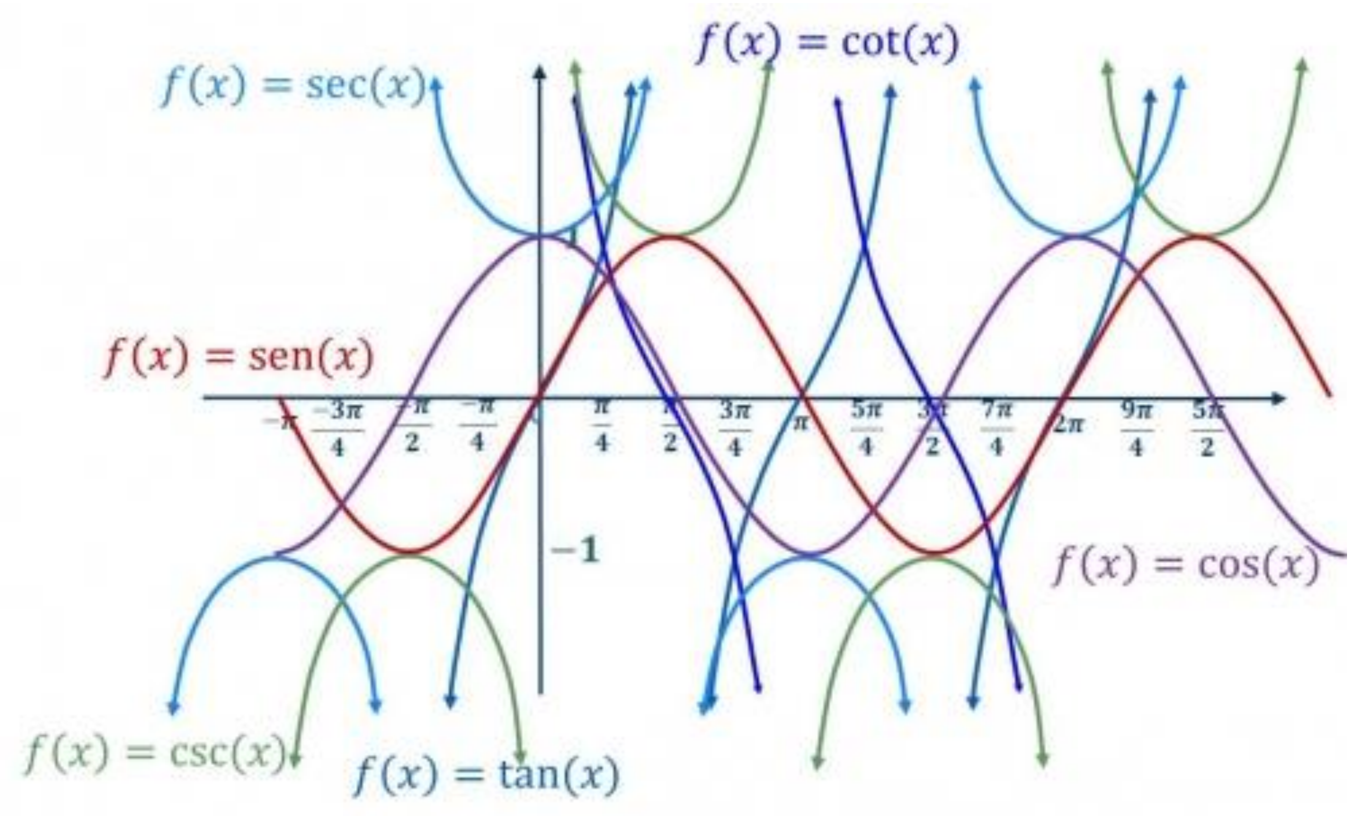


$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$$

- Función Raíz:

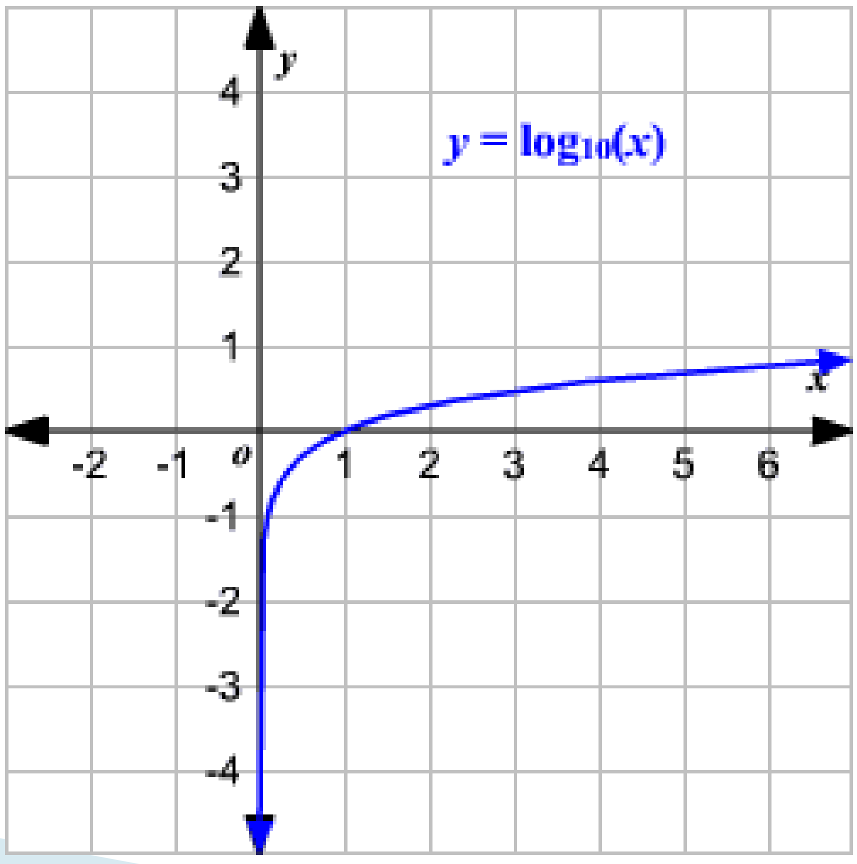


# Función Trigonométrica:

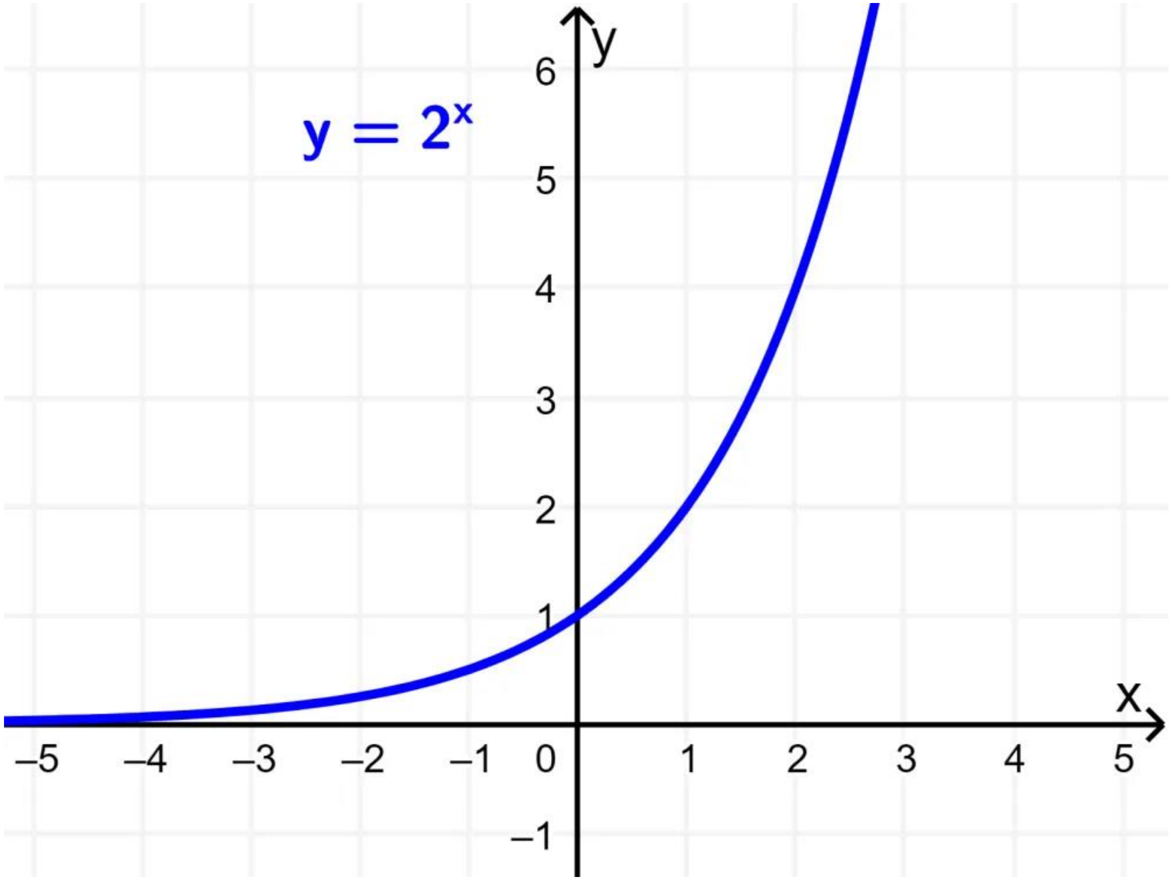


2) **TRASCENDENTES**: Dentro de estas podemos encontrar a las siguientes funciones:

- Función Logarítmica:



## Función Exponencial:



# Calculo del Dominio

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio será todos los números reales. Por ejemplo, $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1 \text{ entonces el } Dom\ f = R$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador. Por ejemplo, $f(x) = \frac{2}{x-1} \text{ entonces el } Dom\ f = R - \{1\}$

- Si la función presenta una notación analítica con raíz cuadrada, el dominio está formada por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.
  Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+3} \text{ entonces el } Dom\ f = [-3, +\infty)$

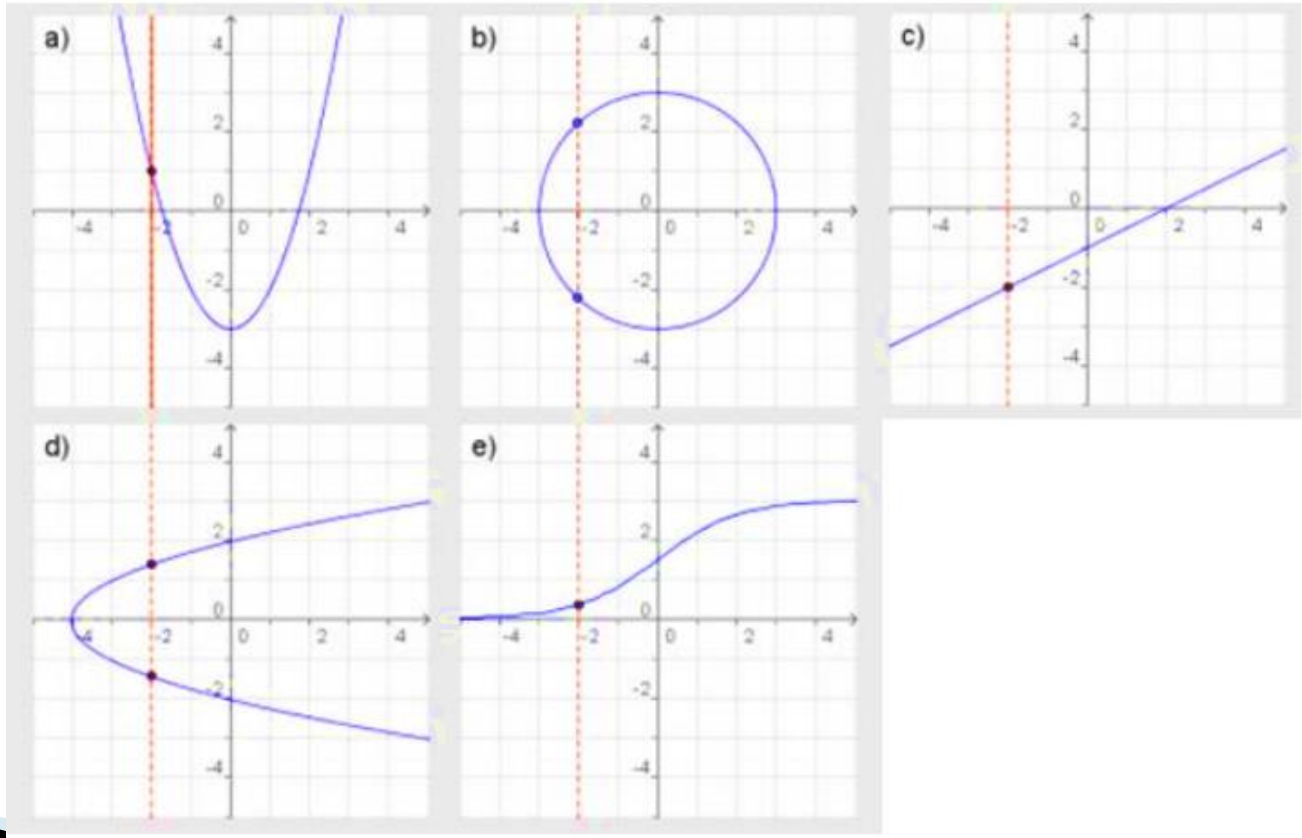
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \text{ entonces el } Dom\ f = (-2, +\infty)$$

# Calculo de la imagen

Nos remitiremos únicamente a la gráfica para determinar la imagen de cada función.

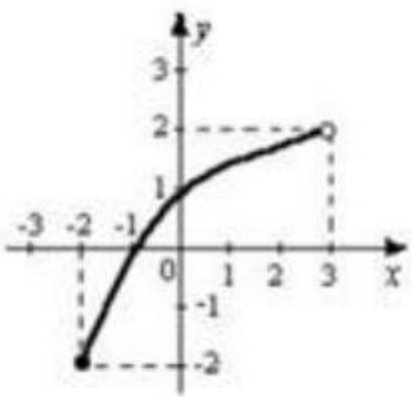
# ACTIVIDADES

- 1) De las siguientes gráficas, indica las que corresponden a una función. Justificar.

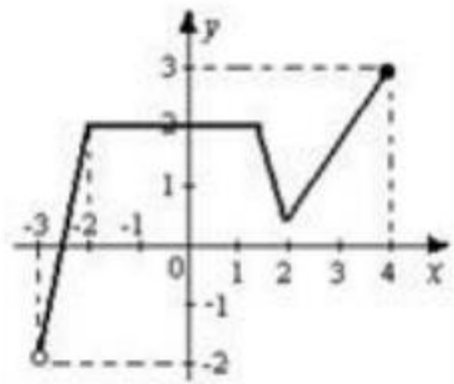


2) Dados los siguientes gráficos correspondientes a funciones, determinar los conjuntos dominio e imagen de cada una de ellas.

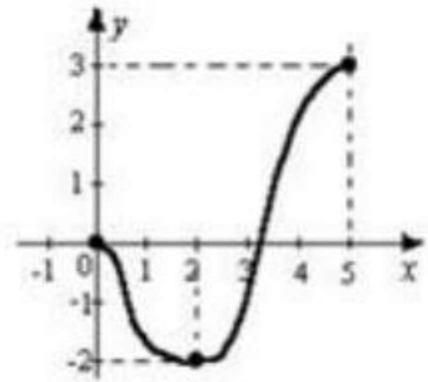
i)




ii)




iii)



3) Determinar el dominio de las siguientes funciones a partir de su notación analítica:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

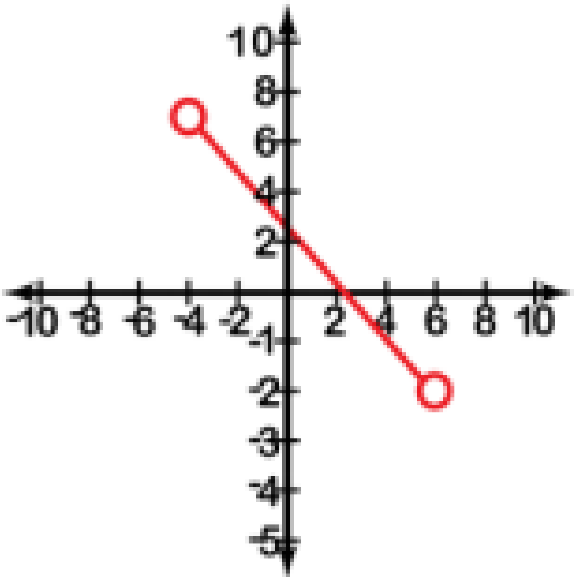
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

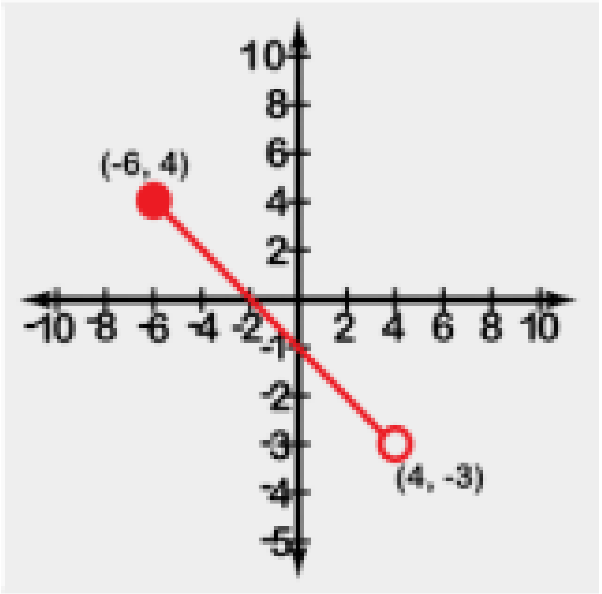
b) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

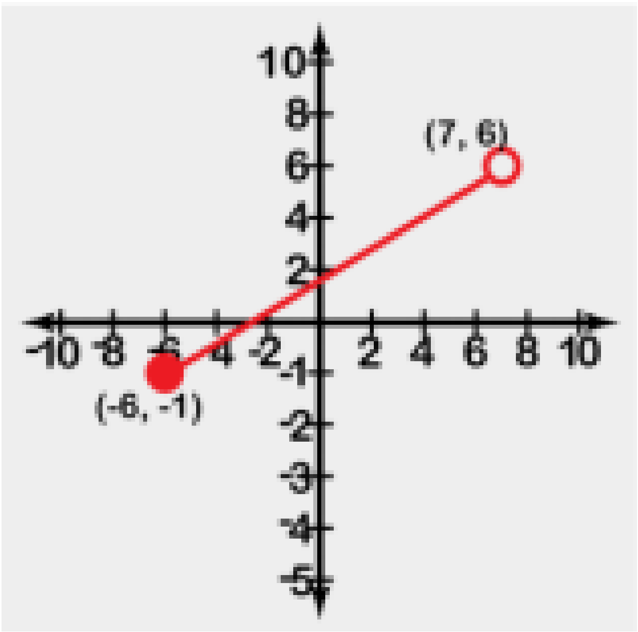
c) $f(x) = \sqrt{x-5}$

d) $f(x) = \sqrt{5-x}$

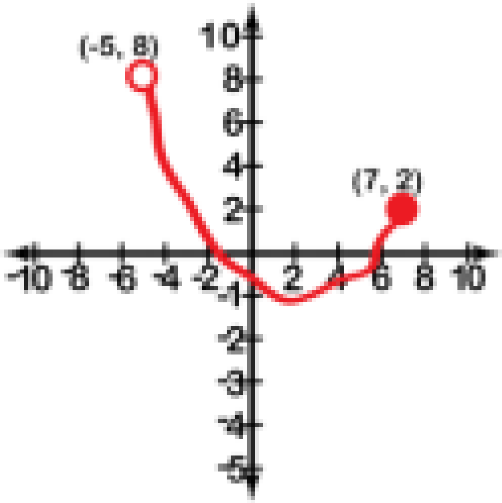
4) Determina el dominio y la imagen en las siguientes funciones:





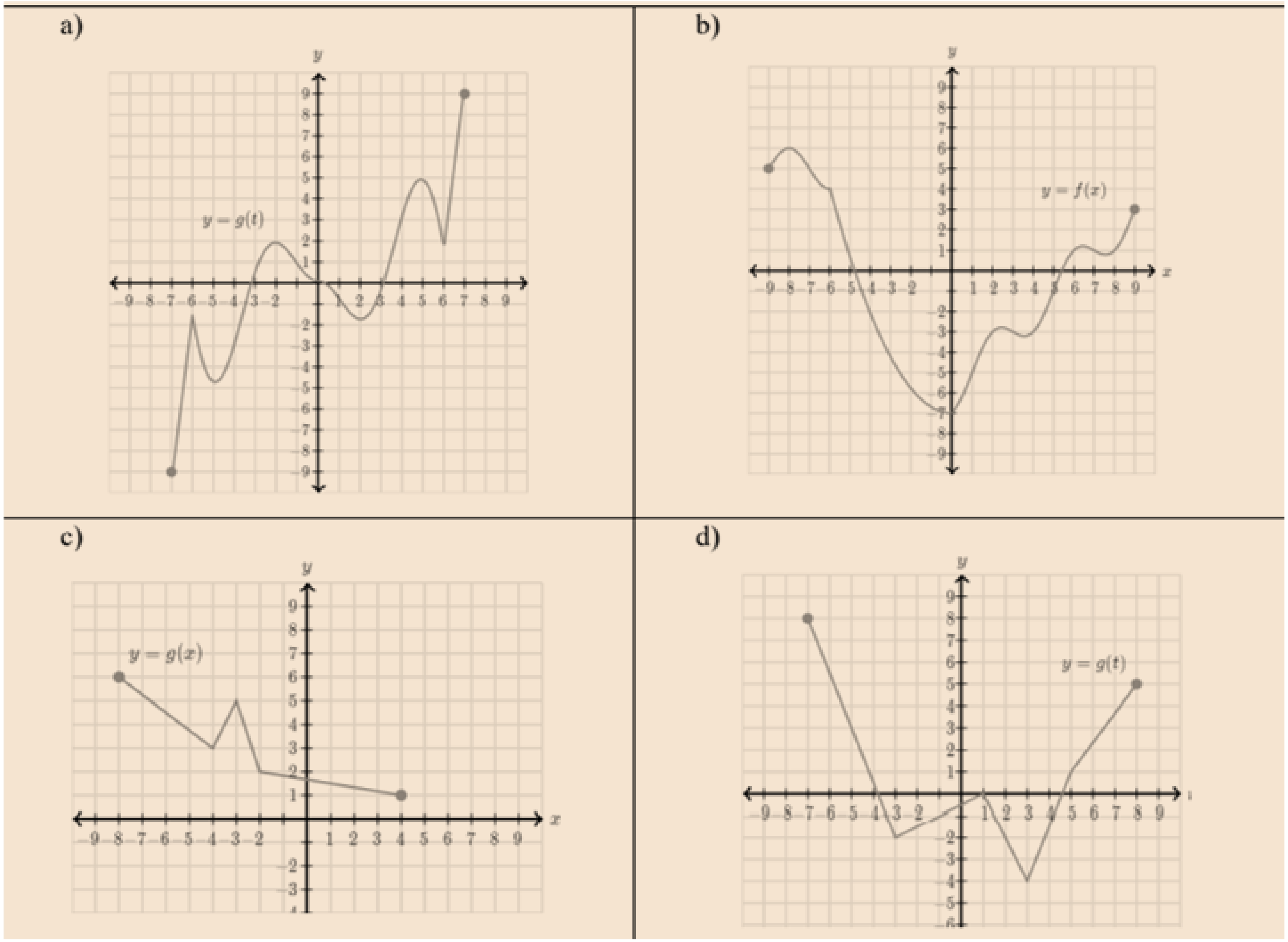


(7, 6)
(-6, -1)

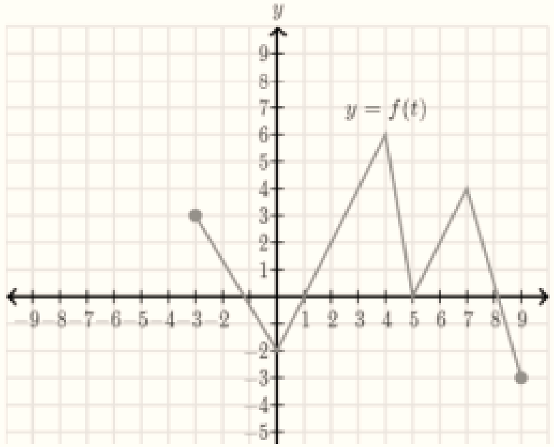



(-5, 8)
(7, 2)

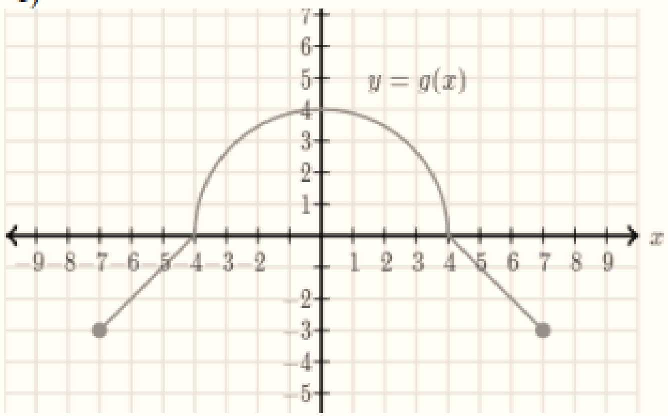
5) Determinar el dominio y la imagen de las siguientes funciones



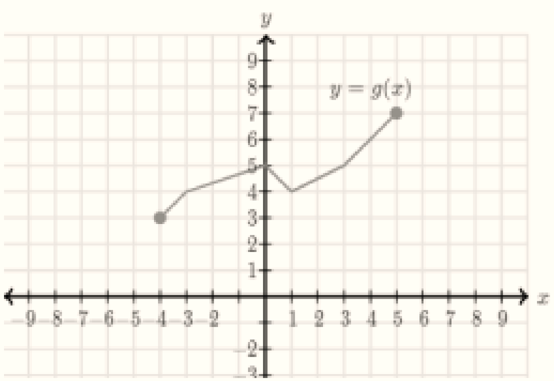
e)



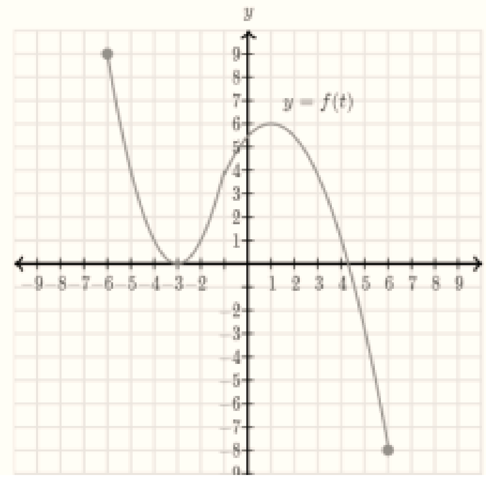

f)




g)



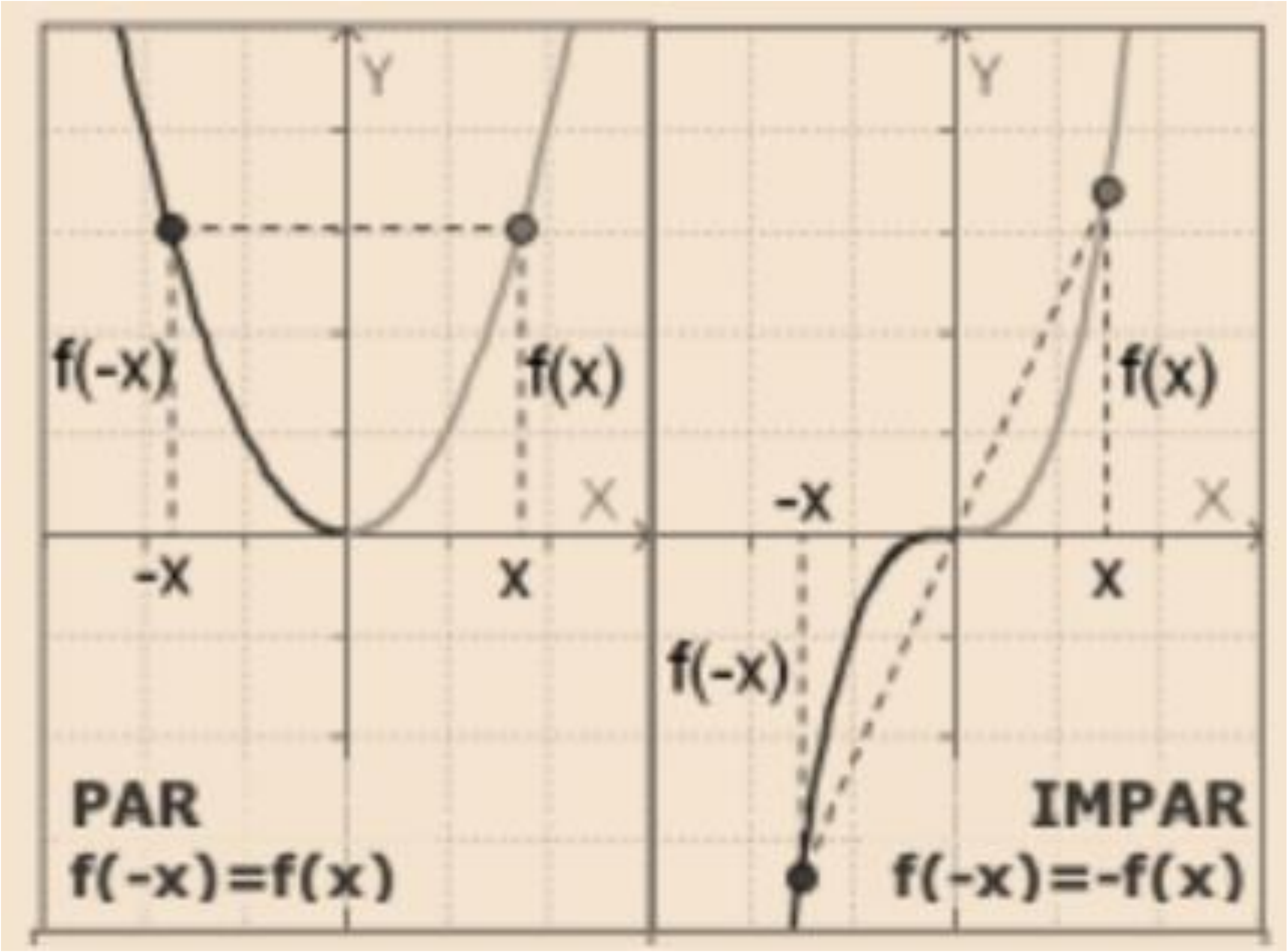

h)



# FUNCIONES PARES E IMPARES

**Simetría:** la gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su trazado.

- Una función es simétrica respecto al eje y, si $f(x) = f(-x)$ . Valores opuestos del dominio tienen la misma imagen. En este caso se dice **PAR**
- Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas cuando $f(x) = -f(x)$ . Las imágenes de valores opuestos del dominio dan resultados opuestos. En este caso la función es **IMPAR.**


Y
X
f(-x)
f(x)
-X
X
PAR
f(-x)=f(x)
Y
X
-X
f(x)
X
f(-x)
IMPAR
f(-x)=-f(x)

Ejemplos:

a) $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \rightarrow la\ función\ es\ PAR$

b) $f(x) = x^3 + x \rightarrow f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \rightarrow la\ función\ NO\ ES\ PAR$

Probamos si la función es impar:

$-f(x) = -(x^3 + x) = -x^3 - x \rightarrow la\ función\ ES\ IMPAR$

c) $f(x) = 3x^2 + 3x^5 \rightarrow f(-x) = 3(-x)^2 + 3(-x)^5 = 3x - 3x^5 \rightarrow NO\ ES\ PAR$

Probamos si la función es impar:

$-f(x) = -(3x^2 + 3x^5) = -3x^2 - 3x^5 \rightarrow NO\ ES\ IMPAR$

# ACTIVIDADES

1. ¿Las funciones siguientes son pares o impares?

   a) $f(x) = x^3 - 3x$

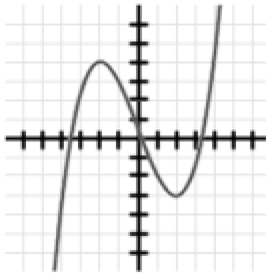
   b) $f(x) = 2x^2 - 2x - 2$

   c) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2$

   d) $f(x) = -\frac{1}{x}$

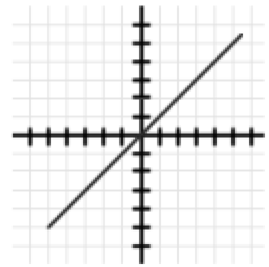
## 2) Seleccionar el tipo de función para cada una de las siguientes gráficas o expresiones analíticas

1



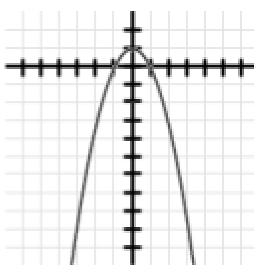
- Función par.
- Función impar.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

2



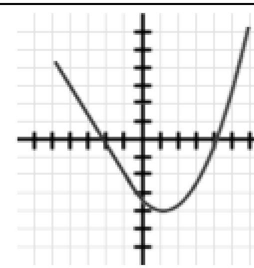
- Función par.
- Función impar.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3



- Función par.
- Función impar.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

4

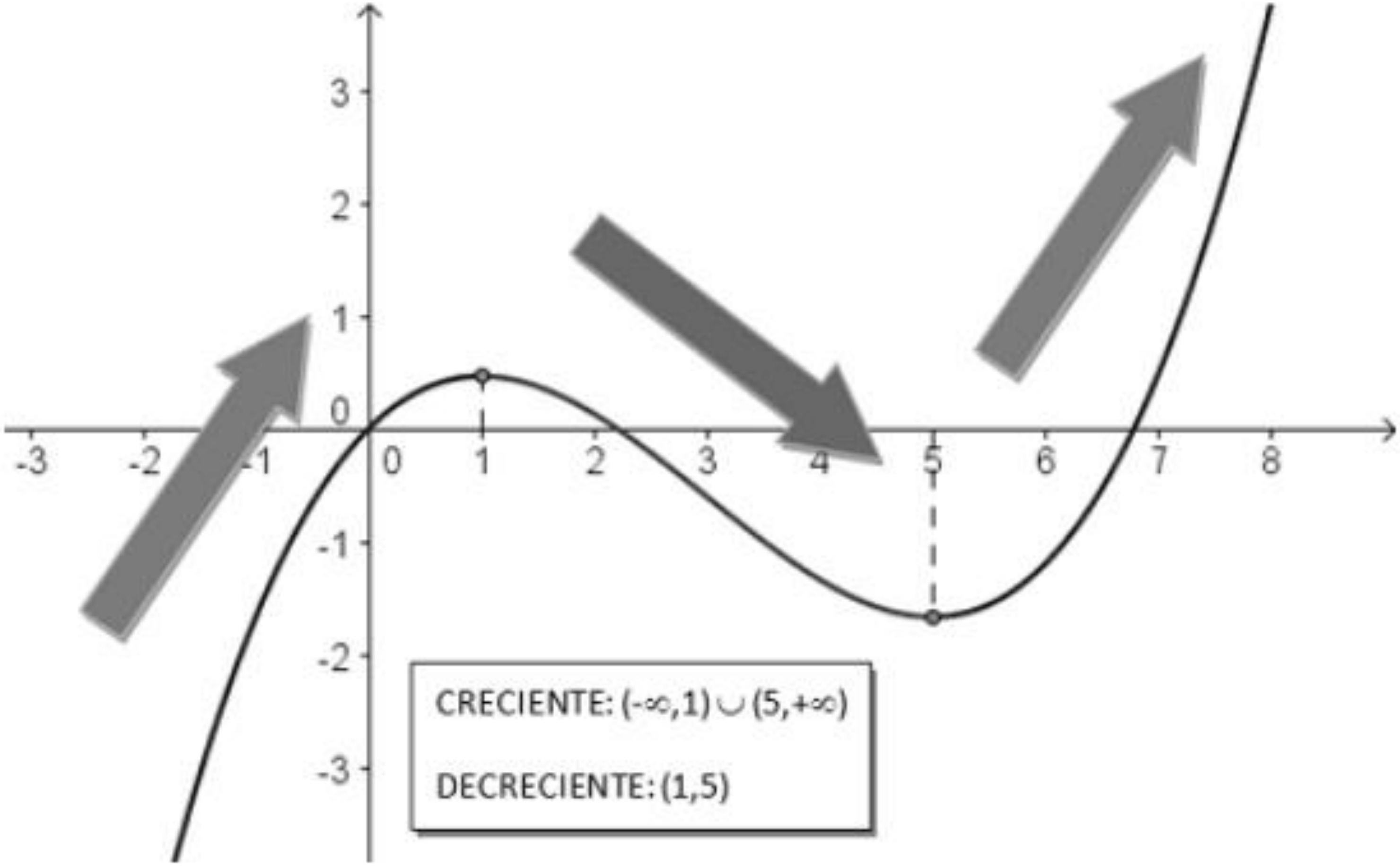


- Función par.
- Función impar.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

| | |
|---|---|
| **7** $f(x) = 3x^4 - 5x^2$<br>○ Función par.<br>○ Función impar.<br>○ Ninguna de las respuestas anteriores es correct | **8** $f(x) = x - 8$<br>○ Función par.<br>○ Función impar.<br>○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta. |
| **9** $f(x) = x^3 + 2x$<br>○ Función par.<br>○ Función impar.<br>○ Ninguna de las respuestas anteriores es correct | **10** $f(x) = x^3 - 1$<br>○ Función par.<br>○ Función impar.<br>○ Ninguna de las respuestas anteriores es correc |

# CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

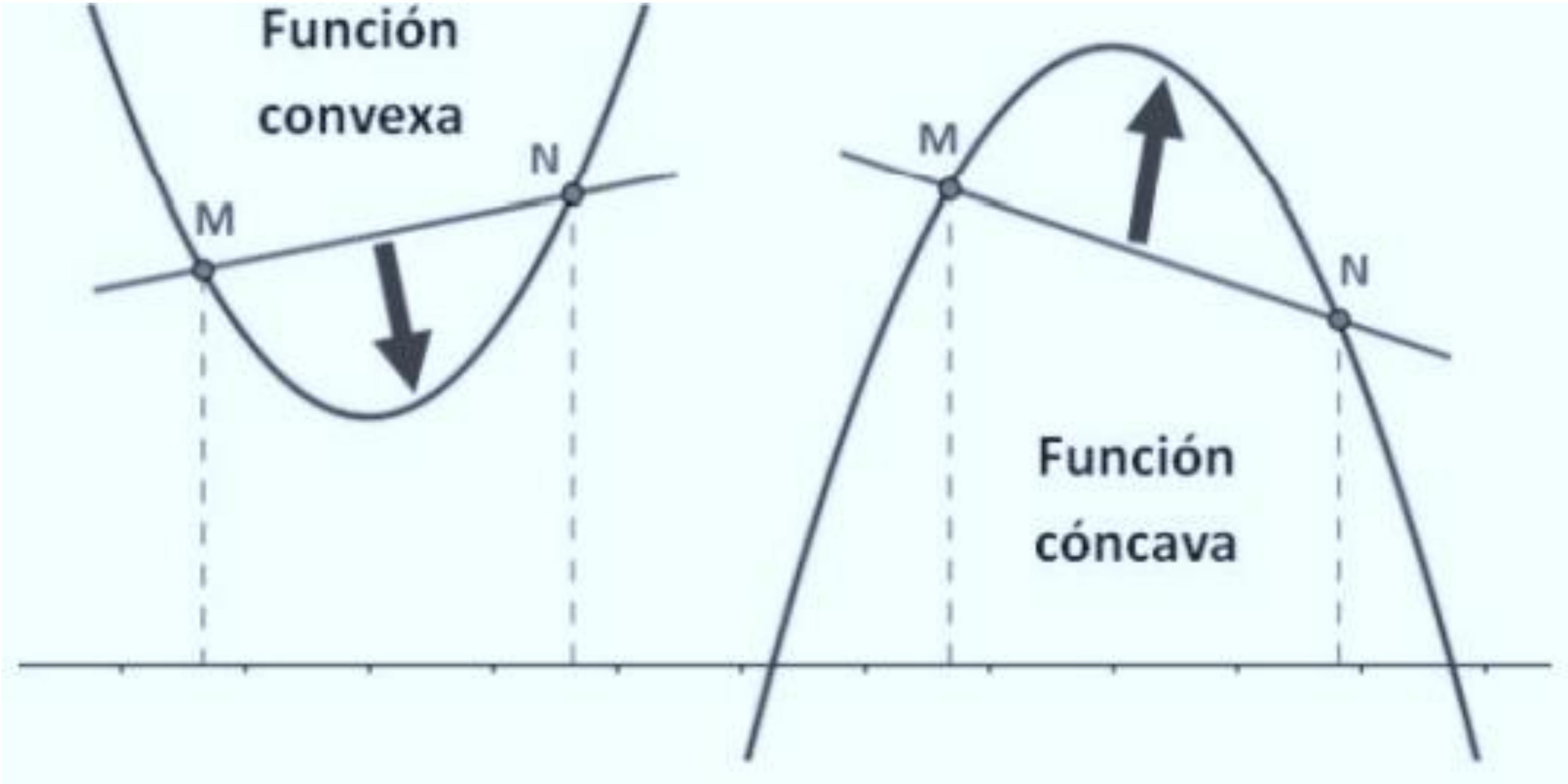
Cuando al aumentar el valor de “x” aumenta el valor de “y”, la gráfica asciende y se dice que la función es **CRECIENTE**. Si por el contrario, al aumentar el valor de “x” disminuye el de “y”, la gráfica desciende y la función **DECRECE**.


CRECIENTE: (-∞,1) ∪ (5,+∞)
DECRECIENTE: (1,5)

# COCAVIDAD Y CONVEXIDAD

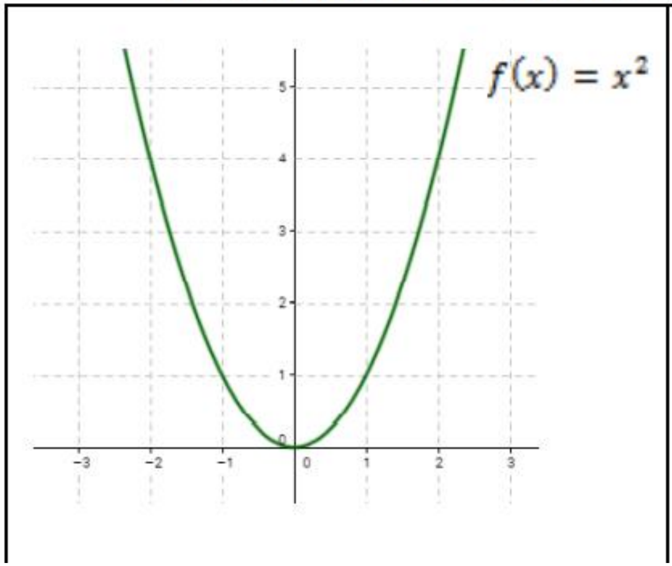
Otra característica de interés en las gráficas de las funciones es la concavidad, estudiar los intervalos en que la gráfica se curva hacia abajo o hacia arriba.

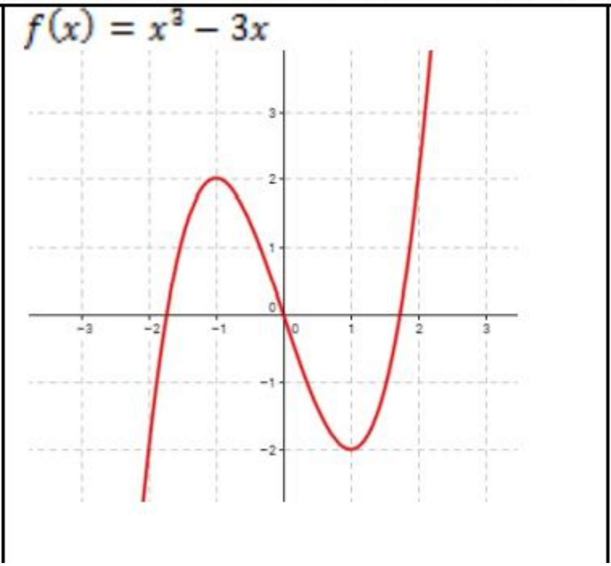
Una función es CÓNCAVA en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la curva queda debajo de ella, y CONVEXA si queda por encima.

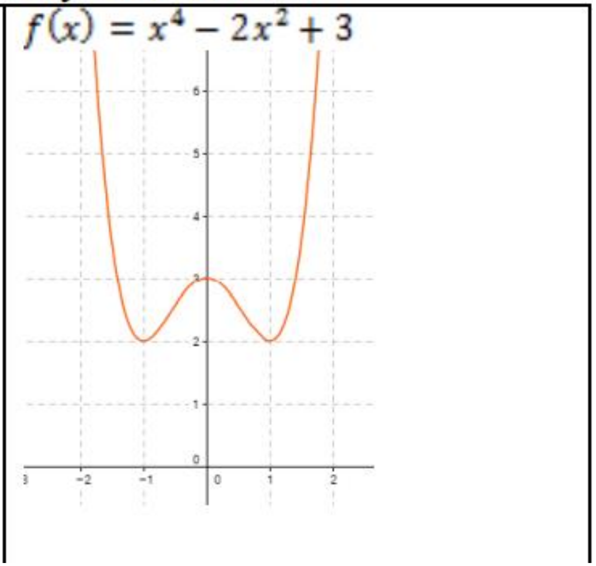

Función
convexa
M
N
M
N
Función
cóncava

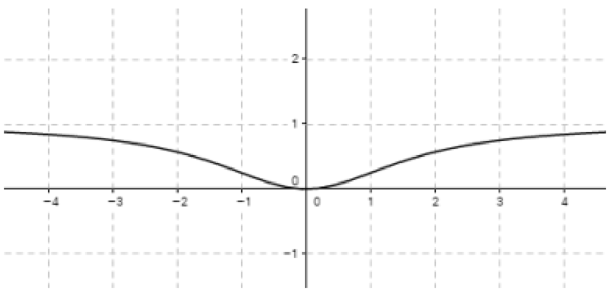
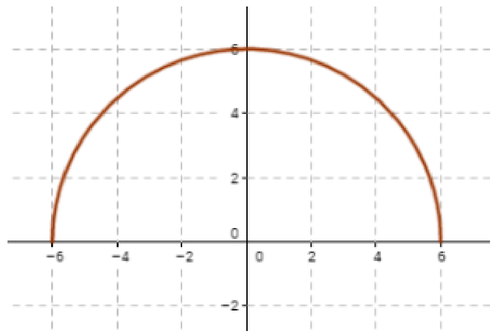
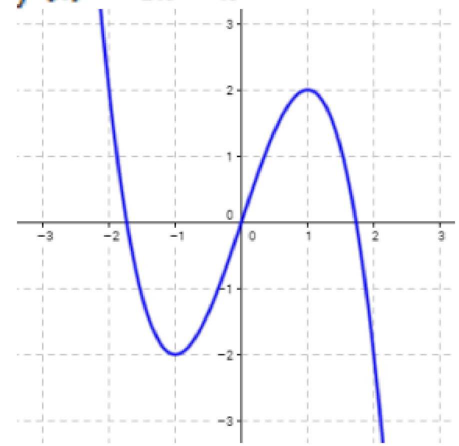
# ACTIVIDADES

1) Indicar dominio e imagen. Determinar el tipo de simetría que presentan, los intervalos de crecimiento/decrecimiento. Marcar los intervalos de concavidad y convexidad.



| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$  | $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$  | $f(x) = 3x - x^3$  |

# FUNCIÓN Y ECUACIÓN CUADRÁTICA

**Definición:** a la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$ se la denomina **función cuadrática**.

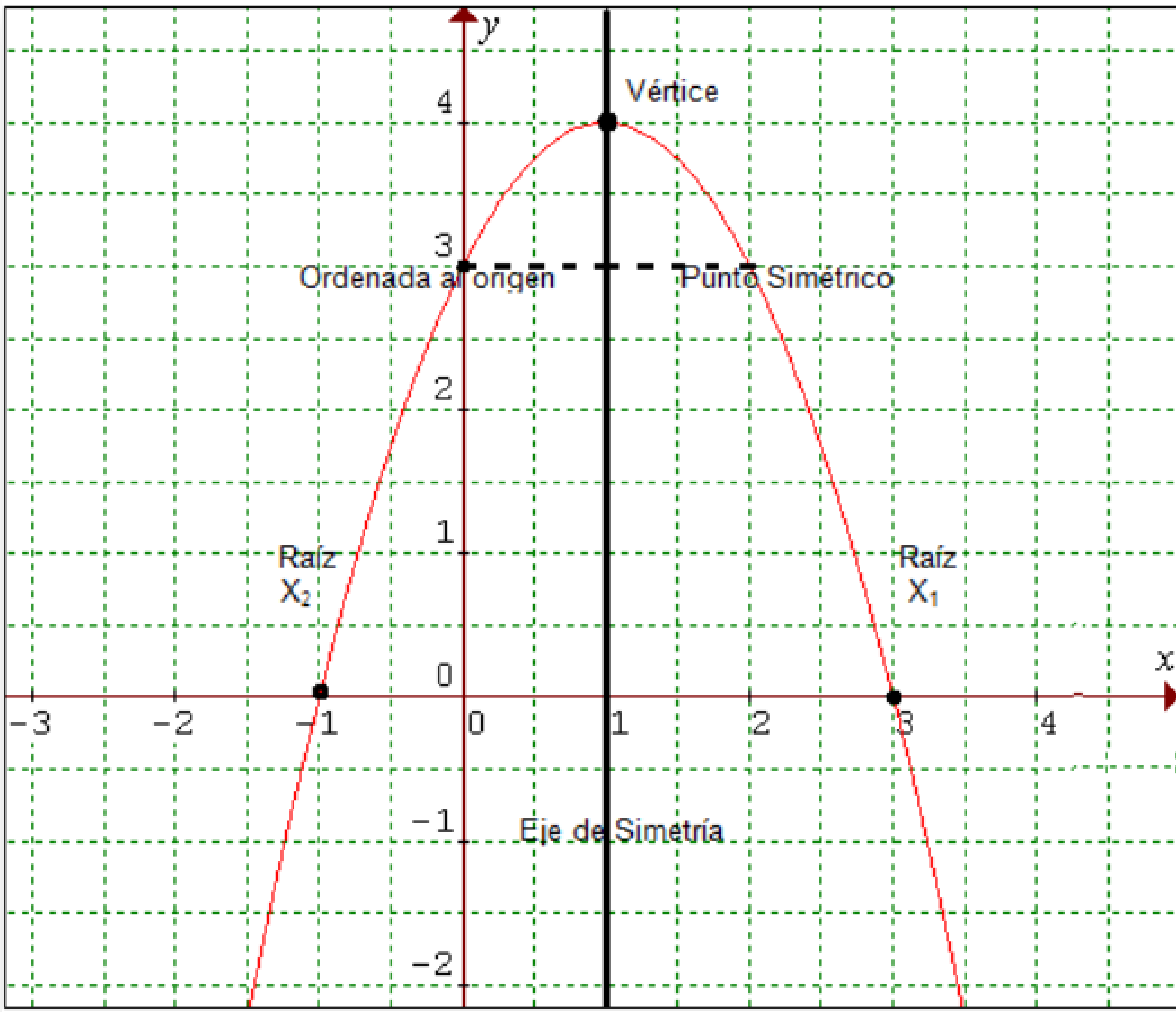
$$y = ax^2 + bx + c$$

**Término cuadrático**

**Término lineal**

**Término independiente**

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.


y
Vértice
4
3
Ordenada al origen
Punto Simétrico
2
1
Raíz
X2
Raíz
X1
0
x
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
Eje de Simetría
-2

**Gráfica de la parábola:**

Para realizar el gráfico de una parábola, $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ se deben calcular los elementos de la misma y luego representarla:

1) Raíces de la parábola: son los puntos de intersección de la gráfica con el eje x, para ello se utiliza la Fórmula Resolvente:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2) Vértice de la parábola: para calcular el vértice en el eje x se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ o bien } x_v = \frac{-b}{2a}$$

Y para hallar el vértice en el eje y debemos reemplazar el valor hallado anteriormente en la función. $y_v = f(x_v)$

3) Eje de simetría: es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$

4) Ordenada al origen: es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, que corresponde al término independiente.

Veamos un ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ los elementos de la misma son: $a = 1, b = 2 \; y \; c = -3$

- Hallamos las raíces: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*1*(-3)}}{2*1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

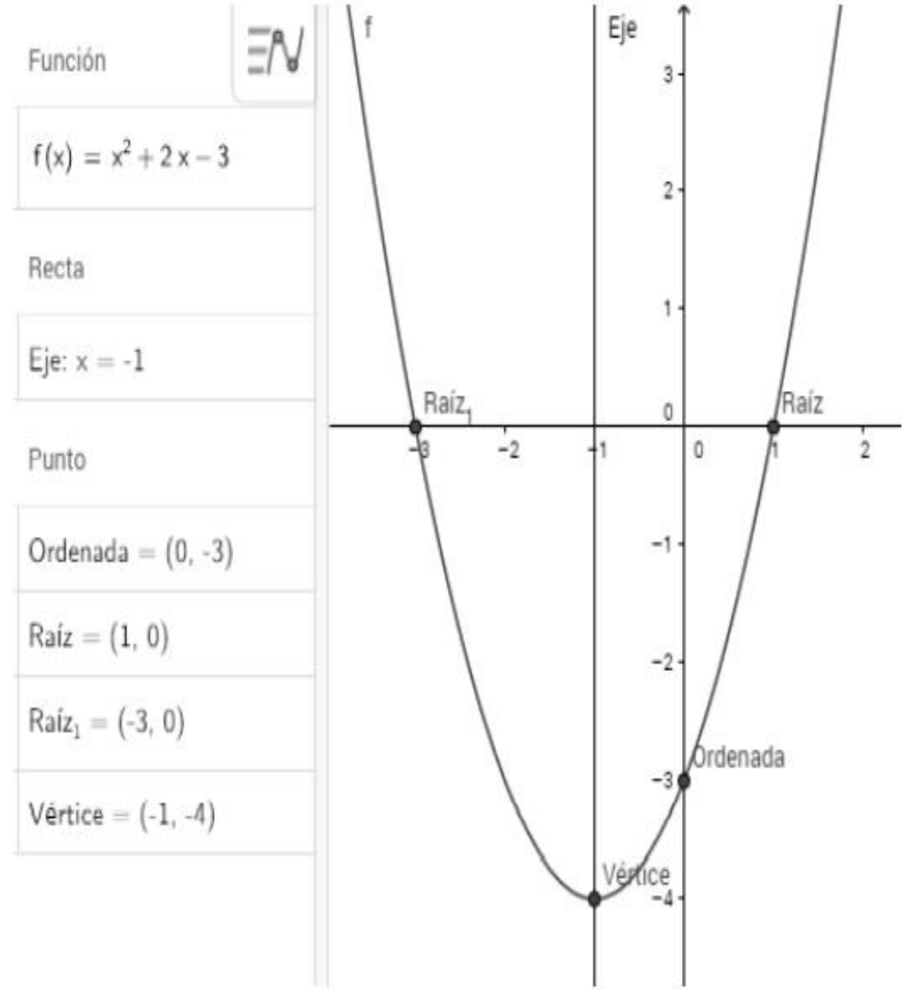
  $\rightarrow x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

  $\rightarrow x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

- Vértice: $x_v = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

  $y_v = (-1)^2 + 2 * (-1) - 3 = 1 - 2 -= -4$

  $V = (-1; 4)$
- Eje de simetría: $x = -1$
- Ordenada al origen: -3

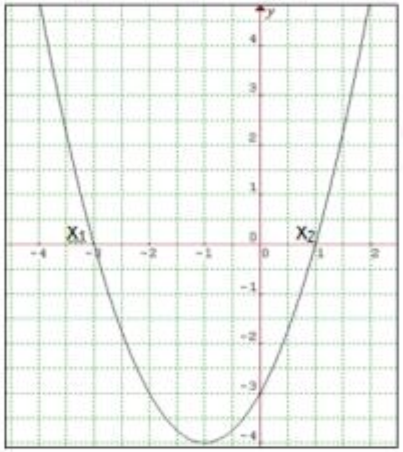


# DISCRIMINANTE

Al radicando $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se lo llama **discriminante**, ya que el valor sirve para discriminar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega $\Delta$ $(delta)$

$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

- Si $\Delta > 0 \rightarrow raíces\ reales\ distintas$
- $Si\ \Delta = 0 \rightarrow raíces\ reales\ iguales$
- $Si\ \Delta < 0 \rightarrow raíces\ no\ reales$

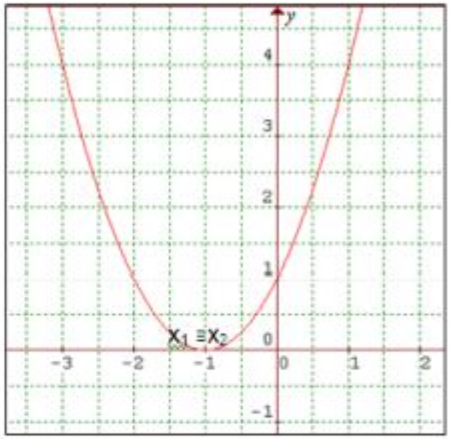



**Δ> 0**

la grafica tiene dos puntos de intersección con el eje x.

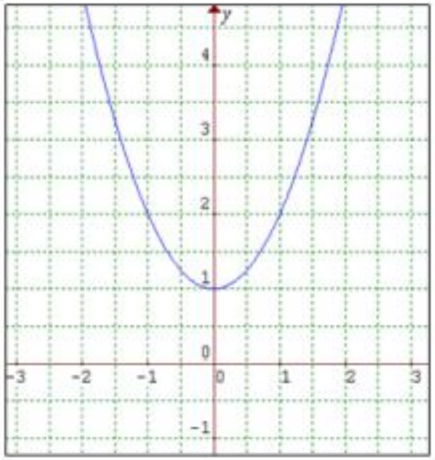
**Δ= 0**

La gráfica tiene 1 punto de intersección con el eje x




**Δ< 0**

La gráfica no tiene puntos de intersección con el eje x



**Ejercicios:** Realizar la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando sus elementos

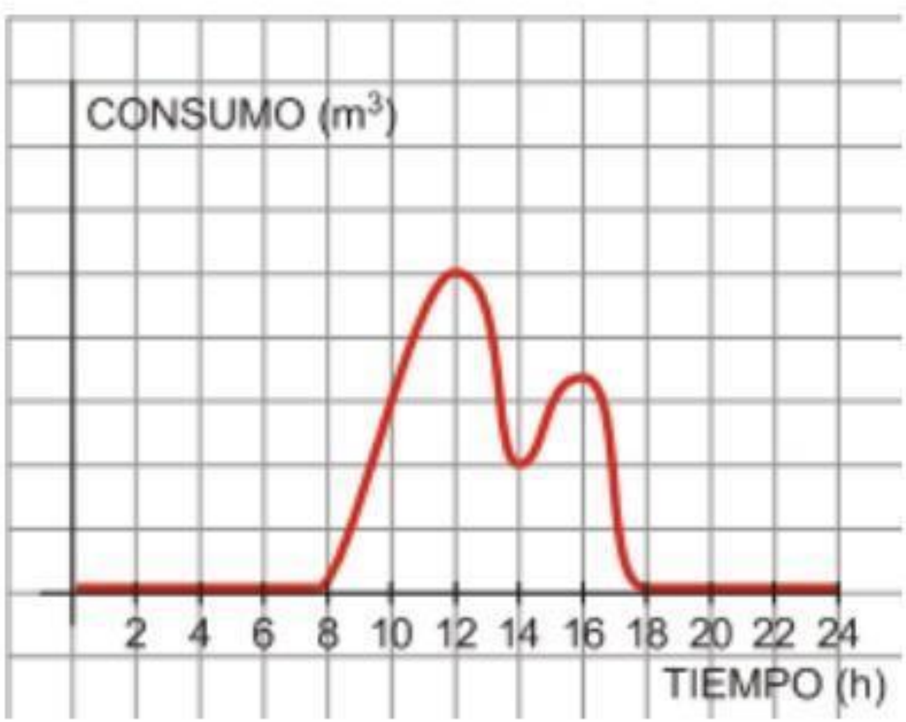
a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = 2x^2 + 8x + 6$

c) $y = x^2 - 4$

# ACTIVIDADES

- 1) El consumo de agua en una empresa viene dado por la gráfica:

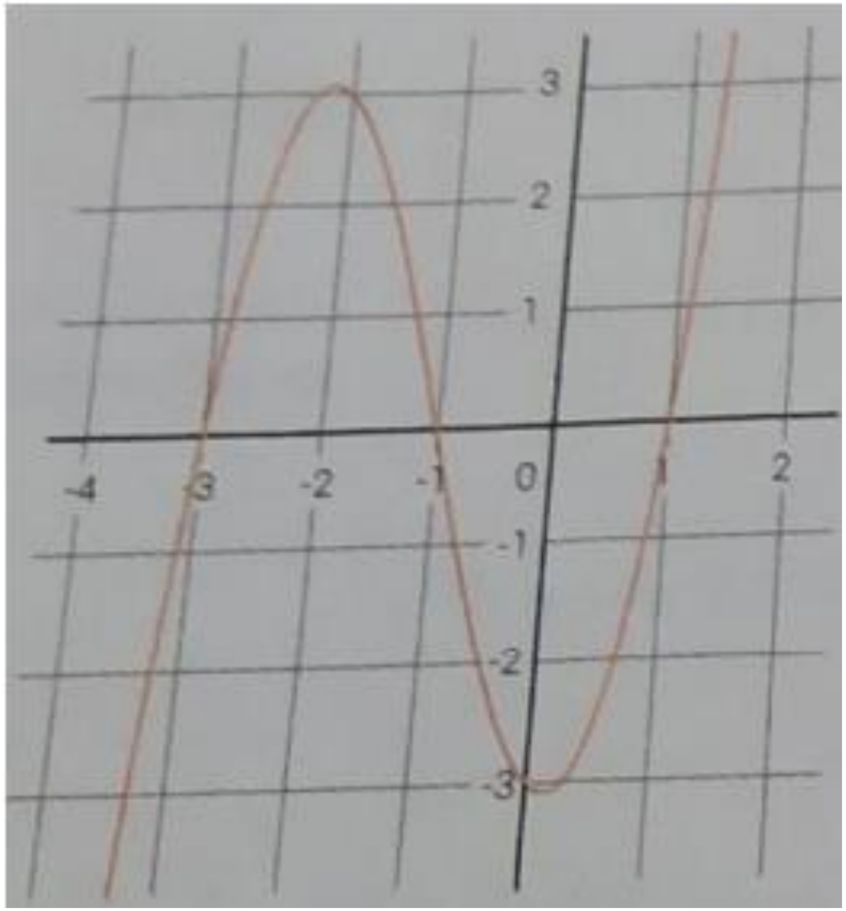


a) ¿Durante que horas el consumo de agua es nulo?.
b) ¿Cuándo es creciente y decreciente el consumo?.
c) ¿Durante que horas se alcanzan los valores máximos y mínimos del consumo?.

**2)** Considere la función y= $\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ , responda:

a) ¿X puede ser negativo?.
b) ¿X puede ser igual a cero?.
c) ¿X puede ser mayor que 1?.
d) ¿Cuál es el dominio de la función?.

3) El siguiente gráfico representa una función de dominio real.



¿Para que valores del dominio tendremos imágenes positivas?

A. $(1;\ +\infty)$
B. $(-3;-1)\cup(1;+\infty)$
C. $(-3;\ -1)$
D. $[-3;-1]\cup[1;+\infty]$

3) Cuál de las siguientes funciones cumple que, cuando $x=2, f(x)=1$?

A. $f(x)=x^3+5x-4$
B. $f(x)=\frac{2+x}{x}$
C. $f(x)=(x-5)^2+10$
D. $f(x)=\frac{6+4x}{7x}$

¿Cuál es el dominio de la función racional $f(x) = \frac{(x+1)}{(x-5)}$?

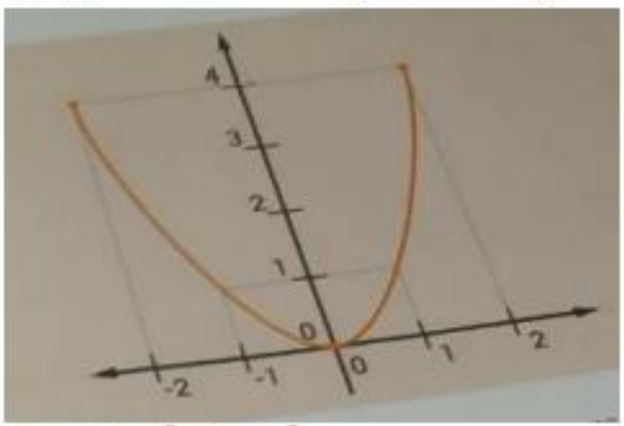
A. R

B. $R - \{0\}$

C. $R - \{5\}$

D. $R - \{-5\}$

5) ¿Cuál es el conjunto imagen de la función $f(x): [-2; 2] \to R$representada en el gráfico?



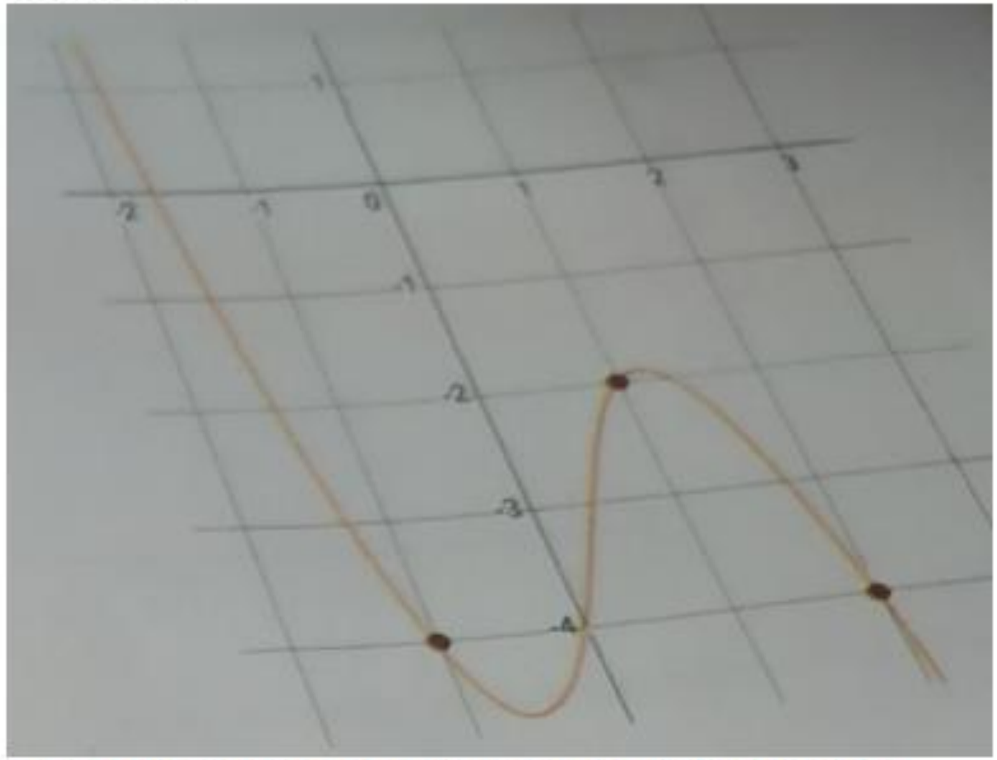

A. $[-2; 2]$

B. $[0,4]$

C. $(1,4)$

D. R

6) Observa el gráfico de la función:




¿Cuál de las siguientes es una posible tabla de valores para dicha función?

| x | Y | x | Y | x | Y | x | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -4 | -1 | -4 | -1 | -4 | -4 | -1 |
| 1 | -2 | 1 | 2 | 1 | 2 | -2 | 1 |
| 2 | -4 | 2 | 4 | 2 | -4 | -4 | 2 |