MATEMÁTICA

UNIDAD I: Sistemas de ecuaciones lineales

1.1 DOS ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Antes de comenzar a desarrollar el tema, recordemos algunos conceptos:

⇒ Ecuaciones: Igualdad que se verifica para determinados valores de una incógnita. Ejemplo:

$$x + 4 = 8$$

$$x = 8 - 4$$

$$\boxed{x = 4} \quad (1)$$

Para verificar la ecuación remplazamos el valor obtenido (1) en la ecuación original:

Verificación: $x + 4 = 8$

$$4 + 4 = 8$$

$$\boxed{8 = 8}$$

Nota: Leer pág "55" del cuadernillo y realizar el punto "1" (a, b, c, d, e, f, g) de la pág "64".

⇒ Sistema de Ecuaciones:

Conjunto de 2 o más ecuaciones que contienen las mismas variables. El conjunto solución de un sistema con 2 incógnitas se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Resolveremos este sistema através de diferentes métodos:

1) Método de igualación

$$\begin{cases} x - y = 7 & ① \\ x + y = 5 & ② \end{cases}$$

a) Despejamos la ecuación "1" del sistema, considerando la variable "x".

$$x = 7 + y \quad ③$$

b) Realizamos el mismo procedimiento para la ecuación "2", considerando la misma variable "x".

$$x = 5 - y \quad ④$$

c) Igualamos las expresiones obtenidas: 3 y 4.

$$7 + y = 5 - y$$

Despejamos la variable "y":

$$y + y = 5 - 7$$

$$2y = -2$$

$$y = (-2) : (2)$$

$$\boxed{y = -1} \quad ⑤$$

d) Se reemplaza el valor obtenido de esta última incógnita en cualquiera de las expresiones 3 ó 4

$$x = 7 + y$$

$$x = 7 - 1$$

$$\boxed{x = 6}$$

Nota: Verifica si los resultados obtenidos son correctos remplazando los resultados obtenidos en el sistema de ecuaciones.

2) Método de sustitución

$$\begin{cases} x - y = 7 & ① \\ x + y = 5 & ② \end{cases}$$

a) Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema:

$$x - y = 7$$

$$x = 7 + y \quad ③$$

b) Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. Reemplazamos 3 en 2.

$$x + y = 5$$

$$\downarrow$$

$$(7+y) + y = 5$$

$$7 + 2y = 5$$

$$2y = 5 - 7$$

$$2y = -2$$

$$y = (-2) : (2)$$

$$\boxed{y = -1} \quad ④$$

c) Sustituimos 4 en 3:

$$x = 7 + y$$

$$x = 7 - 1$$

$$\boxed{x = 6}$$

3) Método de eliminación por suma y resta:

$$\begin{cases} x - y = 7 \quad (1) \\ x + y = 5 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

En este método se trata de eliminar una de las incógnitas multipucando o dividiendo convenientemente a una o ambas ecuaciones por un número real no nulo, para luego sumar o restar dichas ecuaciones. y así poder obtener los valos de ambas incógnitas.

a) Restamos miembro a miembro:

$$x - y = 7 \quad - \quad (x + y = 5)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x} - y = 7 \\ \underline{-\cancel{x} - y = -5} \\ -2y = 2 \end{array}$$

$$y = (2) : (-2)$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7.1 - 5.(-1)}{1.1 - 1.(-1)} = \frac{12}{2} = 6$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1.5 - 1.7}{1.1 - 1.(-1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

5) Método Gráfico:

$$\begin{cases} x - y = 7 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

a) Despejamos "y" en ambas ecuaciones:

$x - y = 7$

$-y = 7 - x$

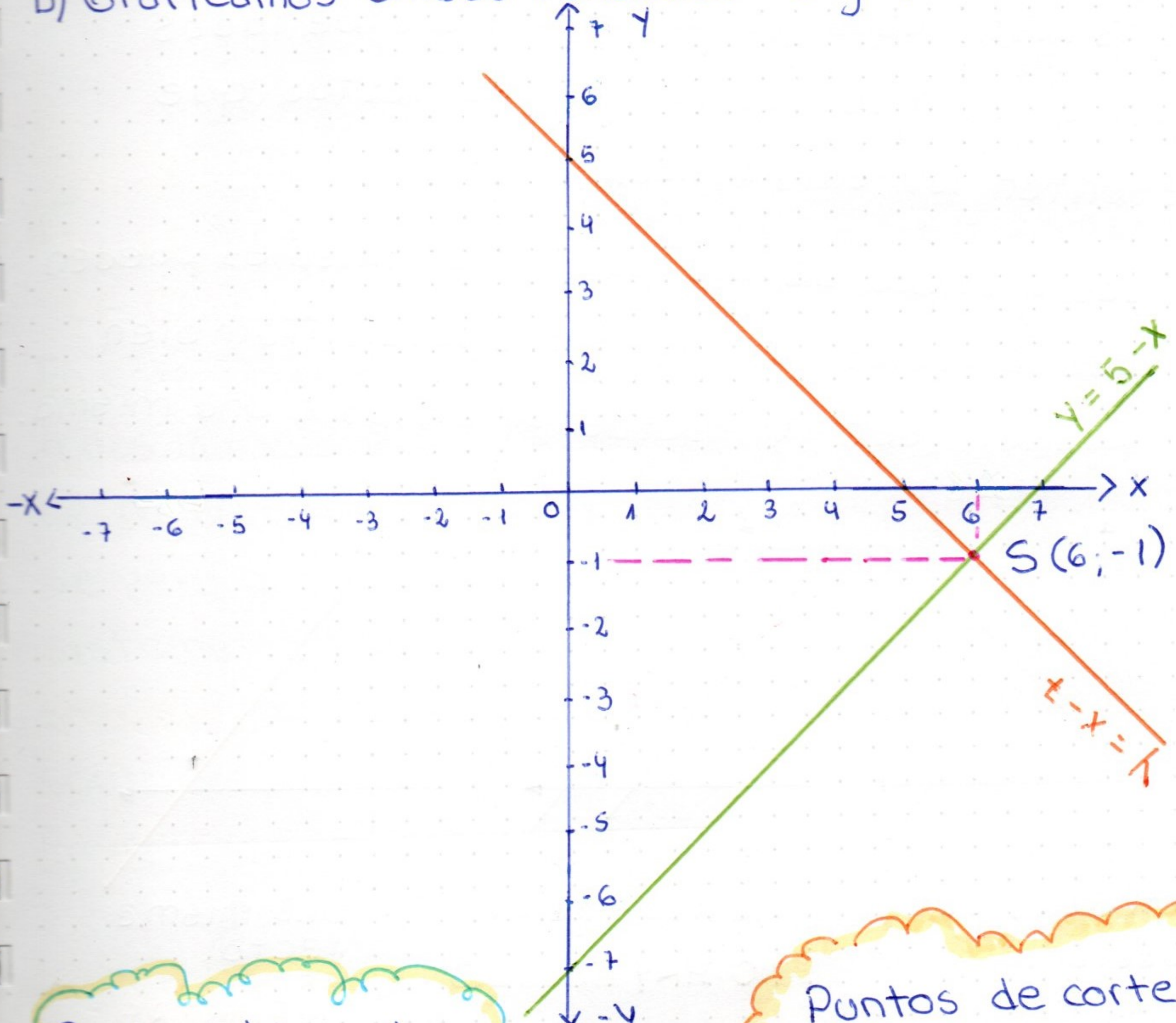
$y = (7 - x) : (-1)$

$\boxed{y = x - 7}$ (3)

$x + y = 5$

$\boxed{y = 5 - x}$ (4)

b) Graficamos ambas funciones 3 y 4



Puntos de corte en "x"

$y = x - 7$

$0 = x - 7$

$\boxed{7 = x}$

$y = 5 - x$

$0 = 5 - x$

$-5 = -x$

$(-5) : (-1) = x$

$\boxed{5 = x}$

Puntos de corte en "y"

$y = x - 7$

$y = 0 - 7$

$\boxed{y = -7}$

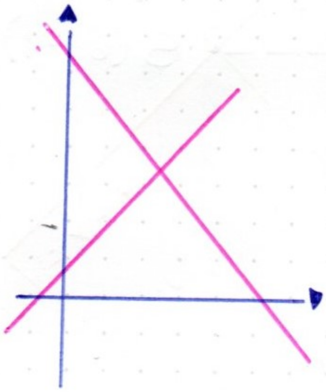
$y = 5 - x$

$y = 5 - 0$

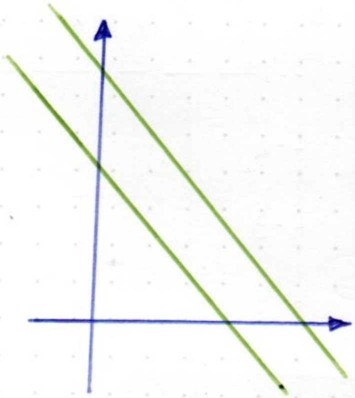
$\boxed{y = 5}$

Cuando se utiliza el método gráfico, la solución del sistema está dada por el par de coordenadas del punto de intersección de las rectas que representan las ecuaciones.

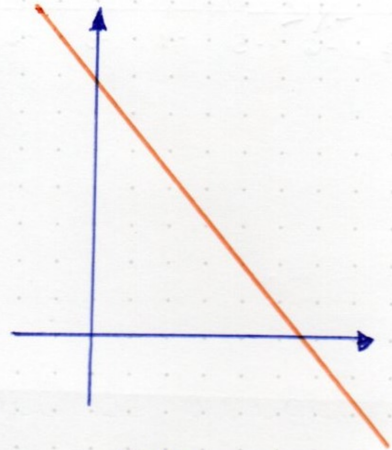
- Las gráficas de dos ecuaciones lineales pueden ser 2 rectas que se intersectan. También pueden ser 2 rectas paralelas o una misma.



Dos rectas que se intersectan.
SOLUCIÓN ÚNICA



Rectas paralelas
NO HAY SOLUCIÓN



Una misma recta.
INFINITAS SOLUCIONES

SISTEMAS COMPATIBLES Y INCOMPATIBLES

Si no se pueden hallar valores que satisfagan a las ecuaciones, el sistema se dice INCOMPATIBLE o INCONSISTENTE. Si el sistema presenta soluciones se dice que es COMPATIBLE o CONSISTENTE.

Nota: Realizar en la pág 65, el punto de "SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, que se encuentra en el cuadernillo de ingreso.

m ECUACIONES CON n INCÓGNITAS: ELIMINACIÓN DE GAUSS - JORDAN y GAUSSIANA

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo, se verá que, igual que en el caso de 2×2, estos sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución única o tienen un número infinito de soluciones.

Ejemplo: Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 & (1) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 & (2) \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

a) Se comienza por dividir la ecuación (1) entre 2:

$$\frac{2x_1 + 4x_2 + 6x_3}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow \underset{(4)}{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_2 = 9 & (4) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 & (2) \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

b) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación 4 por -4 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación 2:

$$-4\cdot(x_1+2x_2+3x_3=9) \Rightarrow -4x_1-8x_2-12x_3=-36$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-4x_1}-8x_2-12x_3=-36 \\ \cancel{4x_1}+5x_2+6x_3=24 \\ \hline -3x_2-6x_3=-12 \quad (5) \end{array}$$

La ecuación 5 es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=9 & (4) \\ \quad -3x_2-6x_3=-12 & (5) \\ 3x_1+x_2-2x_3=4 & (3) \end{cases}$$

c) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación 4 por -3 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación 3:

$$-3\cdot(x_1+2x_2+3x_3=9) \Rightarrow -3x_1-6x_2-9x_3=-27$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-3x_1}-6x_2-9x_3=-27 \\ \cancel{3x_1}+x_2-2x_3=4 \\ \hline -5x_2-11x_3=-23 \quad (6) \end{array}$$

La ecuación 6 es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=9 & (4) \\ \quad -3x_2-6x_3=-12 & (5) \\ \quad -5x_2-11x_3=-23 & (6) \end{cases}$$

observe que en el sistema se ha eliminado x_1 de las ecuaciones 5 y 6.

d) Dividimos la ecuación 5 por -3:

$$\frac{-3x_2 - 6x_3 = -12}{-3} \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 4 \quad (7)$$

La ecuación 7 es la nueva ecuación y ahora el sistema es:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 & (4) \\ x_2 + 2x_3 = 4 & (7) \\ -5x_2 - 11x_3 = -23 & (6) \end{cases}$$

e) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación 7 por -2 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación 4:

$$-2 \cdot (x_2 + 2x_3 = 4) \Rightarrow -2x_2 - 4x_3 = -8$$

$$\begin{array}{r} x_1 + \cancel{2x_2} + 3x_3 = 9 \\ - \cancel{2x_2} - 4x_3 = -8 \\ \hline x_1 \qquad\quad - x_3 = 1 \end{array} \quad (8)$$

La ecuación 8 es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 1 & (8) \\ x_2 + 2x_3 = 4 & (7) \\ -5x_2 - 11x_3 = -23 & (6) \end{cases}$$

f) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación 7 por 5 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación 6:

$$5 \cdot (x_2 + 2x_3 = 4) \Rightarrow 5x_2 + 10x_3 = 20$$

$$\cancel{5x_2} + 10x_3 = 20$$
$$-\cancel{5x_2} - 11x_3 = -23$$
$$-x_3 = -3 \quad (9)$$

La ecuación (9) es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 & (8) \\ x_2 + 2x_3 = 4 & (7) \\ -x_3 = -3 & (9) \end{cases}$$

observe que en el sistema se ha eliminado x_2 de las ecuaciones 8 y 9

g) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación (9) por 2 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (7):

$$2 \cdot (-x_3 = -3) \Rightarrow -2x_3 = -6$$

$$-\cancel{2x_3} = -6$$
$$x_2 + \cancel{2x_3} = 4$$
$$x_2 = -2 \quad (10)$$

La ecuación (10) es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 & (8) \\ x_2 = & (10) \\ -x_3 = -3 & (9) \end{cases}$$

h) Se simplifica el sistema multiplicando ambos lados de la ecuación (9) por -1 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (8):

$$-1.(-x_3 = -3) \Rightarrow x_3 = 3$$

$$\begin{array}{lr} x_1 \quad - \cancel{x_3} & = 1 \\ \cancel{x_3} & = 3 \\ \hline \boxed{x_1 = 4} & (11) \end{array}$$

La ecuación (11) es la nueva ecuación, y el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1 = 4 & (11) \\ x_2 = -2 & (10) \\ -x_3 = -3 & (9) \quad \Rightarrow \boxed{x_3 = 3} \ (12) \end{cases}$$

observe que en el sistema se ha eliminado x_3 de la ecuación 10 y 11.

$$\begin{cases} x_1 = 4 & (11) \\ x_2 = -2 & (10) \\ x_3 = 3 & (12) \end{cases}$$

Esta es la solución para el sistema y podemos verificarlo reemplazando los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones inicial.

VERIFICACIÓN

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.(4) + 4.(-2) + 6.(3) = 18 \\ 4.(4) + 5.(-2) + 6.(3) = 24 \\ 3.(4) + (-2) - 2.(3) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 = 18 \\ 24 = 24 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

El sistema se verifica.

$S(4; -2, 3)$

El método que se usó se conoce como el de eliminación de Gauss - Jordan.

SISTEMAS CONSISTENTES Y INCONSISTENTES

Al igual que en el sistema de ecuaciones formado por 2 ecuaciones, estos sistemas pueden clasificarse como:

=> **CONSISTENTE:** El sistema tiene al menos una solución.

=> **INCONSISTENTE:** El sistema no tiene solución.

Podríamos decir que el ejemplo desarrollado anteriormente es por lo tanto un Sistema Consistente.

Actividad: Resolver los siguientes sistemas y clasificarlos.

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 11 \end{cases}$

1) $S(2, 3, 1)$

SISTEMA CONSISTENTE

3) SISTEMA INCONSISTENTE

2) $S\left(-4, 7, \frac{1}{2}\right)$

SISTEMA CONSISTENTE

3) $S\left(\frac{19}{5} ; \frac{1}{5}\right)$

SISTEMA CONSISTENTE