MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES FACULTAD DE INGENIERÍA	**MECÁNICA RACIONAL**	**AÑO**
FACULTAD DE INGENIERIA	**Trabajo Práctico Nº 1** **Álgebra tensorial**	**2024**

Ejercicios propuestos:

Ejercicio 1. Dados los vectores A = [1, 2, 4], B = [2,1,5] y M = [-1,3,4], cuyas coordenadas están referidos al sistema referencial (x, y, z).
El sistema referencial (x', y', z') está relacionado con el (x, y, z) por la rotación representada por la matriz [R].

$$[R] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones:
a) Aplicar el tensor (A⊗B) al vector M.
b) Aplicar el tensor (A'⊗B') al vector M'
c) Verificar el invariante escalar y el vectorial de (A⊗B) y (A'⊗B')

Ejercicio 2. Dado el tensor [T] con sus componentes en el sistema referencial (x,y,z). Se pide:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determinar su representación en el sistema (x',y',z'), tal que x'= - y, y'=x, z'=z
b) descomponer al tensor [T] en una suma de tensores, uno simétrico y otro anti-simétrico.

Ejercicio 3. Dada la matriz $[M] = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

a) indicar cuáles de los siguientes vectores, son vectores propios de [M]
   V_1 = [1,-2,-2]; V_2 = [1,2,-2]; V_3 = [-4,-2,-4]; V_4 = [3,7,5]; V_5 = [-8,8,4]; V_6 = [2,-1,3]; V_7 = [-1,-2,2]
b) Determinar el factor de proporcionalidad λ
c) En caso de existir dos o más vectores propios y no ser coloniales, verificar su ortogonalidad

Ejercicio 4. Se tiene el siguiente tensor de inercia [I]. El mismo corresponde a un sólido de forma cilíndrica y densidad de masa constante.
La representación del tensor [I] en el sistema xyz es la siguiente:

$$[I] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix}$$

Se pide:
a) Determinar la ecuación secular o característica
b) Determinar los autovalores y los autovectores del tensor de inercia.
c) Expresar el tensor [I] en el sistema x'y'z', cuya base son los autovectores normalizados de [I]
d) Realice una representación gráfica de los sistemas "x y z" y " x' y' z' ", luego, ubique el cilindro en el dibujo.
e) Considere los siguientes vectores expresados en "x y z": ω_1 = [3; 2√3; 2]; ω_2 = [3; (7√3)/2; 7/2]; ω_3=[-2; √3 ; 1]; ω_4=[-2;-√3;-1]. Aplicar a los mismos el operador [I]. Luego, expresar los vectores momento angular L resultantes en el sistema "x'y'z'" y representar gráficamente junto con los vectores ω. Destacar los aspectos notables que se encuentran.

Ejercicio 5. Dado la forma cuadrática F = $x_1^2+3x_2^2+4x_2x_3$, determinar el tensor al cual está asociada, reducir a la forma diagonalizada y obtener la transformación ortogonal correspondiente.

Ejercicio 6. Sea el sólido con forma de tetraedro recto, mostrado en la figura 1. El tensor de inercia referido a los ejes (x,y,z) tiene por expresión [I].
Hallar los ejes principales, y mostrarlos en el dibujo en forma conjunta con el tetraedro.

$$[I]= \frac{Ma^2}{40}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

M es la masa total del tetraedro

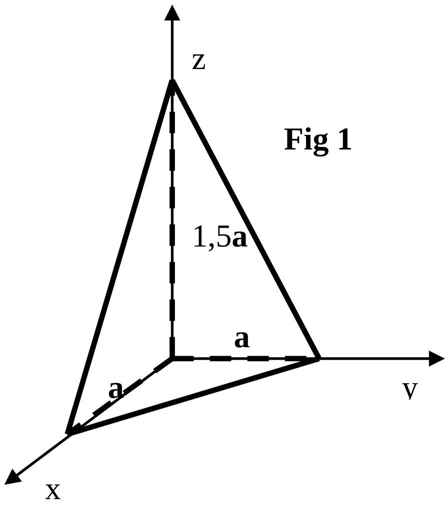

Fig 1

Ejercicio 7. Sea la distribución de masas mostrada en la figura 2. Despreciando las masas de las barras, y considerando las esferas como masas puntuales, determine el tensor de inercia referido a los ejes (x,y,z). Luego, obtenga los ejes principales. Dibuje los ejes principales, y demuestre que el tensor de inercia referido a los ejes principales es diagonal.

Nota: Para masas puntuales (m):
$J_{xx}=(D_x)^2 m$ [D_x es la distancia desde la masa hasta el eje x]
$J_{xy}= - m\ x\ y$ [x = coordenada "x" de la masa, y = coordenada "y" de la masa]

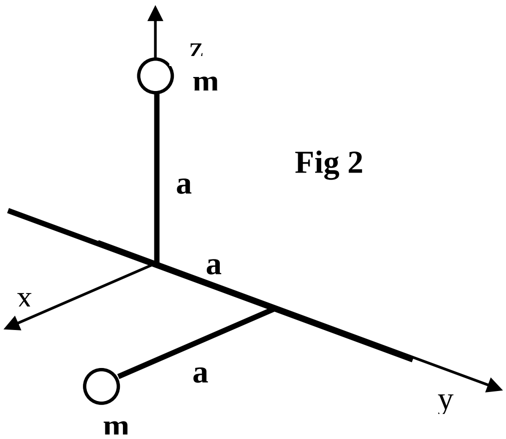

Fig 2