Unidad 7: Oscilaciones Mecánicas de Dos o Más Grados de Libertad.

Introducción.

En el capítulo anterior se ha visto que el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas independientes necesarias para describir su movimiento. Para introducir conceptos relacionados con estos sistemas de varios grados de libertad, se iniciará con el estudio de sistemas de dos grados de libertad.

Como primera característica de estos sistemas, los sistemas de dos grados de libertad poseen dos frecuencias naturales. En casos particulares (que corresponden a ciertas formas de iniciar el movimiento, es decir una combinación particular de condiciones iniciales) la vibración libre del sistema ocurre a una de estas frecuencias naturales, existiendo una relación definida entre las amplitudes de las dos coordenadas y la configuración correspondiente es un modo normal de vibración. El sistema de dos grados de libertad tendrá entonces dos modos normales de vibración, cada uno de los cuales corresponde a una de las frecuencias naturales. Cuando el movimiento se origine bajo condiciones generales, las vibraciones libres de las masas ocurrirán como la superposición de los modos normales de vibración (Esto quiere decir que el movimiento de cada masa será la suma o superposición de dos movimientos armónicos, cada uno de los cuales tendrá una frecuencia igual a la frecuencia natural).

Si el sistema esta sometido por una fuerza forzadora, la vibración ocurrirá a la frecuencia de la fuerza forzadora, y las amplitudes tenderán a un máximo cuando esa frecuencia coincida con las frecuencias naturales.

Modos normales de Vibración.

En esta sección, se determinaran las configuraciones de los modos normales de vibración. En primer lugar, se modelizará un sistema de dos grados de libertad. Tomando como base el sistema mostrado en la figura x.x, donde se han despreciado las amortiguaciones, las ecuaciones diferenciales correspondientes son:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_1 - x_2) - kx_1 \qquad [7\text{-}1]$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2$$

Un modo normal de vibración es aquel en el cual cada masa experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia y fase o oposición de fase, es decir, pasan simultáneamente por la posición de equilibrio.

Para tal movimiento, y utilizando números complejos, las ecuaciones de las deformaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$x_1 = A_1 e^{j\omega t} \qquad [7\text{-}2]$$
$$x_2 = A_2 e^{j\omega t}$$

En estas ecuaciones, A1, A2 son las amplitudes de las armónicas, y ω la frecuencia a la que suceden.

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales, queda el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$(2k - \omega^2 mA_1 - kA_2 = 0 \qquad [7\text{-}3]$$
$$-kA_1 + (2k - 2\omega^2 m)A_2 = 0$$

Estas ecuaciones tienen soluciones A_1,A_2 distintas de la trivial, si el determinante siguiente es nulo:

$$\begin{vmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \qquad [7\text{-}4]$$

Haciendo $\omega^2=\lambda$, al resolver el determinante se llega a la ecuación característica, polinomio de segundo grado:

$$\lambda^2 - \left(3\frac{k}{m}\right)\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \qquad [7\text{-}5]$$

Las raíces de esta ecuación son los cuadrados de las frecuencias naturales del sistema. De la resolución de la ecuación característica:

$$\lambda_1=\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0{,}634\frac{k}{m}} \qquad [7\text{-}6]$$

$$\lambda_2=\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2{,}366\frac{k}{m}} \qquad [7\text{-}8]$$

Sustituyendo estas frecuencias naturales en las ecuaciones, se calculan las relaciones entre las amplitudes, $(A_1/A_2)^{(i)}$, donde “i” indica la frecuencia para la cual se calcula dicha relación. Para ω_1:

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = \frac{k}{(2k - \omega_1^2 m)} = 0.731 \qquad [7\text{-}9]$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = \frac{k}{(2k - \omega_2^2 m)} = -2.73 \qquad [7\text{-}10]$$

Nota: Los valores numéricos calculados corresponden al ejemplo que se esta desarrollando.

Estas razones de amplitud son las formas modales que corresponden a cada modo normal. La razón de amplitud para ω_1, 0.731, es positivo significando esto que para la frecuencia ω_1 las dos masas oscilan en fase, en tanto que para ω_2 el valor –2.73 indique que las dos masas oscilan en contrafase.

Estos modos normales de vibración se producen para condiciones iniciales particulares. Si el movimiento se inicia con condiciones iniciales diferentes de las de los modos normales, las oscilaciones contienen a los modos normales simultáneamente (superposición de armónicas de distintas frecuencias). Para determinar las ecuaciones correspondientes, será necesaria la resolución de un sistema de ecuaciones formadas por las dos ecuaciones de movimiento y las relaciones de amplitudes. Así, si el movimiento se genera apartando las masas de su posición de equilibrio mediante las deformaciones $x_1(0)$ y $x_2(0)$, y las velocidades iniciales $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$, se reemplazan estos valores en las ecuaciones de las deformaciones y sus derivadas:

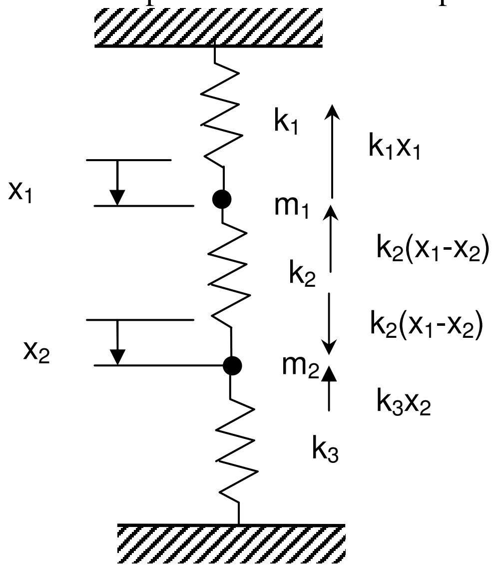
$$x_1(t)= A_1^{(1)} \operatorname{sen}(\omega_1 t+\theta_1) + A_1^{(2)} \operatorname{sen}(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad [7\text{-}11]$$

$$x_2(t)= A_2^{(1)} \operatorname{sen}(\omega_1 t+\theta_1) + A_2^{(2)} \operatorname{sen}(\omega_2 t+\varphi_2)$$

A estas cuatro ecuaciones, se agregan las relaciones de amplitudes. De esta manera, se genera un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, cuya resolución permite calcular las amplitudes ($A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$) y los ángulos de fase (θ_1, φ_2).

Modelización de un sistema de varios grados de libertad

En este apartado se describe el proceso de modelización mediante el cual se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales para un sistema de varios grados de libertad. Como primer caso, se considera un sistema de dos grados de libertad sin amortiguación, tal como se muestra en la figura.



Las masas m_1 y m_2 están sujetas por los resortes de constantes k_1, k_2 y k_3. Respecto de las posiciones de equilibrio estático, la masa m_1 está separada la cantidad x_1, y la masa m_2 la cantidad x_2. Si se hace $x_1 > x_2$, el resorte k_1 estará elongado, en tanto que los resortes k_2 y k_3 estarán comprimidos.

Considerando que los pesos de las masas están compensados por la deformación estática, no son incluidas en los diagramas de cuerpo libre. Para la masa m_1, la ecuación de Newton queda:

$$m_1 \ddot{x}_1 = - k_1x_1 - k_2(x_1-x_2)$$

En tanto que para la masa m_2 será:

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1-x_2)-k_3x_2$$

Estas ecuaciones diferenciales no son independientes entre sí, puesto que las coordenadas x_1 y x_2 aparecen en ambas. Agrupadas forman un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución dará como resultado las deformaciones x_1 y x_2 como función del tiempo. El sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases}$$

Haciendo $k_1 + k_2 = k_{11}, -k_2 = k_{12}, k_2 + k_3 = k_{22}$, el sistema de ecuaciones puede reescribirse como sigue:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{12}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

Forma que permitirá escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales.

En el caso de que se tomen en cuenta las amortiguaciones, se cambia el modelo físico introduciendo los elementos amortiguadores. En el dibujo, se han agregado los amortiguadores c_1, c_2, c_3.

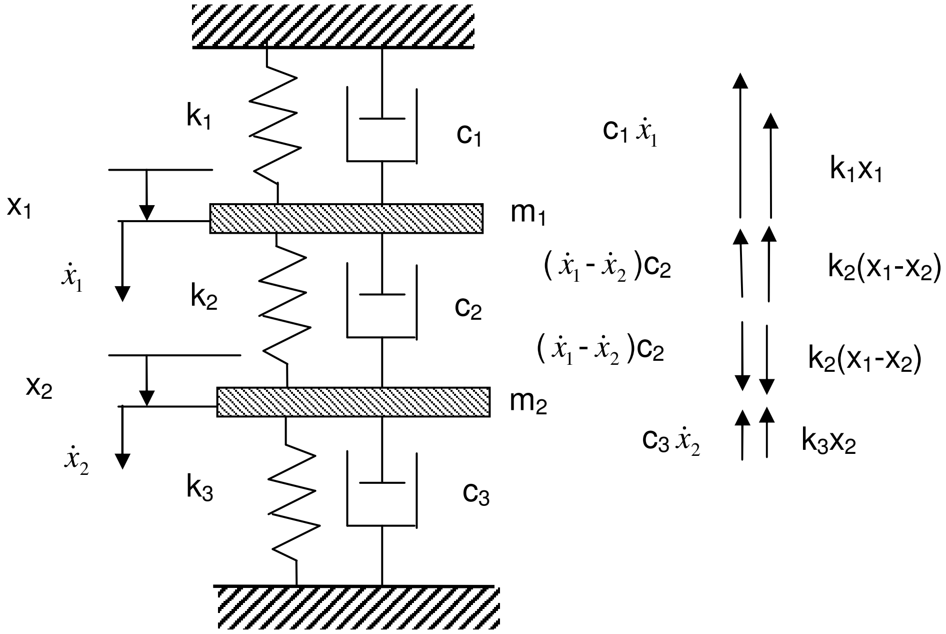
Las velocidades de las masas son $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$, se considera que la velocidad de la masa m_1 es mayor que la velocidad de la masa m_2 ($\dot{x}_1 > \dot{x}_2$).

Las fuerzas originadas en los amortiguadores están representadas en los diagramas de cuerpo libre.

En base a la segunda ley de Newton, se escriben las ecuaciones de movimiento de las dos masas, formando un sistema de ecuaciones diferenciales. Para la masa m_1:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Que se reescribe:



$$m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2=0$$

Para la masa m_2:

$$m_2\ddot{x}_2=k_2(x_1-x_2)-k_3x_2+c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-c_3\dot{x}_2$$

$$m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2=0$$

Se concluye con el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2=0 \end{cases}$$

Nótese que en este caso al igual que el anterior, si se eliminan el resorte k_2 y el amortiguador c_2, desaparece el acoplamiento y resultan dos ecuaciones diferenciales independientes.

Acoplamiento de coordenadas.

Las ecuaciones diferenciales que describen sistemas de varios grados de libertad se llaman acopladas porque las distintas coordenadas aparecen en cada ecuación.

Para un caso general de dos GL, las ecuaciones tienen la forma:

$$m_{11}\ddot{x}_1+m_{12}\ddot{x}_2+k_{11}x_1+k_{12}x_2=0 \qquad [7\text{-}12]$$

$$m_{21}\ddot{x}_1+m_{22}\ddot{x}_2+k_{21}x_1+k_{22}x_2=0$$

Las ecuaciones diferenciales pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [7\text{-}13]$$

Donde $[M]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de masas, $[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de rigidez. Si la matriz de masas es no diagonal, existe acoplamiento dinámico o de masa, en tanto que si la matriz de rigidez es diagonal, existe acoplamiento estático o de rigidez. La matriz de masas está multiplicando al vector de aceleraciones, en tanto que la matriz de rigidez al vector de deformaciones.

Los acoplamientos dependen del sistema de coordenadas elegido. Un sistema de coordenadas en el cual no aparece acoplamiento alguno se denominan coordenadas principales o coordenadas normales.

Si el sistema presenta amortiguaciones, aparecerá la matriz de amortiguamiento

$$[c]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales de un sistema de dos grados de libertad con amortiguación se escribirán de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [7\text{-}14]$$

Valores y vectores propios.

En esta sección, se generalizaran los conceptos de modos normales y frecuencias naturales para sistemas de más de dos grados de libertad. Para calcular estas cantidades, se utilizaran los autovalores y autovectores.

Para la vibración libre de un sistema de varios grados de libertad sin amortiguamiento se aplica la ecuación matricial [xx], que se puede escribir en forma abreviada:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad [7\text{-}15]$$

Premultiplicando por la matriz inversa de la matriz de masas, queda:

$[M]^{-1}[M]=[I]$ [I]=Matriz identidad

$[M]^{-1}[k]=[A]$ [A]=Matriz de sistema o matriz dinámica

Utilizando estas definiciones, se puede reescribir la ecuación matricial:

$$[I]\{\ddot{x}\}+[A]\{x\}=\{0\} \quad [7\text{-}16]$$

Asumiendo que los desplazamientos son movimientos armónicos, la amplitud de cada aceleración será igual a la amplitud de la deformación multiplicada por el cuadrado de la frecuencia:

$$\ddot{X}=\lambda X$$

donde $\lambda=\omega^2$

La ecuación matricial queda:

$$[A-\lambda[I]]\{x\}=\{0\} \quad [7\text{-}17]$$

Igualando a cero el determinante de la matriz se obtiene la ecuación característica del sistema:

$$|A-\lambda[I]|=0 \quad [7\text{-}18]$$

Las raíces de la ecuación característica son los autovalores o valores propios, y las frecuencias naturales del sistema se calculan mediante la relación:

$$\lambda=\omega^2 \quad [7\text{-}19]$$

Substituyendo los autovalores en la ecuación matricial [7-17], se calculan los autovectores. Estos autovectores se caracterizan porque en los mismos se encuentran las formas modales, las que se determinan mediante las relaciones entre los componentes del autovector. Por ejemplo, para un sistema con dos grados de libertad, para la primer frecuencia natural se tendrá el autovector v_1: $[v_{11},v_{12}]$. La forma modal de la primer frecuencia natural $(A_1/A_2)^{(1)}$ será igual a la relación (v_{11}/v_{12}).

A cada frecuencia natural le corresponde un vector propio, el cual da la configuración de modo normal que corresponde a dicha frecuencia.

Vibración armónica forzada

En los sistemas de varios grados de libertad, al ser excitado el sistema con una fuerza sinuosidad las masas oscilan con la misma frecuencia que la fuerza excitadora. Si se varía la frecuencia de la fuerza forzadora, se verificará que el sistema entra en resonancia cuando la frecuencia coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, es decir que un sistema de varios grados de libertad tienen tantas frecuencias de resonancia como grados de libertad.

Se analizará un sistema de dos grados de libertad, tal como se muestra en la figura. La fuerza forzadora F_1senωt actúa sobra la masa m_1. El sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde esta sistema es:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \qquad [7\text{-}20]$$

Considerando que la solución es:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t)$$

Es decir, las oscilaciones de cada masa tendrán la misma frecuencia que la fuerza forzadora.

Sustituyendo el vector de deformaciones y su derivada segunda en la ecuación queda:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 X_1 \\ -\omega^2 X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \quad [7\text{-}21]$$

Cancelando sen(ωt) y reordenando:

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - m_1\omega^2) & k_{12} \\ k_{21} & (k_{22} - m_2\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [7\text{-}22]$$

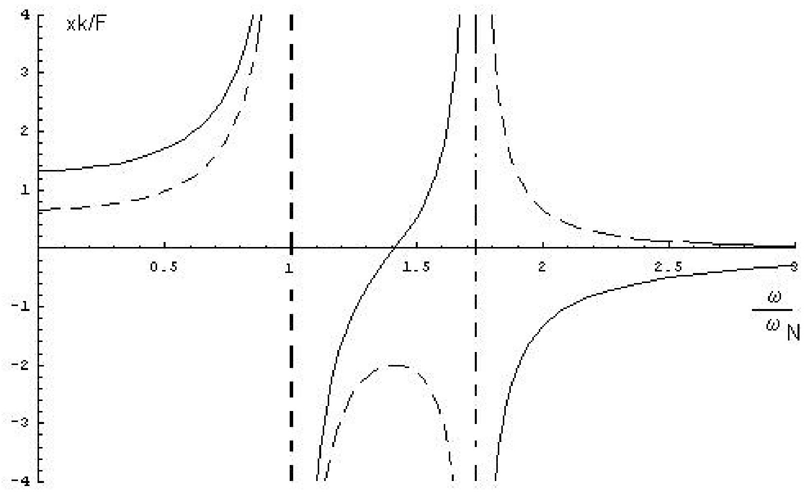
Resolviendo esta sistema de ecuaciones, se obtienen las amplitudes de las deformaciones, las cuales pueden escribirse en función de las frecuencias naturales ω_1, ω_2 del sistema:

$$X_1 = \frac{(k_{22} - m_2\omega^2)F_0}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \qquad [7\text{-}23]$$

$$X_2 = \frac{-k_{12}F_0}{m_1 m_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \qquad [7\text{-}24]$$

En estas ecuaciones de las amplitudes, puede observarse que al variar la frecuencia de la fuerza excitadora, el denominador se anulará dos veces, cada vez que la frecuencia coincida con las frecuencias naturales del sistema. Estas son las condiciones de resonancia, en el sistema ideal sin amortiguaciones, las amplitudes de las deformaciones tenderían a un valor muy grande.

En la gráfica se han representado las amplitudes X_1 (línea continua) y X_2 (linea a trazos) en forma adimensional, se observan las dos frecuencias de resonancia.



Amortiguador de vibraciones.

En el caso analizado anteriormente, la fuerza forzadora actúa sobre una de las masas, y en la ecuación de la amplitud de esta masa, en el numerador aparece el factor $\left(k_{22} - m_2\omega^2\right)$ (Ec [7-23]. Este factor se anula para una combinación adecuada de k_{22}, m_2 y ω. Al ocurrir esto, la amplitud de la masa m_1 será nula, es decir que la masa sobre la cual actúa la fuerza forzadora no oscilará. Esto se debe a que para esta combinación de valores, la deformación de la masa será tal que la fuerza que el resorte de constante k_2 ejerce sobre la masa m_1 es de igual magnitud y opuesta a la fuerza forzadora.

Este hecho puede ser utilizado para eliminar las vibraciones de una masa mediante el agregado de una segunda masa vinculada a la primera por medio de un resorte, seleccionando el valor de la masa masa m_2 y el resorte k_2 de manera tal que $\left(k_{22} - m_2\omega^2\right)$ se anule.