Unidad 6: Sistemas vibratorios de un grado de libertad.

Conceptos generales.

El estudio de los sistemas vibratorios trata sobre el comportamiento oscilatorio de los cuerpos, es decir las oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio.

Se estudiará el comportamiento dinámico de masas sometidas a fuerzas elásticas. El análisis se efectúa sobre masas puntuales, es decir sistemas materiales de dimensiones despreciables. Posteriormente se tratarán sistemas con dimensiones considerables (cuerpos sólidos) en los cuáles esas deben ser tenidas en cuenta a efectos del estudio de su comportamiento dinámico.

Los sistemas vibratorios pueden clasificarse de acuerdo a distintos puntos de vista.

Pueden ser sistemas lineales o no lineales. Un sistema es lineal cuando la composición de las respuestas a las fuerzas actuantes consideradas por separados es igual a la respuesta a la composición de dichas fuerzas. Los sistemas reales son generalmente no lineales pero en el caso de pequeñas oscilaciones, pueden ser aproximados mediante sistemas lineales.

Los sistemas pueden ser de uno o varios grados de libertad, de acuerdo al número de coordenadas independientes necesarias para su descripción.

En cuanto a la vibraciones, estas pueden ser libres o forzadas. Las vibraciones libres se producen cuando se aparte al sistema de su posición de equilibrio y luego este oscila bajo la acción de fuerzas propias del sistema. En el caso de vibraciones forzadas, el sistema vibra sometido a la acción de fuerzas forzadoras externas.

Fuerza recuperadora elástica:

Es aquella dependiente de la posición (por lo tanto, admiten un potencial) y que se materializa mediante elementos elásticos tales como barras, resortes, flejes, etc.

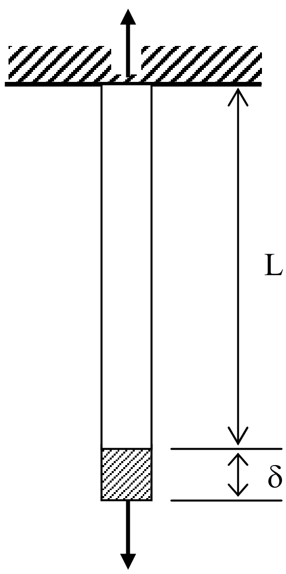
Entendemos por elástico a cualquier sistema susceptible de deformarse bajo determinada solicitación y que recupera totalmente su forma o configuración original al suprimirse la misma.

La fuerza recuperadora elástica es la respuesta del sistema a la interacción que lo deforma.

Los cuerpos deformados almacenan energía potencial, denominada energía potencial elástica. Esta energía es la necesaria para producir la deformación, y es devuelta al recuperarse la forma original.

Modelación dinámica:

Las interacciones dinámicas entre fuerzas y masas se estudian mediante modelos teóricos o abstracciones que, suficientemente analizadas y próximas a la realidad, representan satisfactoriamente a los sistemas reales. Constituyen esquemas simplificados que permiten progresivamente abordar el análisis de sistemas crecientes en grado de complejidad. En este capítulo serán utilizados modelos físicos, representaciones esquemáticas del sistema real, y modelos matemáticos, es decir, representaciones analíticas mediante una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales establecidas en base a leyes físicas, como la segunda ley de Newton. Estos modelos matemáticos describen el comportamiento dinámico del modelo físico en cuestión.



Deformación de sistemas elásticos típicos y fuerzas recuperadoras elásticas.

6.2.1. Se analiza en primer lugar el comportamiento de una barra elástica sometida a tracción, de longitud l y sección transversal A.
Se asume el material cumple la Ley de Hooke, que relaciona la deformación resultante (respuesta) con la fuerza actuante (solicitud o interacción)

δ = deformación
F = Solicitación
L = longitudid original (sin deformación) de la barra
A = Area sección transversal
E=Módulo de elasticidad (módulo de Young)

La relación entre la deformación (δ) y la solicitación (F) está dada por:

$$\delta = \frac{FL}{AE} \qquad [6\text{-}1]$$

Haciendo $\frac{L}{AE} = \frac{1}{K}$

y eligiendo la coordenada x = δ, se puede escribir:

$$F = Kx \qquad [6\text{-}2]$$

relación que expresa que la fuerza es proporcional a la deformación o elongación. El coeficiente K depende de las características geométricas (L, A) y elásticas (E) del material que constituye la barra.

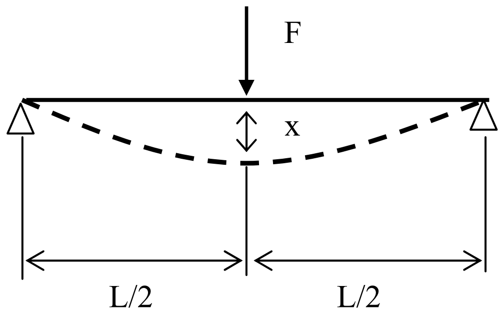
Desde el punto de visa energético, el trabajo (W) necesario para deformar la barra es almacenado como Energía potencial elástica o de deformación:

$$W = \int_0^x -Kx\,dx = -\frac{1}{2}Kx^2 = \int_x^0 Kx\,dx = V(0)-V(x)$$

Si $V(0) = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ [6-3]

Viga elástica simplemente apoyada, sometida a una carga concentrada en el centro.

Sean:
E = Módulo de elasticidad del material de la viga
J = Momento de inercia de la sección transversal de la viga.
L = luz de la viga.
F = Carga o solicitación.
x = deformación (deflexión) de la viga en el punto central



La flecha o deformación "x" en el centro de acuerdo con la teoría de la resistencia de materiales vale:

$$x = \frac{FL^3}{48EJ}$$

y haciendo $\frac{48EJ}{L^3} = K$ [6-4]

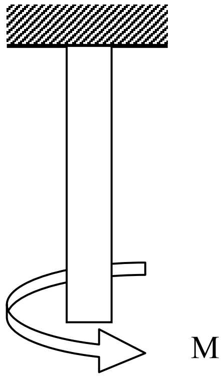
$$F(x) = Kx = \frac{48EJ}{L^3}x \qquad [6\text{-}5]$$

$$V(x) = (½)Kx^2 = \frac{24EJ}{L^3}x^2 \qquad [6\text{-}6]$$

Barra elástica sometida a torsión (se aplica un momento torsor M en su extremo).

Sean:

G= Módulo de elasticidad transversal del material que constituye la barra.
J_P = Momento de Inercia Polar de la sección transversal de la barra.
L = Longitud de la barra.



Al aplicar el momento torsor M la sección transversal extrema experimenta una rotación relativa (deformación angular) ϕ que responde a:

$$\phi = \frac{ML}{GJ_P} = \frac{M}{K_\phi}$$

$$\text{con } K_\phi = \frac{GJ_P}{L} \qquad [6\text{-}7]$$

Así: $$M = K_\phi\, \phi = \frac{GJ_P}{L}\phi \qquad [6\text{-}8]$$

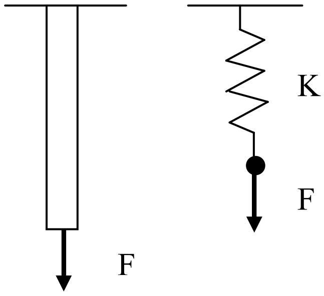
$$V(\phi) = (1/2)\, K_\phi \phi^2 = (1/2)\, \frac{GJ_P}{L}\phi^2 \qquad [6\text{-}9]$$

Modelación

A efectos de lograr una mejor interpretación conceptual del comportamiento de sistemas dinámicos, los casos (sistemas) típicos examinados son susceptibles de ser reducidos a modelos como los que se indican:

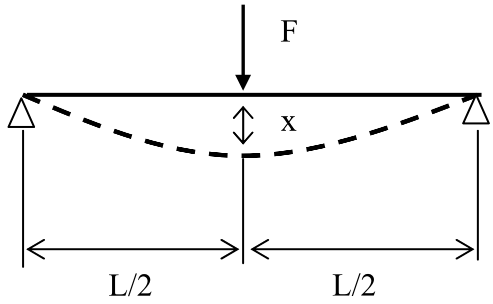
Barra sometida a tracción:

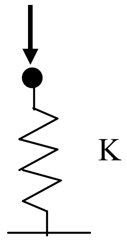
Se sustituye la barra elástica por un resorte axial cuya constante elástica es K.



Barra sometida a flexión (viga con carga concentrada en el centro)

Si la carga está aplicada en el centro de la viga, esta puede ser reemplazada por un resorte cuya constante vale, según [6-4]:





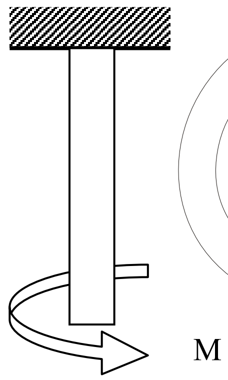
$$K=\frac{48EJ}{L^3}$$

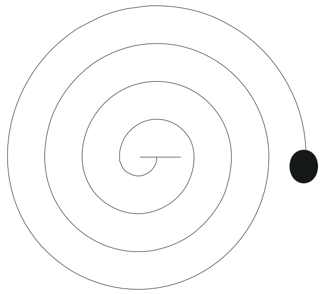
Barra sometida a torsión.

Una barra cilíndrica sometida a torsión puede asimilarse a un resorte torsional, cuya constante es, de acuerdo con [6-7]:

$$K_\phi=\frac{GJ_P}{L}$$

Esta constante relaciona el momento torsor aplicado con el ángulo de deformación, sus unidades son distintas de las constantes anteriores.





Movimiento de una partícula en las inmediaciones de un punto de equilibrio.

Según se ha visto en el capítulo de dinámica de la partícula, en presencia de fuerzas de dependen de la posición únicamente, se define la función de energía potencial V(x).

Esta función V(x) puede desarrollarse en series de Taylor:

$$V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}V^{(n)}\frac{1}{n!}(x_0)(x-x_0)^n \qquad [6\text{-}10]$$

$$V(x) = V(x_0)+V^{(1)}(x_0)(x-x_0)+(^1/_2)V^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2+....$$

Derivando respecto de "x":

$$\frac{dV(x)}{dx}=\frac{dV(x_0)}{dx}+\frac{d^2V(x_0)}{dx^2}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^3V(x_0)}{dx^3}(x-x_0)^2+\ldots$$

Sabemos que si F = F(x), admite una función potencial tal que se verifica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$$

y en un punto $x = x_0$ donde se verifica equilibrio, se cumple $F(x_0) = -\frac{dV(x_0)}{dx}=0$

Si se adopta como origen del sistema referencial el punto donde se verifica equilibrio, queda:

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d^2V(x_0)}{dx^2}x - \frac{1}{2}\frac{d^2V(x_0)}{dx^2}x^2 - \ ...$$

$$m\ddot{x} = F(x) = -Kx - ax^2 - b\,x^3 - \ldots \qquad [6\text{-}11]$$

donde: $K = \dfrac{dV(x_0)}{dx}, \ a = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2V(x_0)}{dx^2}, ...$

Si no se desprecian los términos de orden superior, la solución de la ecuación diferencial [6-11] proporciona la ecuación de movimiento del Oscilador Anarmónico o no lineal.

Si, en cambio se toma solamente el término lineal, despreciando los de orden superior, queda la ecuación diferencial :

$$m\ddot{x} = -Kx \qquad [6\text{-}12]$$

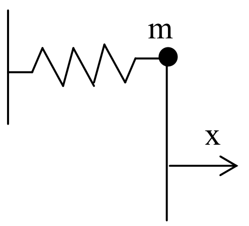
Esta ecuación diferencial de segundo orden es la ecuación del movimiento del Oscilador armónico o lineal. Debe quedar claro que el oscilador armónico es una aproximación del caso real, inarmónico. Esta aproximación es buena cuando las deformaciones son pequeñas.

La ecuación [6-12] expresa la dinámica de un sistema material constituido por una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza recuperadora elástica (proveniente de un “resorte” idealizado de constante elástica “K”).

Visto de otro modo, si se desprecian los términos de orden superior en el desarrollo en serie de V(x), y adoptando $x_0 = 0$, resulta:

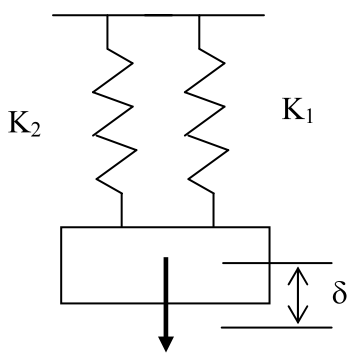
$$V(x) = (^1/_2)Kx^2 \qquad [6\text{-}13]$$

siendo $K = \dfrac{d^2V(x_0)}{dx^2}$



K= Constante de proporcionalidad entre la fuerza “F” y la deformación “x”. El modelo físico para este oscilador armónico o lineal es el mostrado en la la figura. Si bien la masa se puede dibujar como un bloque o cuadro, se interpretará se comporta como una partícula.

Combinación de constantes elásticas



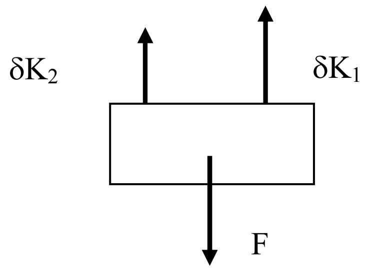
Un sistema mecánico puede estar constituido por una serie de elementos elásticos (resortes) actuando sobre la o las masas que lo constituyen.

Este conjunto de resortes que oponen resistencia a su deformación, pueden ser reducidos o sustituidos por uno solo de tal manera que el efecto dinámico producido resulta equivalente.

Se distinguen dos modos de conexión de los resortes componentes:

6.5.1. Los resortes experimentan la misma deformación, al aplicar la (o las) fuerza activa sobre los mismos.

La masa dispone de un solo grado de libertad, y el único movimiento posible es la traslación en dirección vertical.
"δ" es la deformación producida por la fuerza "F".
La fuerza total "F" es absorbida por los resortes de constantes elásticas "K_1" y "K_2". La deformación que sufren ambos resortes es la misma, e igual a "δ".



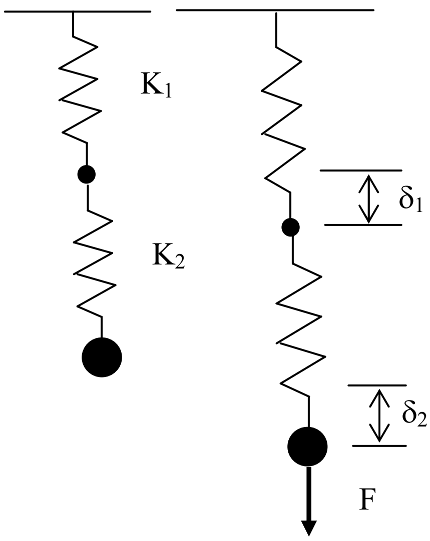
El diagrama de cuerpo libre para la masa "m" se muestra en el dibujo de la izquierda.
La ecuación de equilibrio correspondiente es:

$$F = \delta K_1 + \delta K_2$$
$$F = \delta(K_1 + K_2) = \delta\, K_T$$

Llamando $K_T = K_1 + K_2$, Constante total o equivalente.
Generalizando, para "n" resortes que sufren igual deformación:

$$K_T = \sum K_i \quad , i=1,2,...n \qquad [6\text{-}14]$$

Los resortes presentan deformaciones diferentes bajo la acción de una misma solicitación.



Según la disposición indicada, y por condición de equilibrio se debe cumplir:

$F_1 = F_2 = F$ (Las fuerzas recuperadoras de cada resortes son iguales a la solicitación)

La deformación total del sistema será la suma de las deformaciones de cada resorte:

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2$$

Haciendo $\delta_T = F_T/K_T = F_1/K_1 + F_2/K_2 = \;=F(1/K_1+1/K_2)$

Simplificando:

$$1/K_T = (1/K_1+1/K_2)$$

En general, para "n" resortes:

$$1/K_T = \Sigma\ 1/K_i \qquad [6\text{-}15]$$

Se puede realizar una analogía con las resistencias en un circuito eléctrico. Las fuerzas serían los equivalentes a las tensiones, y las deformaciones equivalentes a corrientes eléctricas. Los resortes que tienen la misma deformación (el primer caso expuesto) pueden asimilarse a resistencias conectadas en serie (la misma corriente), en tanto que los resortes sometidos a la misma fuerza equivalen a resistencias conectadas en paralelo (la misma tensión aplicada).

Estudio de Vibraciones Mecánicas Armónicas

En lo que sigue, se considerará el Oscilador armónico o lineal. Se estudiarán vibraciones de pequeña amplitud, que producen desplazamientos muy pequeños en torno de una posición de equilibrio estable. Se analizarán en primer lugar, las vibraciones armónicas libres, es decir las oscilaciones que se producen en ausencia de fuerzas externas.

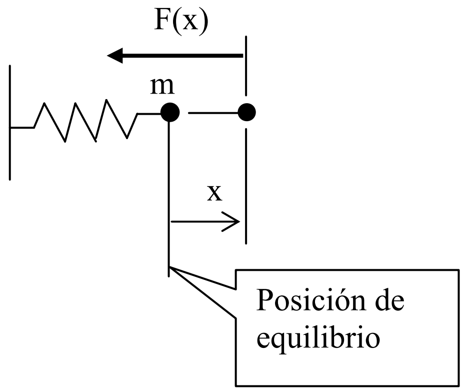
Luego, serán estudiadas las vibraciones forzadas.

Vibraciones armónicas libres no amortiguadas.

Las vibraciones libres no amortiguadas son las que se producen en ausencia de fuerzas disipativas, por lo que unas vez iniciadas, las oscilaciones se mantienen en forma indefinida.

La ecuación del movimiento es:

$$m\,\ddot{x} = F(x) = -Kx \quad [6\text{-}16]$$



F(x) representa la fuerza recuperadora elástica.

de [6-16]:

$$m\,\ddot{x} + Kx = 0$$

llamando a $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$ (ω_o es la frecuencia propia o natural del sistema, o frecuencia circular de oscilación armónica. También se suele denominar pulsación).

Asi $\boxed{\ddot{x} + \omega_o^2 . x = 0}$ [6-17]

La [6-17] es una ecuación diferencial lineal homogénea de 2° orden.

Resolver esta ecuación implica hallar la ley del movimiento x(t), es decir la relación entre la deformación "x" y el tiempo "t".

Para hallar la solución se sigue el método clásico para resolver ecuaciones diferenciales. Se propone como solución a $x = e^{pt}$; donde p es una constante.

Sus derivadas resultan: $\dot{x} = p . e^{pt}$; $\ddot{x} = p^2 . e^{pt}$

Sustituyendo en (1) queda: $p^2 + \omega_o^2 = 0$ $\quad p = \sqrt{-\omega_o^2}$

$$p^2 = \pm i\omega_o$$

Entonces es válido $x(t) = C_1.e^{i\,\omega_o\,t} + C_2.e^{-i\,\omega_o\,t}$, que mediante un cambio de constante de integración:

$$C_1 = \frac{A}{2}.e^{i\theta} \qquad\qquad C_2 = \frac{A}{2}.e^{-i\theta}$$

$$X = \frac{A}{2}.e^{i(\omega_o t+\theta)} + \frac{A}{2}.e^{-i(\omega_o t+\theta)} \qquad [6\text{-}18]$$

Utilizando las relaciones de De Moivre, queda:

$$X(t) = A\cos(\omega_o\, t + \theta) \qquad [6\text{-}19]$$

A, θ, son constantes a determinar una base a condiciones iniciales.

Así, si para $t = t_o = 0$ las condiciones iniciales son

$$x = x_{o;}\ v = \dot{x} = v_o$$

Será $x_o = A \cdot \cos\theta$ y $v_o = -A\,\omega\,\text{sen}\,\theta$

$$\begin{cases} x_o^2 + \dfrac{v_o^2}{\omega_o^2} = A^2 \\ \omega_o . tg\theta = \dfrac{v_o}{x_o} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \left(x_o^2 + \dfrac{v_o^2}{\omega_o^2} \right)^{1/2} \\ tg\theta = -\dfrac{v_o}{x_o \omega_o} \end{cases}$$

De tal modo, la ley de movimiento [6-19] corresponde a un movimiento armónico de amplitud A y desfasaje θ.

El ángulo de fase θ depende de las condiciones iniciales. En particular si $v_o = 0$ entonces $\theta = 0$; si $x_o = 0$ y $v_0 \neq 0$, resulta $\theta = 90°$.

El movimiento es periódico de periodo: $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_o}$ [6-20]

La frecuencia del mismo es $f = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_o}{2\pi}$. Así: $\omega_o = 2\pi . f$ [6-21]

Nótese que la frecuencia natural es independiente de las condiciones iniciales, es decir, que ante distintas configuraciones para las condiciones iniciales cambiarán la amplitud y el ángulo de fase de la oscilación, pero este tendrá siempre la misma frecuencia igual a la frecuencia natural.

Oscilador Amónico Torsional Libre

En este caso θ, es la coordenada del movimiento. La ecuación del movimiento es:

$M = -k\,\theta$ Aplicando la Ley de Newton

$M = I\,\ddot{\theta}$ y $I\,\ddot{\theta} = -k\,\theta$ donde I es el momento de inercia.

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I} . \theta = 0 \qquad [6\text{-}22]$$

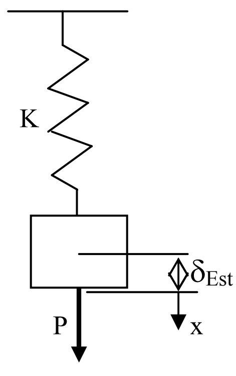
$\theta(t) = \theta o . \cos(\omega_o t + \beta)$ Ley del movimiento

M: par aplicado

$\ddot{\theta} = \alpha$: aceleración angular

I: momento de inercia de la masa, respecto del polo O

Oscilaciones con influencia del peso



Un par de consecuencias importantes surgen de considerar el modelo Masa-Resorte con influencia del peso, por ejemplo si el movimiento se realiza en dirección vertical.

En equilibrio estático, el resorte estará deformado por la acción del peso. Luego resulta:

$P = k \cdot \delta_{est}$ [6-23] (la fuerza del peso es igual a la recuperadora elástica).

Se introduce un sistema referencial cuyo origen coincide con la posición de equilibrio, entonces el planteo de la 2° Ley de Newton resulta:

$m\ddot{x} = -k(\delta_{est} + x) + P$

$m\ddot{x} = -k\,\delta_{est} - K\,x + P$ y por [6-23]:

$m\ddot{x} = -k\,x$

Como conclusión

1) De [6-23] $k = \dfrac{P}{\delta_{est}} = \dfrac{mg}{\delta_{est}}$ relación que proporciona un modo expeditivo para determinar K (Habitualmente P es conocido y δ_{est}, se puede medir).

2) Teniendo en cuenta que la fuerza P predeforma al resorte en δ_{est}, ella no influye en las características del movimiento.

Métodos energéticos

Para sistemas conservativos (fuerzas dependientes de la posición) vale:

E = T + V = constante T = energía cinética
V = energía potencial

Todo sistema de fuerzas recuperadoras elásticas del tipo

F = - k k admite $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (potencial elástico)

Tal que: $-\dfrac{dV_{(x)}}{dx} = F(x) = -kx$

En un sistema mecánico con vibraciones libres, es decir sin disipaciones debidas a amortiguamientos, la energía es en parte cinética y en parte potencial.

La ecuación de movimiento surge de:

E = T + V = constante o $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{d}{dt}(T+V) = 0$

Para un sencillo sistema masa-resorte

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T+V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

Que conduce a $m\ddot{x} + k\,x = 0$

Si el sistema es mas complejo, corresponde evaluar apropiadamente T y V.

$\dfrac{dE}{dt} = 0$ conduce a la ecuación de movimiento.

Vibraciones Armónicas amortiguadas

Modelo dinámico

Al esquema se incorpora un elemento, el amortiguador, en el cual se origina una fuerza dependiente de la velocidad, actuando de tal modo de oponerse a todo instante al sentido de está última. Esta fuerza se llama fuerza amortiguadora. En el caso más general es función de una potencia de la velocidad

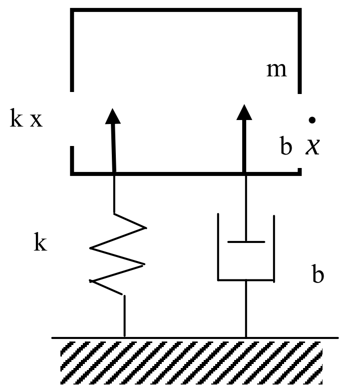
$$F_b = - k\, v^n \qquad [6\text{-}25]$$

Para el estudio de oscilaciones armónicas, se adoptará n=1, que representa razonablemente situaciones reales. La constante del amortiguador se identificará como "b", siendo sus unidades [Newton]/[m/s].

En el modelo dinámico, el amortiguador se simboliza como un cilindro-pistón.

Para obtener la ecuación de movimiento, se plantea el diagrama de cuerpo libre, sobre la masa actúan dos fuerzas: la debida al resorte y la debida al amortiguador. Aplicando la ley de

Newton, queda:



$$m\ddot{x} = - k\, x - b\, \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\,\dot{x} + k\, x = 0 \qquad [6\text{-}27]$$

que se puede escribir $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

y llamando $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$ y $\gamma = \frac{b}{2m}$

la ecuación anterior queda:

$$\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_o^2 . x = 0 \qquad [6\text{-}28]$$

Ecuación diferencial homogénea de las vibraciones libres amortiguadas.

Proponiendo como solución $x_{(t)} = e^{pt}$ con derivadas

$\dot{x} = p\, e^{pt}$, $\ddot{x} = p^2\, e^{pt}$

Sustituyendo en [6-27]:

$$e^{pt}\,(m\, p^2 + b\, p + k) = 0$$

Y para que ello se cumpla para todo t, debe ser :

$$mp^2 + bp + k = 0 \qquad [6\text{-}29]$$

Esta ecuación es llamada ECUACIÓN CARACTERISTICA.

Las raíces de esta ecuación son:

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad [6\text{-}30]$$

O bien

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \qquad [6\text{-}31]$$

El análisis de [6-30] y [6-31] conduce a tres situaciones físicas diferenciadas, según el radicando ($\gamma^2 - \omega_o^2$) negativo, positivo o nulo. Si el radicando es negativo, el caso se dice es subamortiguado, y el movimiento puede describirse como oscilaciones amortiguadas, es decir, que se producen oscilaciones cuya amplitud decae en el tiempo. Este hecho se debe a la naturaleza disipativa de las fuerzas amortiguadoras. Cuando el radicando $\gamma^2 - \omega_o^2$ es positivo, se dice que el caso es sobreamortiguado, las fuerzas amortiguadoras son de mayor importancia y no llegan a producirse oscilaciones. Cuando $\gamma^2 - \omega_o^2$ es nulo, es caso se denomina crítico, y marca el límite entre los casos anteriores.

Vibraciones Subamórtiguadas

En este caso

$\left(\gamma^2 - \omega_o^2\right) \langle 0$, o también ($\gamma^2 < \omega_o^2$) [6-32]

Puede interpretarse como que el término en que interviene el amortiguamiento es de "menor significación" en relación con ω_o; la influencia del amortiguamiento tiende a desaparecer cuando $\gamma << \omega_o$ y el movimiento se aproxima a las vibraciones libres no amortiguadas.

Se define $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$ [6-33]

cantidad que se denomina pseudopulsación.

Entonces:

$\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} = i\omega_1$ donde *i* es la unidad imaginaria.

Las raíces pueden escribirse entonces como $p_1 = -\gamma + i\,\omega_1$; $p_2 = -\gamma - i\,\omega_1$

y la solución puede escribirse como la combinación lineal de las soluciones particulares:

$$x(t) = C_1.e^{p_1 t} + C_2.e^{p_2 t} = C_1.e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2.e^{(-\gamma - i\omega_2)t}$$

Haciendo:

$$C_1 = \frac{A}{2}e^{i\theta} = \frac{A}{2}.(\cos\theta + isen\theta)$$

$$C_2 = \frac{A}{2}e^{-i\theta} = \frac{A}{2}.(\cos\theta - isen\theta)$$

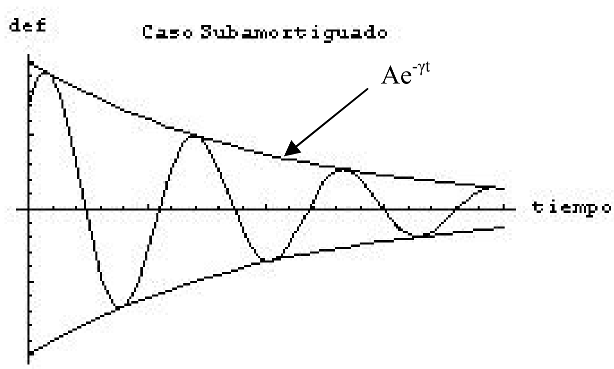
La ley del movimiento x(t) queda:

$$\boxed{x(t) = A.e^{-\gamma t}.\cos(\omega_1 t + \theta)} \qquad [6\text{-}34]$$

Donde ω_1 es la pseudopulsación o frecuencia circular de oscilaciones amortiguadas

Las vibraciones subamortiguadas son efectivamente oscilatorias y de amplitud decreciente en el tiempo. Su período de oscilación es:

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi_o}{\omega_1} \qquad [6\text{-}35]$$



Como se ve en la figura, las oscilaciones son tales que su amplitud va decayendo. El caso mostrado corresponde a condiciones iniciales x(0)>0 y $\dot{x}>0$. La fuerza del amortiguador disipa la energía disponible, y el movimiento cesa una vez que se disipa toda la energía que inicialmente se le comunica al sistema.

Vibraciones Sobreamortiguadas (movimiento no oscilatorio)

En este caso:

$$\left(\gamma^2 - \omega_o^2\right) \rangle 0 \qquad [6\text{-}36]$$

Cuando se cumple esta condición, el término de amortiguamiento es importante en relación a ω_o, cuanto mayor sea γ frente a ωo la influencia del amortiguamiento será más fuerte.

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma_1^2 - \omega_o^2}$$

$$p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma_1^2 - \omega_o^2}$$

La solución es:

$$x_{(t)} = C_1.e^{-p_1 t} + C_2.e^{-p_2 t} \qquad [6\text{-}37]$$

que representa un movimiento exponencialmente decreciente del tiempo, y aperiódico, es decir que no se producen oscilaciones.

Vibración Críticamente Amortiguada

Ocurre cuando se cumple:

$$\left(\gamma^2 - \omega_o^2\right) = 0 \qquad \text{o sea, } \gamma^2 = \omega_o^2 \qquad [6\text{-}38]$$

Y la ecuación [6-30] conduce a una raíz doble $\qquad p_1 = p_2 = -\gamma$

$$x_{(t)} = C_1.e^{-p_1 t} + C_2.e^{-p_2 t} = (C_1 + C_2).e^{-\gamma t} = C.e^{-\gamma t}$$

O también, según se puede demostrar:

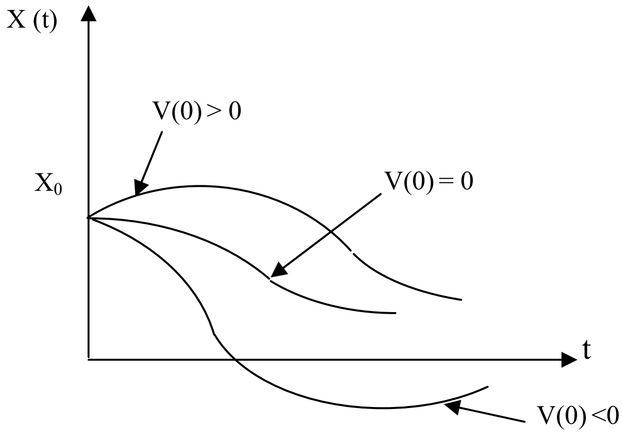
$$x_{(t)} = e^{-\gamma t}.(A_1 + A_2.t)$$

Con las constantes A_1 y A_2 dependientes de las condiciones iniciales:

$$\begin{matrix} t_o = 0 & \\ x = x_o & \\ \dot{x} = v_o & \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} A_1 = x_o \\ A_2 = v_o + \gamma\, x_o \end{matrix} \right.$$

La forma de la ley de movimiento depende de los valores de x_o, v_o.

Para un determinado x_o se representan gráficamente distintas evoluciones de la deformación, variando el valor de la velocidad inicial.



Tener velocidad inicial V(0) significa que se impulsa a la masa en la misma dirección que la deformación X(0), por lo que el valor de la deformación primero aumentará para luego decaer bajo la acción de la fuerza elástica del resorte. Velocidad inicial negativa corresponde al caso en que la impulsa a la masa en dirección contraria a la deformación, la cantidad de energía disponible (la suma de la almacenada en el resorte y la cinética que se le comunica a la masa) puede ser suficiente para que la masa supere la posición de equilibrio estático.

Factor o grado de amortiguamiento.

De la condición de amortiguamiento crítico:

$$\gamma^2 = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \omega_o{}^2 = \frac{k}{m}$$

Llamando b_c: coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$b_c = 2m\omega_o = 2\sqrt{mk} \qquad [6\text{-}39]$$

El **Grado de Amortiguamiento** suele entonces expresarse como la razón:

$$\zeta = \frac{b}{b_c} \qquad \left(\zeta = \frac{b}{2m\omega_o} = \frac{\gamma}{\omega_o} \Rightarrow \gamma = \zeta.\omega_o\right) \qquad [6\text{-}40]$$

$$\text{Si} \quad \begin{cases} b < b_c \ (\zeta < 1) & \text{vibración subamortiguada} \\ b = b_c \ (\zeta = 1) & \text{vibración crítica} \\ b > b_c \ (\zeta > 1) & \text{vibración sobreamortiguada} \end{cases}$$

Para **Vibraciones subamortiguadas** la ecuación [6-34] resulta:

$$x_{(t)} = A.e^{-\zeta\omega_o t}.\cos(\omega_o(1-\zeta^2)^{1/2}t + \theta) \qquad [6\text{-}41]$$

Donde $$\omega_1 = \left(\omega_o{}^2 - \gamma^2\right)^{1/2} = \left(\omega_o{}^2 - \zeta^2\omega_o{}^2\right)^{1/2} = \omega_o{}^2\left(1-\zeta^2\right)^{1/2} \qquad [6\text{-}42]$$

Decremento Logaritmico

Cuando el factor de amortiguación ζ es menor que uno, se producen oscilaciones amortiguadas, es decir, oscilaciones cuya amplitud decae en el tiempo. La razón entre dos amplitudes máximas consecutivas es:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A.e^{-\gamma(t+\tau)}.\cos[\omega_1(t+\tau)+\theta]}{A.e^{-\gamma(t)}.\cos(\omega_1 t+\theta)} = \frac{e^{-\gamma t}.e^{-\gamma\frac{2\pi}{\omega_1}}}{e^{-\gamma t}} = e^{-\gamma\frac{2\pi}{\omega_1}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\frac{2\pi}{\omega_1}.\gamma} \qquad [6\text{-}42]$$

Entonces: $x_{n+1} = x_n.e^{-\frac{2\pi}{\omega_1}.\gamma} = x_n.e^{-\gamma\tau_1}$ [6-43]

y por lo tanto $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\frac{2\pi}{\omega_1}.\gamma}$

$\ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi}{\omega_1}.\gamma = \delta$ (constante)= decremento logarítmico [6-44]

El logaritmo de la razón entre una amplitud máxima y la inmediata siguiente es una constante denominada **decremento logarítmico** δ.

$$\delta = \frac{2\pi}{\omega_1}.\gamma = \frac{2\pi.\tau}{\omega_o(1-\zeta^2)^{1/2}} = \frac{2\pi.\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad [6\text{-}45]$$

Cuando $\zeta \to 0$ $\delta \cong 2\pi\xi$ [6-46]

Si se puede medir dos amplitudes máximas consecutivas, en una vibración amortiguada (se logra conocer δ) es posible obtener b, (despejando ζ en función de δ). Esto indica una forma experimental de medir el coeficiente de amortiguamiento.

En cuanto a la Energía Potencial Elástica acumulada en sucesivas amplitudes máximas.

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{1/2.k.x_{n+1}{}^2}{1/2.k.x_n{}^2} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = e^{-2\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)\gamma} \qquad [6\text{-}46]$$

La energía decrece al doble de rapidez que lo que decrece la amplitud (comparar con [6-43]).

$$E_{n+1} = E_n.e^{-2\gamma\tau_1} \qquad [6\text{-}47]$$

Vibraciones Armónicas Forzadas

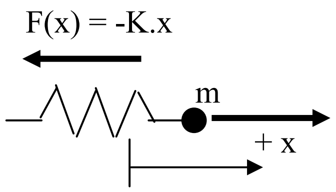
Ocurren vibraciones forzadas cuando la masa se encuentra sometida a la acción de una fuerza forzadora o excitación. El análisis de diferencia según el cómo es la fuerza forzadora.

Las soluciones más sencillas son las que se obtienen para fuerzas forzadoras armónicas, es decir, cuando responden a la ley F(t) = F0 sen ωt. Para este tipo de excitación, la deformación resultante será también armónica y de la misma frecuencia, pero en general estará desfasada.

Las fuerzas forzadoras periódicas pero no sinusoidales pueden descomponerse en armónicas siguiendo el desarrollo en series trigonométricas de Fourier, luego la respuesta será la composición de las respuestas a las excitaciones armónicas consideradas por separado. Este procedimiento es aceptable si el comportamiento del sistema es lineal.

Vibraciones Forzadas Sin Amortiguamiento

Modelo Dinámico:



Sobre la partícula de masa m actúa la fuerza perturbadora exterior armónica:

$$F_{(t)} = F_o \,.\, \text{sen}\ \omega\ t$$

Donde ω es la frecuencia circular de la fuerza perturbadora (es frecuentemente producida por desbalances en maquinarias rotatorias).

En ausencia de amortiguación, la ecuación del movimiento resulta:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_o.sen\omega t \qquad [6\text{-}48]$$

Llamando $\omega_o{}^2 = \dfrac{k}{m}$ y $P_o = \dfrac{F_o}{m}$ (dimensiones de aceleración)

Reemplazando en la ecuación queda

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_o{}^2 \,.\, x = P_o.\ \text{sen}\ \omega t} \qquad [6\text{-}49]$$

Ecuación diferencial no homogénea de segundo orden de las vibraciones forzadas, sin amortiguamiento.

La solución general, según la teoría de las ecuaciones diferenciales es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde:

- $x(t)$ = ecuación del movimiento, da la posición en función del tiempo.
- $x_h(t)$: solución de la ecuación diferencial homogénea asociada
- $x_p(t)$: solución particular.

Según lo visto anteriormente: $x_h(t) = A \cos(\omega_o t + \theta)$

Para la solución particular, $x_p(t)$, se prueba con:

$$x_p(t) = a\ \text{sen}\omega t$$

derivando respecto del tiempo:

$$\dot{x}_p = a\ \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = -\ a\ \omega^2\ \text{sen}\ \omega t$$

Reemplazando en la ecuación [6-49], y para que se cumpla para todo t, debe ser:

$$a = \frac{P_o}{\omega_o{}^2 - \omega^2} \qquad [6\text{-}50]$$

Llamaremos $\lambda = \dfrac{\omega}{\omega_o}$ (razón de frecuencias)

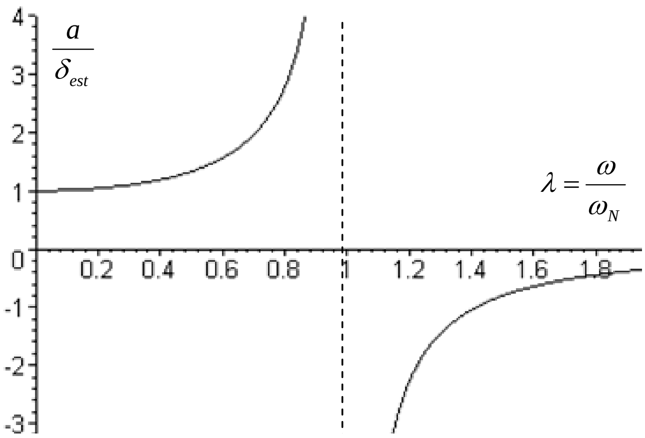
$$a = \frac{P_o}{\omega_o^{\,2}} . \frac{1}{(1-\lambda^2)} \qquad [6\text{-}51] \qquad\qquad \frac{P_o}{\omega_o^{\,2}} = \frac{F_o}{m\dfrac{k}{m}} = \delta_{est} \qquad [6\text{-}52]$$

δ_{est}: deformación que acusa el resorte si F_o se aplica en forma estática, o también la deformación que produce por acción del máximo valor que puede asumir $F_{(t)}$.

Entonces la ley de movimiento resulta:

$x(t) = x_h + x_p = A. \cos (\omega_o\, t + \theta) + a . \text{sen}\, \omega t$ [6-53]

Siempre que se cumpla el valor de a, según [6-51]
Puede escribirse:



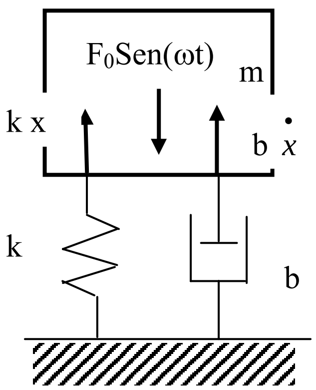
$$\frac{a}{\delta_{est}} = . \frac{1}{1-\lambda^2} \qquad [6\text{-}54]$$

Siendo δ_{est} una constante interesa analizar la relación funcional entre a y λ.
(para $\lambda > 1$, $a < 0$, pero se acostumbra rebatir la gráfica sobre el semiplano en que $a > 0$),

En la gráfica, se observa que cuando la relación entre la frecuencia forzadora y la frecencia natural es igual a 1, la amplitud de la oscilación tiende a infinito, situación conocida como Resonancia**:** estado para el que $\lambda = \dfrac{\omega}{\omega_b} = 1$ o sea $\omega = \omega_b$, conduce a amplitud que tiende a a $\to \infty$

Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento

Modelo dinámico: En el esquema, se muestra un sistema de un grado de libertad, cuyos elementos son la masa (m), el resorte (k) y el amortiguador (b). También se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa: La fuerza forzadora F_0senωt , la fuerza del resorte (kx) y la fuerza del amortiguador ($b\dot{x}$). Considerando un desplazamiento "x" desde la posición de equilibrio estático, positivo dirigido hacia arriba, se plantea la ecuación de movimiento:



$m\ddot{x} = - k\, x - b\, \dot{x} + F_o\, \text{sen}\omega t$ [6-55]

$\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$ $\qquad \gamma = \dfrac{b}{2m}$ $\qquad P_o = \dfrac{F_o}{m}$ $\qquad \zeta = \dfrac{b}{b_c} \langle 1$

$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_o^2 x = P_o \operatorname{sen}\omega t}$ [6-56]

Solución general

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x_h(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$

Para la solución particular x_p, se prueba:

$x_p = a \,.\, \operatorname{sen}(\omega t - \beta)$ [6-57]

$\dot{x}_p = a\,\omega \cos(\omega t - \beta)$

$\ddot{x}_p = -\,a\,\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - \beta)$

Haciendo: $\omega t - \beta = \varnothing$ o bien $\omega t = \varnothing + \beta$

Probando en [6-56]

$a(-\omega^2 + \omega_o^2) \operatorname{sen}\varnothing + 2\gamma\omega a \cos\varnothing = P_o (\cos\beta \operatorname{sen}\varnothing + \operatorname{sen}\beta \cos\varnothing)$

Lo cual, para que se cumpla, requiere que:

$a(\omega_o^2 - \omega^2) = P_o \cos\beta$ [6-58]

$2\gamma\omega a = P_o \operatorname{sen}\beta$ [6-59]

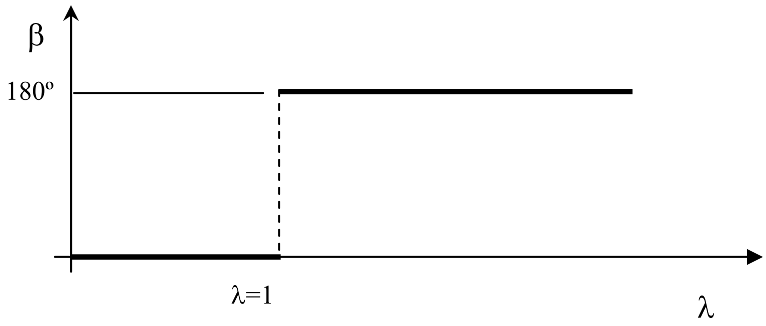
Que permiten obtener los valores de la amplitud a y el angulo de fase β de [6-57]

$\boxed{a = \dfrac{P_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$ [6-59] $\qquad \boxed{tg\beta = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}}$ [6-60]

Algunas conclusiones:

1. Para distintas relaciones ω/ω_o se obtienen amplitudes de oscilaciones forzadas diferentes.
2. Si $\omega = 0$, o si $\omega << \omega_o$, $\lambda \to 0$.
   $\dfrac{a}{\delta_{est}} \to 1$ y la amplitud de las oscilaciones forzadas tiende a δ_{est}.
3. Si $\omega >> \omega_o$ la fuerza excitatriz $F_{(t)} = F_o$. sen ωt cambia de signo muy rápidamente, no dando tiempo a la masa a reaccionar. $\dfrac{a}{\delta_{est}} \to 0$ y $a \to 0$
4. Si $\omega \cong \omega_o$ $\quad a \to \propto$, situación de resonancia.

El ángulo de desfasaje β puede graficarse en función de $\lambda = \dfrac{\omega}{\omega_o}$. La siguiente gráfica corresponde a un factor de amortiguación muy pequeño.



$\forall\lambda < 1 \quad (\omega < \omega_o) \rightarrow \beta = 0$ fuerza y desplazamiento tienen igual sentido.
$\forall\lambda > 1 \quad (\omega > \omega_o) \rightarrow \beta = \pi$ fuerza y desplazamiento tienen sentido opuestos.

Aclaración: las vibraciones forzadas sin amortiguamiento comprenden un caso ideal, útil a efectos de presentar el problema de excitaciones exteriores. Para amortiguación muy débiles ($\zeta << 1$).
De tal modo, la solución completa de es:

$$x_{(t)} = \underbrace{A\ e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)}_{(1)} + \underbrace{a \operatorname{sen}((\omega t - \beta)}_{(2)} \qquad [6\text{-}61]$$

El primer sumando (1) se amortigua relativamente pronto. Llamemos t_s: tiempo de establecimiento, de tal modo que, si por ejemplo consideramos que las vibraciones transitorias se desprecian cuando su valor es el 1 % de la amplitud de oscilaciones forzadas.

$$Ae^{-\gamma t} = 0{,}01.a \qquad t_s = \frac{1}{\gamma}.\ln\frac{100A}{a}$$

Las vibraciones transitorias (1) dependen de las condiciones iniciales. Las vibraciones forzadas (2) de las constantes físicas (k, b, m) y de la fuerza perturbadora (P_o, ω).
Resulta de alto interés analítico las relaciones funcionales [6-59]y [6-60]
A tal fín se definen:

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_o} \qquad h = \frac{b}{\omega_o}$$

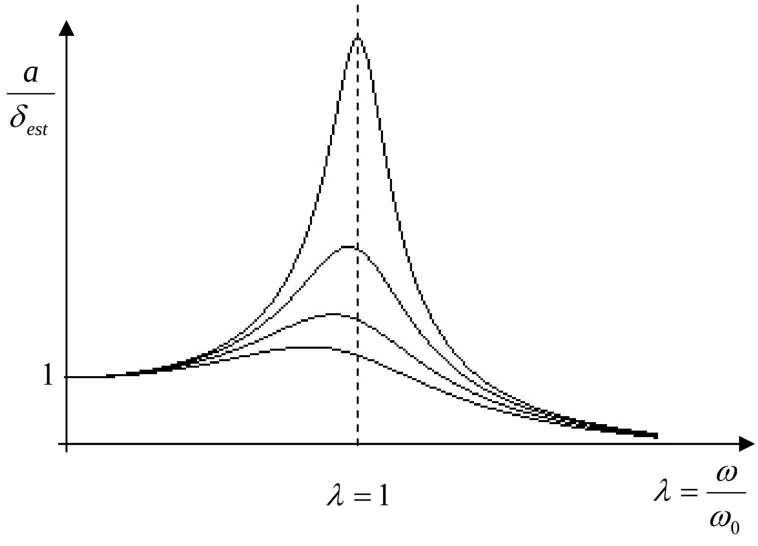
$$\frac{P_o}{\omega_o^{\ 2}} = \frac{F_o}{k} = \delta_{est} \quad \text{(def. estática)}$$

La [6-59] queda:

$$\frac{a}{\delta_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} \qquad [6\text{-}62]$$

y de la [6-60]

$$tg\beta = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} \qquad [6\text{-}63]$$



En la figura se muestran gráficas de la relación adimensional $\frac{a}{\delta_{est}}$ para distintos valores de *h*.

Se observa que la máxima amplitud de la oscilación se produce a un valor ligeramente distinto de λ=1.

Si en [6-62] llamamos $\varepsilon = \lambda^2$, la amplitud resulta máxima cuando el denominador es un mínimo.
Asi
$f_{(\varepsilon)} = (1 - \lambda^2)^2 + 4\, h^2\, \lambda^2 = (1 - \varepsilon)^2 + 4\, h^2\, \varepsilon$

tiene un mínimo $f'_{(\varepsilon)} = 0 = - 2\, \varepsilon + 4\, h^2 \;\; \rightarrow \;\; \varepsilon = \lambda^2 = 1 - 2\, h^2$

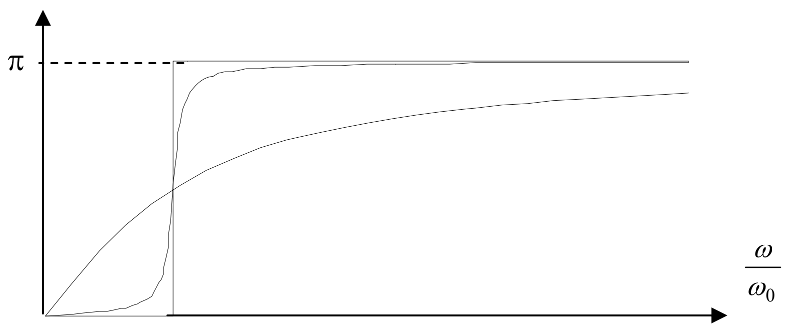
Llamando resonancia al valor λ que conduce a a_{max}:

$\lambda_{res} = (1 - 2\, h^2)^{1/2}$

Por consiguiente, en presencia de amortiguamiento, las vibraciones forzadas (ω) conducen a resonancia, para valores λ un poco inferiores a 1 (es decir, para $\omega < \omega_o$).
Algunas situaciones particulares:

a) Si $\lambda << 1$, (o sea, $\omega << \omega_o$), resulta $\frac{a}{\delta_{est}} \rightarrow 1$ y $a \cong \delta_{est}$, en tanto $\beta \cong 0$.
b) Si λ es muy grande ($\omega >> \omega_o$) el valor de a se toma muy pequeño y $\beta \rightarrow 180°$.
c) Si $\lambda \cong 1$ se produce resonancia.

Para la relación [6-63], se grafica el ángulo de desfaseje para distintos valores de factor de amortiguación:



Conclusiones

1. La amplitud de las oscilaciones forzadas no dependen de las condiciones iniciales del movimiento.
2. En presencia de resistencia (medio viscosos) las vibraciones forzadas no se amortiguan.
3. La frecuencia ω de las oscilaciones forzadas no depende de las constantes físicas del sistema (como ω_o y ω_1, por ejemplo) y está determinada y coincide con la de la fuerza perturbadora.
4. Aún para F_o pequeñas, se pueden producir amplitudes forzadas muy elevadas.
5. Para $\omega >> \omega_o$ se puede minimizar las amplitudes, incluso para valores elevados de F_o.

Representación fasorial.

La representación fasorial de las ecuaciones de movimiento aportan elementos analíticos adicionales. Se recuerda que un fasor es un vector rotante que se utiliza para representar magnitudes que son funciones sinusoidales del tiempo. Se utilizan para representar tensiones y corrientes alternas, y aquí serán utilizadas para representar las fuerzas forzadoras, fuerzas elásticas, de amortiguación y de inercia. Estas últimas son armónicas de la misma frecuencia que la fuerza forzadora, pues dependen de la deformación y de sus derivadas (la velocidad y la aceleración).

El módulo de cada fasor se hace igual a la amplitud de la magnitud que representa. Así, si la deformación sigue la ley x(t) = X seno(ωt), el fasor tendrá módulo igual a X, y se entiende es un vector que rota con velocidad angular ω. Se recuerda que e valor instantáneo de la deformación se obtiene como la proyección sobre el eje vertical del fasor.

Vibración Armónica Libre

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

$$\dot{x} = - A\,\omega_o \,\text{sen}\,(\omega_o t + \theta)$$

$$\ddot{x} = - A\,\omega_o^2 \cos\,(\omega_o t + \theta) \qquad \Rightarrow\; - \omega_o^2\, \bar{x}$$

Sea $\bar{x}$ el vector desplazamiento.

La fase del vector velocidad $\dot{\bar{x}}$ esta adelantada en 90° resp. de $\bar{x}$

La fase del vector aceleración $\ddot{\bar{x}}$ esta adelantada 180° resp. de $\bar{x}$

Vibración Forzada no Amortiguada

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = F_o\,\text{sen}\,\omega t$$

Caso (I); $\omega < \omega_o$, $\beta = 0$

$\overline{F_o}$ y $\bar{x}$ no tienen desfasaje

Caso (II), $\omega > \omega_o$, $\beta = 180º$

$\overline{F_o}$ y $\bar{x}$ están desfasados en 180º

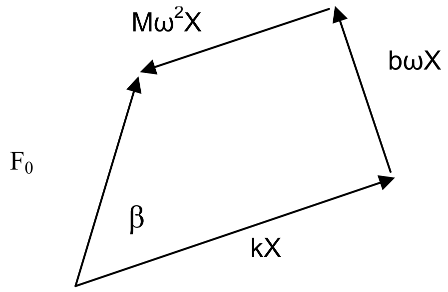
Vibración Forzada con Amortiguamiento

$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + k\,x = F_o \operatorname{sen} \omega t$

Interesa visualizar tres casos:

Cuando: 1) $\omega \ll \omega_o$
2) $\omega \cong \omega_o$
3) $\omega \gg \omega_o$

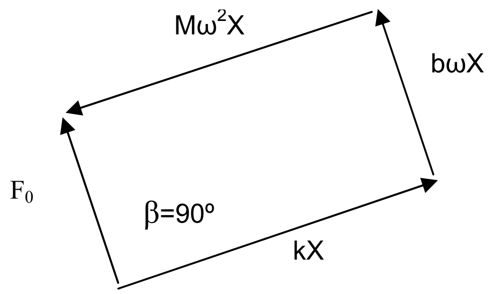
1) $\omega \ll \omega_o$



Fo: fuerza excitatriz
kX: fuerza de recuperación elástica
b m X: fuerza de amortiguamiento
m ω^2 X: fuerza de inercia

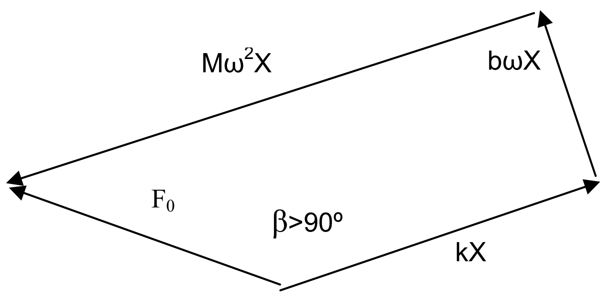
1. Las fuerzas de inercia, así como las de amortiguamiento son pequeñas.
2. El ángulo β es muy pequeño
3. $\overline{F_o}$ tiende a equilibrar a la fuerza elástica.
4. La excitación exterior tiende a aparecer como aplicada estáticamente.

2) $\omega = \omega_o$



En este caso, el ángulo de fase entre la deformación y la fuerza forzadora es de 90º.
La fuerza de inercia está equilibrada por la fuerza del resorte, y la fuerza excitatriz se emplea para vencer a la fuerza de amortiguación.

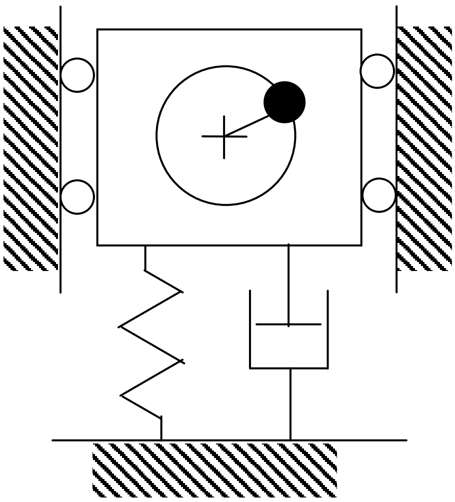
3) $\omega \gg \omega_o$



En este caso, al ángulo de fase entre la deformación y la fuerza forzadora supera los 90º, y si la frecuencia tiende a un valor muy alto, el ángulo tiende a 180º, quedando la deformación en oposición de fase con la fuerza forzadora. Si se mantiene constante la amplitud de la fuerza forzadora, al aumentar la frecuencia se verá que las amplitudes de la deformación y la fuerza en el amortiguador se harán pequeñas, y para altas frecuencias, la deformación será prácticamente nula.

Desbalance Rotatorio

El desbalance de masas en máquinas rotatorias es el origen de fuerzas excitadoras. Se considera a continuación un sistema masa-resorte, restringido a moverse en el sentido vertical y sometido a una fuerza forzadora originada por el desbalance de una máquina rotatoria.



Sean:
M = masa total del sistema
m = masa excéntrica
e= excentricidad
ω= velocidad angular de rotación
x = desplazamiento de la masa no rotante (M –m)
x + e Sen ωt = desplazamiento vertical de m.

La ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$(M - m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + e\,\mathrm{Sen}\,\omega t) = -kx - b\dot{x} \quad [6\text{-}64]$$

Desarrollando la derivada, y simplificando la ecuación del movimiento queda:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = me\omega^2 \mathrm{Sen}(\omega t)$$

Haciendo: $F_0 = me\omega^2$
queda la ecuación:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \mathrm{Sen}(\omega t) \quad [6\text{-}65]$$

Que resulta idéntica a la ecuación diferencial correspondiente al caso de oscilación forzada por una fuerza sinusoidal. En el proceso de resolución de esta ecuación diferencial, la amplitud de la fuerza F_0 puede tomarse como constante.

La respuesta permanente se puede escribir entonces como:

$$x(t) = X\,\mathrm{Sen}(\omega t - \phi) \quad [6\text{-}66]$$

Siendo la amplitud X :

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2) + (b\omega)^2}} \quad [6\text{-}67]$$

y el ángulo de fase $\phi = \mathrm{ArcTang}\ \frac{b\omega}{k - M\omega^2}$ [6-68]

Utilizando las siguientes definiciones:

$\varpi_n = \sqrt{k/masa}$ = frecuencia natural de oscilación no amortiguada.

$b_c = 2\sqrt{k \times masa} = 2\, masa\,\varpi_n$ = amortiguamiento crítico

$\zeta = b/b_c$ = Factor de amortiguamiento

puede escribirse la ecuación de la amplitud en forma no dimensional:

$$\frac{MX}{me}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad [6\text{-}69]$$

el desfasaje quedará:

$$\tan(\phi)=\frac{2\varsigma\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad [6\text{-}70]$$

En la siguiente gráfica, se muestra la amplitud "X"y el ángulo de fase "ϕ" versus la frecuencia "ω", utilizándose el factor de amortiguación como parámetro.

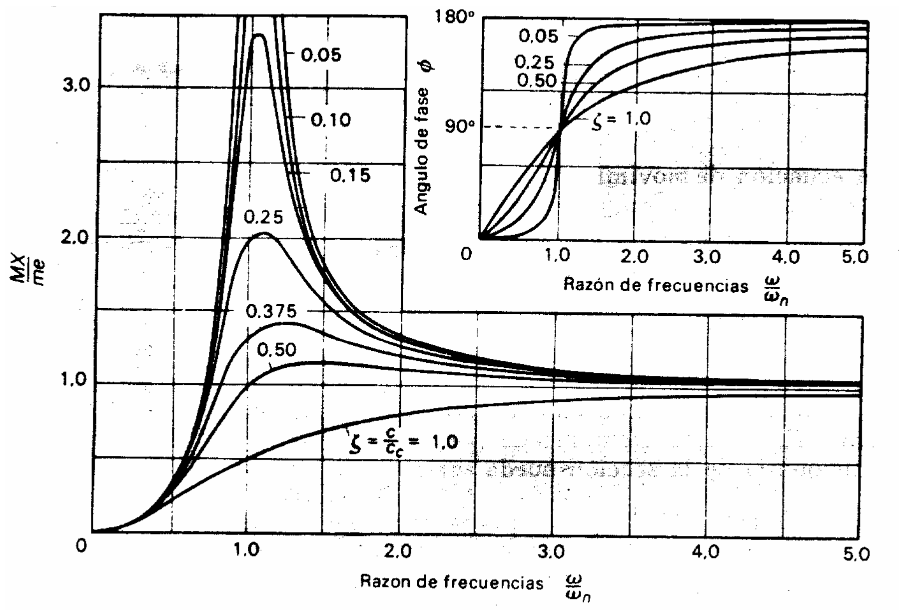
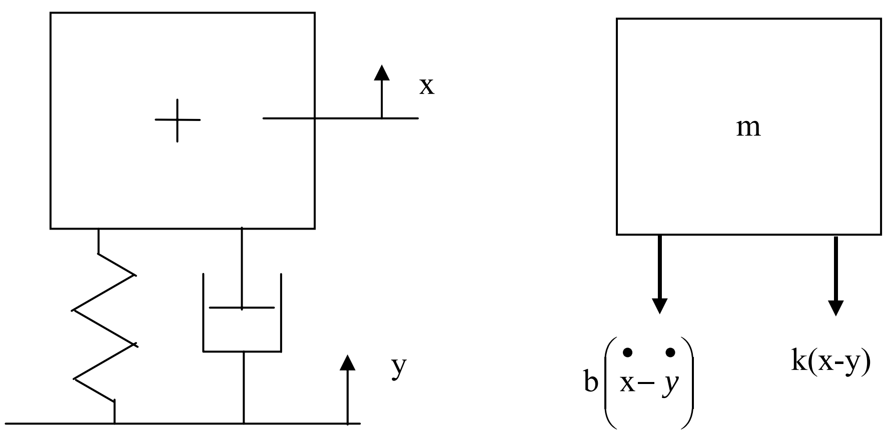


Fig. 3.2-2. Gráfico de las Ecs. (3.2-4) y (3.2-5) para vibración forzada con desbalance rotarorio.

Movimiento del soporte.



En muchos casos la excitación del sistema no es debida a una fuerza que actúa sobre la masa, sino por el movimiento del soporte. En esta sección, se considerará como excitación el movimiento del soporte y se verá de qué manera plantear la ecuación diferencial que rige el movimiento.

Sea "x" la coordenada que indica la posición de la masa, medida desde la posición del equilibrio estático. La coordenada "y" indica el movimiento del soporte, $\dot{y}$ es la velocidad, $\ddot{y}$ la aceleración . En el gráfico de la derecha se indican las fuerzas no balanceadas (el peso no se considera puesto que es compensada por la fuerza del resorte $k\delta_{est}$). La deformación del resorte es (x-y), y la velocidad relativa entre las piezas del amortiguador es $\left(\dot{x}-\dot{y}\right)$.

Se plantea la ecuación diferencial que rigen el movimiento de la masa:

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - b\left(\dot{x}-\dot{y}\right) \qquad [6\text{-}71]$$

En esta ecuación diferencial, intervienen las variables "x" e "y", y sus derivadas. Haciendo la sustitución:

$$z = x - y$$

la ecuación del movimiento se transforma en:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \qquad [6\text{-}72]$$

Para el caso en que el movimiento del soporte sea sinusoidal, y = Y sen(ωt), siendo "Y" la amplitud del movimiento del soporte y "ω" su frecuencia angular.

Derivando "y" dos veces, y reemplazando la ecuación diferencial queda:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = m\omega^2 Y \operatorname{sen}(\omega t) \qquad [6\text{-}73]$$

La forma de esta ecuación diferencial es similar a la correspondiente al desbalance rotatorio, con "$m\omega^2Y$" reemplazando a "$me\omega^2$". La solución de la ecuación diferencial puede entonces escribirse como:

$$z = Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

Con $$Z = \frac{mY\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2) + (c\omega)^2}} \qquad [6\text{-}74]$$

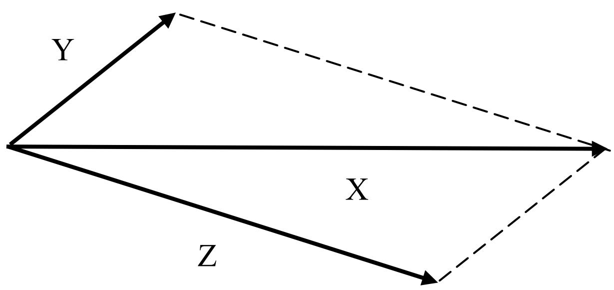
Haciendo x = z + y se obtendrá el movimiento absoluto "x" de la masa. Por lo tanto:

$$x(t) = z(t) + y(t) = Y \operatorname{sen}(\omega t) + Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

Siendo x(t) la suma de dos funciones sinusoidales de frecuencia angular "ω", será también una función sinusoidales de la misma frecuencia:

$$x(t) = X \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

donde "X" es la amplitud del movimiento de la masa, y "ψ" el desfasaje entre el movimiento de la masa y el movimiento del soporte.



Para obtener el valor de "X" y "ψ", se recurre a la representación fasorial:

Estos fasores pueden ser representados mediante el uso de numeros complejos:

$y = Y\, e^{j\omega t}$

$z = Z\, e^{j(\omega t - \phi)}$

$x = X\, e^{j(\omega t - \psi)}$

$x = Y\, e^{j\omega t} + Z\, e^{j(\omega t - \phi)}$

Utilizando la expresión deducida [6-74] para "Z", se llega a que:

$$X = \sqrt{\frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}\, Y \qquad [6\text{-}75]$$

$$\tan(\psi) = \frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (\omega c)^2} \qquad [6\text{-}76]$$

En la gráfica siguiente, se muestra el grafo de relación de amplitudes X/Y, y el ángulo de desfasaje "ψ" versus la relación ω/ω_n , siendo el factor de amortiguación el parámetro.

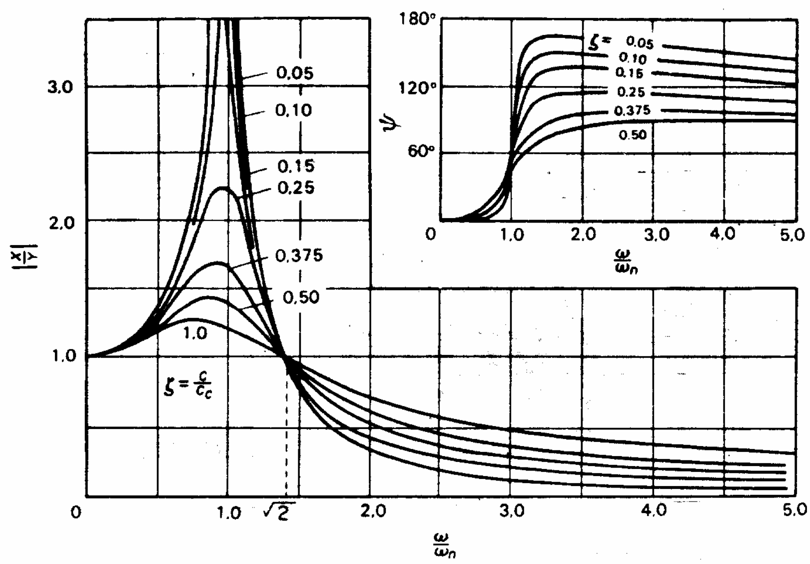


Fig. 3.5-2. Gráfica de las ecuaciones [6-75] y [6-76]

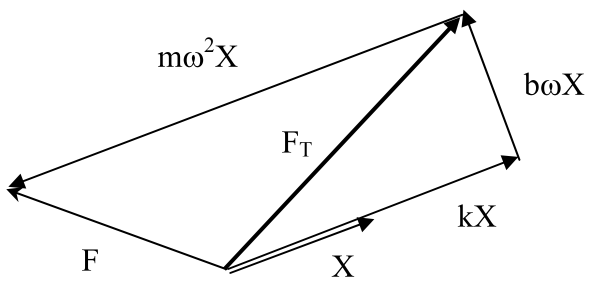
En el grafo se observa que:

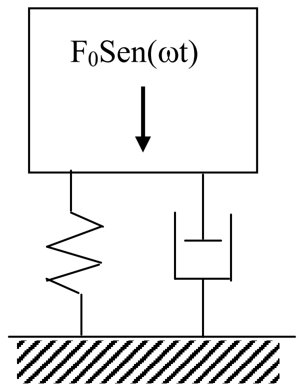
- La relación X/Y vale 1 (lo que implica que X = Y, es decir que la amplitud del movimiento de la masa es igual a la amplitud del movimiento del soporte), cualquiera sea el factor de amortiguación para $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$.
- Para valores de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, X/Y es menor que la unidad, lo que significa la oscilación de la masa será atenuada por la combinación del resorte y el amortiguador. Debe notarse que la atenuación será más efectiva cuanto menor sea el factor de amortiguación para frecuencia $\omega > \omega_n$.

Aislamiento Vibratorio

Entendemos por aislamiento vibratorio, la atenuación de los efectos de las vibraciones originadas en máquinas y motores. Puede tratarse de aislar fuerzas perturbadoras producidos por desbalances rotatorios o movimientos del soporte. Se verá que ambos problemas pueden tratarse de manera similar. La solución de este problema consistirá en el montaje de la máquina sobre resortes, o combinación de resortes y amortiguadores.

A continuación, se analizará el aislamiento de la fuerza perturbadora originada por el desbalance rotatorio. En la figura, se muestra el diagrama de fasores, indicándose la fuerza transmitida a través del resorte y el amortiguador como F_T.





$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (b\omega X)^2} = kX\sqrt{1+\left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}$$

X = Amplitud del movimiento originado por una fuerza forzadora F_0 Sen (ω t)
Reemplazando X, se puede escribir la relación (F_T/F_0) como:

$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\frac{m\omega^2}{k}\right]^2+\left[\frac{b\omega}{k}\right]^2}} = \frac{\sqrt{1+\left(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad [6\text{-}77]$$

Esta relación es idéntica a la relación X/Y hallada en para el caso del movimiento del soporte, por lo que se concluye que el aislamiento de una máquina de las perturbaciones del soporte es idéntico al problema de aislar fuerzas perturbadoras. Las razones (F_T/F_0) y (X/Y) se conocen como Transmisibilidad de fuerza o desplazamiento.

Del análisis del gráfico que corresponde a la relación X/Y se deduce que:

- Para lograr una transmisibilidad menor que 1 (de esta manera se atenuaría la fuerza transmitida) los resortes sustentadores deben ser tales que la frecuencia natural debe ser baja comparada con la frecuencia de la perturbación.
- En la región (ω/ω_n) $> \sqrt{2}$, a menor factor de amortiguación menor es la transmisibilidad. Como contrapartida, en la regín $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$ esta relación se invierte.

Respuesta a fuerzas periódicas.

En el caso de fuerzas forzadoras periódicas no sinusoidales, aplicando el análisis de Fourier pueden descomponerse en una serie de componentes armónicos (suma de senos y cosenos) de distintas frecuencias.

Una fuerza periódica se caracteriza por su período, el cual se identifica con el símbolo T, y se cumple que F(t)=Ff(t+T), es decir que el valor de la fuerza para un instante t se repite T segundos después.

Si F(t) es una función de período T, puede ser representada por medio de una serie de Fourier:

$$F(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t + \sum_{1}^{\infty} b_n sen\omega_n t \qquad [6\text{-}78]$$

Los coeficientes a_0, a_n y b_n se determinan mediante las fórmulas de Euler.

Las frecuencias de las armónicas son múltiplos de la frecuencia de la armónica fundamental, la cual es igual a la frecuencia de la fuerza forzadora, es decir, $\omega_n = n\omega_1$.

La serie de senos y cosenos pueden ser combinados en una serie de solos senos, y la fuerza forzadora se escribe entonces:

$$F(t) = \sum_{1}^{\infty} F_n sen(n\omega_1 t - \phi_n) \qquad [6\text{-}79]$$

Deben tomarse los términos necesarios para una correcta aproximación. Considerando que los elementos del sistema se comportan en forma lineal, es factible hallar la respuesta a cada armónico por separado, luego componer estar respuestas para determinar la respuesta del sistema a la fuerza excitadora periódica.