Unidad 5: Dinámica de los Sistemas de Partículas Parte I

Introducción

Llamaremos sistema de partículas a aquel conjunto de puntos materiales ligados entre ellos a través de fuerzas internas.
Cada partícula posee una masa m_i y respecto de un sistema referencial se las ubica por sus vectores posición.

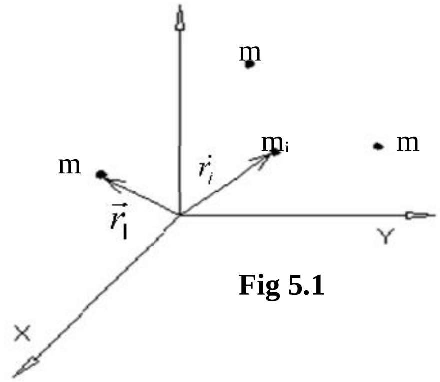


Fig 5.1

Fuerzas Actuantes:

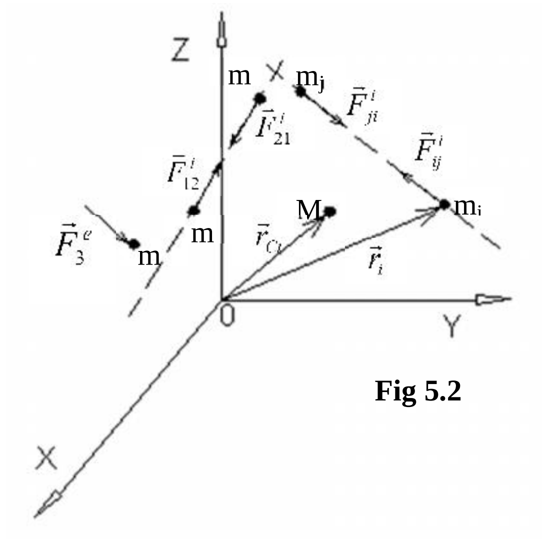


Fig 5.2

Sobre las partículas se encuentran actuando fuerzas. Estas pueden ser exteriores o internas:

1-1) *Fuerzas Exteriores* $\left(F^e\right)$*:* Provienen de la acción de sistemas o partículas no pertenecientes al sistema considerado.

1-2) *Fuerzas Internas* $\left(F^i\right)$*:* Son debidas a la acción mutua entre las partículas. Las fuerzas internas se presentan "de a pares". Por el principio de acción y reacción $F_{ij} = -F_{ji}$; o sea que la interacción entre partículas tiene para cada una igual intensidad y recta de acción pero sentido contrario.

Masa del sistema:

La masa total del sistema es:

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ m_i: masa de cada partícula, o sea que queda definida como la suma total de las masas de las partículas.

Centro de masa:

Se define como momento de primer orden al producto de la masa por la distancia a un punto.

$d_e = r_i * m_i$ para todo el sistema: $D_e = \sum d_e = \sum r_i * m_i$ i=1....n

Podemos encontrar un punto tal que:

$$D_e = \sum r_i * m_i = M * r_g$$

$$r_{ei} = \frac{\sum r_i * m_i}{M_{ri}} = \frac{\sum r_i * m_i}{\sum m_i}$$

Se denomina centro de masa, y es un punto en el que se puede suponer concentrada toda la masa, respecto del momento de primer orden o momento estático.

Las coordenadas cartesianas del centro de masa son:

$$X_g = \frac{\sum x_i * m_i}{\sum m_i}$$

$$Y_g = \frac{\sum y_i * m_i}{\sum m_i}$$

$$Z_g = \frac{\sum z_i * m_i}{\sum m_i}$$

La ubicación del centro de masa es independiente del sistema referencial elegido.

Cantidad de Movimiento:

Si cada partícula m_i se mueve con velocidad $\vec{v}_i$; la cantidad de movimiento de cada partícula es:

$$\vec{p} = m_i * \vec{v}_i$$

Para todo el sistema es:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i * \vec{v}_i \qquad \text{i=1,....n}$$

Sabemos que:

$$\vec{r}_G * M = \sum r_i * m_i$$

La posición de la partícula es función del tiempo; luego derivando:

$$\dot{\vec{r}} * M = \vec{v}_G * M = \sum \dot{\vec{r}}_i * m_i = \sum \vec{v}_i * m_i = \vec{P}$$

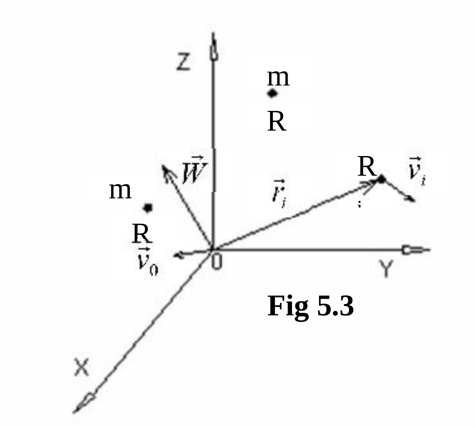


Fig 5.3

Nos queda que:

$$\vec{P} = M * \vec{v}_G$$

Si el sistema de partículas se encuentra en un movimiento roto-traslatorio reducido al polo “O” la velocidad de la partícula m_i

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

La cantidad de movimiento:

$$\vec{P} = \sum m_i * \vec{v}_i$$

$$\vec{P} = \sum m_i * \vec{v}_o + \sum m_i * w \times (R_i - O)$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * \sum m_i + \sum m_i * w \times (R_i - O)$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * M + \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$\sum m_i * w \times (R_i - O) = \vec{W} \times \sum m_i * (R_i - O) = \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Si el movimiento es una traslación pura:

$$\vec{W} = 0 \Rightarrow \vec{P} = M * \vec{v}_o$$

Si el polo de reducción se toma en el centro de masa, "O" coincide con "G" y:

$\vec{r}_G = 0 \Rightarrow \vec{P} = M * \vec{v}_G$ (Traslación Pura)

Y si es una rotación pura de "O" que no coincide con "G":

$\vec{P} = M * \vec{W} \times \vec{r}_G$ (Rotación Pura)

Conservación de la cantidad de movimiento:

Aplicando el principio de inercia a cada partícula:

$$\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} = \dot{\vec{p}}_i = m_i * \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_{ij}^i$$

Sumando para todo el sistema:

$$\sum \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = \sum m_i * \dot{\vec{v}}_i = \sum \vec{F}_i^e + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}^i$$

Pero:

$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}^i = 0$ Por el principio de acción y reacción

$\sum \vec{F}_i^e = \vec{F}^e$ Fuerza exterior total

Nos queda:

$$\vec{F}^e = \dot{\vec{P}}$$

"La suma de todas las fuerzas exteriores es igual a la derivada de la cantidad de movimiento del sistema respecto del tiempo"

Si $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^e = 0$

$\vec{P} = cte$

Esta ecuación Fext = M dvG/dt, indica que dado un sistema de partículas, el centro de masas de dicho sistema se mueve como una partícula de masa igual a la masa total del sistema, sometida a una fuerza igual a la fuerza exterior total que actúa sobre el sistema.

Si la suma de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema no varía. Desde el punto de vista del centro de masas, esta continuará en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo: Dos masas que colisionan entre sí, en ausencia de fuerzas externas. Sea el choque elástico o plástico, la cantidad de movimiento se conserva porque no actúan fuerzas exteriores al sistema. En cuanto al centro de masas, esta posee movimiento rectilíneo uniforme antes de la colisión, y conserva su estado después. Si el choque el plástico, las dos masas unidas continúan en la trayectoria del centro de masa.

Momento Cinético:

El momento cinético de una partícula respecto de un punto "O" es:

$\vec{L}_i = (R_i - O) \times m_i * \vec{v}_i$

Para un sistema de partículas:

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum [(R_i - O) \times m_i * \vec{v}_i]$

Si el sistema se halla sometido a un movimiento roto-traslatorio con polo de reducción en "O"

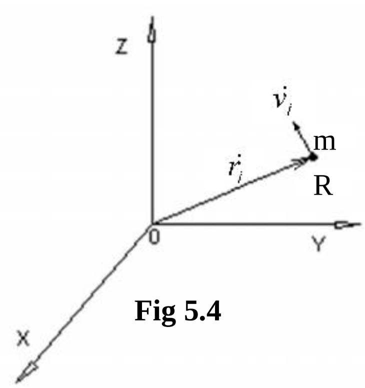


Fig 5.4

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

El momento cinético total respecto de "O"

$$\vec{L} = \sum \left[(R_i - O) \times m_i * (\vec{v}_o + W \times (R_i - O)) \right]$$
$$\vec{L} = \sum (R_i - O) \times m_i * \vec{v}_o + m_i * (R_i - O) \times W \times (R_i - O)$$
$$\vec{L} = \sum (R_i - O) \times m_i * \vec{v}_o + \sum m_i * (R_i - O) \times W \times (R_i - O)$$

En esta ecuación tenemos:

$$\sum (R_i - O) \times m_i * \vec{v}_o = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o$$

Nos queda:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \sum m_i * (R_i - O) \times W \times (R_i - O)$$

Llamaremos Momento Cinético de Rotación Pura (L_0) a:

$$\vec{L}_0 = \sum m_i * (R_i - O) \times W \times (R_i - O)$$

Entonces:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{L}_0$$

Conservación del momento cinético

Vimos que para cada partícula: $\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} = \dot{\vec{p}}_i = m_i * \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^{\,e} + \vec{F}_{ij}^{\,i}$

Tomando momento respecto de "O"

$$(R_i - O) \times m_i * \vec{a}_i = (R_i - O) \times \vec{F}_i^{\,e} + (R_i - O) \times \vec{F}_{ij}^{\,i}$$

La expresión del momento cinético:

$$\vec{L} = M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{L}_0 = \sum (R_i - O) \times m_i * \vec{v}_i$$

Derivando:

$$\frac{\partial L_0}{\partial t} + M * \dot{r}_G \times \vec{v}_o + M * r_G \times \dot{\vec{v}}_o = \sum \left(\frac{\partial R_i}{\partial t} + \frac{\partial O}{\partial t} \right) \times m_i * \vec{v}_i + \sum (R_i - O) \times m_i * \vec{a}_i$$

Llamando

$$\vec{M}^{\,e} = \sum (R_i - O) \times \vec{F}_i^{\,e}$$

$$\vec{M}^{\,e} = \sum (R_i - O) \times \vec{F}_{ij}^{\,i} = 0$$ Por principio de acción y reacción

Nos queda:

$$\vec{M}^{\,e} = M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + \vec{v}_o \times \vec{p} + \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t}$$

Si el polo de reducción se elige en "O" = "Centro de masas", el vector posición del centro de masas y sus derivadas serán nulas, y como la cantidad del movimiento puede expresarse en función de la velocidad del centro de masas, el tercer término de la ecuación se anula. Resulta entonces:

$$\vec{M}^{\,e} = \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t} \Rightarrow \vec{M}^{\,e} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = Cte.$$

El momento angular de un sistema de partículas se mantiene constante si el momento exterior que actúa sobre el mismo es nulo.

Por otra parte, si el momento exterior no es nulo, como la derivada del momento angular respecto del tiempo es igual al momento exterior, se interpreta que la variación del momento angular coincide en dirección con el momento exterior.

Ejemplo: Considere el movimiento de un trompo, que rota a gran velocidad sobre su eje. Si bien es una aproximación, se puede asumir que el momento angular coincide en dirección con el vector rotación del trompo. El momento exterior que actúa sobre el trompo es el debido al peso del mismo. El momento angular variará de manera tal que dL coincida en dirección con el torque. Se origina por lo tanto, el movimiento del precesión, rotación alrededor de un eje vertical. La dirección del vector rotación de precesión depende de la dirección del vector rotación propia del trompo.

Trabajo y Energía:

Si $\vec{F}_i^e$ son las fuerzas actuantes sobre las partículas m_i; en un desplazamiento elemental:

$\partial T_i = \vec{F}_i * \partial \vec{r}_i$ Como $\partial \vec{r}_i = \vec{v}_i * \partial t$

$$\partial T_i = \vec{F}_i * \vec{v}_i * \partial t$$

$$\partial T = \sum \vec{F}_i * \vec{v}_i * \partial t$$

Para un sistema roto-traslatorio

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

$$\partial T = \sum \vec{F}_i * \vec{v}_o * \partial t + \sum \vec{F}_i * (W \times (R_i - O)) * \partial t$$

$$\partial T = \left(\vec{F}^e * \vec{v}_o + M^e * \vec{W}\right) * \partial t$$

Dividiendo todo por “dt” obtenemos la potencia

$$P_W = \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\vec{F}^e * \vec{v}_o + M^e * \vec{W}\right)$$

Definimos como energía cinética de un sistema como la suma de las energías cinéticas de las partículas que componen el sistema.

$$T_i = \frac{1}{2} * m_i * \vec{v}_i^2$$

Para todo el sistema

$$T = \sum \frac{1}{2} * m_i * \vec{v}_i^2$$

En un movimiento roto-traslatorio

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

$$T = \frac{1}{2} * \sum m_i * [\vec{v}_o + W \times (R_i - O)]^2$$

$$T = \frac{1}{2} * \left[\sum m_i * \vec{v}_o^2 + \sum m_i * 2 * \vec{v}_o * (W \times (R_i - O)) + \sum m_i * (W \times (R_i - O))^2\right]$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2}_{1} + \underbrace{\vec{v}_o * \sum m_i * (W \times (R_i - O))}_{2} + \underbrace{\frac{1}{2} * \sum m_i * (W \times (R_i - O))^2}_{3}$$

1) $T_1 = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^2$ Energía cinética de traslación

3) $T_3 = \frac{1}{2} * \sum m_i * \left(\vec{W} \times (R_i - O)\right)^2 = \frac{1}{2} * \vec{W}^2 * \sum m_i * \left(\vec{e}_W^V \times (R_i - O)\right)^2$

$\left(\vec{e}_W^V \times (R_i - O)\right)^2$: Cuadrado de la distancia

$I_W = \sum m_i * \left(\vec{e}_W^V \times (R_i - O)\right)^2$: Momento de inercia respecto del eje e_w

Nos Queda $T_3 = \frac{1}{2} * \vec{W}^2 * I_W$

2) $T_2 = \vec{v}_o * \sum m_i * (W \times (R_i - O)) = \vec{v}_o * W \times \sum m_i * (R_i - O)$

$T_2 = M * (\vec{v}_o * W \times \vec{r}_G)$: Energía cinética mixta

Esta cantidad se anula cuando el centro de referencia se encuentra en reposo, dado que para ese caso $\vec{v}_o$ = 0 o cuando coincide con el centro de masas, por ser $\bar{r}_G$

En estos casos la expresión de la energía toma la forma simplificada

$$T = \frac{1}{2} M * \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2} * W^2 * Iw$$

Unidad 5: Dinámica Del Sólido Rígido.

Introducción:

Consideramos al sólido rígido como aquel cuerpo constituido por un sistema de partículas que cumplen con la condición de rigidez detenida, es decir mantienen sus distancias relativas constantes.

Masa del sólido rígido:

Para un sistema de partículas, la masa total es:

$$M = \sum_i m_i$$

Para el sólido rígido:

$$M = \int_v \rho * dv \qquad \rho\text{: Densidad}$$

Se entiende que el proceso de integración se extiende a todo el volumen ocupado por el sólido, es decir, se involucra una integral triple en un marco referencial adecuado.

si ρ = Cte.: $\boxed{M = \rho * \int_v dv = \rho * V}$

Centro de masa:

El momento de primer orden es: $D_e = \int_v m_i * r_i$

Y el centro de masa:

$$M * \vec{r}_G = D_e = \int_v m_i * r_i$$

$$\vec{r}_G = \frac{\int_v \rho * r_i * dv}{\int_v \rho * dv}$$

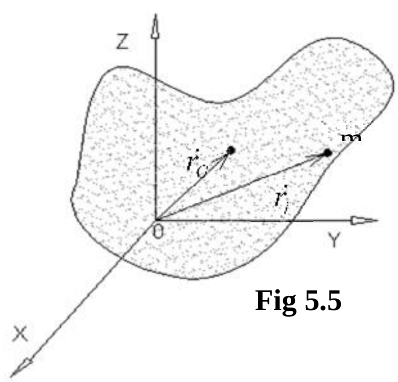


Fig 5.5

Cantidad de Movimiento:

Si el sólido se encuentra en movimiento rototraslatorio reducido al polo "O" la velocidad de cada punto será:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + W \times (R_i - O)$$

La cantidad de movimiento total:

$$\vec{P} = \int_v \rho * dv * \vec{v}_i = \int_v \rho * dv * \vec{v}_o + \int_v \rho * dv * (W \times (R_i - O))$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * \int_v \rho * dv + W \times \int_v \rho * dv * (R_i - O)$$

$$\vec{P} = \vec{v}_o * M + W \times M * \vec{r}_G \quad (1)$$

donde: $\int_v \rho * dv * (R_i - O) = D_e$

$$D_e = M * \vec{r}_G$$

Conservación de la cantidad de movimiento:

Derivando (1):

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{a}_o * M + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G$$

Sabemos que la variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo es:

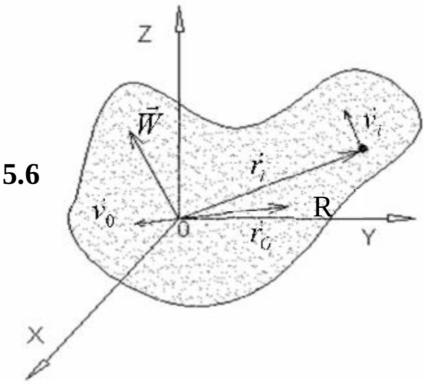


Fig 5.6

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{F}_i^{\,e} = \vec{F}^{\,e}$$

Entonces nos queda:

$$\vec{F}^{\,e} = \vec{a}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \vec{v}_G$$

Momento cinético:

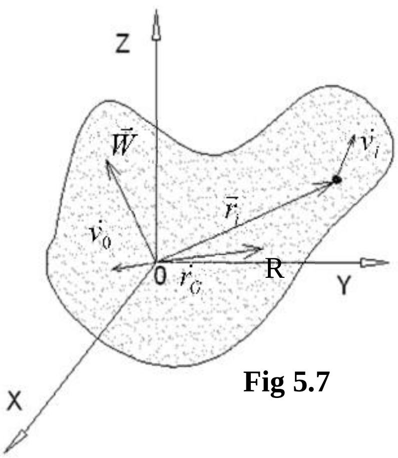


Fig 5.7

Para un sistema de partículas teníamos, en un movimiento rototraslatorio con polo de reducción en “O”:

$$\vec{L} = \sum_i (R_i - 0) \times m_i * \vec{v}_i$$

Para un sólido:

$$\vec{L} = \int_v \circ * (\vec{r} \times \vec{v} * dv) \qquad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$
$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$$

Pero: $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{W} \times \vec{r}$

Reemplazando, el movimiento cinético nos queda:

$$\vec{L} = \underbrace{\int_v \circ * \vec{r} \times \vec{v}_o * dv}_{\vec{L}_1} + \underbrace{\int_v \circ * \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) * dv}_{\vec{L}_2}$$

La primera integral ($\vec{L}_1$) es:

$$\vec{L}_1 = \int_v \circ * \vec{r} \times \vec{v}_o * dv = -\vec{v}_o \times \int_v \circ * \vec{r} * dv = -\vec{v}_o \times M * \vec{r}_G$$

$\vec{L}_1 = -\vec{v}_o \times M * \vec{r}_G$ Se anula si $\vec{v}_o = 0$ o cuando la reducción se hace al centro de masa.

La segunda integral ($\vec{L}_2$) es:

$$\vec{L}_2 = \int_v \circ * \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) * dv = \int_v \circ * \left[(\vec{r} * \vec{r}) \times \vec{W} - (\vec{r} * \vec{W}) * \vec{r} \right] * dv$$

Expresando en coordenadas cartesianas:

$$\vec{L}_2 = \int_v \circ * \left[(x^2 + y^2 + z^2) \times (W_x \vec{i} + W_y \vec{j} + W_z \vec{k}) - (x \cdot W_x + y \cdot W_y + z \cdot W_z) * (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right] * dv$$ Efectuando los productos, operando y poniendo: $\vec{L}_2 : (L_{2x}, L_{2y}, L_{2z})$

Teniendo presente que se trata de una igualdad vectorial.

La componente:

$$\vec{L}_x = W_x * \int_v \circ * (y^2 + z^2) * dv - W_y * \int_v \circ * (yx) * dv - W_z * \int_v \circ * (zx) * dv$$

Momento y productos de inercia:

Definiremos como ***<u>momento de inercia</u>*** *respecto de un eje "e" para:*

- Un sistema de partículas:

$I_e = \sum_i m_i * d_i^2$ Donde d_i: Distancia de la partícula al eje considerado

- Un sólido:

$I_e = \int_v \circ * d^2 * dv$

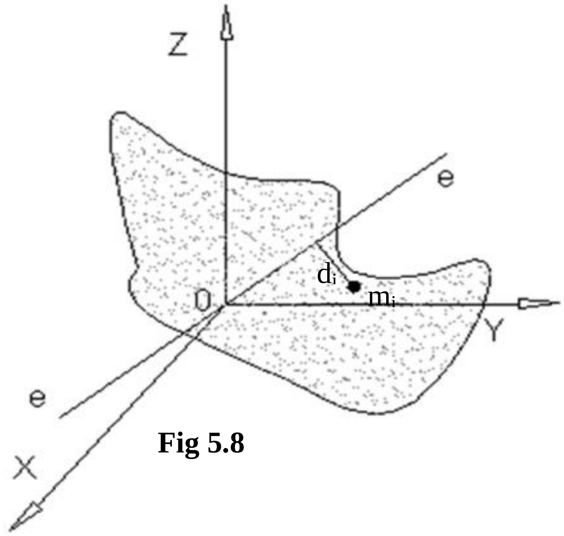


Fig 5.8

Definiremos como ***<u>producto de inercia</u>*** *respecto de los ejes "e" y "h"*

$I_{eh} = -\sum_i m_i * d_i^e * d_i^h$

Para un sólido:

$I_{eh} = -\int_v \circ * d^e * d^h * dv$

Los productos de inercia son:

$$\left[\begin{array}{l} I_{xy} = -\int_v \circ * x * y * dv \\ I_{xz} = -\int_v \circ * x * z * dv \\ I_{yz} = -\int_v \circ * y * z * dv \end{array}\right.$$

En las fórmulas de cálculo de los productos de inercia, se trabaja con coordenadas, es decir, pueden tener signo positivo o negativo. Esto hace que el resultado de la integral de volumen puede resultar nulo. De hecho, esto ocurre cuando los ejes son ejes principales de inercia.

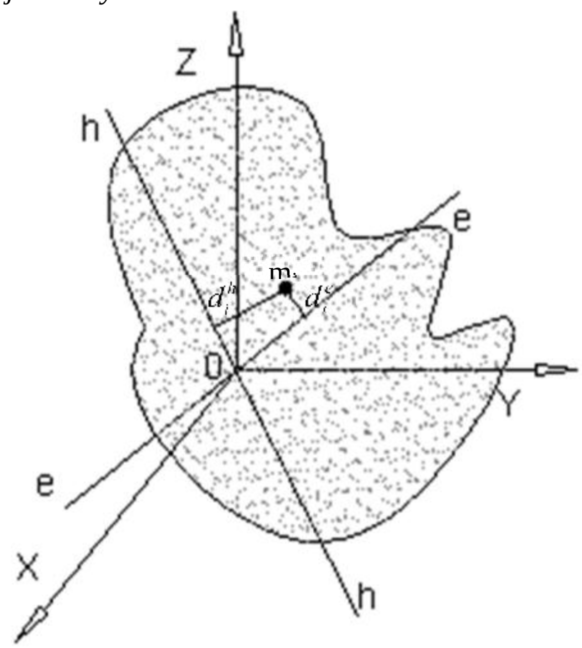


Fig 5.9

La expresión del momento cinético $\vec{L}_2$ nos queda:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{L}_x = I_{xx} \cdot W_x + I_{xy} \cdot W_y + I_{xz} \cdot W_z \\ \vec{L}_y = I_{yx} \cdot W_x + I_{yy} \cdot W_y + I_{yz} \cdot W_z \\ \vec{L}_z = I_{zx} \cdot W_x + I_{zy} \cdot W_y + I_{zz} \cdot W_z \end{array}\right.$$

Estas expresiones escalares podemos poner en forma matricial:

$[\vec{L}_2]^T = [I] \cdot [W]^T$ Siendo: $[\vec{L}_2] = (\vec{L}_{2x} + \vec{L}_{2y} + \vec{L}_{2z})$
$[W] = (W_x, W_y, W_z)$

Y la matriz $[I]$ es la representación en el sistema referencial adoptado del tensor de inercia.

$$[I] = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Finalmente la expresión del momento cinético es: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$\vec{L} = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$

Carácter Tensorial de $[I]$

Supongamos la matriz $[A]$ que transforma del sistema referencial x, y, z ortogonal al x', y', z' también ortogonal.

$[A]$ es ortogonal. Luego $[A]^{-1} = [A]^T$

Tenemos que: $\left[\vec{L}_2\right]^T = [I] \cdot [W]^T$ **(1)**

Transformando:
$$\left[\vec{L}'\right] = [A] \cdot [L]^T \Rightarrow [L]^T = [A]^T \cdot \left[\vec{L}'\right]^T$$
$$\left[\vec{W}'\right] = [A] \cdot \left[\vec{W}\right]^T \Rightarrow \left[\vec{W}\right]^T = [A]^T \cdot \left[\vec{W}'\right]^T$$

Reemplazando en **(1)**:

$[A]^T \cdot \left[\vec{L}'\right]^T = [I] \cdot [A]^T \cdot \left[\vec{W}'\right]^T$

Multiplicando por $[A]$

$$\underbrace{[A] \cdot [A]^T}_{[U]} \cdot \left[\vec{L}'\right]^T = \underbrace{[A] \cdot [I] \cdot [A]^T}_{[T]} \cdot \left[\vec{W}'\right]^T$$

Nos queda

$\left[\vec{L}'\right]^T = [I'] \cdot [W']^T$ Expresión en x', y', z'

Donde

$[I'] = [A] \cdot [I] \cdot [A]^T$

Vemos que $[I]$ se transforma según la ley de transformaciones de tensores de segundo orden, se concluye que $[I]$ es la representación de un tensor.

Operador Lineal

La expresión de $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$

Tiene carácter tensorial, es decir que $\left[\vec{L}\right]$ es un invariante de los distintos sistemas referenciales.

$\left[\vec{L}_1\right]$: Proviene del producto vectorial $\vec{r}_G \times \vec{v}_o$ y como tal tiene carácter invariante.

$\left[\vec{L}_1\right]$: Proviene de la aplicación del operador lineal $[I]$ (tensor de segundo orden) sobre el tensor de primer orden $[W]^T$; luego, es un invariante.

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$: Es un invariante por ser la suma de dos invariantes.

Conservación Del Momento Cinético

El momento cinético es $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$.

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = M \cdot \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M \cdot \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot \left[\dot{W}\right]^T$$

Pero sabemos que $\dfrac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \vec{M}^{\,e}$

$$\vec{M}^{\,e} = M \cdot \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M \cdot \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot [\dot{W}]^T$$

Energía Cinética

La energía cinética para un sistema de partículas

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^{\,2} + \vec{v}_o * \sum m_i * (W \times (R_i - O)) + \frac{1}{2} * \sum m_i * (W \times (R_i - O))^2$$

Para el caso de un sólido nos queda:

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_o^{\,2} + M * \left(\vec{v}_o * \vec{W} \times \vec{r}_G\right) + \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

Si el polo de reducción coincide con el centro de masa:

$$T = \frac{1}{2} * M * \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2} * I_w * W^2 = T_t + T_R$$

T_T: Energía de traslación $\quad \dfrac{1}{2} * M * \vec{v}_o^{\,2} = Tt$

T_M: Energía Mixta $\quad M * \left(\vec{v}_o * \vec{W} \times \vec{r}_G\right) = Tm$

T_R: Energía de rotación $\quad \dfrac{1}{2} * I_w * W^2 = T_R$

Expresando en función de $[\vec{P}]$ y $[\vec{L}]$

$$\vec{P} = M * \vec{v}_o$$

$$T_R = \frac{1}{2} * \int_v \circ * dv * \left(\vec{W} \times \vec{r}\right)^2 = \int_v \circ * dv * \left(\vec{W} \times \vec{r}\right) * \left(\vec{W} \times \vec{r}\right)$$

Desarrollando en coordenadas cartesianas y operando obtenemos:

$T_R = \dfrac{1}{2}[W] * [I] * [W]^T$ $\qquad$ Donde $[I]$: Tensor de inercia

$[W] * [I] * [W]^T$ $\qquad$ Cuadrática de energía asociada al tensor de inercia

Finalmente:

$$T = \frac{1}{2} * \vec{P} \times \vec{v}_o + \vec{P} * \vec{W} \times \vec{r}_G + \frac{1}{2} * [\vec{W}][\vec{L}]^T$$

Cuadráticas asociadas al tensor de Inercia

11-1) *Energía cinética de rotación*

Vimos que $T_R = \dfrac{1}{2}[W] * [I] * [W]^T$ es invariante.

11-2) *Momento de inercia respecto de un eje:*

$$T_R = \frac{1}{2}[W] * [I] * [W]^T = \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

I_W: Momento de inercia, respecto del eje de dirección e_w^v

$$\frac{1}{2}[W] * [I] * [W]^T = \frac{1}{2} * I_w * W^2$$

$$\frac{[W]}{W} * [I] * \frac{[W]^T}{W} = I_w$$

$$[e_w] * [I] * [e_w]^T = I_w$$

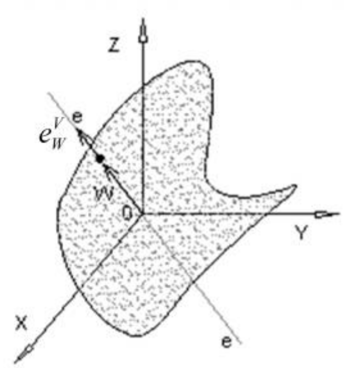


Fig 5.10

O sea que el momento de inercia respecto de un eje es la cuadrática asociada al tensor con respecto al versor de dirección de ese eje.

$$\vec{e}_w = (\sim, \quad , ¥)$$

$$I_w = I_{xx} * \sim^2 + I_{yy} * \quad ^2 + I_{zz} * ¥^2 + 2 * \sim * \quad * I_{xy} + 2 * \sim * ¥ * I_{xz} + 2 * \quad * ¥ * I_{yz}$$

Radio de Giro

Se define el radio de giro de un sólido, respecto de un eje cuya dirección es $\vec{e}_w$ como:

$$r_k = \sqrt{\frac{I_w}{M}}$$

Al momento de inercia lo podemos expresar:

$$I_w = M * r^2{}_k$$

Si se divide en forma cuadrática $[e_w]*[I]*[e_w]^T = I_w$ por I_w

$$[X]*[I]*[X]^T = 1 \text{ Donde } [X] = \frac{[\vec{e}_w]}{\sqrt{I_w}} = \frac{[\vec{e}_w]}{\sqrt{M} * r_k}$$

En forma desarrollada:

$$I_w = I_{xx} * X^2 + I_{yy} * Y^2 + I_{zz} * Z^2 + 2 * X * Y * I_{xy} + 2 * X * Z * I_{xz} + 2 * Y * Z * I_{yz}$$

Es la ecuación de un elipsoide denominado elipsoide de inercia donde (x, y, z) son las componentes del vector:

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{I_w}} * \vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{M} * r_k} * \vec{e}_n$$

Es decir que todo semieje del elipsoide de inercia es proporcional a la inversa del radio de giro.

Diagonalización del tensor de Inercia

El tensor $[I]$ se transforma mediante una rotación ortogonal

$$[I'] = [A]*[I]*[A]^T$$

Existe una transformación $[M]$ tal que:

$$[I'] = [M]*[I]*[M]^T = [I_d]$$

Donde:

$$[I_d] = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

I_1, I_2, I_3 son los autovalores del tensor de inercia, denominados momentos de inercia principales.

Por tratarse el tensor de inercia de un tensor real y simétrico los autovalores son reales.

Los vectores propios asociados V_1, V_2, V_3 establecen direcciones denominadas ejes principales de inercia.

$$[I]*[U]^T = I * [v]^T$$

Expresiones en la base principal

Para los ejes principales de inercia, las variables que intervienen tienen expresiones más simples.

Momento cinético

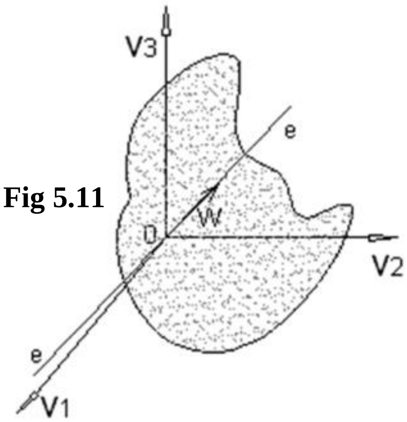
$$[L]^T = [I_0] * [W]^T \Rightarrow \begin{vmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{vmatrix}$$

Nos queda:

$$L_x = I_1 * W_x ; \qquad L_y = I_2 * W_y ; \qquad L_z = I_3 * W_z$$

O sea que en la base principal el momento cinético tiene la dirección del eje de rotación.

Fig 5.11



Las cuadráticas asociadas al tensor también adquieren una forma simple.

Momento según un eje.

$$I_e = [e_e] * [I_d] * [e_e]^T = I_1 * \sim^2 + I_2 * {}^2 + I_3 * ¥^2$$

Energía cinética de rotación.

$$2 * T_r = [W] * [I_0] * [W]^T = I_1 * W_x^{\,2} + I_2 * W_y^{\,2} + I_3 * W_z^{\,2}$$

Elipsoide de inercia.

$$1 = [x] * [I_0] * [x]^T = I_1 * X^2 + I_2 * Y^2 + I_3 * Z^2$$

Teorema de los ejes paralelos

Sea un sólido e [I_G] su tensor de inercia referido a una terna x, y, z cuyo origen coincide con el centro de masa G del sólido.
Si se desea referir el tensor a los ejes x´,y´,z´, paralelos a la terna x, y, z, se aplica el teorema de los ejes paralelos. De acuerdo a este teorema se debe adicionar a [I_G] un tensor de inercia correspondiente a la masa total del sólido concentrada en el centro de masas, referido a x´, y´, z´,. Es decir que : [$I_{x´,\, y´,z´}$] = [I_G] + [$I_{TRASLACION}$] donde: el tensor de inercia referido a la terna x´,y´,z´ es igual a la suma de el tensor de inercia baricéntrico mas el tensor de inercia de la masa concentrada en el centro de masa referido a x´,y´,z´.
Utilizando el producto tensorial esta operación de traslación se puede realizar mediante la expresión
[$I_{x´,\, y´,z´}$] = [I_G] + M (r_G^2 [I_D]- $r_G \otimes r_G$)

Donde:

M es la masa total del sólido

r_G el vector posición del centro de masa respecto al sistema x´,y´,z´.

I_D la matriz identidad.

Unidad 5: Dinámica relativa del sólido.

Introducción

Las causas del movimiento del sólido en el espacio, son las fuerzas exteriores y sus momentos. Estas cantidades se relacionan con las derivadas respecto del tiempo del momento lineal o cantidad de movimiento y el momento angular o momento cinético del sólido. La cantidad de movimiento puede expresarse en función de la masa total del sistema y la velocidad del centro de masa, en tanto que el momento angular depende del tensor de inercia del sólido. Si el tensor de inercia está referido a ejes fijos, sus componentes no permanecen constantes al cambiar el sólido de posición, por lo que el trato de las ecuaciones que ligan la variación del momento angular con el momento de las fuerzas exteriores puede ser complicado. Esta dificultad puede eludirse introduciendo sistemas referenciales relativos, fijos al cuerpo en estudio. Luego, la derivada de magnitudes expresadas en este referencial móvil pueden obtenerse aplicando el operador de derivación para sistemas móviles en rototraslación.

En lo que sigue, trataremos el movimiento del sólido, con sus distintas variables dinámicas, referidos a sistemas de ejes en movimiento respecto de una terna fija.

Sólido referido a un sistema rototraslatorio

Supongamos un sólido referido a un sistema que se encuentra en un estado de rototraslación respecto de una terna fija. El sólido se encuentra fijo respecto del sistema móvil.

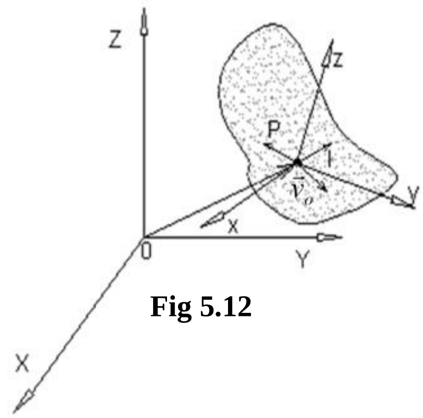


Fig 5.12

Cantidad de Movimiento

Habíamos visto que la expresión de la cantidad de movimiento referida al sistema x, y, z, era:

$$\vec{P}\big/_m = \vec{v}_o * M + \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Derivando respecto del sistema fijo, recordando que la derivación relativa de un vector se hacía mediante:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_m + (\vec{W} \times \ )$$

Para el vector cantidad de movimiento:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_m + \left(\vec{W} \times \vec{P}\big/_m\right) =$$

$$\dot{\vec{v}}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times M * \dot{\vec{r}}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$\dot{\vec{r}}_G = 0$, pues el sólido se encuentra fijo respecto de x, y, z. Sabemos que las fuerzas aplicadas respecto de un sistema fijo son:

$$\sum \vec{F}^e = \vec{F}^e\Big|_F = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_F$$

Nos queda:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \vec{a}_o * M + \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{v}_o * M + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

Se verá que esta ecuación se simplifica en forma notable cuando el sólido rota alrededor de un eje fijo, y se toma el punto “O” sobre el mismo. En ese caso, será:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

por ser $\vec{a}_o = 0$ y $\vec{v}_o = 0$

Momento Cinético

La expresión de momento cinético en el sistema en movimiento es:

$$\vec{L}\Big|_m = M \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_o + [I] \cdot [W]^T$$

Se considera que el tensor de inercia ha sido referido al sistema móvil solidario al sólido, y por lo tanto sus componentes permanecen constantes al cambiar el sólido de posición

Derivando respecto del sistema fijo:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_m + \left(\vec{W} \times \vec{L}/_m\right) =$$

$$M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

Teniendo presente la relación entre la derivada del momento angular y el momento de las fuerzas externas:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F = M^e\Big|_F$$

Nos queda:

$$M^e\Big|_F = M * \dot{\vec{r}}_G \times \vec{v}_o + M * \vec{r}_G \times \vec{a}_o + [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times M * \vec{r}_G \times \vec{v}_o + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

Rotación de un Sólido con eje fijo

En este caso el sólido mantiene su eje de rotación fijo en el espacio.

Entonces:

$$\vec{v}_o = 0$$

$$\vec{a}_o = 0$$

Tendremos en este caso:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e\Big|_F = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

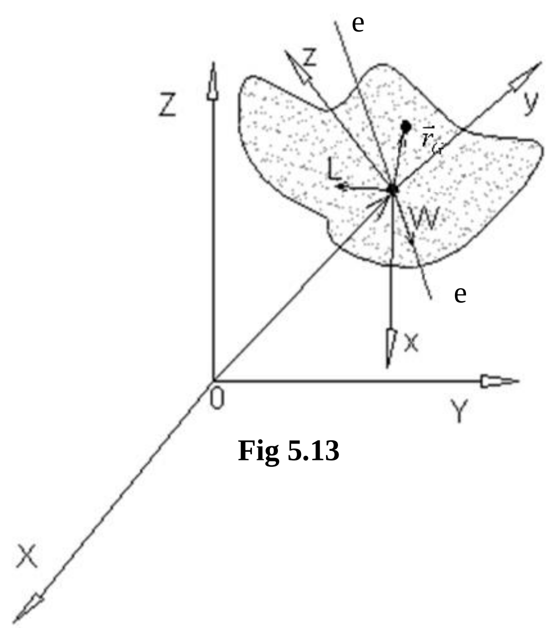


Fig 5.13

Reacciones dinámicas de un sólido en rotación

Supongamos tener un sólido rotando sobre un eje fijo en el espacio. Este eje lo consideramos vinculado al sistema fijo a través de cojinetes. Como ejemplo, puede considerarse el rotor de una turbina hidráulica o el impulsor de una bomba de agua. Se trata de sólidos montados sobre un eje, el cual es sustentado por cojinetes que permiten la rotación.

El sólido en su rotación puede generar fuerzas inerciales que presionan sobre los vínculos. Estas presiones dinámicas (debidas al movimiento) no existen si el sólido se encuentra estático, en cuyo caso solo habrá reacciones debidas al peso u otras fuerzas estáticas.

Las presiones dinámicas aparecen cuando el sólido se encuentra en rotación, y así como las cargas estáticas originan reacciones en los soportes, estas cargas dinámicas harán aparecer reacciones, que se denominan reacciones dinámicas. La magnitud de estas reacciones estarán directamente ligadas a la cantidad de masa del sólido, a la forma en que la masa está distribuida y a las condiciones cinemáticas del movimiento.

Las condiciones dinámicas de este sólido establecen:

$$\vec{F}^e\Big|_F = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$$

$$M^e\Big|_F = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

En ambas ecuaciones aparece un término que depende de la aceleración angular, su existencia se comprende con facilidad puesto que para acelerar una masa, es necesaria una fuerza o un momento. Estos términos se anulan en el caso de que el sólido rote a velocidad constante. El otro término involucrado, depende solamente de la velocidad de rotación, de la cantidad de masa y la forma en que está distribuida, resumidas en el vector posición del centro de masas y el tensor de inercia.

Las acciones exteriores están formadas por acciones activas y acciones reactivas, es decir:

$$\vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e$$

$$\vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e$$

El equilibrio del sólido es:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d°}{dt} &= \vec{F}^e = \vec{F}_a^e + \vec{F}_R^e = \dot{\vec{W}} \times M * \vec{r}_G + \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G \\ \frac{dL}{dt} &= \vec{M}^e = \vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T \end{aligned}}$$

Que nos provee las ecuaciones para obtener el valor de las reacciones del sólido.

Por ejemplo si:

$$\vec{W}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_z \end{pmatrix} = cte$$

$$\left|\vec{W}^e\right| = cte$$

$$\vec{M}^e = \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T = \vec{W} \times \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ W_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{W} \times \begin{pmatrix} I_{xz} \cdot W_z & I_{yz} \cdot W_z & I_{zz} \cdot W_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}^e = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ I_{xz} \cdot W_z & I_{yz} \cdot W_z & I_{zz} \cdot W_z \end{vmatrix} = -I_{yz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} + I_{xz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

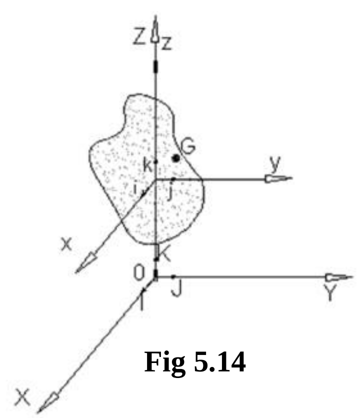
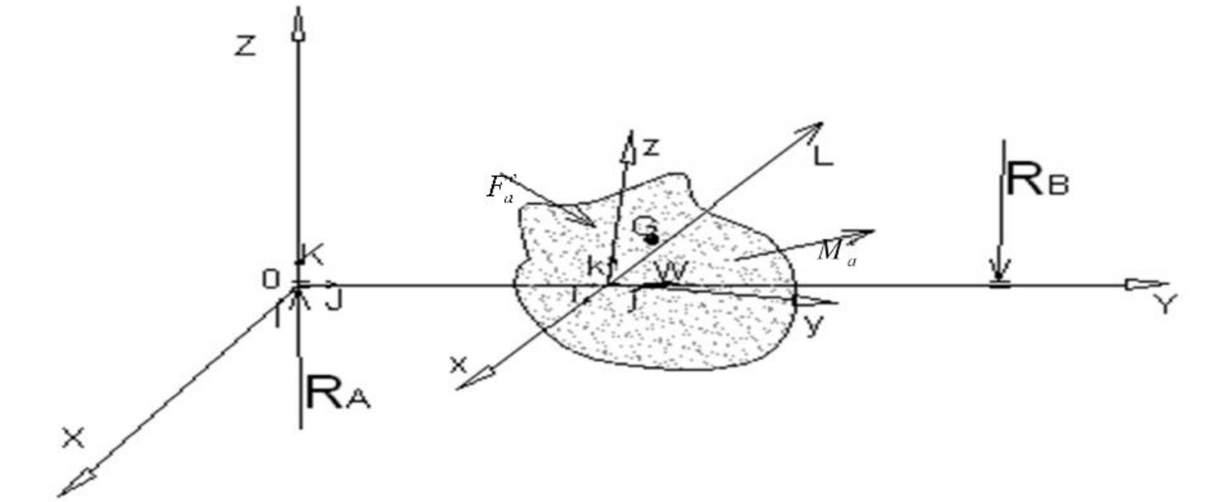


Fig 5.14

Planteamos:

$$\vec{M}_a^e + \vec{M}_R^e = -I_{yz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} + I_{xz} \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Debemos tener en cuenta que los vectores de la izquierda de la igualdad están en el sistema fijo, mientras que los de la derecha están en el sistema en movimiento, lo cual involucra una transformación de coordenadas.



Para nuestro ejemplo, de acuerdo a los sistemas adoptados $\vec{i}\quad \vec{j}\quad \vec{k} \equiv \vec{I}\quad \vec{J}\quad \vec{K}$
Luego la transformación es una identidad. Esta ecuación vectorial implica:

$$\begin{aligned}\vec{M}^e_{ax} + \vec{M}^e_{Rx} &= -I_{yz} \cdot W_z^2 \\ \vec{M}^e_{ay} + \vec{M}^e_{Ry} &= I_{xz} \cdot W_z^2\end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Las otras ecuaciones nos proveen: $\vec{F}^{\,e} = \vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G$
Si las coordenadas del centro de masa son: $\vec{r}_G = x_G \quad y_G \quad x_G$

$$\vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix} = -y_G \cdot W_z \cdot \vec{i} + x_G \cdot W_z \cdot \vec{j}$$

$$\vec{W} \times \vec{W} \times M * \vec{r}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W_z \\ -y_G \cdot W & x_G \cdot W_z & 0 \end{vmatrix} = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$$

Nos queda: $\vec{F}^{\,e} = x_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{i} - y_G \cdot W_z^2 \cdot \vec{j}$
Que nos da las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{F}^e_{ax} + \vec{F}^e_{Rx} &= x_G \cdot W_z^2 \\ \vec{F}^e_{ay} + \vec{F}^e_{Ry} &= y_G \cdot W_z^2\end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Que resuelven junto con **(1)** el estado de equilibrio.
Vemos en las ecuaciones **(1)** y **(2)** que para que sea $\vec{F}^{\,e} = 0$ y $\vec{M}^{\,e} = 0$, deben ser

$$\begin{aligned}I_{xy} &= I_{xz} = I_{yz} = 0 \\ x_G &= y_G = z_G = 0\end{aligned}$$

Para que se cumplan estas condiciones, el eje de rotación debe coincidir con un eje principal de inercia y debe contener al centro de masas del sólido.

Los momentos centrífugos no nulos y el desplazamiento del centro de masa dan origen a reacciones dinámicas. Se puede concluir que estas magnitudes "miden" el grado de desbalanceo que posee el sólido.

Equilibrio dinámico

Dado un sólido en desequilibrio dinámico, se busca equilibrarlo de tal manera de eliminar las reacciones dinámicas, que en general dan origen a la aparición de vibración en el sistema. Por ejemplo, las ruedas de un automóvil deben “balancearse” luego de un cierto uso, puesto que el desgaste asimétrico da origen a reacciones dinámicas. El balanceo se realiza agregando masas en el caso de las ruedas, también se puede remover o quitar masa. El objetivo de este agregado o remoción de masas, es llevar al eje de rotación a ser nuevamente un eje principal de inercia conteniendo el centro de masas.

A continuación, se plantea el problema del balanceo o equilibrio dinámico de un sólido en rotación.

Dado el sólido con:

$I_{xz} \neq 0$

$I_{yz} \neq 0$

$X_G, Y_G, Z_G \neq 0$

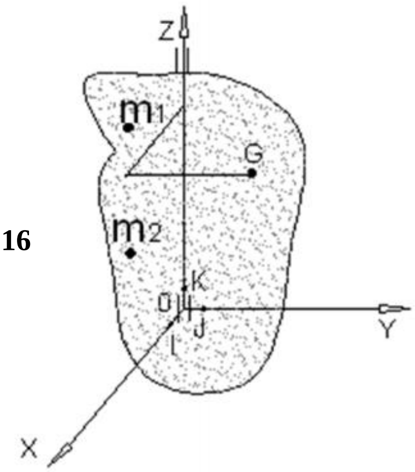


Fig 5.16

Se buscará anular los productos de inercia que tienen un subíndice coincidente con el eje de rotación, y las componentes del vector posición que corresponde al centro de masas de subíndice distintos a la del eje de rotación.

Se ubican las masas m_1 y m_2 de tal manera que:

$$I'_{yz} = I_{yz} - m_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1 - m_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2 = 0$$
$$I'_{xz} = I_{xz} - m_1 \cdot X_1 \cdot Z_1 - m_2 \cdot X_2 \cdot Z_2 = 0$$
$$Y'_G = M \cdot Y_G + m_1 \cdot Y_1 + m_2 \cdot Y_2 = 0$$
$$X'_G = M \cdot X_G + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = 0$$

Tenemos ocho incógnitas (m_1, m_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2), y solo son cuatro las ecuaciones. Esto se soluciona fijando cuatro y despejando las otras. En general se fija posiciones a veces limitadas por la geometría y del sólido a “balancear”. Por ejemplo, en las ruedas del automóvil, los contrapesos pueden ubicarse únicamente en la periferia de la llanta.

Movimiento de un sólido con un punto fijo
Ecuación de Euler

Vamos a considerar ahora el movimiento de un sólido que mantiene un punto fijo; es decir un movimiento polar.

Supondremos un sistema fijo y un sólido vinculado a dicho sistema a través de un punto, y otro móvil y solidario con el sólido y en las direcciones principales de inercia.

El sólido se encuentra vinculado en su centro de gravedad:

$\vec{W} = \vec{W}_{(t)}$ o sea que la velocidad angular varía en modulo y dirección.

La ecuación que regula el movimiento es:

$$\vec{M}^e = [I] \cdot \left[\dot{\vec{W}}\right]^T + \vec{W} \times [I] \cdot \left[\vec{W}\right]^T$$

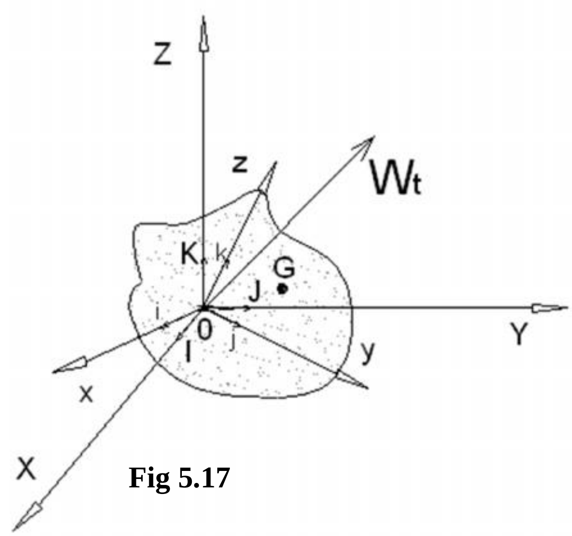


Fig 5.17

acá: $[I]=\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$

Haciendo las operaciones obtendremos:

$$\vec{W}\times[I]\cdot[\vec{W}]^T=(I_3\cdot W_z\cdot W_y-I_2\cdot W_y\cdot W_z)\cdot\vec{i}+$$
$$(I_1\cdot W_x\cdot W_z-I_3\cdot W_z\cdot W_x)\cdot\vec{j}+$$
$$(I_2\cdot W_y\cdot W_x-I_2\cdot W_x\cdot W_y)+\vec{k}$$

$$\vec{M}^e=(\vec{M}_x^e,\vec{M}_y^e,\vec{M}_z^e)$$

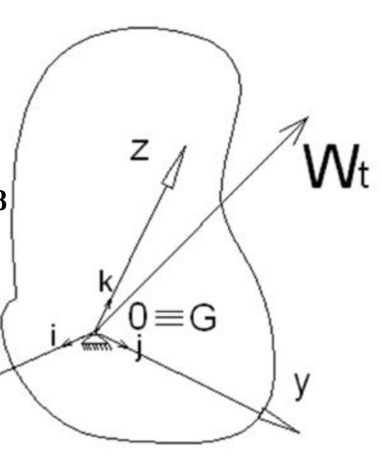
$$\vec{M}^e \quad \begin{aligned} \vec{M}_x^e &= I_1\cdot\dot{W}_x+(I_3-I_2)\cdot W_y\cdot W_z \\ \vec{M}_y^e &= I_2\cdot\dot{W}_y+(I_1-I_3)\cdot W_x\cdot W_z \\ \vec{M}_z^e &= I_3\cdot\dot{W}_z+(I_2-I_1)\cdot W_y\cdot W_x \end{aligned}$$ ***Ecuaciones de Euler***

Se encuentra expresado en los versores en movimiento, si queremos expresarlos en el sistema fijo debemos aplicar la transformación correspondiente.

Movimiento de un Sólido por Inercia

Analizaremos el movimiento del sólido que no está sometido a fuerzas y momentos. El sólido está vinculado a su centro de masa y se mantiene fijo a través de un apoyo. La resultante del peso se equilibra con la reacción de apoyo.

Fig 5.18



$$\vec{F}_a^e+\vec{F}_R^e=0$$

Establecemos un sistema referencial solidario con el sólido que coincide con los ejes principales de inercia.

$$[I]=\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

Como no hay pares exteriores aplicados:

$$\vec{M}^e=0 \qquad \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_F=0 \qquad \vec{L}=cte$$

Vamos a suponer un sólido giroscópico, es decir un sólido donde:

$I_1=I_2=I$

Las Ecuaciones de Euler quedan:

$$0=I\cdot\dot{W}_x+(I_3-I)\cdot W_y\cdot W_z$$
$$0=I\cdot\dot{W}_y-(I_3-I)\cdot W_x\cdot W_z$$
$$0=I_3\cdot\dot{W}_z$$

De la tercera se deduce que:

$I_3\cdot\dot{W}_z=0 \quad \dot{W}_z=0 \qquad W_z=cte$

O sea que la rotación sobre el eje “**z**” se realiza en ausencia de momento exterior y bajo condición $\vec{L}=cte$ con $W_z=cte$

Las otras dos ecuaciones dan:

$$0 = \dot{W}_x + \frac{(I_3 - I)}{I}\cdot W_y \cdot W_z$$

$$0 = \dot{W}_y - \frac{(I_3 - I)}{I}\cdot W_x \cdot W_z$$

Se puede poner: $\left|\begin{array}{l}\dot{W}_x + k\cdot W_y = 0 \\ \dot{W}_y - k\cdot W_x = 0\end{array}\right.$ **(1)** Donde: $k = \frac{(I_3 - I)}{I}\cdot W_z$

Derivando la primera: $\ddot{W}_x + k\cdot \dot{W}_y = 0$

Introduciendo en la segunda: $\ddot{W}_x + k^2 \cdot \dot{W}_x = 0$

Cuya solución es: $W_x = A\cdot \cos(k\cdot t))$

Luego derivando y llevando a **(1)**: $W_y = A\cdot sen(P\cdot t)$

El vector velocidad angular: $\vec{W} = W_x\cdot\vec{i} + W_y\cdot\vec{j} + W_z\cdot\vec{k}$

Llamando: $A^2 = (W_x^2 + W_y^2)$

Por tanto el módulo de $\vec{W}$ es:

$\vec{W}^2 = \vec{W}_z^2 + A^2$

El vector velocidad angular $\vec{W}$ efectúa un movimiento de presesión alrededor del eje “**z**” con pulsación:

$$k = \frac{(I_3 - I)}{I}\cdot W_z$$

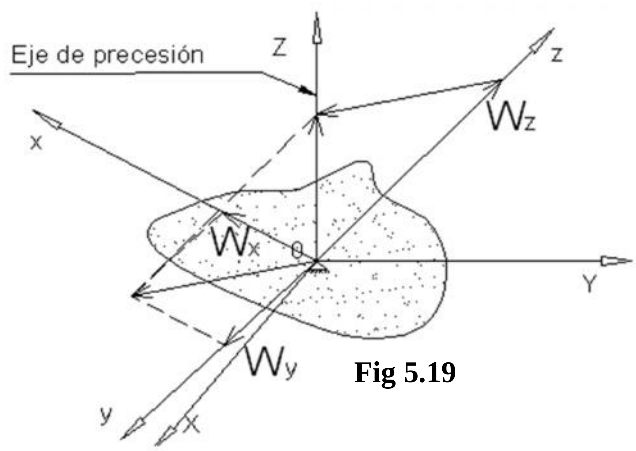


Fig 5.19

Para el caso particular en que la condición principal es tal que $\vec{L}$ tiene la dirección del eje de rotación. $I_3\cdot W_z = \vec{L}$ $\quad W_x = W_y = 0$

$A = 0$; no hay presesión, el sólido mantiene la dirección del eje “**z**” constante.

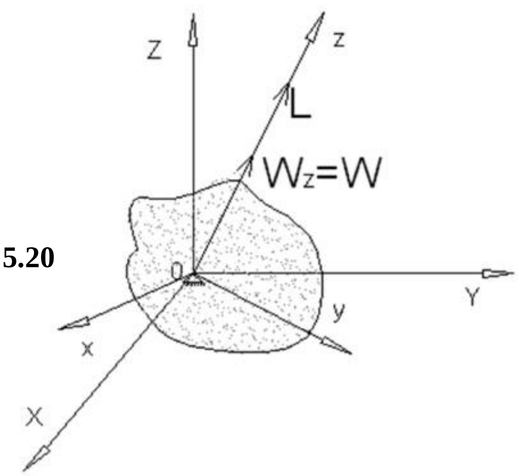
$$\vec{M}_0^e = [I_o]\cdot[\sim]^T + \vec{W}\times[I_o]\cdot[\vec{W}]^T$$

$$\sum \vec{F}^e = M\cdot\vec{a}_{cm} \qquad \vec{a}_{cm} = W^2\cdot\vec{r}_{cm} + \sim\cdot\vec{r}_{cm}$$

El tensor de inercia respecto a un sistema de ejes cuyo origen se encuentra en un punto que no coincide con el centro de masas, se pùede calcular con la expresión tensorial

$$[I_o] = [I_G] + M\cdot\left[[r_{0G}]^2\cdot[I_D] - (r_{0G}\otimes r_{0G})\right]$$

Fig 5.20

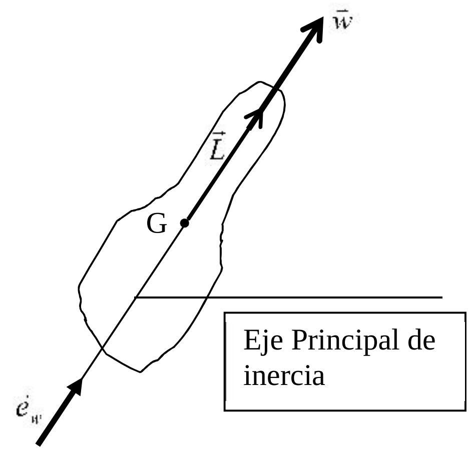


Facultad de Ingeniería OBERA — Universidad Nacional de Misiones

Unidad 5: Solido Giroscópico

Introducción:

Definimos como sólido giroscópico, a aquel sólido en rotación respecto de un eje principal de inercia (eje de simetría)



$\vec{L} \ // \ \vec{w}$

$I_I = I_w$ **Momento de Inercia**

Las propiedades giroscópicas de este solido se acentúan si la:

a) Si la velocidad de rotación $\vec{w}$ es grande
b) Si el momento de Inercia I_w es grande

En general los solidos giroscópicos son: $I_I = I_w >> I_2 = I_3$

Por ser el eje de rotación, un eje principal de inercia, el vector momento cinético es paralelo al vector $\vec{w}$, que posee la misma dirección que el eje de rotación.

$$\vec{L} = I_w \vec{w}$$

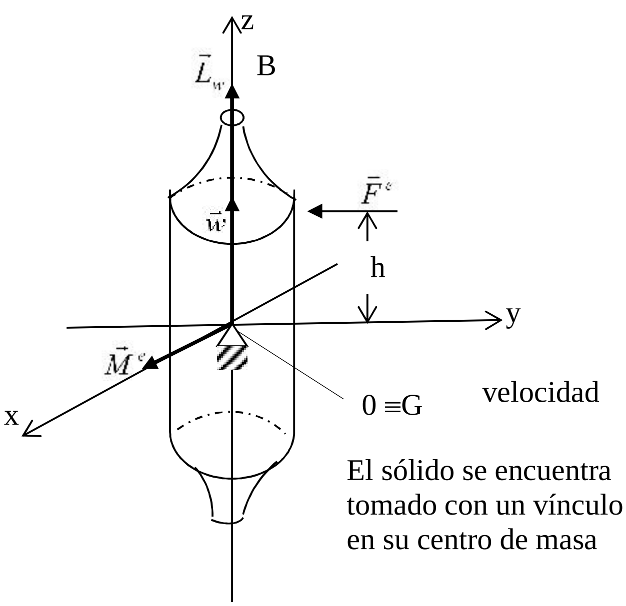
Giróscopo libre:

Supongamos tener un solidó giroscópico con una rotación constante $\vec{w}$ en la dirección del eje z, como:

$\vec{w} = cte$ entonces $\vec{L} = cte$ **y**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 = \vec{M}^e$$

$$\vec{L} = I_w \vec{w}$$



El solidó de encuentra girando con velocidad de rotación y momento cinético constante

Propiedades Giroscópicas:

Si obtenemos un par en la dirección de "x" mediante la aplicación de una fuerza $\vec{F}^e$ en el plano z-y

$\vec{M}^e = \vec{r} \times \vec{F}^e$

Observamos:

1) Que el sólido reacciona desplazándose transversalmente a la dirección de la fuerza es decir que el sólido rotaria sobre el eje “y”.
2) Si la fuerza cesa el sólido dejaría de desplazarse (no hay movimiento por inercia).

Si el sólido no rotara sobre el eje, ante la aplicación de la fuerza $\vec{F}^{e}$ el sólido rotaria sobre el eje “x”. Por otro lado al cesar la aplicación de la fuerza el sólido seguiría rotando sobre el eje “x”, por inercia.

Hasta aquí tenemos que:

$$\vec{M}^{e} = \vec{r} \times \vec{F}^{e}$$

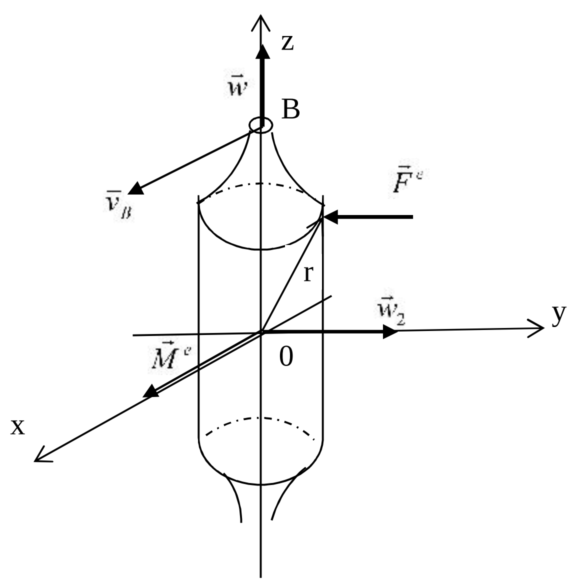
$$\frac{d\vec{L}_w}{dt} = \vec{M}^{e}$$

Si consideramos el segmento $\overline{OB}$ donde B es el extremo de $\vec{L}_w$. La variación de este vector respecto del tiempo, o sea la rotación del vector $\overline{OB}$

$$\frac{d(\overline{OB})}{dt} = \frac{d\vec{L}_w}{dt} = \vec{M}^{e}$$

Por otro lado la rotación del vector $\overline{OB}$ es

$$\frac{d(\overline{OB})}{dt} = \vec{v}_B = \vec{M}^{e}$$ Donde $\vec{v}_B$ es la rotación de $\overline{OB}$



También se da que:

$$\vec{w}_2 \times \overline{OB} = \vec{v}_B = \vec{M}^{e}$$

$$\vec{w}_2 \times \vec{L}_w = \vec{M}^{e}$$

Pero

$$\vec{L}_w = I_w \vec{w}$$

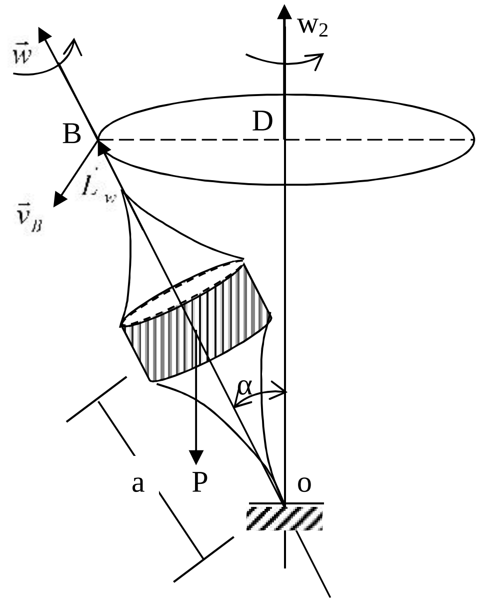
Por lo que nos queda

$$\vec{w}_2 \times I_w \vec{w} = \vec{M}^{e}$$

$I_w(\vec{w}_2 \times \vec{w}\} = \vec{M}^{e}$ ***(1)*** donde $\vec{w}_2$ es la velocidad de precesión

O sea ante la aplicación de una cupla $\vec{M}^{e}$, aparece una velocidad de precesión $\vec{w}_2$ tal que se cumple la ecuación ***(1)***

Precesión Regular de un Giróscopo Pesado:



$$\vec{v}_B = \vec{M}^e = P \cdot a \cdot sen\sim$$

$\vec{v}_B = \vec{w}_2 \cdot \overline{BD} = \vec{w}_2 \cdot \overline{OB} \cdot sen\sim = \vec{w}_e \cdot \overline{L}_w \cdot sen\sim$ al plano OBD

$$\vec{v}_B = \vec{w}_2 \cdot \overline{BD} = \vec{w}_2 \cdot \overline{OB} \cdot sen\sim = \vec{w}_e \cdot \overline{L}_w \cdot sen\sim$$

$$\vec{v}_B = I_w \cdot w \cdot w_2 \cdot sen\sim = M^e = P \cdot a \cdot sen\sim$$

$$w_2 = \frac{P \cdot a}{I_w \cdot w}$$

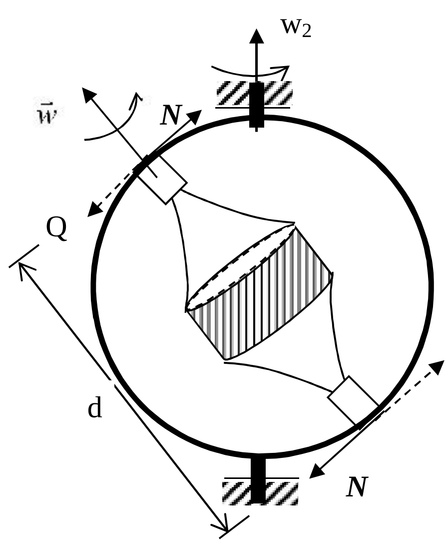
O sea que el giróscopo pesado posee el centro de masa fuera del eje de rotación.

Al ser liberado el mismo comienza a realizar un movimiento de precesión respecto del eje vertical .

En la medida que disminuye la rotación propia $\vec{w}$, aumenta la precesión $\vec{w}_2$

Momento Giroscópico:

Supongamos tener el siguiente sólido giroscópico montado en un marco que permite la rotación en otro eje



Si sobre el marco aplicamos una precesión $\vec{w}_2$. Sobre el giroscopio aparece actuando un momento giroscópico.

$$M_{giros} = w \times w_2 I_w$$

$$M_{giros} = N \cdot d$$

El momento exterior aplicado es

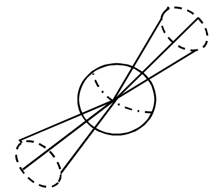
$\vec{M}^e = Q \cdot d = -M_{giros}$ que es la reacción que el marco opone al momento giroscópico.

Entonces se puede concluir que: **Si sobre un sólido giroscópico actúa una cupla exterior** $\vec{M}^e$, **aparece una velocidad de precesión** $\vec{w}_2$.

Por el contrario, **si se aplica una precesión forzada, aparece un momento giroscópico de tal manera que** $M_{giros} = -\vec{M}^e$

Precesión de la Tierra

El planeta tierra es un inmenso giróscopo. El centro de atracción solar no coincide con el centro de masa, por lo tanto existe un $\vec{M}^e$ y la tierra realiza una precesión con un periodo T = 21.000 años.

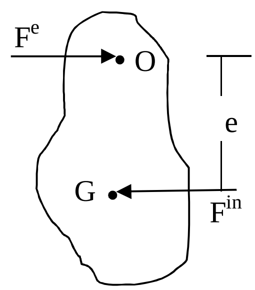


Supongamos un sólido plano libre sobre el que:

1) consideramos el grado de libertad a la traslación, se hace actuar una fuerza f^e en un punto O que no coincide con su centro de masa.

La masa total es M y la aceleración es

$$\frac{F^e}{M} = \ddot{x}_o$$

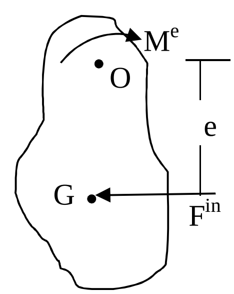


En G tenemos la fuerza inercial

$$F^{in} = M \cdot \ddot{x}_o$$

EL momento $M_t = M \cdot \ddot{x}_o \cdot e$

2) Considerando el grado de libertad en rotación



$$\frac{M^e}{I_0} = \ddot{\vec{\ }}$$

Habrá una aceleración transversal

$$a_t = \ddot{\vec{\ }} \cdot e$$

Y aparecerán

$$M^{in} = I_0 \cdot \ddot{\vec{\ }}$$

$$F^{in}_{rot} = \ddot{\vec{\ }} \cdot e \cdot M \quad \text{en G}$$

El movimiento en conjunto establece la sumatoria de fuerzas

$$F^e = M \cdot \ddot{x}_0 + \ddot{\vec{\ }} \cdot e \cdot M$$

Para los momentos

$$M^e = I_o \cdot \ddot{\vec{\ }} + M \cdot \ddot{x}_0 \cdot e \qquad \text{Ecuaciones acopladas}$$

Si "O" coincide con "G" se desacoplan

$$F^e = M \cdot \ddot{x}_G$$

$$M^e = I_G \cdot \ddot{\vec{\ }}$$